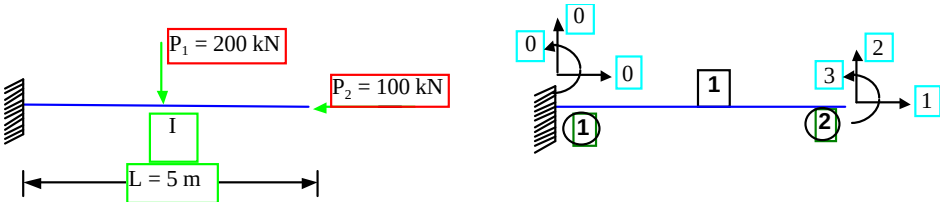
YAPI STATİĞİ II
UYGULAMA SORULARI PAKETİ-1

**Örnek 1**




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 0 1 2 3 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k_1]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

E=1, A=1, I=1,L=5

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$[k]'$ sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi[T] koordinat dönüşüm matrisi olmak üzere;

$[k]'=[T]^T*[k]*[T]$

idi. Burada 1 nolu elemanın sistem rijitlik matrisi ile eleman rijitlik matrisi $\beta=0$ olduğu için birbirine eşittir. Buna bağlı olarak

$$[k_1]=[k_1]'=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

1 nolu elemanın sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi elde edilmiş ve elemanın kot numaraları matris üzerine satır, sağ tarafına ise sütun olarak yazılmıştır. Buna göre kodlama satırı ve sütunundaki rakamlar dan faydalanılarak sistem rijitlik matrisi;

$$[K] = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -024 \\ 0 & -024 & 0.8 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir. Sistemimizde iki düğüm vardı. Bir tanesi ankastre olduğundan tüm deplasmanlar önlenmiştir. 2. Düğüm ise serbest olduğundan iki yönde ötelenme ve bir dönmeden oluşan 3 serbestlik derecesine sahiptir. Böylece sistemimiz 3 serbestlik derecele olmaktadır. Sistem rijitlik matrisi de 3x3 boyutundadır. Görüldüğü gibi sistem rijitlik matrisi simetrik ve mutlak pozitif bir matristir.

**Eleman ankastrelik uç kuvvetleri**

1 nolu elemanın üzerinde açıklık ortasından tekil yük etkimektedir. Bunun için şekil 5.3'de verilen ankastrelik uç kuvvetleri;

$$f_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 125 \\ 0 \\ 100 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

şeklinde olacaktır.

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlileri toplanıp, varsa düğüm yükleri direkt olarak matrise ilave edilmesi ile bulunur.

Eleman ankastrelik uç kuvvetlerinden hangilerinin sistem yük vektöründe nerede yer alacağına, yine eleman kod numaraları vektörü ile karar verilmektedir. Bunun için 1 numaralı elemanın ankastrelik uç kuvvetleri vektörünün sağ tarafına kod numaraları da yazılmıştır. Buna göre 1, 2 ve 3 nolu serbestlik dereceleri doğrultusunda etkimekte olan eş değer düğüm yükleri alınarak sistem yük vektörü;

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -100 \\ 125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

**Sistem Denklemi çözümü**

Lineer denklem sistemi olan sistem denklemi çözülerek bilinmeyen düğüm deplasmanları hesaplanabilir. Denklemin çözümünde Gaus eliminasyon yöntemi kullanılabilir. Veya rijitlik matrisinin tersi alınarak yük vektörü ile çarpılmak sureti ile bilinmeyenler bulunabilir.

Sistem denklemi $[K] * \{D\} = \{Q\}$ şeklinde idi. İfadeler yerine konulur ve denklem çözülürse;

$\{D\}$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -100 \\ 125 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} -500 \\ -2604 \\ -625 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix},$$

olarak elde edilir.

**Eleman Deplasman vektörleri**

Sistemde iki düğüm arasında yer alan elemanın uç deplasmanlarının hangileri olduğu, eleman kod numaralından belirlenir. Her hangi bir kod numarası sistemdeki bir deplasman numarasına karşılık gelmektedir. Bu şekilde belirlenen eleman uç kuvvetleri vektörleri sistem koordinatlarında olacaktır. Gerekirse bunlar transformnasyon ile eleman koordinatlarına da dönüştürülebilir.

Burada 1 nolu elemanın sistem koordinatlarındaki deplasman matrisi ile eleman koordinatlarındaki deplasman matrisi $\beta = 0$ olduğu için birbirin aynıdır.

$$\{d\} = [T] * \{d\}'$$

$$d_1 = d_1^{\copyright} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ -2604 \\ -625 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

Çubuk uç kuvvetleri eleman denklemi kullanılarak hesaplanır. Uç kuvvetleri sistem koordinatlarında veya eleman koordinatlarında elde edilebilir. Burada dikkat edilecek husus, değerlerin hepsinin aynı koordinatlarda olmasıdır.

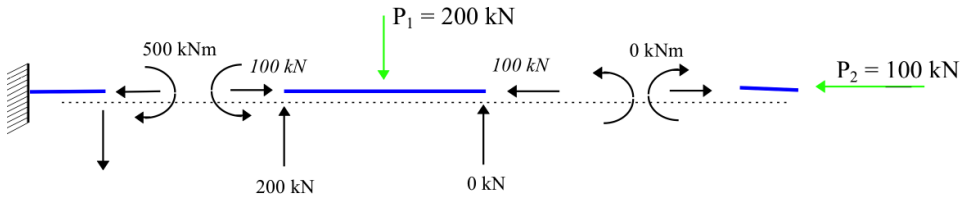
$$[k] * \{d\} + \{f\} = \{p\}$$

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ -2604 \\ -625 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 125 \\ 0 \\ 100 \\ -125 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 100 \\ 200 \\ 500 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

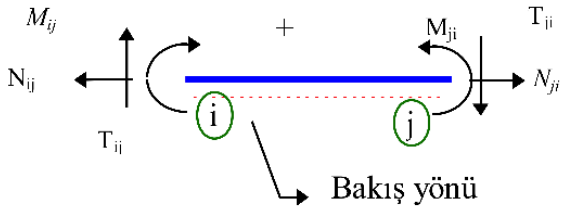
**Kesit Tesirleri**

Hesaplanan çubuk uç kuvvetleri, işaret kabulü de dikkate alınarak çubuk uçlarında gösterilir. Çubuk uç kuvvetlerinin ters işaretlileri de çubukların bağlı oldukları düğümlere etki ettirilir

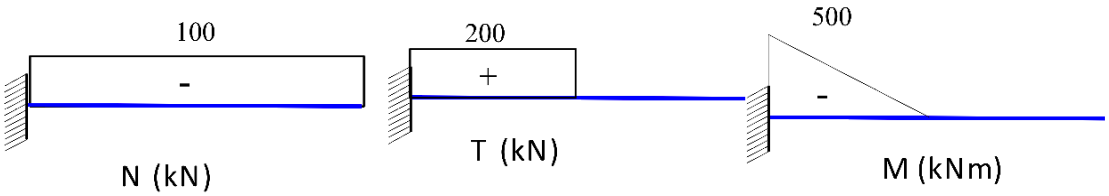


**Kesit Tesirleri Diyagramları**

Kabul edilen pozitif eğilme ve kayma yönleri de dikkate alınarak kesit tesirleri diyagramları çizilir.

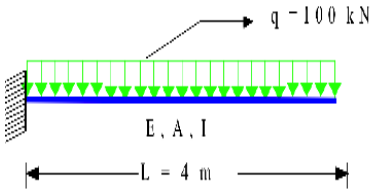


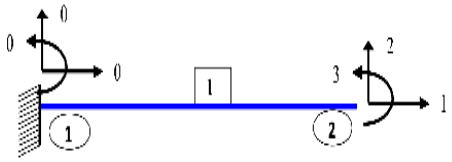

Pozitif eğilme ve kesme yönleri




**Örnek 2**

Üniform yayılı yüklü konsol kiriş, rijitlik matrisi yöntemi ile çözülmüştür. Adımlarla ilgili detaylı açıklama 1. Örnekte yapılmıştı.




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 0 1 2 3 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k_1]=\begin{matrix}\\0\\0\\0\\1\\2\\3\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0\\0 & 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375\\0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 0.5\\-0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0\\0 & -0.188 & -0.375 & 0 & 0.188 & -0.375\\0 & 0.375 & 0.5 & 0 & -0.375 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

[T] koordinat dönüşüm matrisi ve $[k]'$ sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi olmak üzere; $[k]'=[T]^T*[k]*[T]$ idi. Burada 1 nolu elemanın sistem rijitlik matrisi ile eleman rijitlik matrisi $\beta=0$ olduğu için birbirine eşittir. Buna bağlı olarak

$$[k_1]=[k_1]'=\begin{matrix}\\0\\0\\0\\1\\2\\3\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0\\0 & 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375\\0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 0.5\\-0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0\\0 & -0.188 & -0.375 & 0 & 0.188 & -0.375\\0 & 0.375 & 0.5 & 0 & -0.375 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K]=\begin{matrix}\\1\\2\\3\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0.25 & 0 & 0\\0 & 0.188 & -0.375\\0 & -0.375 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri**

$$f_1=\begin{Bmatrix}0\\\frac{qL}{2}\\\frac{qL^2}{12}\\0\\\frac{qL}{2}\\-\frac{qL^2}{12}\end{Bmatrix}=\begin{matrix}\\0\\0\\0\\1\\2\\3\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\end{matrix}\\\begin{Bmatrix}0\\200\\133.33\\0\\200\\133.33\end{Bmatrix}\end{matrix}$$

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlileri toplanıp, varsa düğüm yükleri direkt olarak matrise ilave edilmesi ile bulunur.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \\ 133.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

sistem denklemi $[K]*\{D\} = \{Q\}$ şeklinde idi. İfadeler yerine konulur ve denklem çözülürse; $\{D\}$ vektörü bulunur**.**

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.188 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \\ 133.33 \end{Bmatrix}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3166 \\ -1054 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

Burada 1 nolu elemanın sistem koordinatlarındaki deplasman matrisi ile eleman koordinatlarındaki deplasman matrisi $\beta = 0$ olduğu için birbirinin aynıdır.

$$\{d\} = [T]*\{d\}'$$

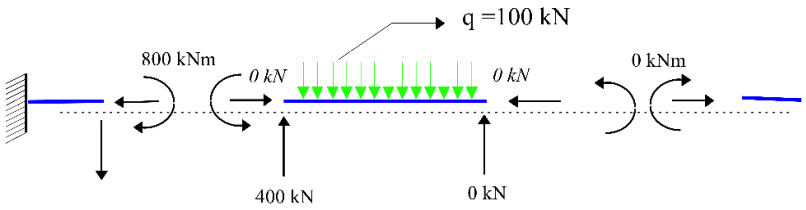
$$d_1 = d_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3166 \\ -1054 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

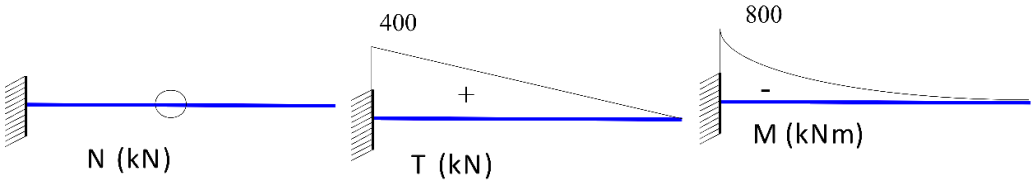
$$[k]*\{d\} + \{f\} = \{p\}$$

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 2 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3166 \\ -1054 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Kesit Tesirleri**

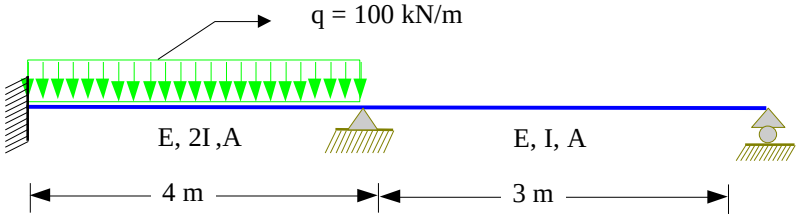


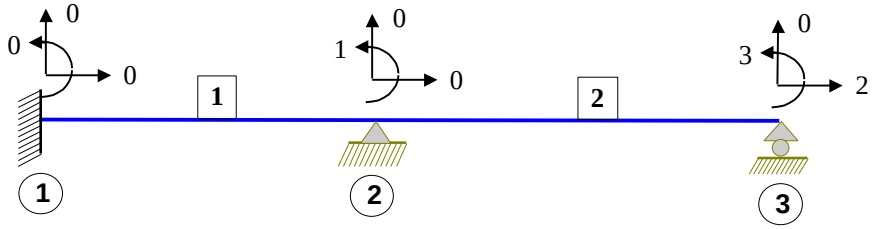

**Sistem Kesit Tesirleri Diyagramları**




**Örnek 3**

Şekilde verilen sürekli kirişi rijitlik matrisi metodu ile çözelim. Kirişin yükleme durumu ve düğüm serbestlik dereceleri aşağıda verilmiştir.




| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 0 0 0 1 | 0 |
| 2 | 2-3 | 0 0 1 2 0 3 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

Kirişte E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad [k_1]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k_2]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

[T] koordinat dönüşüm matrisi ve $[k]'$ sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi olmak üzere; $[k]'=[T]^T*[k]*[T]$ idi. Burada 1 nolu elemanın sistem rijitlik matrisi ile eleman rijitlik matrisi $\beta=0$ olduğu için birbirine eşittir. Buna bağlı olarak

$$[k_1]'=[k_1]\ ve\ [k_2]'=[k_2]$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2+1.333 & 0+0 & 0+0.667 \\ 0+0 & 0+0.332 & 0+0 \\ 0+0.667 & 0+0 & 0+1.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3.333 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.332 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri vektörleri**

$$f_1=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \qquad f_2=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$ (İkinci eleman üzerinde yük bulunmamaktadır)

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlileri toplanıp, varsa düğüm yükleri direkt olarak matrise ilave edilmesi ile bulunur.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 133.33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$\begin{bmatrix} 3.333 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.332 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 133.33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemin düğüm deplasmanları vektörü $\{D\} = \begin{Bmatrix} 44.454 \\ 0 \\ -22.22 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$

**Eleman Deplasman vektörleri**

Burada 1 nolu eleman ve 2 nolu elemanın sistem koordinatlarındaki deplasman matrisi ile eleman koordinatlarındaki deplasman matrisi $\beta = 0$ olduğu için birbirinin aynıdır.

$$\{d\} = [T] * \{d\}'$$

$$d_1 = d_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 44.454 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \qquad d_2 = d_2' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ D_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 44.454 \\ 0 \\ 0 \\ -22.244 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

$$[k] * \{d\} + \{f\} = \{p\}$$

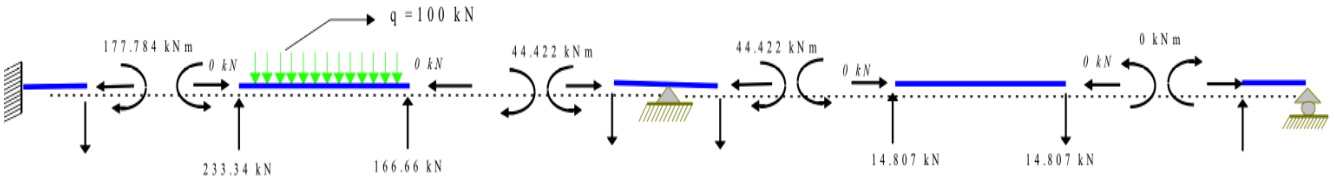
1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 44.454 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 233.34 \\ 177.784 \\ 0 \\ 166.66 \\ -44.422 \end{Bmatrix}$$

2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

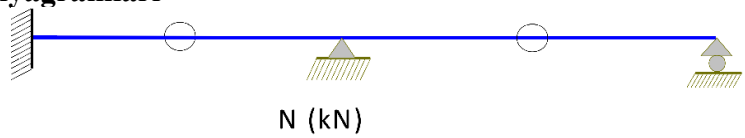
$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.464 & 0.667 & 0 & -0.464 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.464 & -0.667 & 0 & 0.464 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 44.454 \\ 0 \\ 0 \\ -22.244 \end{Bmatrix} + \{0\} \quad \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 14.807 \\ 44.443 \\ 0 \\ -14.807 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Kesit Tesirleri**

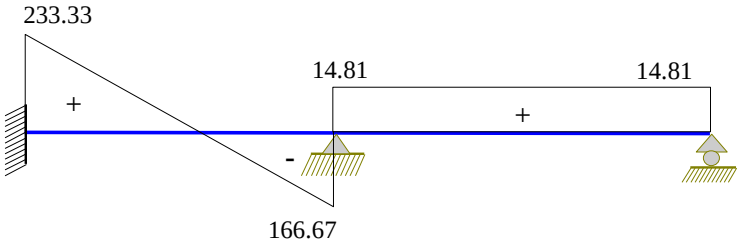



Normal kuvvet değerleri *italik* olarak gösterilmiştir.

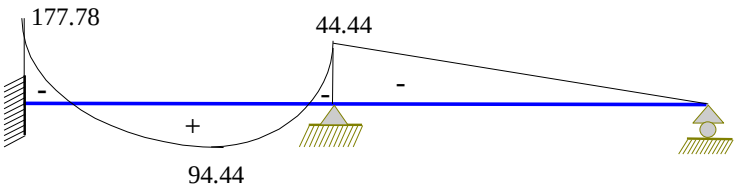
**Kesit Tesirleri Diyagramları**



N (kN)



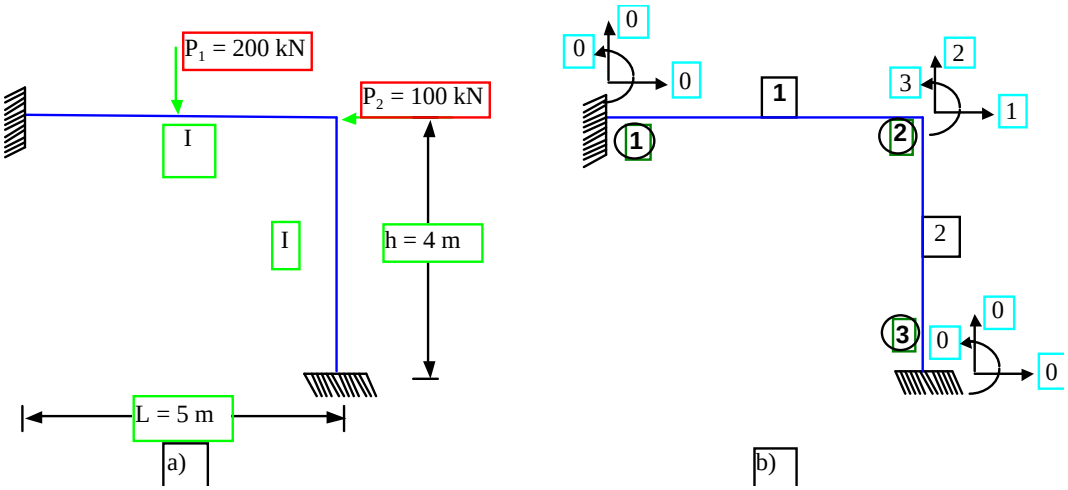

T (kN)




M (kNm)

**Örnek 4**

Bir düşey bir de yatay elemandan oluşan düzlem çerçevenin rijitlik matrisi yöntemi ile çözümü




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 0 1 2 3 | 0 |
| 2 | 2-3 | 1 2 3 0 0 0 | 270 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[k_2]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 0.5 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.188 & -0.375 & 0 & 0.188 & -0.375 \\ 0 & 0.375 & 0.5 & 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

[T] koordinat dönüşüm matrisi ve $[k]'$ sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi olmak üzere;

$[k]'=[T]^T*[k]*[T]$ idi. Burada 1 nolu elemanın sistem rijitlik matrisi ile eleman rijitlik matrisi $\beta=0$ olduğu için birbirine eşittir. 2 nolu eleman için dönüşüm matrisi;

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu elemanın tarifi 2-3 olduğundan, saat ibresi yönünde 270° dönülmektedir.

$$[k_1] = [k_1]' = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[k_2]' = \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & 0.375 & -0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 & -0.375 & 0 & 1 \\ -0.188 & 0 & -0.375 & 0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 & -0..375 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K] = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2 + 0.188 & 0 + 0 & 0 + 0.375 \\ 0 + 0 & 0.096 + 0.25 & -0.24 + 0 \\ 0 + 0.375 & -0.24 + 0 & 0.8 + 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.388 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.346 & -0.24 \\ 0.375 & -0.24 & 1.8 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri vektörleri**

$$\{f\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 125 \\ 0 \\ 100 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad \{f\}_2 = 0$$

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlilerinin direkt düğüm yükleri ile toplanmasından elde edilir.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 125 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

Sistem denklemi

$$\begin{bmatrix} 0.388 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.346 & -0.24 \\ 0.375 & -0.24 & 1.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 100 \\ -125 \end{Bmatrix}$$

çözülürse; düğüm deplasmanları;

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} -373.525 \\ -205.914 \\ 119.807 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

şeklinde bulunur.

**Eleman Deplasman vektörleri**

$\beta = 0$ olduğu için 1 nolu elemanın sistem koordinatlarındaki deplasman matrisi ile eleman koordinatlarındaki deplasman matrisi birbirin aynıdır.

$$d_1 = d_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -373.525 \\ -205.914 \\ 119.807 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad d_2' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} -373.525 \\ -205.914 \\ 119.807 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad d_2 = \begin{Bmatrix} 205.914 \\ -373.525 \\ 119.807 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

$$[k] * \{d\} + \{f\} = \{p\}$$

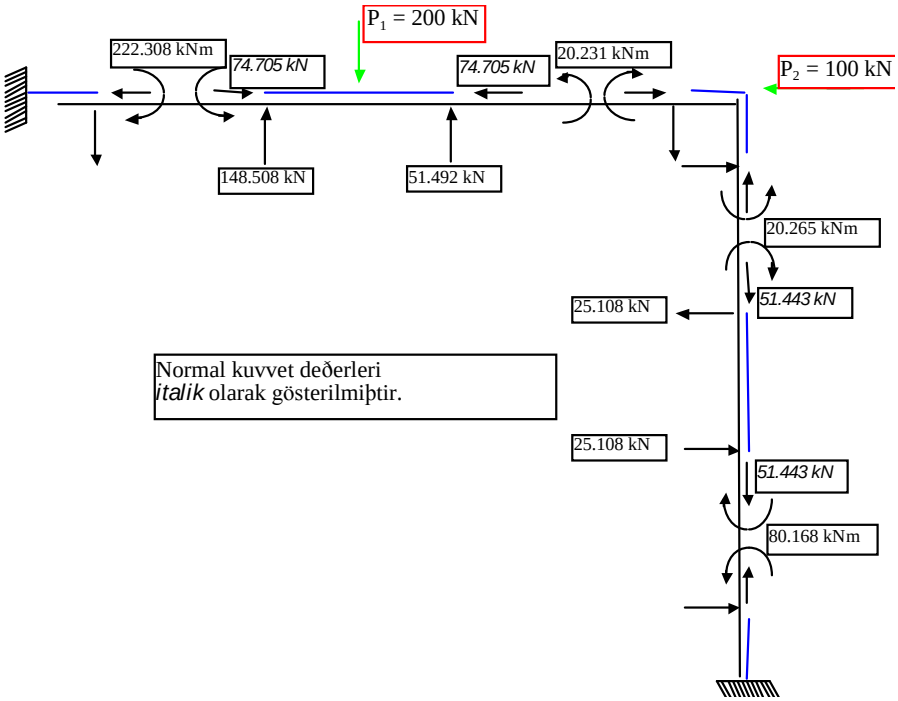
1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -373.525 \\ -205.914 \\ 119.807 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 125 \\ 0 \\ 100 \\ -125 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 74.705 \\ 148.508 \\ 222.308 \\ -74.705 \\ 51.492 \\ 20.231 \end{Bmatrix}$$

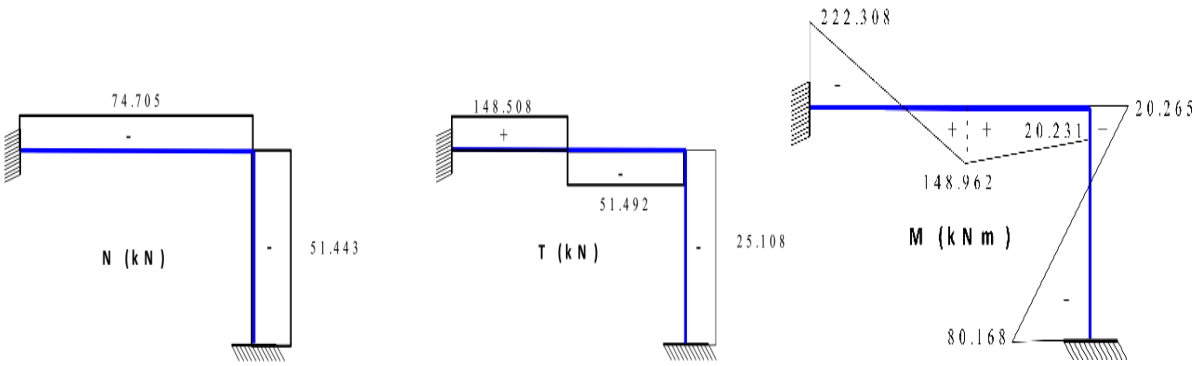
2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.188 & -0.375 & 0 & 0.188 & -0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 205.914 \\ -373.525 \\ 119.807 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{0\} \quad \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} 51.443 \\ -25.108 \\ -20.265 \\ -51.443 \\ 25.108 \\ -80.168 \end{Bmatrix}$$

## Kesit Tesirleri

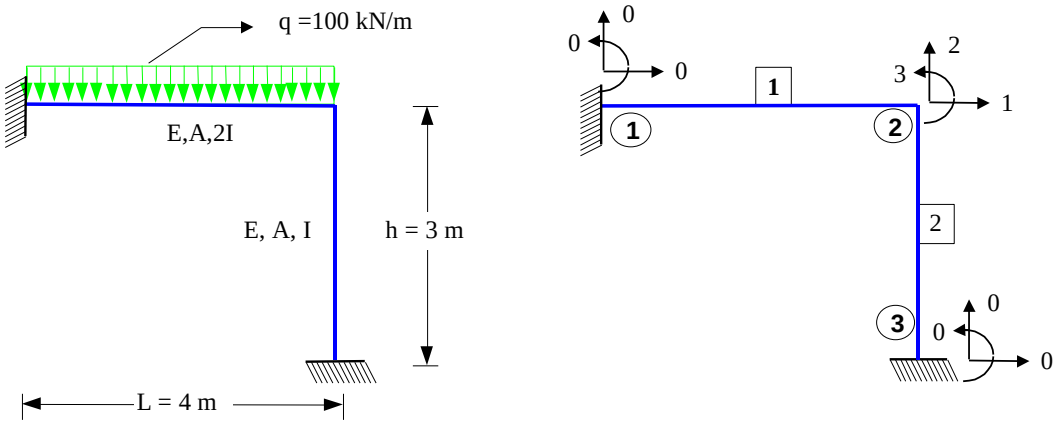



## Kesit Tesirleri Diyagramları



**Örnek 5**

Örnek 4'de verilen çerçeveyi, kirişin üniform yayılı yükle yüklenmesi durumu için çözelim.




| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 0 1 2 3 | 0 |
| 2 | 2-3 | 1 2 3 0 0 0 | 270 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k_1]=\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k_2]=\begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$$[k_1] = [k_1]^T = \begin{matrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[k_2]^T = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.444 & 0 & 0.667 & -0.444 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 & -0.667 & 0 & 0.667 \\ -0.444 & 0 & -0.667 & 0.444 & 0 & -0.667 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 0.667 & -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K] = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.25+0.444 & 0+0 & 0+0.667 \\ 0+0 & 0.375+0.333 & -0.75+0 \\ 0+0.667 & -0.75+0 & 2+1.333 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.694 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.708 & -0.75 \\ 0.667 & -0.75 & 3.333 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri**

$$f_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \qquad f_2 = 0$$

**Sistem Yük vektörü**

$$\{Q\} = \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \\ 133.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$\begin{bmatrix} 0.694 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.708 & -075 \\ 0.667 & -0.75 & 3.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \\ 133.33 \end{Bmatrix}$$

$$\{D\} = \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 39.779 \\ -326.08 \\ -41.298 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$d_1 = d_1' = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 39.779 & 1 \\ -326.08 & 2 \\ -41.298 & 3 \end{Bmatrix} \qquad d_2' = \begin{Bmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 39.779 & 1 \\ -326.08 & 2 \\ -41.298 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad d_2 = \begin{Bmatrix} 326.08 & 1 \\ 39.779 & 2 \\ -41.298 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

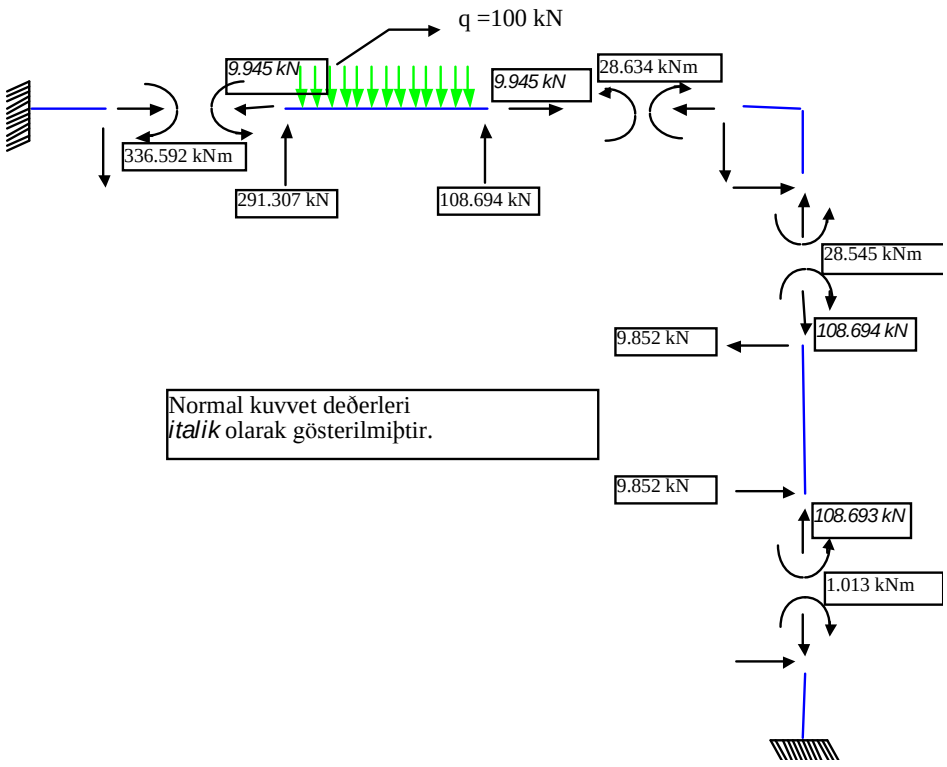
1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

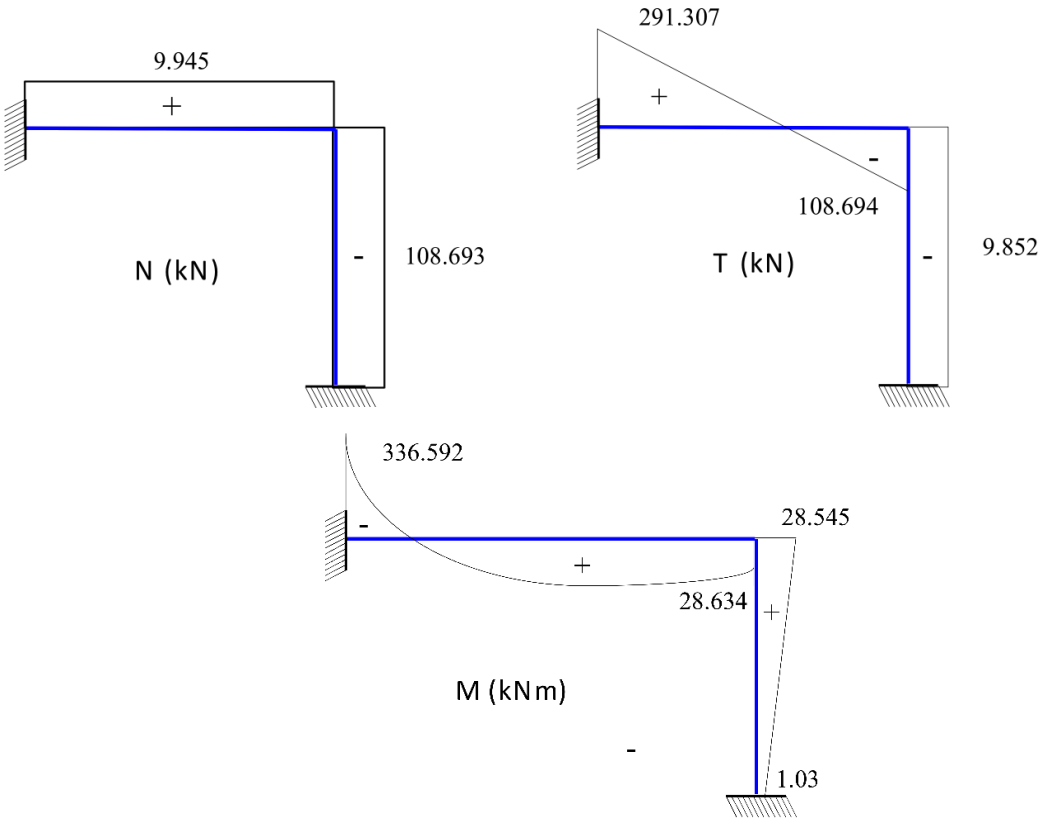
$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 2 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.779 \\ -326.08 \\ -41.298 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} -9.945 \\ 291.307 \\ 336.592 \\ 9.945 \\ 108.694 \\ 28.634 \end{Bmatrix}$$

2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.464 & 0.667 & 0 & -0.464 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 1.333 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.464 & -0.667 & 0 & 0.464 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 326.08 \\ 39.779 \\ -41.298 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} 108.693 \\ -9.852 \\ -28.545 \\ -108.693 \\ 9.852 \\ -1.013 \end{Bmatrix}$$

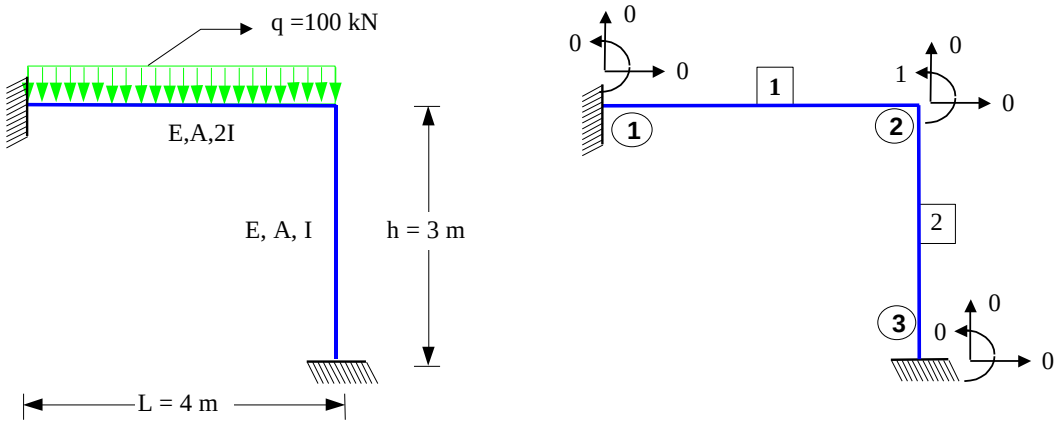
**Kesit Tesirleri**






**Örnek 6**

Bir karşılaştırma yapılması maksadı ile Örnek 5'de verilen çerçeve sistemi eksenel deformasyonlar ihmal edilerek yeniden çözülmüştür. Örnek 5 de verilen çerçevede eksenel deformasyonlar ihmal edecek olursak, 2 nolu düğümde tek serbestlik derecesi kalır. Bu durumdaki çözüm, yaklaşık yöntemler (Crosss ve Açı) ile aynı sonucu verecektir.




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 0 0 0 1 | 0 |
| 2 | 2-3 | 0 0 1 0 0 0 | 270 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k_1]=\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} \quad [k_2]=\begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$$[k_1]=[k_1]^{'}=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k_2]^{\copyright}=\begin{bmatrix} 0.444 & 0 & 0.667 & -0.444 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 & -0.667 & 0 & 0.667 \\ -0.444 & 0 & -0.667 & 0.444 & 0 & -0.667 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 0.667 & -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[\mathrm{K}]=[2+1.33]=[3.33]$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri**

$$f_1=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \qquad f_2=0$$

**Sistem Yük vektörü**

$$\{Q\}=\{133.33\}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$[3.33]*\{D_1\} = \{133.33\}$$
$$\{D\} = \{39.99\}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$d_1 = d_1{}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.99 \end{Bmatrix} \qquad d_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 39.99 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad d_2{}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 39.99 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

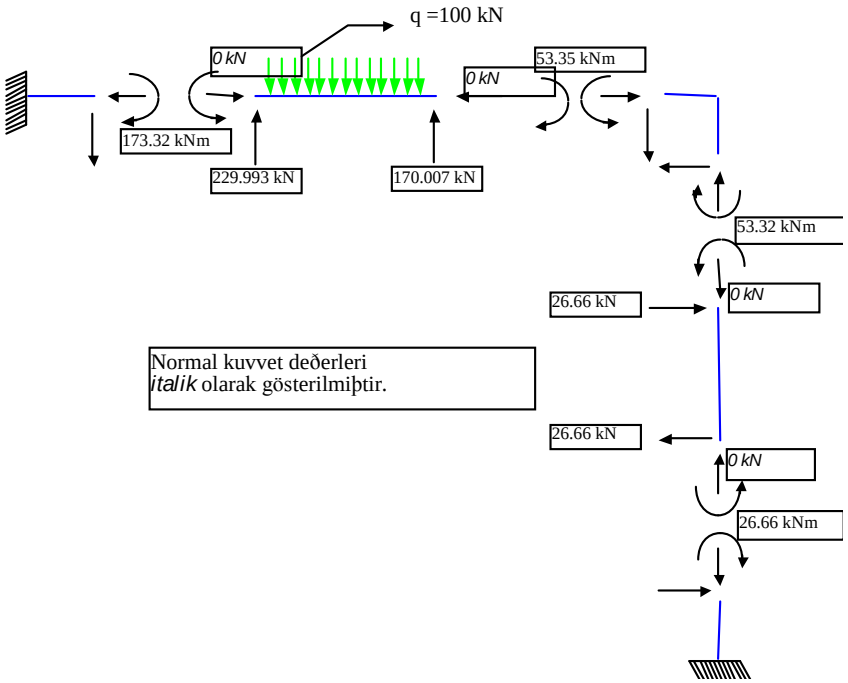
1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.75 & 0 & -0.375 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 2 & 0 & -0.75 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & -0.75 & 0 & 0.375 & -0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 & 0 & -0.75 & 2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.99 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 133.33 \\ 0 \\ 200 \\ -133.33 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 229.993 \\ 173.32 \\ 0 \\ 170.007 \\ -53.35 \end{Bmatrix}$$

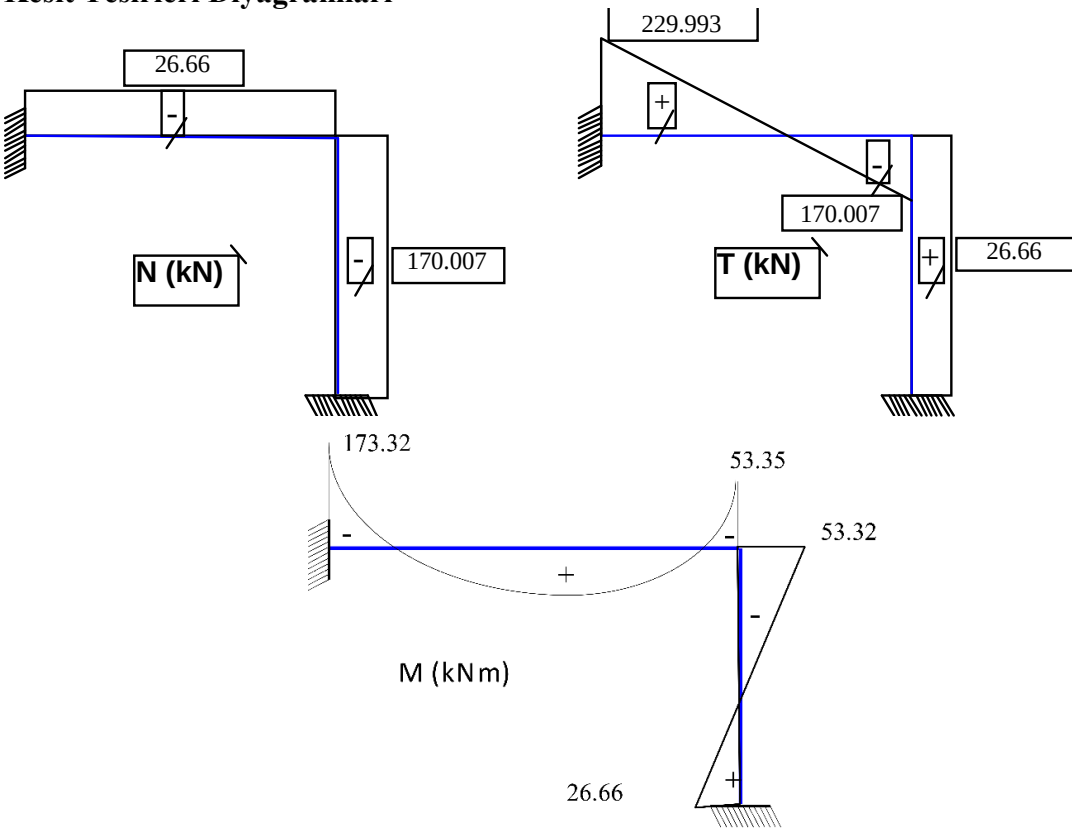
2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.464 & 0.667 & 0 & -0.464 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.464 & -0.667 & 0 & 0.464 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 39.99 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 26.66 \\ 53.32 \\ 0 \\ -26.66 \\ 26.66 \end{Bmatrix}$$

**Kesit Tesirleri**

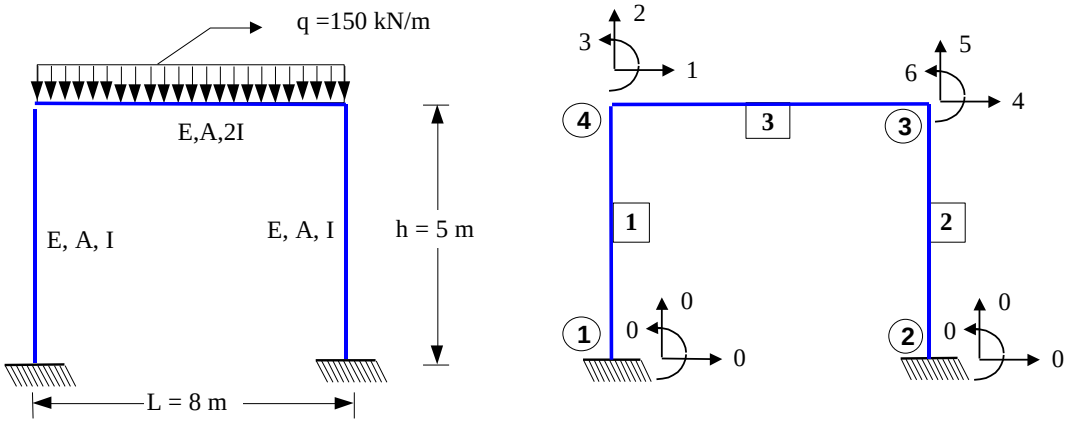



## Kesit Tesirleri Diyagramları



**Örnek 7**

Şekilde verilen tek katlı düzlem çerçevenin kesit tesirleri diyagramları belirlenecektir. 2 düğümü serbest olan çerçeve taşıyıcı sistemin  sistem serbestlik derecesi 6'dır.




| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-4 | 0 0 0 1 2 3 | 90 |
| 2 | 2-3 | 0 0 0 4 5 6 | 90 |
| 3 | 1-3 | 1 2 3 4 5 6 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu

alınacaktır.

1 ve 2 nolu elemanlar aynı özellikte olduğundan matrisleri aynı olacaktır. Kodlama için her iki matris ile yapılacak olan işlemler bir arada gösterilmiştir

$$[k_1]=[k_2]=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]=\begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 1 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

1 ve 2. Elemanların rijitlik matrisleri sistem koordinatlarında elde edilmiştir.

$$[k_1]=[k_2]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & -024 & -0.096 & 0 & -024 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ -0.096 & 0 & 024 & 0.096 & 0 & 024 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0\ 0 \\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \\ 1\ 1 \\ 2\ 2 \\ 3\ 3 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.096+0.125 & 0+0 & 0.24+0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0+0 & 0.2+0.047 & 0+0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0.24+0 & 0+0.188 & 0.8+1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.096+0.125 & 0+0 & 0.24+0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0+0 & 0.2+0.047 & 0-0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0.24+0 & 0-0.188 & 0.8+1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$[K]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.221 & 0 & 0.24 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.247 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0.24 & 0.188 & 1.8 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.221 & 0 & 0.24 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.247 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0.24 & -0.188 & 1.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri vektörleri.**

1. ve 2. Elemanlar yüksüzdür. Sadece 3. Elemanda ara yük vardır

$$\{f_1\}=0 \quad \{f\}_2=0 \qquad \{f\}_3=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlileri toplanıp, varsa düğüm yükleri direkt olarak matrise ilave edilmesi ile bulunur.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -600 \\ -800 \\ 0 \\ -600 \\ 800 \end{Bmatrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$\begin{bmatrix} 0.221 & 0 & 0.24 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.247 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0.24 & 0.188 & 1.8 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.221 & 0 & 0.24 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.247 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0.24 & -0.188 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -600 \\ -800 \\ 0 \\ -600 \\ 800 \end{Bmatrix},$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 489.546 \\ -3000 \\ -705.762 \\ -489.546 \\ -3000 \\ 705.762 \end{Bmatrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 489.546 \\ -3000 \\ -705.762 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_1{}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3000 \\ -489.544 \\ -705.762 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -489.546 \\ -3000 \\ 705.762 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2{}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3000 \\ 489.544 \\ 705.762 \end{Bmatrix},$$

$$\{d\}_3 = \{d\}_3{}' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 489.546 \\ -3000 \\ -705.762 \\ -489.546 \\ -3000 \\ 705.762 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3000 \\ -489.546 \\ -705.762 \end{Bmatrix} + \{0\} \quad , \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 600 \\ -122.386 \\ -164.814 \\ -600 \\ 122.386 \\ -447.119 \end{Bmatrix}$$

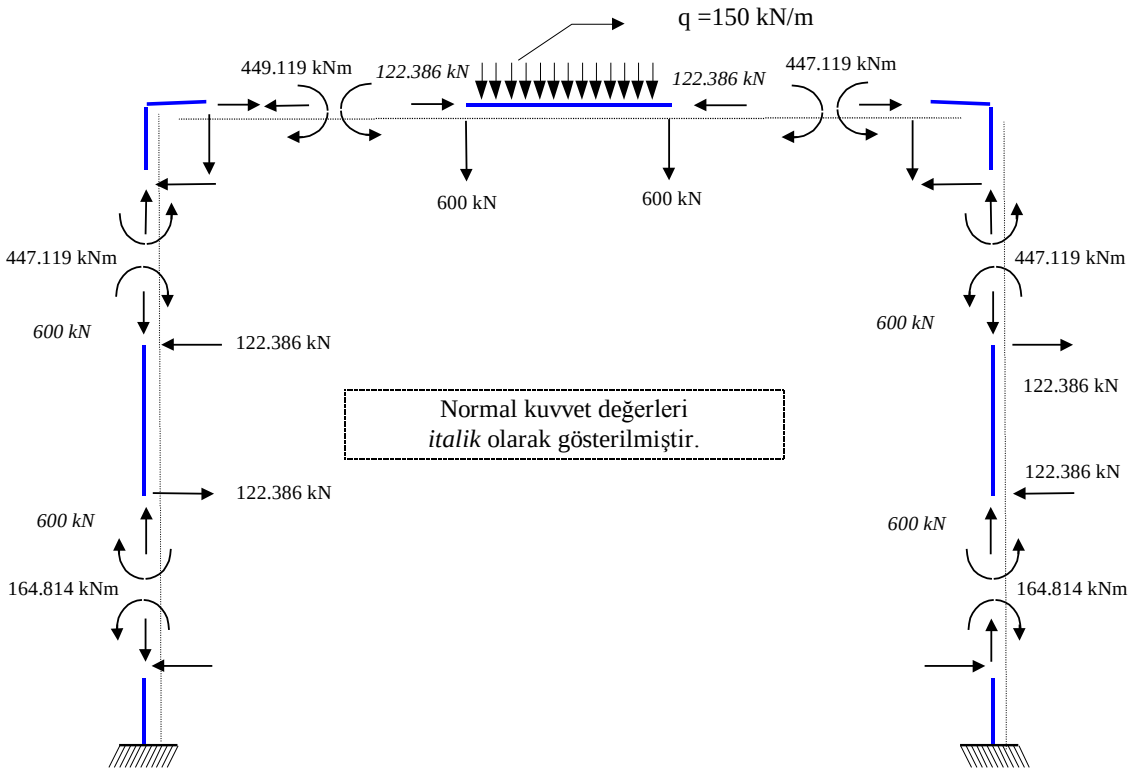
2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3000 \\ 489.546 \\ 705.762 \end{Bmatrix} + \{0\} \quad , \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 600 \\ 122.386 \\ 164.814 \\ -600 \\ -122.386 \\ 447.119 \end{Bmatrix}$$

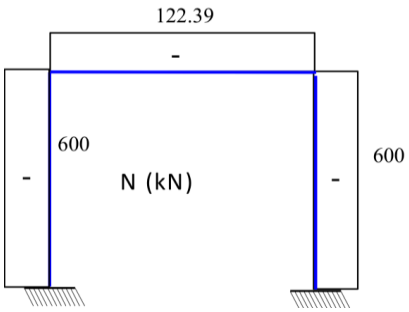
3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

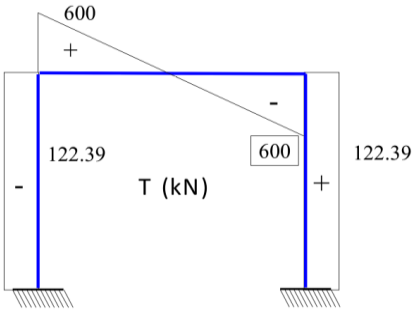
$$\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 489.546 \\ -3000 \\ -705.762 \\ -489.546 \\ -3000 \\ 705.762 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \quad \{p\}_3 = \begin{Bmatrix} 122.387 \\ 600 \\ 447.119 \\ -122.387 \\ 600 \\ -447.119 \end{Bmatrix}$$

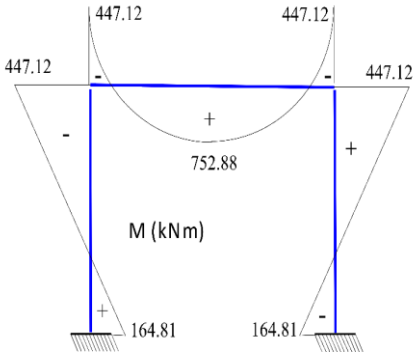
## Kesit Tesirleri




## Kesit Tesirleri Diyagramları

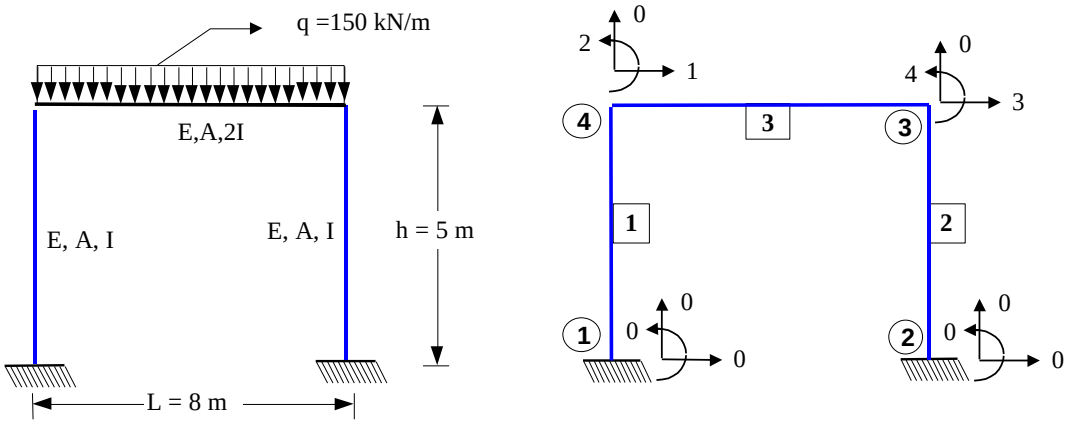


**Örnek 8**

Örnek 7'de ele alınan çerçevede eksenel deformasyonlar ihmal edilerek çözüm yapılmıştır. Bu durumda kolonlardaki boy değişimi ihmal edildiği için düşeydeki serbestlik dereceleri sıfır olacaktır.




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-4 | 0 0 0 1 0 2 | 90 |
| 2 | 2-3 | 0 0 0 3 0 4 | 90 |
| 3 | 1-3 | 1 0 2 3 0 4 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=[k_2]=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]=\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 1 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$$[k_1]'=[k_2]'=\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0.096 & 0 & -024 & -0.096 & 0 & -024 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ -0.096 & 0 & 024 & 0.096 & 0 & 024 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K]=\begin{matrix}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0.096+0.125 & 0.24+0 & -0.125 & 0\\ 0.24+0 & 0.8+1 & 0 & 0.5\\ -0.125 & 0 & 0.096+0.125 & 0.24+0\\ 0 & 0.5 & 0.24+0 & 0.8+1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$[K]=\begin{matrix}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0.221 & 0.24 & -0.125 & 0\\ 0.24 & 1.8 & 0 & 0.5\\ -0.125 & 0 & 0.221 & 0.24\\ 0 & 0.5 & 0.24 & 1.8\end{bmatrix}\end{matrix}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri**

$$\{f\}_1=0 \qquad \{f\}_2=0 \qquad \{f\}_3=\begin{Bmatrix}0\\600\\800\\0\\600\\-800\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\0\\2\\3\\0\\4\end{matrix}$$

**Sistem Yük vektörü**

$$\{Q\}=\begin{Bmatrix}0\\-800\\0\\800\end{Bmatrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$\begin{bmatrix}0.221 & 0.24 & -0.125 & 0\\ 0.24 & 1.8 & 0 & 0.5\\ -0.125 & 0 & 0.221 & 0.24\\ 0 & 0.5 & 0.24 & 1.8\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-800\\0\\800\end{Bmatrix}$$

$$\{D\}=\begin{Bmatrix}489.546\\-705.762\\-489.546\\705.762\end{Bmatrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\D_1\\0\\D_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\489.546\\0\\-705.762\end{Bmatrix} \qquad \{d\}_1{}'=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\-489.544\\-705.762\end{Bmatrix} \qquad \{d\}_2=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\D_3\\0\\D_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\-489.546\\0\\705.762\end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_2{}'=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\489.544\\705.762\end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_3 = \{d\}_3' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ D_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 489.546 \\ 0 \\ -705.762 \\ -489.546 \\ 0 \\ 705.762 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -489.546 \\ -705.762 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -122.386 \\ -164.814 \\ 0 \\ 122.386 \\ 447.119 \end{Bmatrix}$$

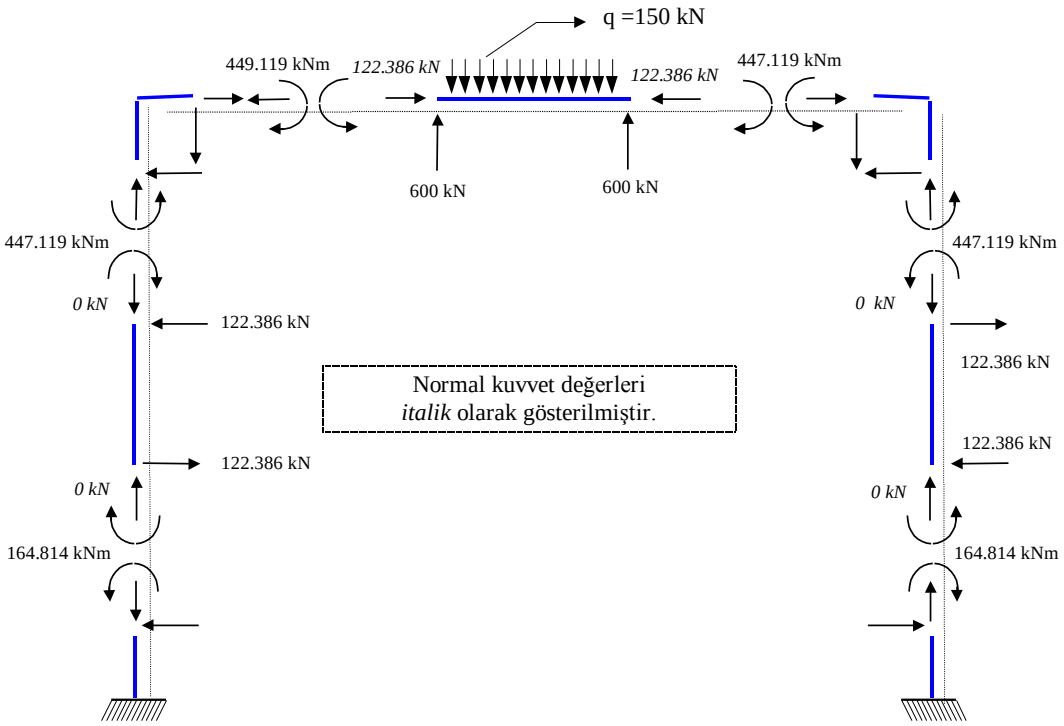
2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 489.546 \\ 705.762 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 122.386 \\ 164.814 \\ 0 \\ -122.386 \\ 447.119 \end{Bmatrix}$$

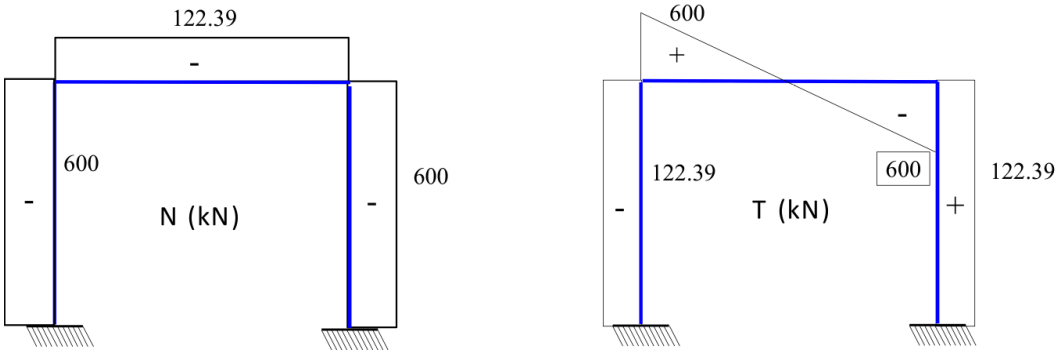
3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

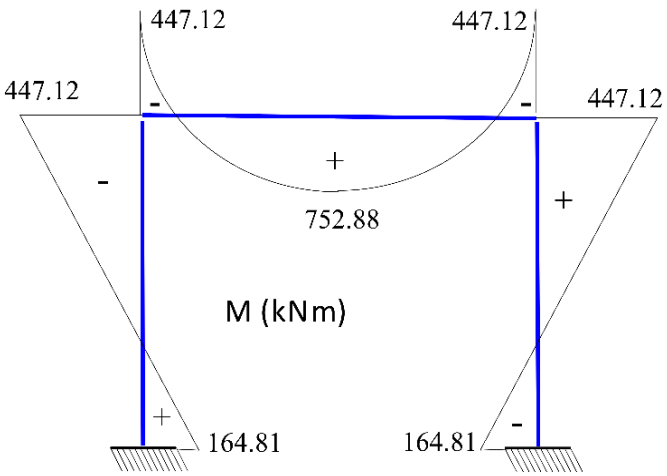
$$\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 489.546 \\ 0 \\ -705.762 \\ -489.546 \\ 0 \\ 705.762 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_3 = \begin{Bmatrix} 122.387 \\ 600 \\ 447.119 \\ -122.389 \\ 600 \\ -447.119 \end{Bmatrix}$$

**Kesit Tesirleri**



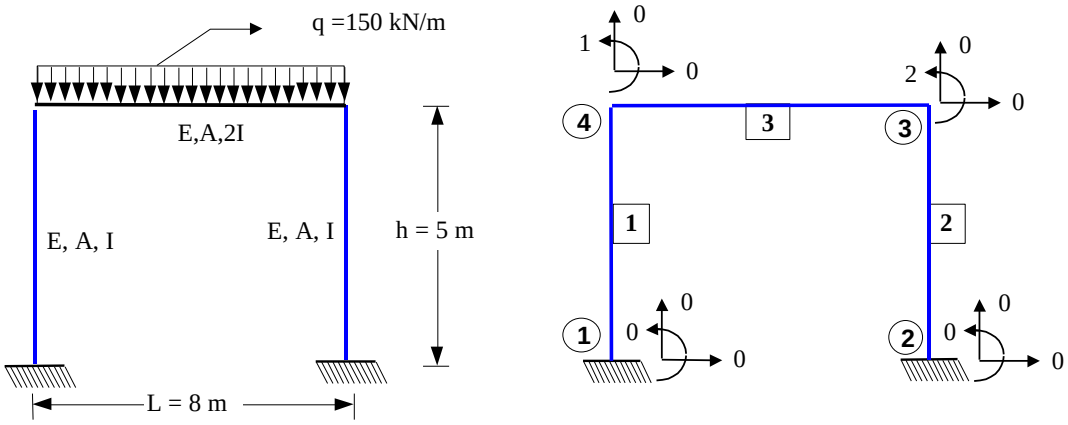

## Kesit Tesirleri Diyagramları



**Örnek 9**

Düğümlerde sadece dönme serbestlik derecelerini dikkate alarak aynı çerçevenin kesit tesirleri diyagramlarını çizelim. Bu durumda sistemimiz düğüm noktaları sabit sistem olacaktır.




| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-4 | 0 0 0 0 0 1 | 90 |
| 2 | 2-3 | 0 0 0 0 0 2 | 90 |
| 3 | 1-3 | 0 0 1 0 0 2 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=[k_2]=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]=[k_3]\text{©}=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$$[k_1]=[k_2]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & -024 & -0.096 & 0 & -024 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ -0.096 & 0 & 024 & 0.096 & 0 & 024 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi** $[K]=\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}\begin{bmatrix}0.8+1 & 0.5\\ 0.5 & 0.8+1\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$ $[K]=\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}\begin{bmatrix}1.8 & 0.5\\ 0.5 & 1.8\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri vektörleri** $\{f\}_1=0$ $\{f\}_2=0$ $\{f\}_3=\begin{Bmatrix}0\\600\\800\\0\\600\\-800\end{Bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\1\\0\\0\\2\end{matrix}$

**Sistem Yük vektörü** $\{Q\}=\begin{Bmatrix}-800\\800\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$

**Sistem Denklemi çözümü** $\begin{bmatrix}1.8 & 0.5\\ 0.5 & 1.8\end{bmatrix}*\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-800\\800\end{Bmatrix},\{D\}=\begin{Bmatrix}-615.385\\615.385\end{Bmatrix}$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1'=\{d\}_1=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\D_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-615.385\end{Bmatrix}\quad \{d\}_2=\{d\}'_2=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\D_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\615.385\end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_3=\{d\}_3'=\begin{Bmatrix}0\\0\\D_1\\0\\0\\D_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\-615.385\\0\\0\\615.385\end{Bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\1\\0\\0\\2\end{matrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24\\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4\\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24\\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8\end{bmatrix}*\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-615.385\end{Bmatrix}+\{0\}\qquad \{p\}_1=\begin{Bmatrix}0\\-147.692\\-246.154\\0\\147.692\\-492.308\end{Bmatrix}$$

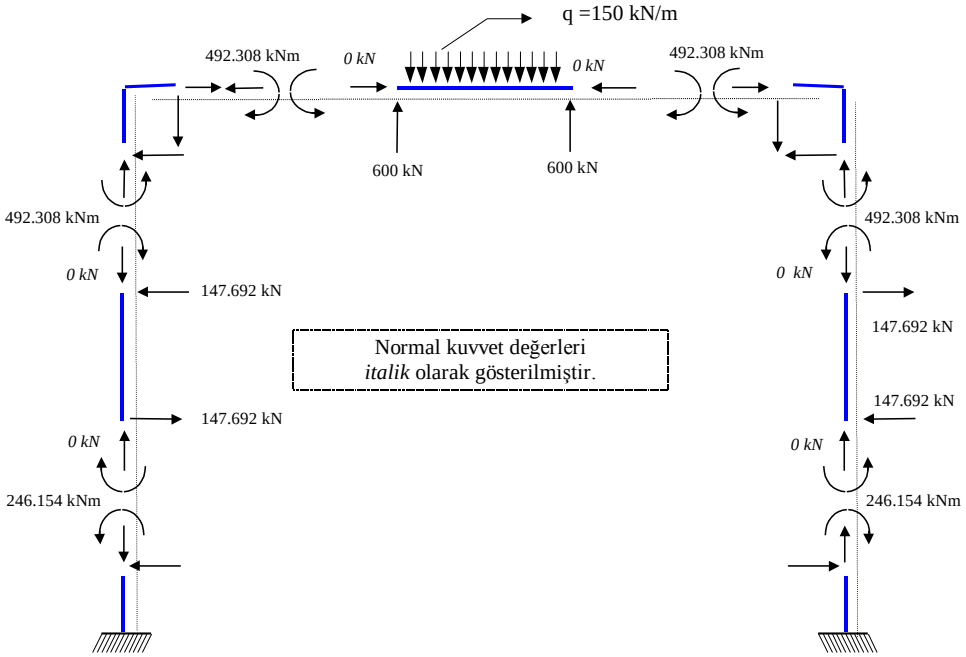
2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_2=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24\\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4\\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24\\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8\end{bmatrix}*\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\615.385\end{Bmatrix}+\{0\}\qquad \{p\}_2=\begin{Bmatrix}0\\147.692\\246.154\\0\\-147.692\\492.308\end{Bmatrix}$$

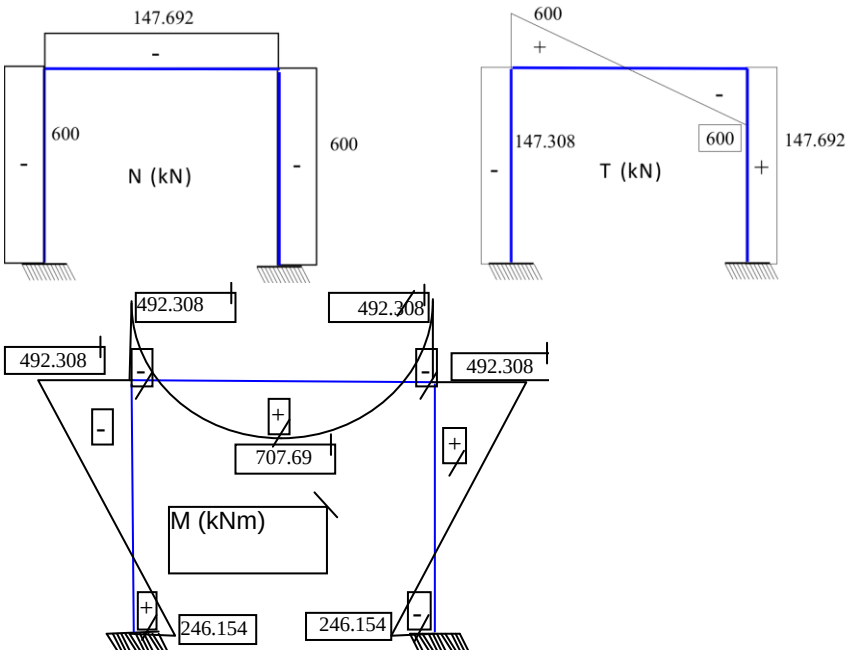
3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -615.385 \\ 0 \\ 0 \\ 615.385 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \quad \{p\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 492.308 \\ 0 \\ 600 \\ -492.308 \end{Bmatrix}$$

## Kesit Tesirleri

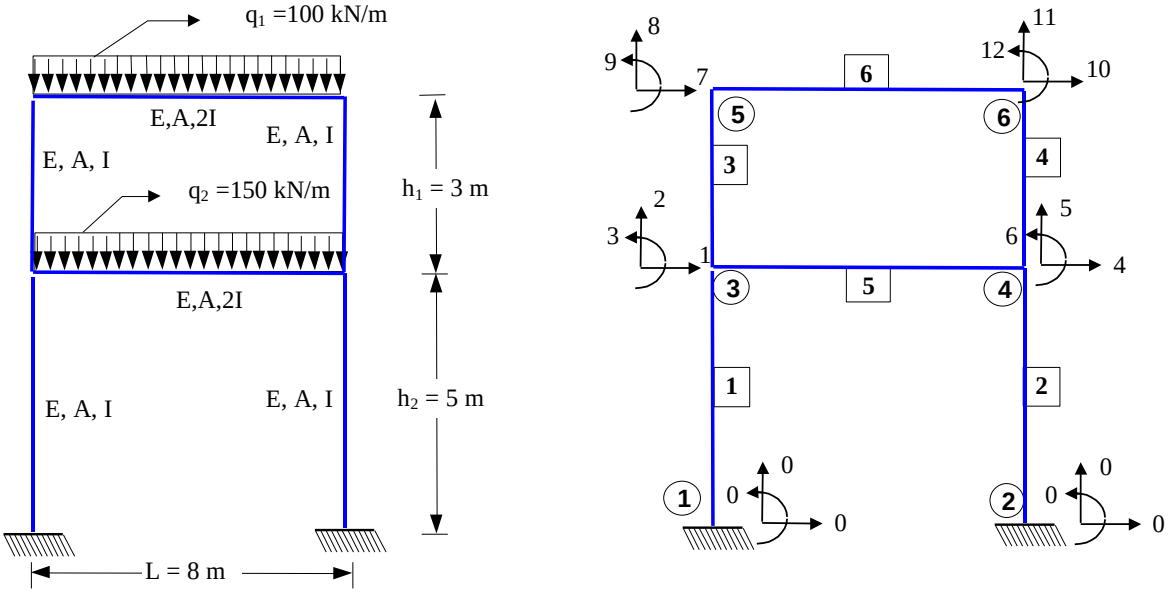



## Kesit Tesirleri Diyagramları



**Örnek 10**

Şekilde verilen iki katlı çerçeveyi rijitlik matrisi yöntemi ile çözelim




| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-3 | 0 0 0 1 2 3 | 90 |
| 2 | 2-4 | 0 0 0 4 5 6 | 90 |
| 3 | 3-5 | 1 2 3 7 8 9 | 90 |
| 4 | 4-6 | 4 5 6 10 11 12 | 90 |
| 5 | 3-4 | 1 2 3 4 5 6 | 0 |
| 6 | 5-6 | 7 8 9 10 11 12 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

E=1, A=1, I=1ve L elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=[k_2]=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]=[k_4]=\begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[k_5]=[k_6]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \\ 4 & 10 \\ 5 & 11 \\ 6 & 12 \end{matrix} \end{array}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_1]=[k_2]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & -0.24 & -0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ -0.096 & 0 & -0.24 & 0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k_3]=[k_4]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.444 & 0 & 0.667 & -0.444 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 & 0.667 & 0 & 0.667 \\ -0.444 & 0 & -0.667 & 0.444 & 0 & -0.667 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 0.667 & -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{matrix} \end{array}$$

(5 ve 6. Elemanlar sistem koordinatlarında olduklarından eleman koordinatlarındaki matrisleri aynı zamanda sistem koordinatlarındakine eşittir)

**Sistem Rijitlik Matrisi**

Sistem 12 serbestlik derecelidir.

$$[K]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.665 & 0 & -0.426 & -0.125 & 0 & 0 & -0.444 & 0 & -0.666 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.580 & 0.1875 & 0 & -0.0468 & 0.1875 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.426 & 0.1875 & 3.133 & 0 & -0.1875 & 0.5 & 0.666 & 0 & 0.666 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.666 & 0 & -0.426 & 0 & 0 & 0 & -0.444 & 0 & -0.666 \\ 0 & -0.0468 & -0.1875 & 0 & 0.580 & -0.1875 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.5 & -0.426 & -0.1875 & 3.133 & 0 & 0 & 0 & 0.666 & 0 & 0.666 \\ -0.444 & 0 & 0.666 & 0 & 0 & 0 & 0.5694 & 0 & 0.666 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.380 & 0.1875 & 0 & -0.0468 & 0.1875 \\ -0.666 & 0 & 0.666 & 0 & 0 & 0 & 0.666 & 0.1875 & 2.333 & 0 & -0.1875 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.444 & 0 & 0.666 & -0.125 & 0 & 0 & 0.5694 & 0 & 0.666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & -0.0468 & -0.1875 & 0 & 0.38020 & -0.1875 \\ 0 & 0 & 0 & -0.666 & 0 & 0.666 & 0 & 0.1875 & 0.5 & 0.666 & -0.1875 & 2.333 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri vektörleri**

$$\{f\}_1=\{f\}_2=\{f\}_3=\{f\}_4=0,\ \{f\}_5=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \{f\}_6=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 5.33.33 \\ 0 \\ 400 \\ -533.33 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlileri toplanıp, varsa düğüm yükleri direkt olarak matrise ilave edilmesi ile bulunur.

$$\{Q\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -600 \\ -800 \\ 0 \\ -600 \\ 800 \\ 0 \\ -400 \\ -533.33 \\ 0 \\ -400 \\ 533.33 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

Sistem denklemi $[K]*\{D\}=\{Q\}$ şeklinde idi. İfadeler yerine konulur ve denklem çözülürse; $\{D\}$ vektörü bulunur**.**

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -229.7070 \\ -5000 \\ -394.85 \\ 229.7070 \\ -5000 \\ 394.85 \\ 696.97 \\ -62000 \\ -484.298 \\ -696.97 \\ -6200 \\ -484.298 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -229.707 \\ -5000 \\ -394.85 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 229.707 \\ -394.85 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 229.707 \\ -5000 \\ 394.85 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \\ -229.707 \\ 394.85 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_3' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -229.707 \\ -5000 \\ -394.85 \\ 696.97 \\ -6200 \\ -484.298 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_3 = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 229.707 \\ -394.85 \\ -6200 \\ -696.97 \\ -484.298 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_4' = \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 229.707 \\ -5000 \\ 394.85 \\ -696.67 \\ -6200 \\ 484.298 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_4 = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -229.707 \\ 394.85 \\ -6200 \\ 696.97 \\ 484.298 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_5 = \{d\}_5' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -229.707 \\ -5000 \\ -394.85 \\ 229.707 \\ -5000 \\ 394.85 \end{Bmatrix} \qquad \{d\}_6 = \{d\}_6' = \begin{Bmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 696.97 \\ -6200 \\ -484.298 \\ -696.97 \\ -6200 \\ 484.298 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

$$[k]*\{d\}+\{f\}=\{p\}$$

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 229.707 \\ -394.85 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 1000 \\ -116.816 \\ -213.07 \\ -1000 \\ 116.816 \\ -371.01 \end{Bmatrix}$$

2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \\ -229.707 \\ 394.85 \end{Bmatrix} + \{0\} \quad \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 116.816 \\ 213.07 \\ -1000 \\ -116.816 \\ 371.01 \end{Bmatrix}$$

3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -5000 \\ 229.707 \\ -394.85 \\ -6200 \\ 696.97 \\ -484.298 \end{Bmatrix} + 0$$

$$\{p\}_3 = \begin{Bmatrix} 400 \\ -174.242 \\ -231.547 \\ -400 \\ 174.242 \\ -291.179 \end{Bmatrix}$$

4 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_4 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -5000 \\ -229.707 \\ 394.85 \\ -6200 \\ -696.97 \\ 484.298 \end{Bmatrix} + 0 \qquad \{p\}_4 = \begin{Bmatrix} 400 \\ 174.242 \\ 231.547 \\ -400 \\ -174.242 \\ 291.179 \end{Bmatrix}$$

5 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

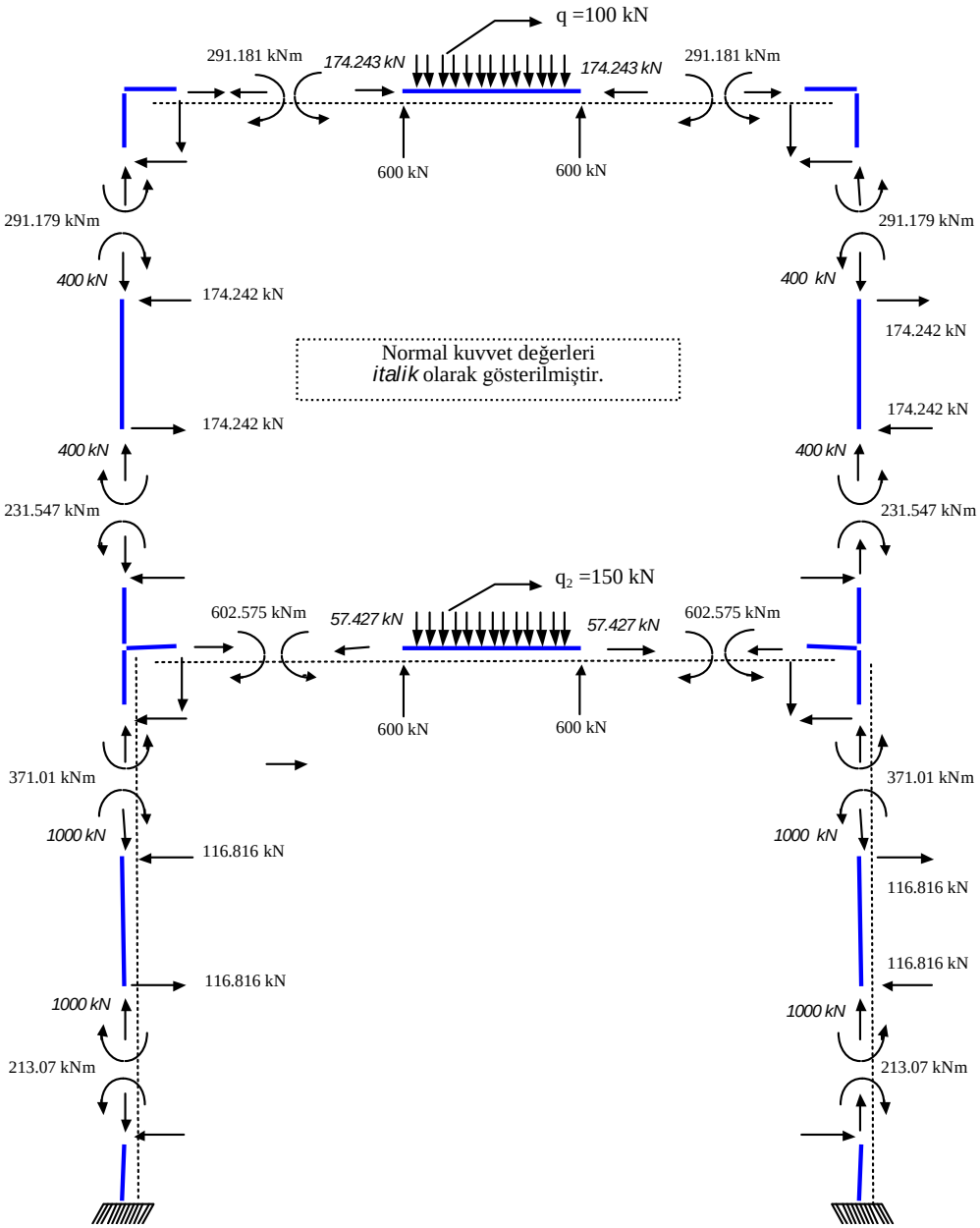
$$\{p\}_5 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -229.707 \\ -5000 \\ -394.85 \\ 229.707 \\ -5000 \\ 394.85 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix}$$

$$\{p\}_5 = \begin{Bmatrix} -57.427 \\ 600 \\ 602.571 \\ 57.427 \\ 600 \\ -602.571 \end{Bmatrix}$$

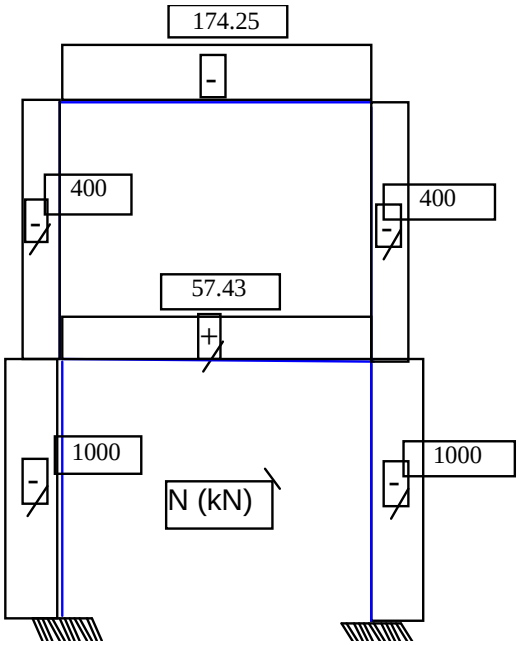
6 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

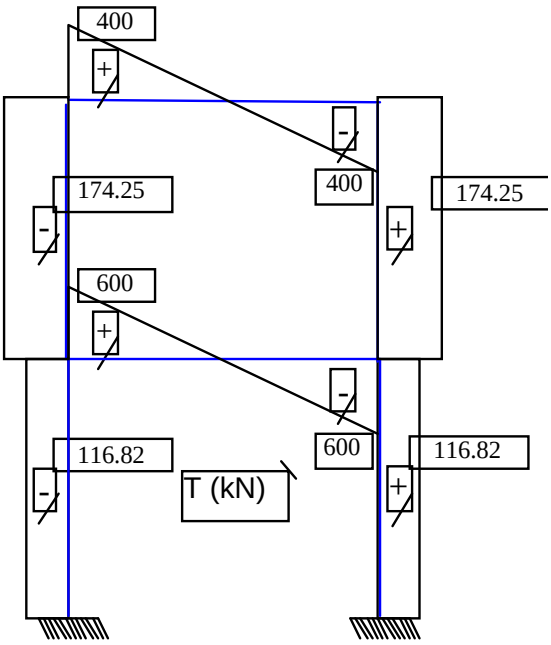
$$\{p\}_6 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 696.97 \\ -6200 \\ -484.298 \\ -696.97 \\ -6200 \\ 484.298 \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 533.33 \\ 0 \\ 400 \\ -533.33 \end{Bmatrix}, \{p\}_6 = \begin{Bmatrix} 174.243 \\ 400 \\ 291.181 \\ -174.243 \\ 400 \\ -291.181 \end{Bmatrix}$$

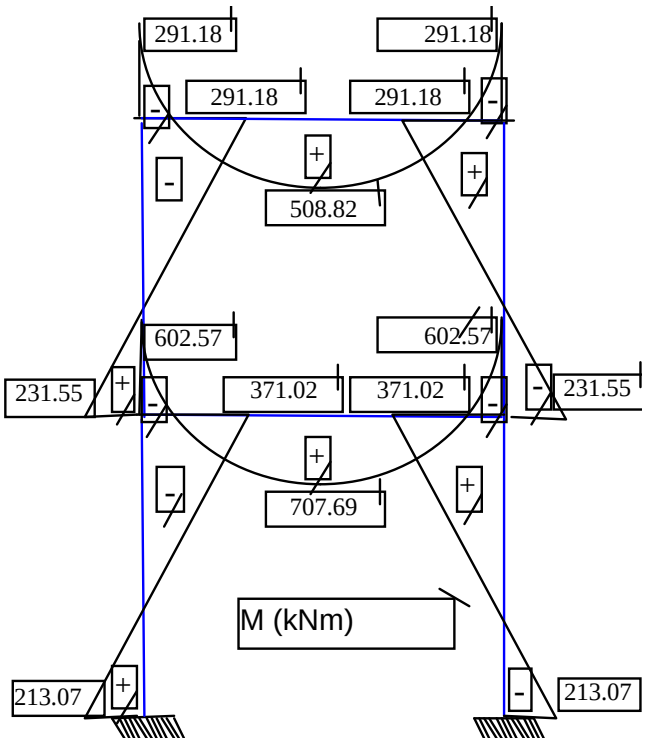
**Kesit Tesirleri**




**Kesit Tesirleri Diyagramları**

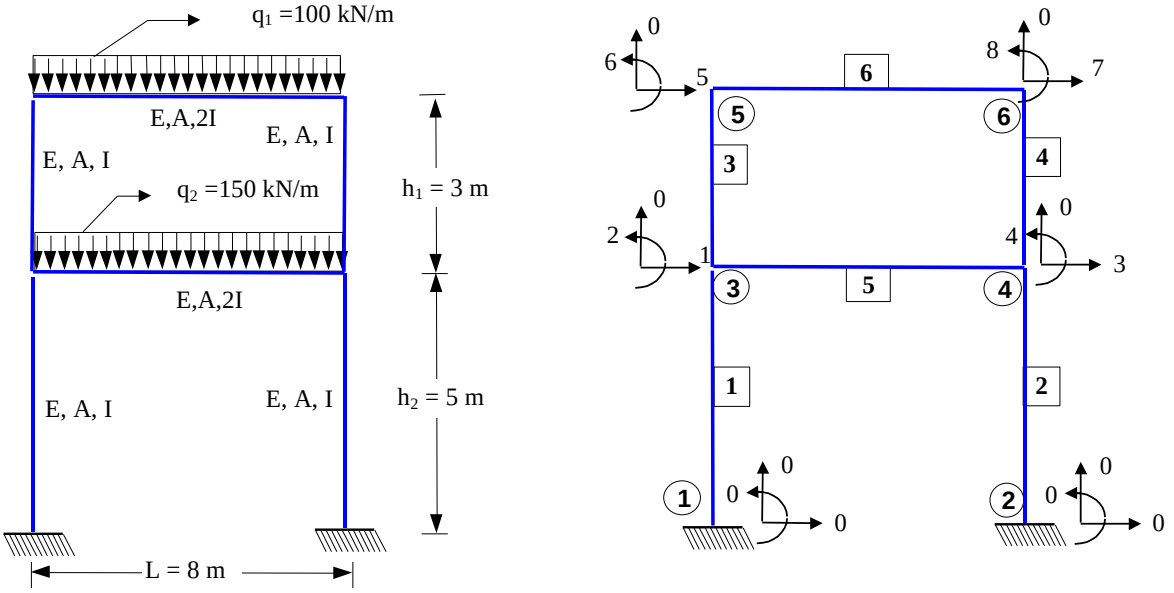

174.25
400
400
57.43
1000
1000
N (kN)


400
174.25
400
174.25
600
116.82
600
116.82
T (kN)


291.18
291.18
291.18
291.18
508.82
602.57
602.57
231.55
371.02
371.02
231.55
707.69
M (kNm)
213.07
213.07

**Örnek 11**

Örnek 10 da verilen problemi kolonlardaki eksenel deformasyonları ihmal ederek rijitlik matrisi yöntemi ile çözelim. Bu durumda her düğümde bir dönme birde yatay doğrultuda olmak üzere iki serbestlik derecesi olacaktır. Sistemin toplam serbestlik derecesi 8 dir.




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-3 | 0 0 0 1 0 2 | 90 |
| 2 | 2-4 | 0 0 0 2 0 3 | 90 |
| 3 | 3-5 | 1 0 2 5 0 6 | 90 |
| 4 | 4-6 | 3 0 4 7 0 8 | 90 |
| 5 | 3-4 | 1 0 2 3 0 4 | 0 |
| 6 | 5-6 | 5 0 6 7 0 8 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

E=1 A=1 I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=[k_2]=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]=[k_4]=\begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[k_5] = [k_6] = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 0 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 0 & 0 \\ 4 & 8 \end{matrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

5 ve 6 numaralı elemanlar sistem koordinatlarında yer almaktadır. Eleman koordinatlarındaki matrisleri aynı zamanda sistem koordinatlarındaki olmaktadır. Sadece kolonlar için transpoz işlemleri yapılacaktır.

$$[k_1]^T = [k_2]^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & -0.24 & -0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ -0.096 & 0 & -0.24 & 0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$$[k_3]^T = [k_4]^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 0 & 4 & 7 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.444 & 0 & 0.667 & -0.444 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 & 0.667 & 0 & 0.667 \\ -0.444 & 0 & -0.667 & 0.444 & 0 & -0.667 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 0.667 & -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 6 & 8 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.665 & -0.4266 & -0.125 & 0 & -0.444 & -0.666 & 0 & 0 \\ -0.4266 & 3.133 & 0 & 0.5 & 0.666 & 0.666 & 0 & 0 \\ -0.125 & 0 & 0.6654 & -0.4266 & 0 & 0 & -0.4444 & -0.6666 \\ 0 & 0.5 & -0.4266 & 3.133 & 0 & 0 & 0.6666 & 0.6666 \\ -0.4444 & 0.6666 & 0 & 0 & 0.5694 & 0.6666 & -0.125 & 0 \\ -0.6666 & 0.6666 & 0 & 0 & 0.6666 & 2.3333 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.4444 & 0.6666 & -0.125 & 0 & 0.5694 & 0.6666 \\ 0 & 0 & -0.6666 & 0.6666 & 0 & 0.5 & 0.6666 & 2.3333 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

**Eleman Yük vektörleri**

$$\{f\}_1 = \{f\}_2 = \{f\}_3 = \{f\}_4 = 0 \qquad \{f\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} \qquad \{f\}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 533.33 \\ 0 \\ 400 \\ -533.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{matrix}$$

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarındaki ankastrelik uç kuvvetlerinin ters işaretlileri toplanıp, varsa düğüm yükleri direkt olarak matrise ilave edilmesi ile bulunur.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -800 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \\ -533.33 \\ 0 \\ 533.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü** $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -229.707 \\ -394.858 \\ 229.707 \\ 394.858 \\ 696.97 \\ -484.298 \\ -696.97 \\ 484.298 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ 0 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -229.707 \\ 0 \\ -394.85 \end{Bmatrix} \qquad \{d\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 229.707 \\ -394.85 \end{Bmatrix} \qquad \{d\}_2' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_3 \\ 0 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 229.707 \\ 0 \\ 394.85 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -229.707 \\ 394.85 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_3{}' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_2 \\ D_5 \\ 0 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -229.707 \\ 0 \\ -394.85 \\ 696.97 \\ 0 \\ -484.298 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 229.707 \\ -394.85 \\ 0 \\ -696.97 \\ -484.298 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_4{}' = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_0 \\ D_4 \\ D_7 \\ D_0 \\ D_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 229.707 \\ 0 \\ 394.85 \\ -696.67 \\ 0 \\ 484.298 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -229.707 \\ 394.85 \\ 0 \\ 696.97 \\ 484.298 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_5 = \{d\}_5{}' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_0 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -229.707 \\ 0 \\ -394.85 \\ 229.707 \\ 0 \\ 394.85 \end{Bmatrix} \qquad \{d\}_6 = \{d\}_6{}' = \begin{Bmatrix} D_5 \\ D_0 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_0 \\ D_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 696.97 \\ 0 \\ -484.298 \\ -696.97 \\ 0 \\ 484.298 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 229.707 \\ -394.85 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -116.816 \\ -213.07 \\ 0 \\ 116.816 \\ -371.01 \end{Bmatrix}$$

2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -229.707 \\ 394.85 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 116.816 \\ 213.07 \\ 0 \\ -116.816 \\ 371.01 \end{Bmatrix}$$

3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 229.707 \\ -394.85 \\ 0 \\ -696.97 \\ -484.298 \end{Bmatrix} + 0 \qquad \{p\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -174.242 \\ -231.547 \\ 0 \\ 174.242 \\ -291.185 \end{Bmatrix}$$

4 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_4 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ -229.707 \\ 394.85 \\ 0 \\ 696.97 \\ 484.298 \end{Bmatrix} + 0$$

$$\{p\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 174.242 \\ 231.547 \\ 0 \\ -174.242 \\ 291.179 \end{Bmatrix}$$

5 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

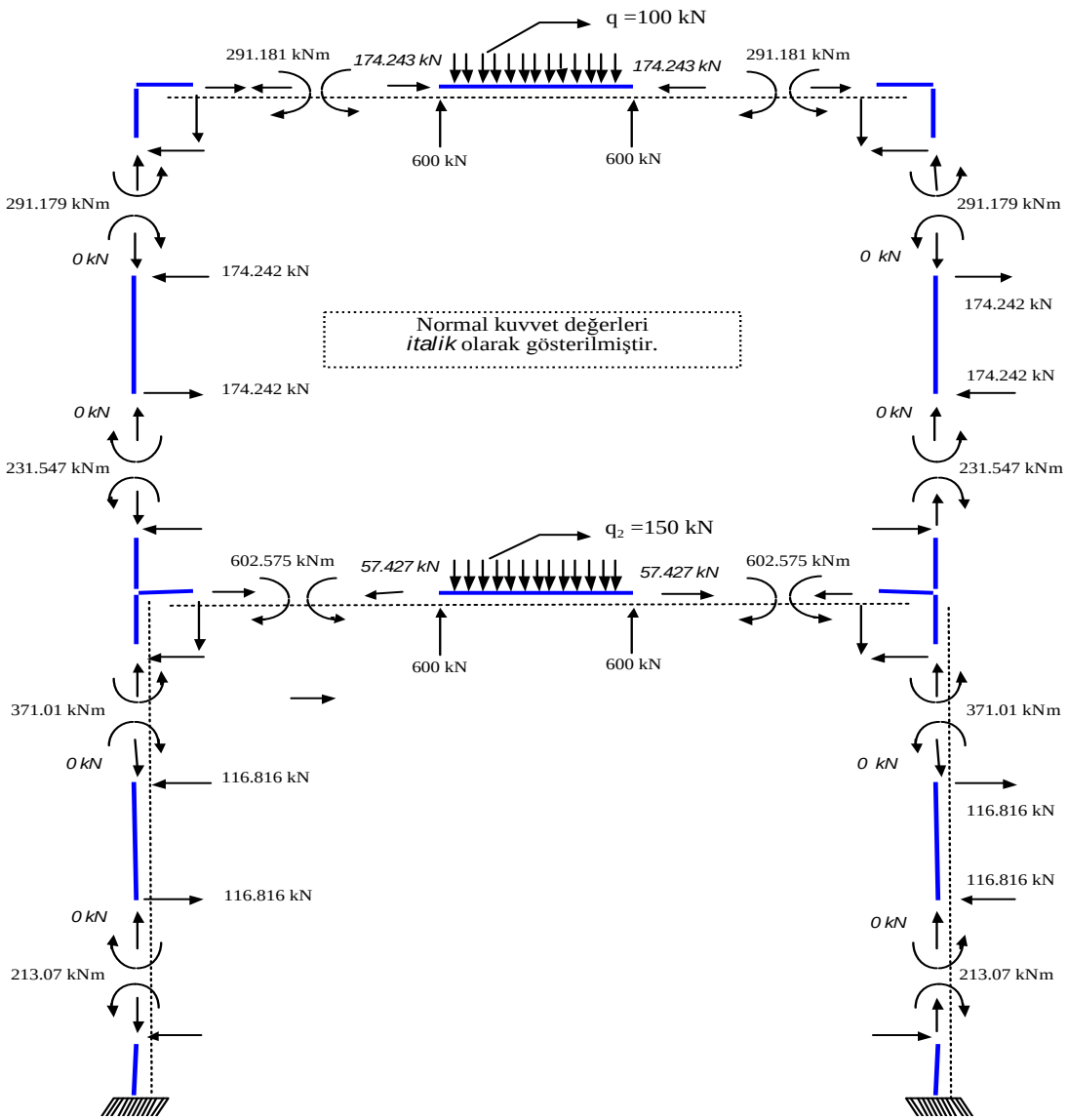
$$\{p\}_5 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -229.707 \\ 0 \\ -394.85 \\ 229.707 \\ 0 \\ 394.85 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix}$$

$$\{p\}_5 = \begin{Bmatrix} -57.427 \\ 600 \\ 602.571 \\ 57.427 \\ 600 \\ -602.571 \end{Bmatrix}$$

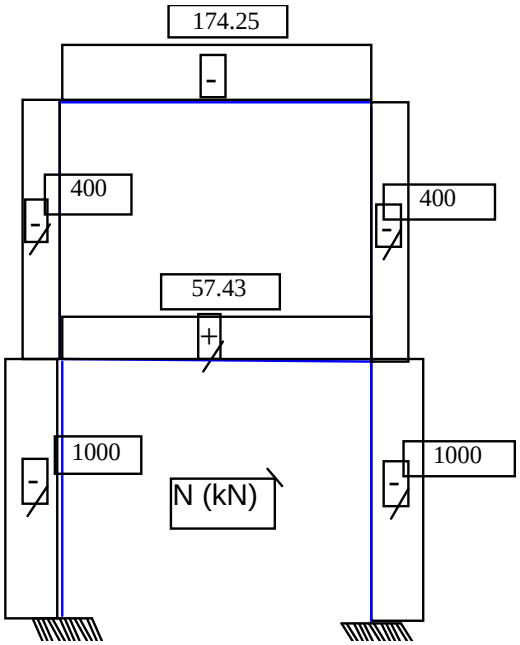
6 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

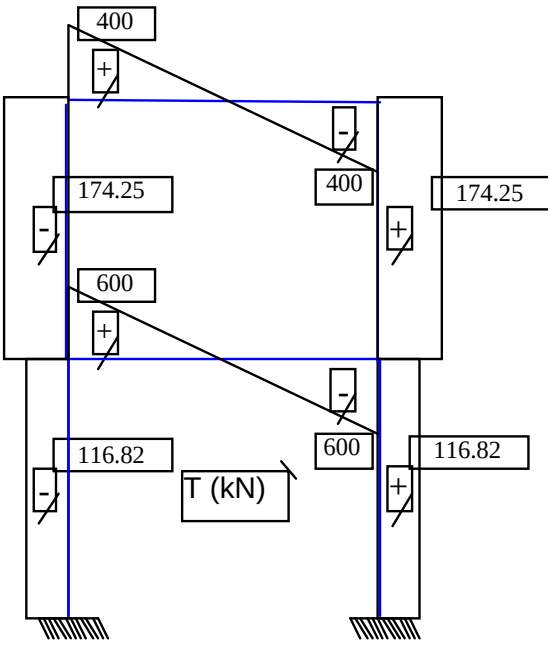
$$\{p\}_6 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 696.97 \\ 0 \\ -484.298 \\ -696.97 \\ 0 \\ 484.298 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 533.33 \\ 0 \\ 400 \\ -533.33 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_6 = \begin{Bmatrix} 174.243 \\ 400 \\ 291.181 \\ -174.243 \\ 400 \\ -291.181 \end{Bmatrix}$$

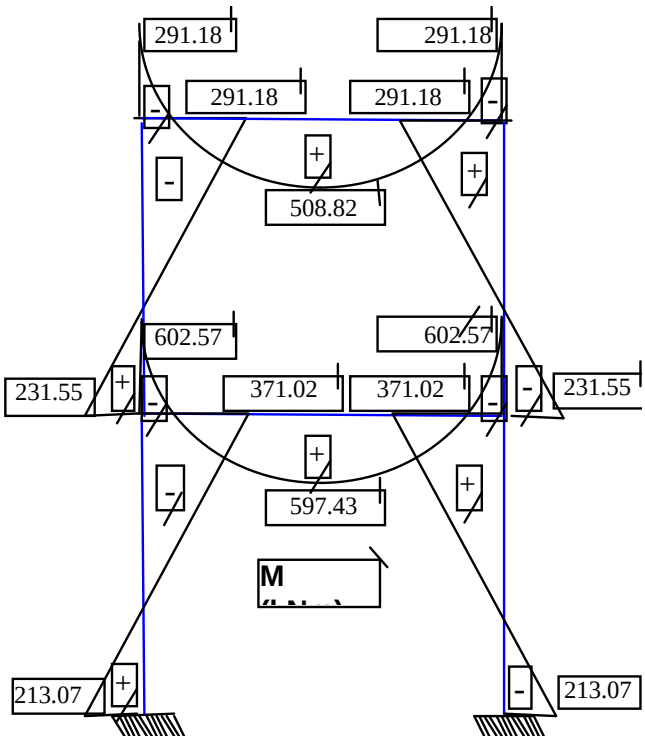
## Kesit Tesirleri




## Kesit Tesirleri Diyagramları

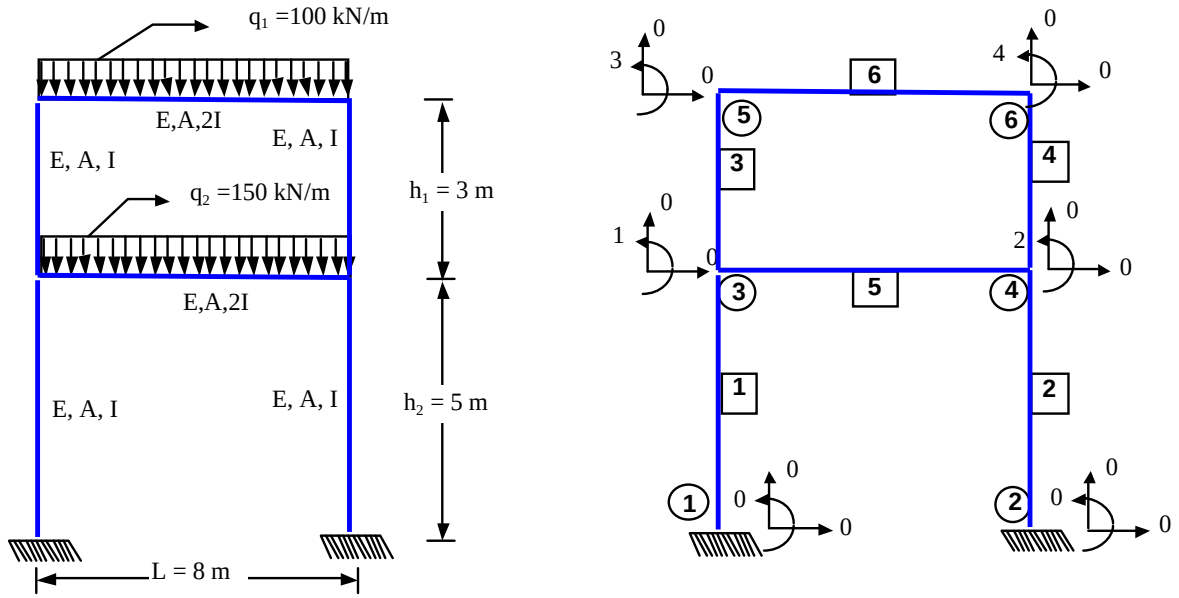

174.25
400
400
57.43
1000
1000
N (kN)


400
174.25
400
174.25
600
116.82
600
116.82
T (kN)


291.18
291.18
291.18
291.18
508.82
602.57
602.57
231.55
371.02
371.02
231.55
597.43
M
213.07
213.07

**Örnek 12**

Örnek 10-11'de verilen iki katlı çerçeven düğüm noktaları sabit sistem olarak çözümü. Bu durumda her düğümde sadece dönmeler meydana gelecektir. Düğümlerdeki yatay yer değiştirmeler ve kolonlardaki eksenel deformasyonlar terk edilmiştir. Bu durumdaki çözüm Cross ve Açı yöntemi ile aynı çözümü verecektir.




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-3 | 0 0 0 0 0 1 | 90 |
| 2 | 2-4 | 0 0 0 0 0 2 | 90 |
| 3 | 3-5 | 0 0 1 0 0 3 | 90 |
| 4 | 4-6 | 0 0 2 0 0 4 | 90 |
| 5 | 3-4 | 0 0 1 0 0 2 | 0 |
| 6 | 5-6 | 0 0 3 0 0 4 | 0 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

E=1, A=1, I=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=[k_2]=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]=[k_4]=\begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[k_5]=[k_6]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{matrix} = [k_5]' = [k_6]'$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

$$[k_1]' = [k_2]' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.096 & 0 & -0.24 & -0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 & 0.24 & 0 & 0.4 \\ -0.096 & 0 & -0.24 & 0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$[k_3]' = [k_4]' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0.444 & 0 & 0.667 & -0.444 & 0 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 & 0.667 & 0 & 0.667 \\ -0.444 & 0 & -0.667 & 0.444 & 0 & -0.667 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 0 & 0.667 & -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K]=\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3.133 & 0.5 & 0.6666 & 0 \\ 0.5 & 3.1333 & 0 & 0.6666 \\ 0.6666 & 0 & 2.3333 & 0.5 \\ 0 & 0.6666 & 0.5 & 2.3333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

**Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri vektörleri**

$$\{f\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \qquad \{f\}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 533.33 \\ 0 \\ 400 \\ -533.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

**Sistem Yük vektörü**

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} -800 \\ 800 \\ -533.33 \\ 533.33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -253.485 \\ 253.485 \\ -198.730 \\ 198.730 \end{Bmatrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -253.485 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -253.485 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 253.485 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 253.485 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_3' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -253.485 \\ 0 \\ 0 \\ -198.730 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -253.485 \\ 0 \\ 0 \\ -198.730 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_4' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 253.485 \\ 0 \\ 0 \\ 198.730 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 253.485 \\ 0 \\ 0 \\ 198.730 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_5 = \{d\}_5' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -253.485 \\ 0 \\ 0 \\ 253.485 \end{Bmatrix} \qquad \{d\}_6 = \{d\}_6' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -198.730 \\ 0 \\ 0 \\ 198.730 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -253.485 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -60.836 \\ -101.394 \\ 0 \\ 60.836 \\ -202.788 \end{Bmatrix}$$

2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri

$$\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 253.485 \end{Bmatrix} + \{0\} \qquad \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60.836 \\ 101.394 \\ 0 \\ -60.836 \\ 202.788 \end{Bmatrix}$$

3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -253.485 \\ 0 \\ 0 \\ -198.730 \end{Bmatrix} + 0 \qquad \{p\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -301.477 \\ -470.467 \\ 0 \\ 301.477 \\ -433.963 \end{Bmatrix}$$

4 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_4 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 253.485 \\ 0 \\ 0 \\ 198.730 \end{Bmatrix} + 0 \qquad \{p\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 301.477 \\ 470467 \\ 0 \\ -301.477 \\ 433.963 \end{Bmatrix}$$

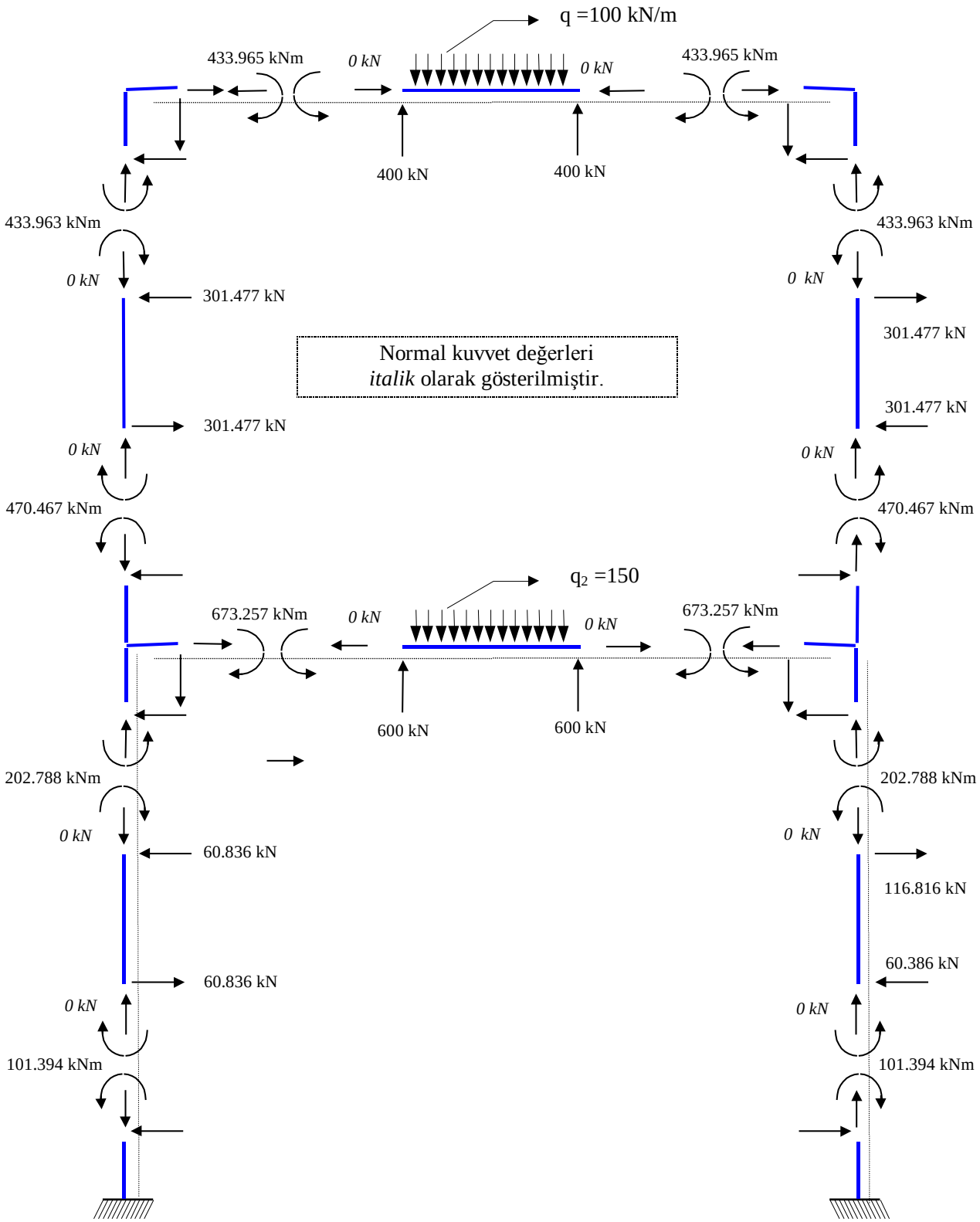
5 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

$$\{p\}_5 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -253485 \\ 0 \\ 0 \\ 253.485 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 600 \\ -800 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 673.257 \\ 0 \\ 600 \\ -673.257 \end{Bmatrix}$$

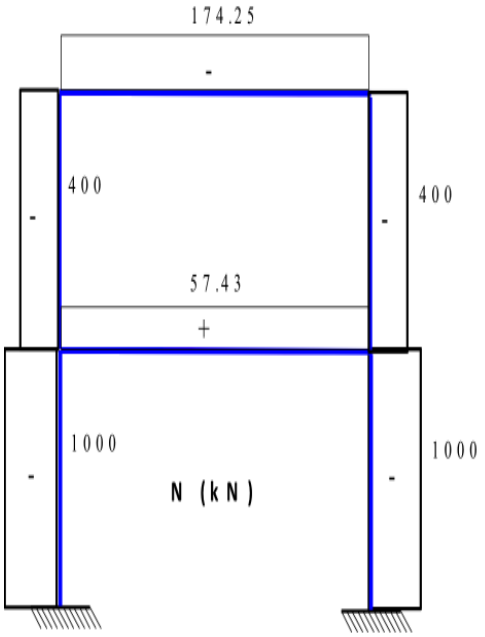
6 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri için;

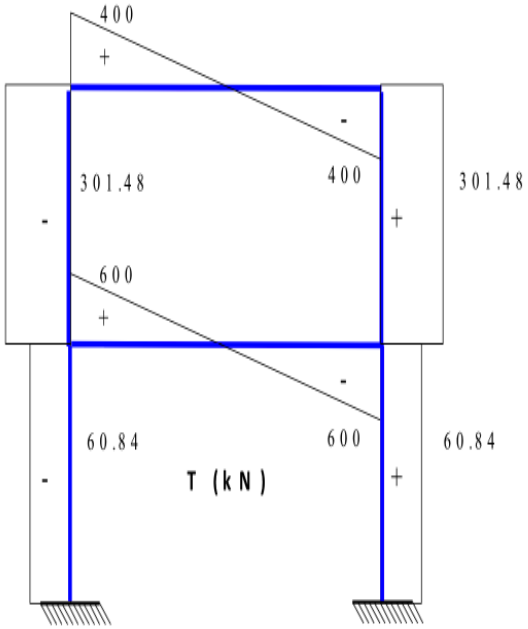
$$\{p\}_6 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.188 & 0 & -0.047 & 0.188 \\ 0 & 0.188 & 1 & 0 & -0.188 & 0.5 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & -0.188 & 0 & 0.047 & -0.188 \\ 0 & 0.188 & 0.5 & 0 & -0.188 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -198.730 \\ 0 \\ 0 \\ 198.730 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 533.33 \\ 0 \\ 400 \\ -533.33 \end{Bmatrix} \qquad \{p\}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ 433.965 \\ 0 \\ 400 \\ -433.965 \end{Bmatrix}$$

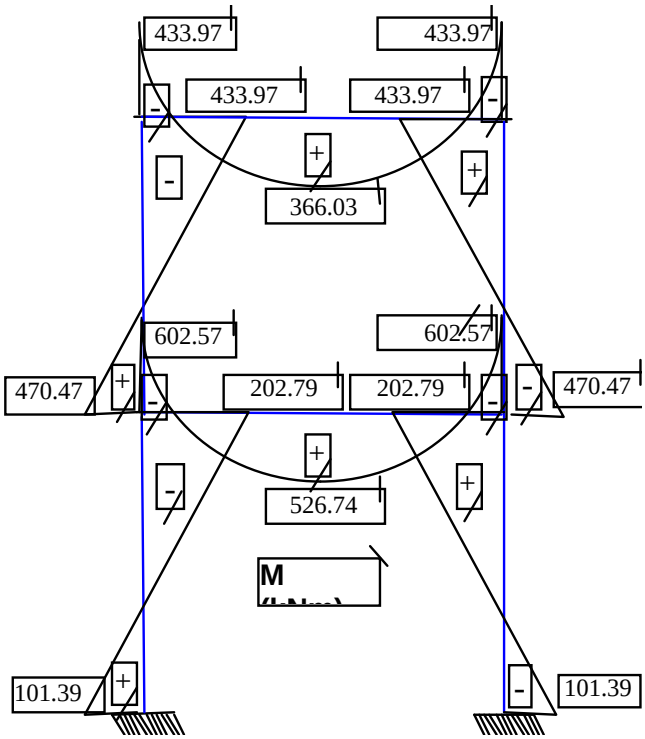
## Kesit Tesirleri



**Kesit Tesirleri Diyagramları**

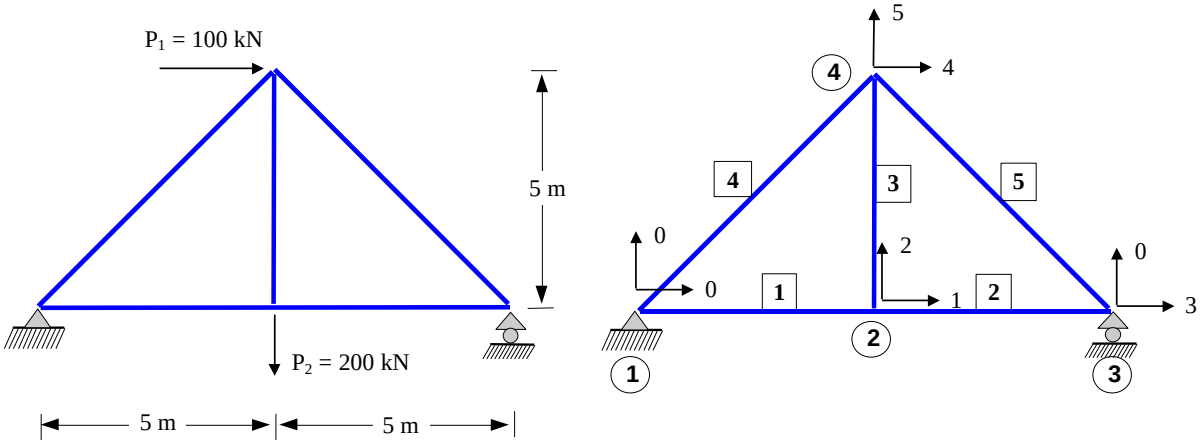


**Örnek 13**

Kafes sistemlerin rijitlik matrisi ile çözümüne ait bir örnek ele alınmıştır. Bilindiği gibi düzlem kafes sitemin her düğümünde x ve y yönünde ötelenme olmak üzere iki serbestlik derecesi vardır. Bu serbestlik derecelerinden bazıları mesnet olan düğümlerde tutulmuş olabilir.




| Kodlama Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-2 | 0 0 1 2 | 0 |
| 2 | 2-3 | 1 2 3 0 | 0 |
| 3 | 2-4 | 1 2 4 5 | 90 |
| 4 | 1-4 | 0 0 4 5 | 45 |
| 5 | 3-4 | 3 0 4 5 | 135 |

**Eleman Rijitlik Matrisleri**

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

E=1 A=1 L ise elemanın boyu alınacaktır.

$$[k_1]=[k_2]=[k_3]=\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad [k_4]=[k_5]=\begin{bmatrix} 0.141 & -0.141 \\ -0.141 & 0.141 \end{bmatrix}$$

**Sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrisleri**

[T] koordinat dönüşüm matrisi ve $[k]'$ sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi olmak üzere;

$[k]'=[T]^T*[k]*[T]$ idi.

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

yukarıdaki işlemler yapılırsa sistem koordinatlarında eleman rijitlik matrisi;

$$[k]' = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2(\beta) & \cos(\beta).\sin(\beta) & -\cos^2(\beta) & -\cos(\beta).\sin(\beta) \\ \cos(\beta).\sin(\beta) & \sin^2(\beta) & -\cos(\beta).\sin(\beta) & -\sin^2(\beta) \\ -\cos^2(\beta) & -\cos(\beta).\sin(\beta) & \cos^2(\beta) & \cos(\beta).\sin(\beta) \\ \cos(\beta).\sin(\beta) & -\sin^2(\beta) & \cos(\beta).\sin(\beta) & \sin^2(\beta) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Kafes sistem çubuğunda ara yük olmadığı için eleman rijitlik denklemeleri doğrudan sistem koordinatlarında kullanılabilir.

$$[k_1]' = [k_2]' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0\ 1 \\ 0\ 2 \\ 1\ 3 \\ 2\ 0 \end{matrix} \end{array} \qquad [k_3]' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k_4]' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.071 & 0.071 & -0.071 & -0.071 \\ 0.071 & 0.071 & -0.071 & -0.071 \\ -0.071 & -0.071 & 0.071 & 0.071 \\ 0.071 & -0.071 & 0.071 & 0.071 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \qquad [k_5]' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 0 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.071 & -0.071 & -0.071 & 0.071 \\ -0.071 & 0.071 & 0.071 & -0.071 \\ -0.071 & 0.071 & 0.071 & -0.071 \\ 0.071 & -0.071 & -0.071 & 0.071 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$

**Sistem Rijitlik Matrisi**

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.400 & 0 & -0.200 & 0 & 0 \\ 0 & 0.200 & 0 & 0 & -0.200 \\ -0.200 & 0 & 0.2707 & -0.0707 & 0.0707 \\ 0 & 0 & -0.0707 & 0.1414 & 0 \\ 0 & -0.200 & 0.0707 & 0 & 0.3414 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$

**Sistem Yük vektörü**

Sistem yük vektörü, sistem koordinatlarında etki eden düğüm yüklerinden elde edilmektedir.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

**Sistem Denklemi çözümü**

$$\begin{bmatrix} 0.400 & -0.200 & 0 & 0 & 0 \\ -0.200 & 0.2707 & -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 \\ 0 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 \\ 0 & -0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & 0 \\ 0 & 0.0707 & -0.0707 & 0 & 0.3414 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{D\} = \begin{Bmatrix} 750 \\ -3164.2135 \\ 1500 \\ 1457.106 \\ -2164.21 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

**Eleman Deplasman vektörleri**

$$\{d\}_1^{\copyright} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 750 \\ -3164.2135 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 750 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2^{\copyright} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 750 \\ -3164.2135 \\ 1500 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_2 = \begin{Bmatrix} 750 \\ -1500 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_3' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 750 \\ -3164.2135 \\ 1457.106 \\ -2164.21 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_3 = \begin{Bmatrix} -3164.2135 \\ -2164.21 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_4' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1457.06 \\ -2164.21 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_5' = \begin{Bmatrix} D_3 \\ 0 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 1457.106 \\ -2164.21 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_5 = \begin{Bmatrix} -1061 \\ -2561 \end{Bmatrix}$$

**Çubuk Uç Kuvvetlerinin Hesabı**

Kafes sistemlerde çubuk uç kuvvetleri; $[k]*\{d\} = \{p\}$ ile hesaplanmaktadır.

1 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri $\{p\}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 750 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\}_1 = \begin{Bmatrix} -150 \\ 150 \end{Bmatrix}$

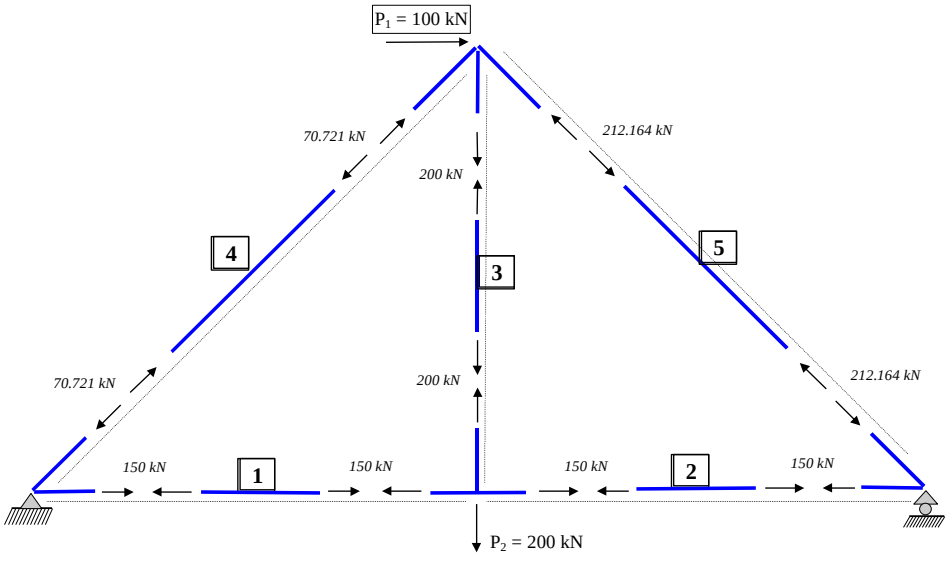
2 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri; $\{p\}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 750 \\ -1500 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} -150 \\ 150 \end{Bmatrix}$

3 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri; $\{p\}_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -3164.2135 \\ -2164.21 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\}_3 = \begin{Bmatrix} -200 \\ 200 \end{Bmatrix}$

4 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri; $\{p\}_4 = \begin{bmatrix} 0.141 & -0.141 \\ -0.141 & 0.141 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\}_4 = \begin{Bmatrix} 70.721 \\ -70.721 \end{Bmatrix}$

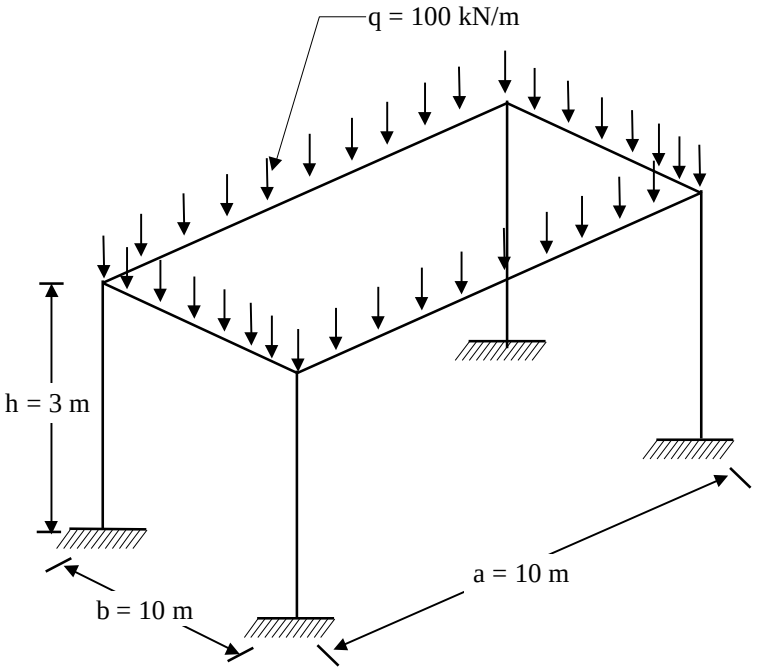
5 nolu elemanın çubuk uç kuvvetleri; $\{p\}_5 = \begin{bmatrix} 0.141 & -0.141 \\ -0.141 & 0.141 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -1061 \\ -2561 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\}_5 = \begin{Bmatrix} 212.164 \\ -212.164 \end{Bmatrix}$

**Kesit Tesirleri(Uç kuvvetlerinin şekil üzerinde gösteriliş)**

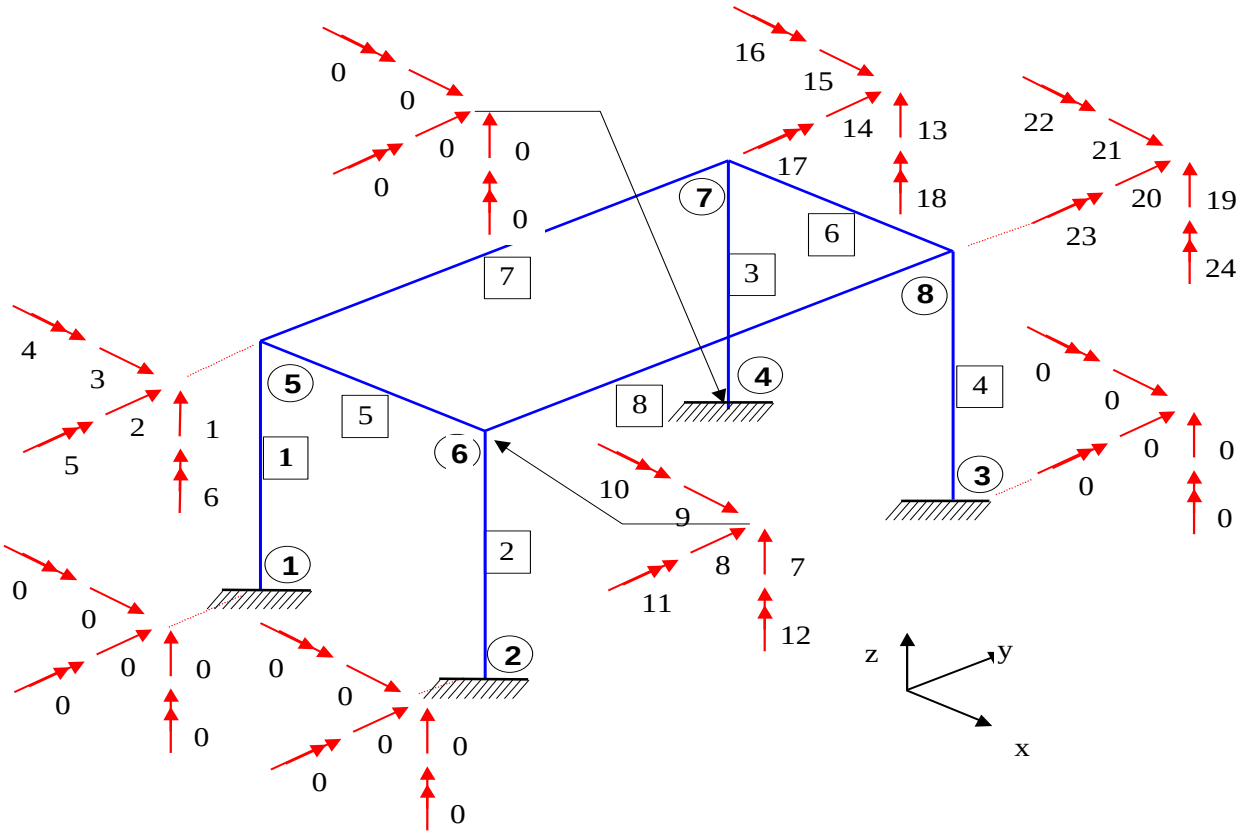


**Örnek 14**

Gerçekte sistemler üç boyutlu uzayda yer almaktadır. uzay çerçeve için rijitlik matrisi formülasyonu kullanılarak her taşıyıcı sistemin çözümü yapılabilir. Ancak uzay çerçevede bilinmeyen sayısı daha fazla olduğundan, çözümlerin el ile yapılması zor olmaktadır. Örnek olarak tek katlı simetrik bir uzay çerçeve rijitlik matrisi yöntemi ile çözülmüştür.




Uzay çerçeve Taşıyıcı sistem




Uzay çerçeve Taşıyıcı sistemin düğümlerindeki deplasmanların numaralanması

| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-5 | 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 4 5 6 | |
| 2 | 2-6 | 0 0 0 0 0 0 7 8 9 10 11 12 | |
| 3 | 3-7 | 0 0 0 0 0 0 13 14 15 16 17 18 | |
| 4 | 4-8 | 0 0 0 0 0 0 19 20 21 22 23 24 | |
| 5 | 5-6 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 | |
| 6 | 7-8 | 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 | |
| 7 | 5-7 | 1 2 3 4 5 6 13 14 15 16 17 18 | |
| 8 | 6-8 | 7 8 9 10 11 12 19 20 21 22 23 24 | |

E=1, A=1, $I_x$=1, $I_y$=1 J=1 ve L ise elemanın boyu alınacaktır.

Sistemin çözümü için yapılan ara işlemler uzun olduğundan burada sadece sonuçlar verilmiştir.

Düğümlerin deplasman ve dönmeleri

| Düğüm no | U (x) | U (y) | U (z) | R (x) | R (y) | R (z) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1022 $D_1$ | 1022 $D_2$ | -3000 $D_3$ | -987.7 $D_4$ | 987.7 $D_5$ | 0 $D_6$ |
| 6 | -1022 $D_7$ | 1022 $D_8$ | -3000 $D_9$ | -987.7 $D_{10}$ | -987.7 $D_{11}$ | 0 $D_{12}$ |
| 7 | 1022 $D_{13}$ | -1022 $D_{14}$ | -3000 $D_{15}$ | 987.7 $D_{16}$ | 987.7 $D_{17}$ | 0 $D_{18}$ |
| 8 | -1022 $D_{19}$ | -1022 $D_{20}$ | -3000 $D_{21}$ | 987.7 $D_{22}$ | -987.7 $D_{23}$ | 0 $D_{24}$ |

**Eleman Uç Kuvvetleri**

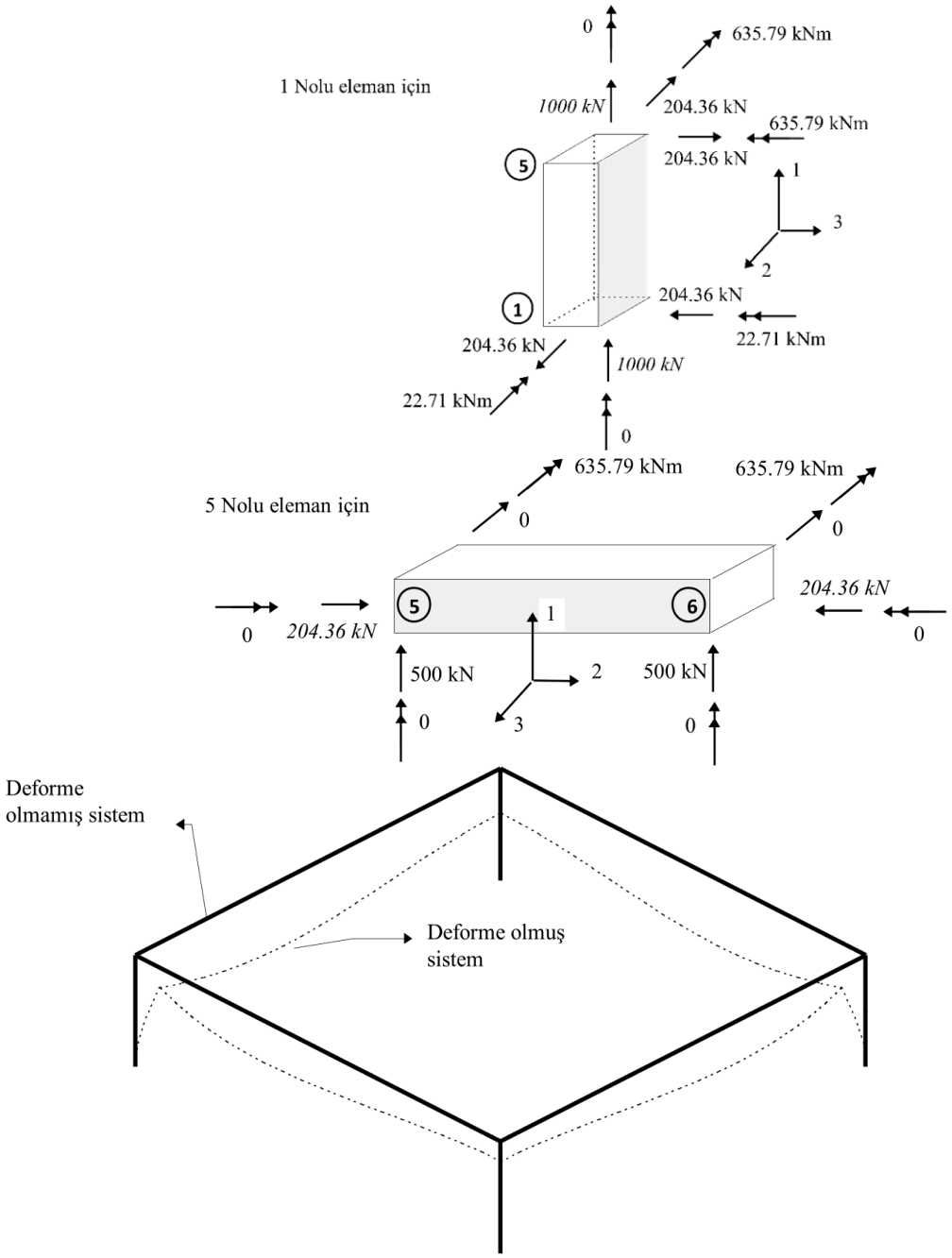
| Eleman No | Düğüm no i-j | Normal Kuvvet | 1-2 Düzleminde | | 1-3 Düzleminde | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Kesme Kuvveti | Moment | Kesme Kuvveti | Moment | Burulma |
| 1 | i | -1000 | -204.36 | -22.71 | 204.36 | 22.71 | 0 |
| | j | | -204.36 | -635.79 | 204.36 | 635.79 | 0 |
| 2 | i | -1000 | -240.36 | -22.71 | -204.36 | -22.71 | 0 |
| | j | | -204.36 | -635.79 | -204.36 | -635.79 | 0 |
| 3 | i | -1000 | 204.36 | 22.71 | 204.36 | 22.71 | 0 |
| | j | | 204.36 | 635.79 | 204.36 | 635.71 | 0 |
| 4 | i | -1000 | 204.36 | 22.71 | -204.36 | -22.71 | 0 |
| | j | | 201.36 | 635.79 | -204.36 | -635.79 | 0 |
| 5 | i | -204.36 | 500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |
| | j | | -500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | i | -204.36 | 500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | j | | -500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | i | -204.36 | 500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |
| | j | | -500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | i | -204.36 | 500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |
| | j | | -500 | -635.79 | 0 | 0 | 0 |

**Kesit Tesirleri**

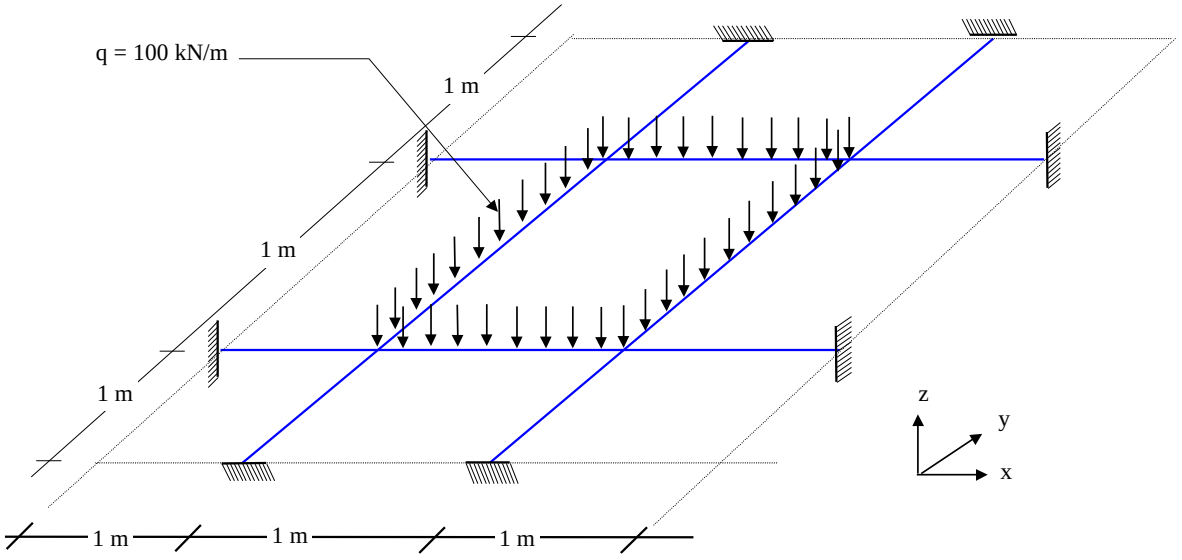
Elemanların kesit tesirleri uç kuvvetleri tablosundan okunabilir. Burada bir kolon ve bir de kiriş için uç kuvvetleri şekil üzerinde gösterilmiştir. Şekilde taralı yüzeyler bakış yönünü göstermektedir.

Uzay çerçeve çubuğunda eksen kuvvet, iki yönde kesme kuvveti, burulma momenti ve iki yönde eğilme momenti olmak üzere toplam 6 adet kesit tesiri bulunmaktadır. Momentler çift okla gösterilmiştir. Ayrıca sistemin deforme olmuş şeklide abartılı bir şekilde verilmiştir.

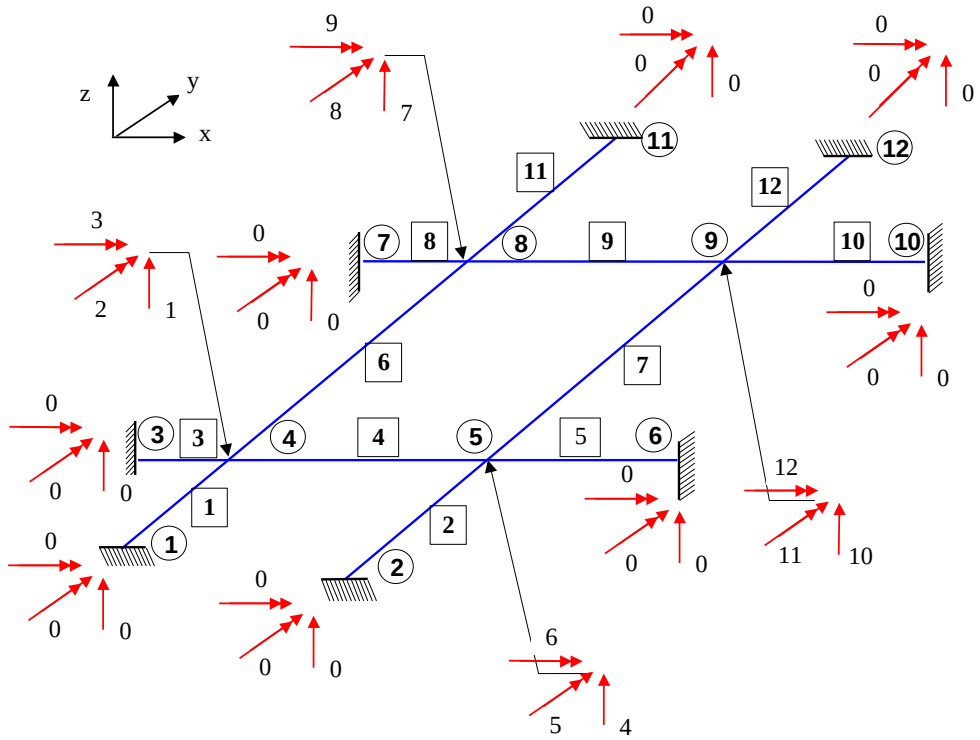


**Örnek 15**

Düzlemine dik yüklü sistemler (ızgara temel, kaset döşeme) içinde bir örnek rijitlik matrisi yöntemi ile çözülmüştür. Ara işlemlerin tamamı yerine sonuçlar verilmiştir.




Düzlemine dik yüklü taşıyıcı sistem




Düzlemine dik yüklü taşıyıcı sistemde düğüm serbestlik derecelir ve kod numaralrı

| **Kodlama Tablosu** | | | |
|---|---|---|---|
| Eleman No | Tarifi | Kod Numarası | β |
| 1 | 1-4 | 0 0 0 1 2 3 | 90 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 2-5 | 0 0 0 4 5 6 | 90 |
| 3 | 3-4 | 0 0 0 1 2 3 | 0 |
| 4 | 4-5 | 1 2 3 4 5 6 | 0 |
| 5 | 5-6 | 4 5 6 0 0 0 | 0 |
| 6 | 4-8 | 1 2 3 7 8 9 | 90 |
| 7 | 5-9 | 4 5 6 10 11 12 | 90 |
| 8 | 7-8 | 0 0 0 7 8 9 | 0 |
| 9 | 8-9 | 7 8 9 10 11 12 | 0 |
| 10 | 9-10 | 10 11 12 0 0 0 | 0 |
| 11 | 8-11 | 7 8 9 0 0 0 | 90 |
| 10 | 9-12 | 10 11 12 0 0 0 | 90 |

E=1, A=1, $I_x$=1, $I_y$=1, J = 1 ve L ise elemanın boyu alınmıştır.

**Eleman Uç Kuvvetleri**

Izgara sistemde bir elemanda her düğümde kesme, eğilme ve burulma olmak üzere üç adet uç kuvveti vardır. Izgara sistem çözülerek elde edilen uç kuvvetleri aşağıda verilmiştir.

| Eleman No | Düğüm no i-j | Normal Kuvvet | 1-2 Düzleminde | | 1-3 Düzleminde | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Kesme Kuvveti | Moment | Kesme Kuvveti | Moment | Burulma |
| 1 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | -34.85 | 3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | 50 | 15.15 | |
| 2 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | -34.85 | -3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | 50 | 15.15 | |
| 3 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | -35.85 | -3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | 50 | 15.15 | |
| 4 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | 11.36 | 0 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | 11.36 | |
| 5 | i | 0 | 0 | 0 | -50 | 15.15 | 3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | -34.85 | |
| 6 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | 11.36 | 0 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | 11.36 | |
| 7 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | 11.36 | 0 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | 11.36 | |
| 8 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | -34.85 | 3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | 50 | 15.15 | |
| 9 | i | 0 | 0 | 0 | 50 | 11.36 | 0 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | 11.36 | |
| 10 | i | 0 | 0 | 0 | -50 | 15.15 | -3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | -34.85 | |
| 11 | i | 0 | 0 | 0 | -50 | 15.15 | -3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | -34.85 | |
| 12 | i | 0 | 0 | 0 | -50 | 15.15 | 3.79 |
| | j | 0 | 0 | 0 | -50 | -34.85 | |

**Düğümlerin deplasman ve dönmeleri**

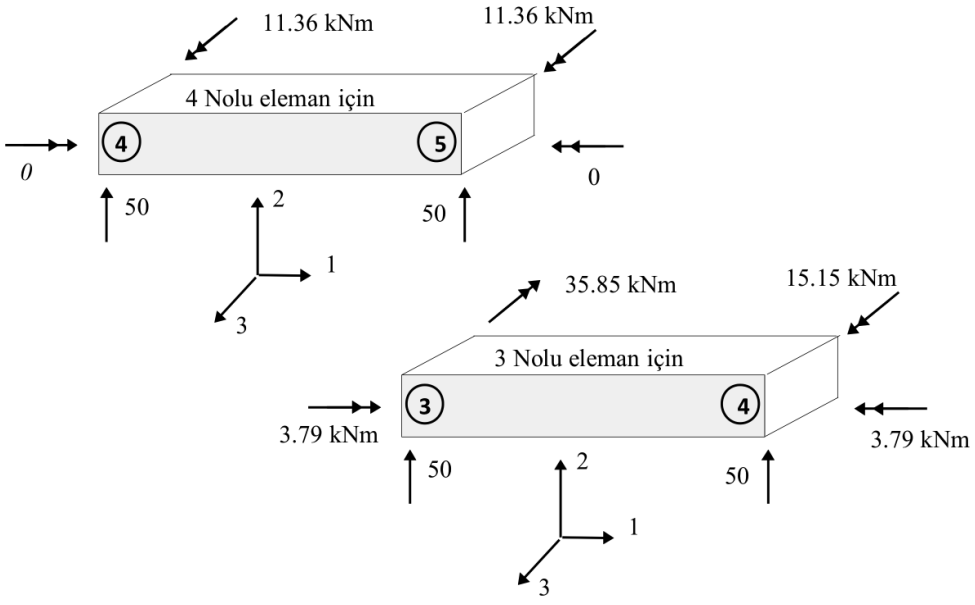
Elemanları birbirine rijit olarak bağlanmış olan ve yüklerin xy düzlemine dik olarak z yönünde etkidiği ızgara sistemde her düğümde z yönünde ötelenme, x etrafında dönme ve y

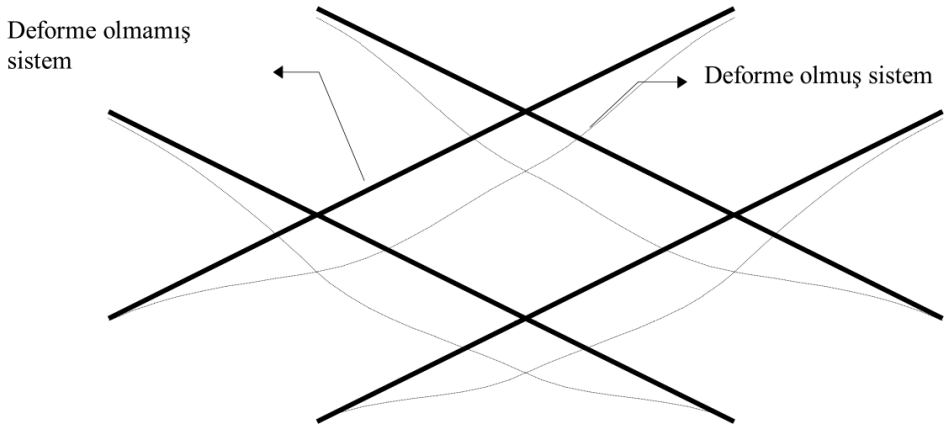
etrafında dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi vardır. Bu serbestlik dereceli doğrultusunda da kesme, eğilme ve moment olmak üzere üç adet uç kuvveti bulunacaktır. Ele alınan örnek taşıyıcı sistem için hesaplanan düğüm deplasmanları aşağıda verilmiştir.

| Düğüm no | U (z) | R (x) | R (y) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | -9.09 $D_1$ | -9.84 $D_2$ | -9.84 $D_3$ |
| 5 | -9.09 $D_4$ | -9.84 $D_5$ | -9.84 $D_6$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | -9.09 $D_7$ | 9.84 $D_8$ | 9.84 $D_9$ |
| 9 | -9.09 $D_{10}$ | 9.84 $D_{11}$ | 9.84 $D_{12}$ |
| 10 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 |

**Kesit Tesirleri**

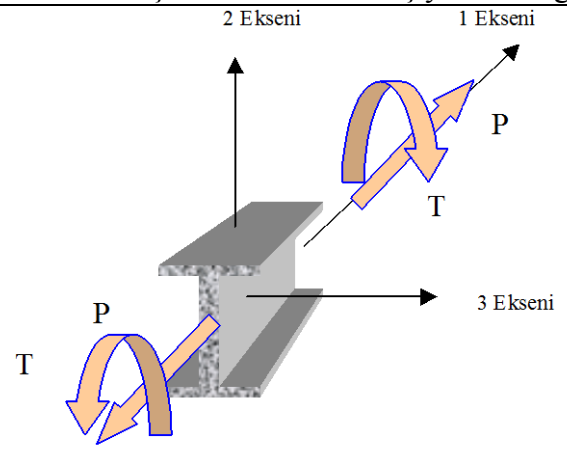
Izgara sistemin iki çubuğu için kesit tesirleri şekil üzerinde gösterilmiştir. Taralı yüzler bakış yönünü göstermektedir.



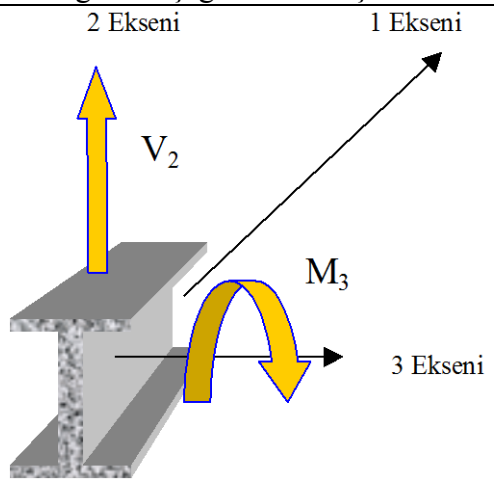



Izgara sistemin yük altındaki davranışı

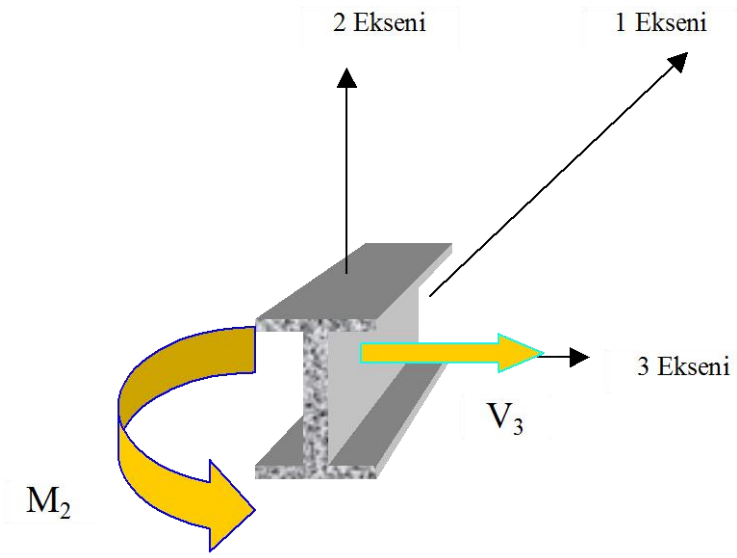
Çubuklarda uç kuvvetleri ve bakış yönü ile ilgili pozitif değerler aşağıda verilmiştir.




Pozitif Eksenel kuvvet ve burulma momenti

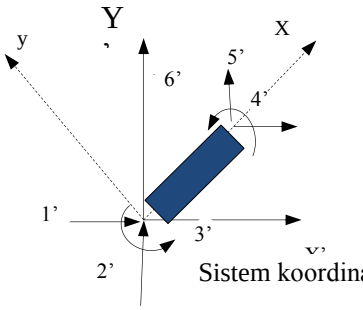



1-2 düzleminde Pozitif moment ve kesme kuvveti

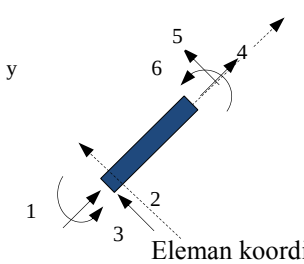



1-3 Düzleminde pozitif moment ve pozitif kesme kuvveti

SİSTEM KOORDİNATLARINDAKİ ELEMAN RİJİTLİK MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ İLE İLGİLİ TABLO



Sistem koordinatları



Eleman koordinat

xy $\Longrightarrow$ x'y' koordinat dönüşümü,
{P}={T}.{P}' veya {P}'={T}$^{-1}$.{P}
{d}={T}.{d}' veya {d}'={T}$^{-1}$.{d}
{f}={T}.{f}' veya {f}'={T}$^{-1}$.{f}
{T}$^{-1}$={T}$^{T}$

$$[T]=\begin{bmatrix}[t] & 0\\ 0 & [t]\end{bmatrix} \qquad [t]=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[k]' = [T]^T * [k] * [T] \text{ idi}$$

Düzlem Çerçeve Eleman İçin:

$$[k]=\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0\\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}\\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L}\\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0\\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}\\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}, \qquad [T]=\begin{bmatrix}
C & S & 0 & 0 & 0 & 0\\
-S & C & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C & S & 0\\
0 & 0 & 0 & -S & C & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$[K]'=\begin{bmatrix}
A & G & -B & -A & -G & -B\\
-G & D & E & -G & -D & E\\
-B & E & F & B & -E & F/2\\
-A & -C & B & A & C & B\\
-C & -D & -E & G & D & -E\\
-B & -E & F/2 & B & -E & F
\end{bmatrix}$$

$$A = C^2\frac{EA}{L} + S^2\frac{12EI}{L^3}$$

$$B = S\frac{6EI}{L^2}$$

$$C = CS\frac{EA}{L} - CS\frac{12EI}{L^3}$$

$$D = S^2\frac{EA}{L} + C^2\frac{12EI}{L^3}$$

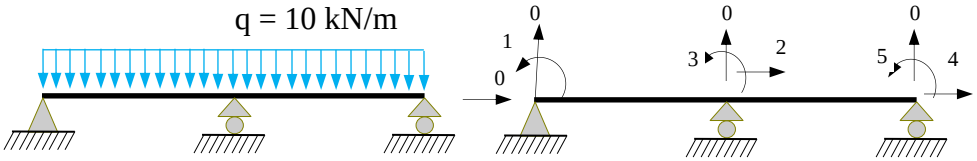
$$E = C\frac{6EI}{L^2}$$

$$F = \frac{4EI}{L}$$

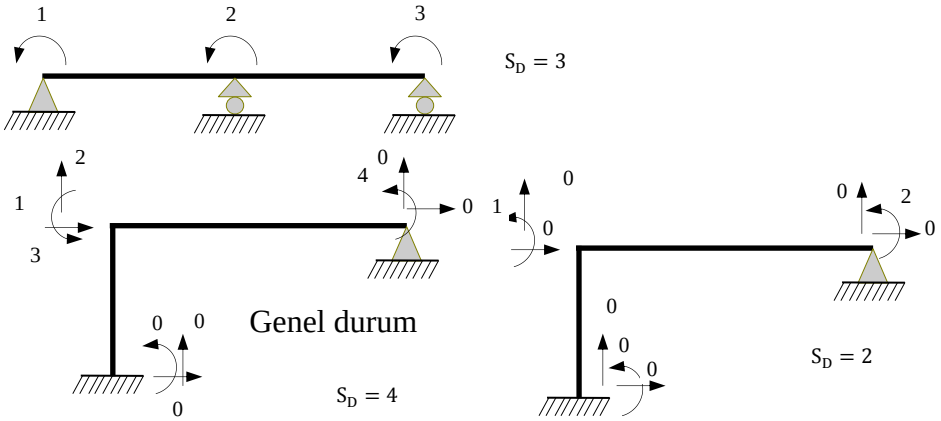
$$G = CS\frac{EA}{L} - CS\frac{12EI}{L^3}$$

C=Cosβ , S= Sinβ
β=90 $\Longrightarrow$ C=0 , S=1
β=0 $\Longrightarrow$ C=1 , S=0
{P}={T}*{P}' veya {P}'={T}$^{-1}$*{P}
{d}={T}*{d}' veya {d}'={T}$^{-1}$*{d}
{f}={T}*{f}' veya {f}'={T}$^{-1}$*{f}

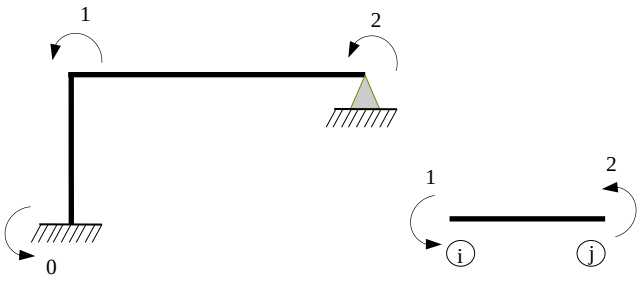
SÜREKLİ KİRİŞLER EKSENEL DEFORMASYONLAR İLE YATAY ÖTELEMELERİ TUTULMUŞ ÇERÇEVELER İÇİN KISALTILMIŞ RİJİTLİK MATRİSİ YÖNTEMİ




Kirişlerdeki eksenel deformasyonları ihmal edersek;




Eksenel deformasyonları ihmal edilirse;

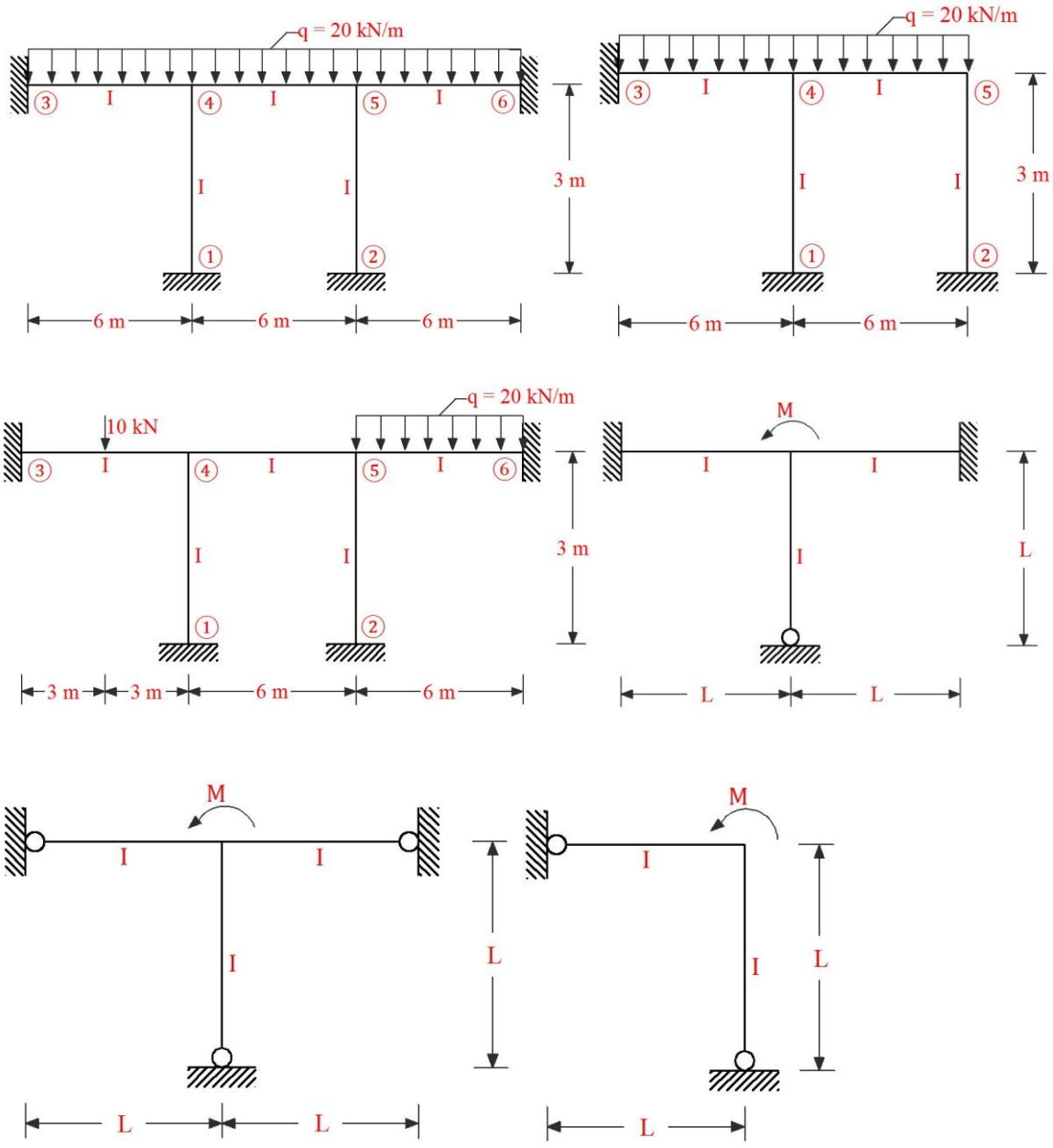



$$[K]_{2x2}.\{d\}_{2x1} + \{f\}_{2x1} = \{P\}_{2x1}, \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_{2x2}$$

## 1. çözülecek sorular

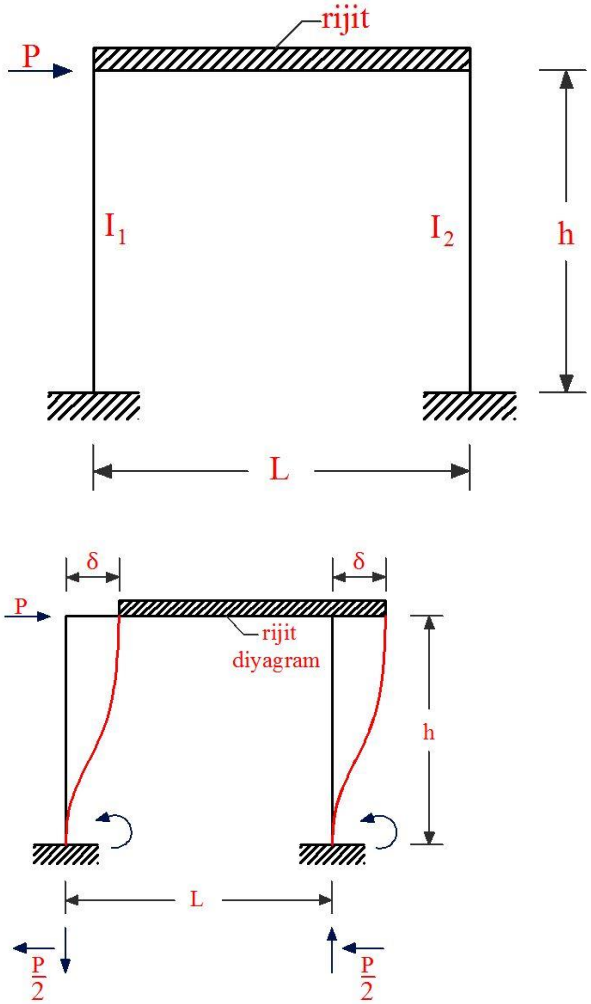
1. Verilen Çerçevelerde eksenel deformasyonları ihmal ederek; Rijitlik Matrisi, Açı ve Kuvvet Yöntemleri ile;

a) Mesnet reaksiyonlarını,
b) Normal Kuvvet diyagramlarını,
c) Kesme Kuvveti diyagramını,
d) Eğilme momenti diyagramını,
e) Deforme olmuş şeklini elde ediniz.

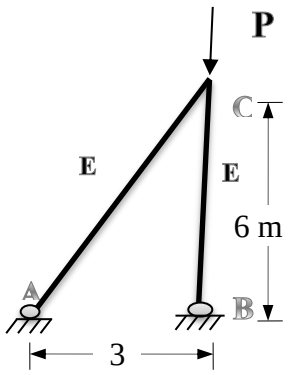



Kolonlardaki eksenel deformasyon ihmal edilecek; Verilen Çerçevede $I_1 = I_2$ 1. Ve $I_1 = 2\ I_2$ Durumları için;

a) Normal Kuvvet diyagramını,
b) Kesme Kuvvet diyagramını,
c) Eğilme Momenti diyagramını,
d) Deforme olmuş şeklini elde ediniz.
e) Sonuçları karşılaştırınız.



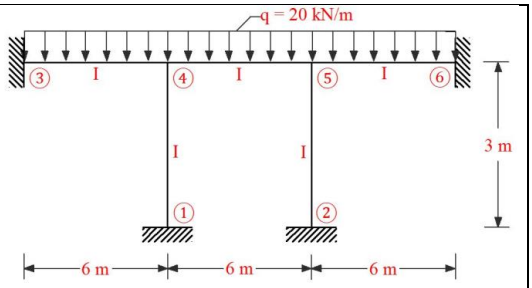

Açıklama: Rijit kat döşemesine bağlanan kolon uçlarında dönme meydana gelmeyecektir.

| | |
|---|---|
| Soru 1 (40) Puan)<br><br>Şekil 1 de Verilen kafes sistem için Rijitlik matrisi yöntemi ile;<br>**a)** Kodlama tablosunu Elde ediniz (5)<br>**b)** Sistem rijitlik Matrisini belirleyiniz (10)<br>**c)** Sistem yük vektörünü elde ediniz (5)<br>**d)** Düğüm deplasmanlarını bulunuz(10)<br>**e)** Çubuk Kuvvetlerini belirleyerek şekil üzerinde basınç ya da çekme durumlarını işaretleyiniz (10) | <br>Şekil 1 |

Soru 2 (60 Puan)

Şekil 2 de verilen çerçeve sistemde tüm elemanlarda ; eksenel deformasyonları ihmal ederek (Düğüm Noktası sabit sistem; kısaltılmış Rijitlik matrisi kullanılabilir) rijitlik matrisi yöntemi ile çözünüz.

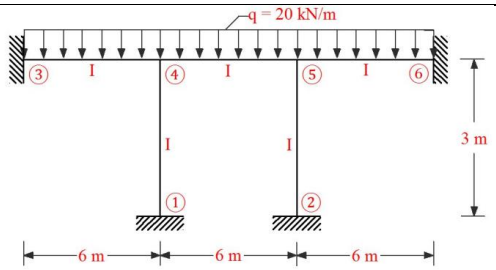
a. Kodlama Tablosu (5)
b. Sistem rijitlik Matrisi (10)
c. Sistem yük Vektörü (10)
d. Düğüm Deplasmanları (5)
e. Kesme Kuvveti diyagramı (10)
f. Eğilme Momenti diyagramı (10)
g. Normal Kuvvet Diyagramı (5)
h. Deformasyon yapmış şekli (5)



Şekil 2

Soru 3 (40 P)
Şekil 3 de Verilen çerçeve sistemi açı ya da Cross Yöntemi ile Çözerek;

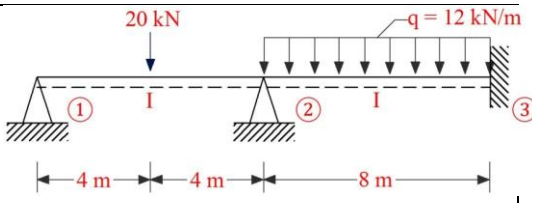
**a.** Çubuk Uç kuvvetlerini belirleyerek Taşıma Şeması üzerinde göstereniz (10)
**b.** Kesme Kuvvet diyagramını çiziniz (10)
**c.** Eğilme Momenti diyagramını çiziniz (10)
**d.** Düğüm dengelerinden yararlanarak kolonlar için eksenel kuvvet diyagramını çiziniz (5)
**e.** Çerçevenin deforme olmuş şeklini çiziniz (5)



Şekil 3

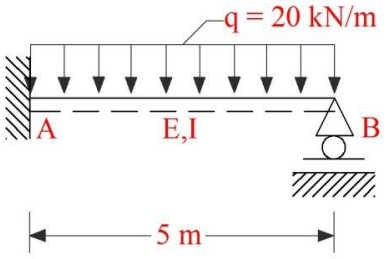
Soru 1 (40) Puan)

Şekil 1 de Verilen Kirişi açı ya da Cross Yöntemi ile Çözerek;
1.a. Çubuk Uç Kuvvetleri ve Taşıma Şeması (10)
1.b Kesme Kuvvet diyagramını çiziniz. (10)
1.c Eğilme Momenti diyagramını çiziniz. (10)
1.d. Deforme olmuş şeklini çiziniz. (10)

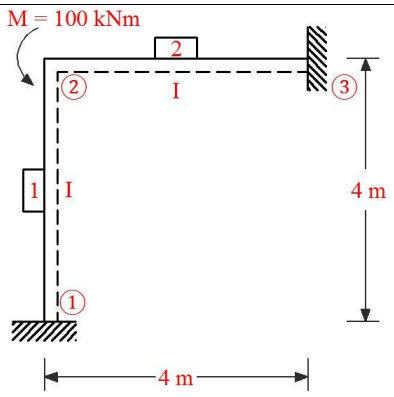
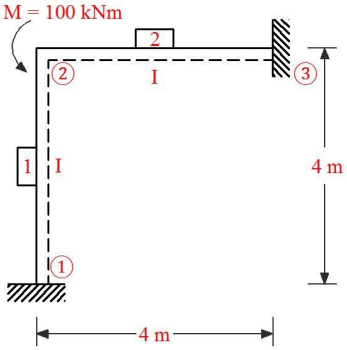


Şekil 1

Soru 2 (60 Puan): Şekil 2 de verilen Kirişi ; eksenel deformasyonları ihmal ederek rijitlik matrisi yöntemi ile çözünüz.
2.a. Kodlama Tablosu. (10)
2.b. Sistem rijitlik Matrisi (10)
2.c. Sistem yük Vektörü (10)
2.d. Düğüm Deplasmanları (5)
2.e. Kesme Kuvveti diyagramını çiziniz. (10)
2.f. Eğilme Momenti diyagramını çiziniz. (10)
2.d. Kirişin deformasyon yapmış şeklini çiziniz(5)



Şekil 2

| | |
|---|---|
| Soru 3 (60 P)<br>Şekil 3 te Verilen çerçeve sistemi; eksenel deformasyonları ihmal ederek rijitlik matrisi yöntemi ile çözünüz.<br>3.a. Kodlama Tablosunu elde ediniz. (10)<br>3.b. Sistem rijitlik Matrisini elde ediniz (10)<br>3.c. Sistem yük Vektörünü elde ediniz (10)<br>3.d. Düğüm Deplasmanlarını elde ediniz (5)<br>3.e. Kesme Kuvveti diyagramını çiziniz. (10)<br>3.f. Eğilme Momenti diyagramını çiziniz. (10)<br>3.g. Çerçevenin deformasyon yapmış şeklini çiziniz(5) | <br>Şekil 3 |
| Soru 4 (40 P):<br>Şekil 4 de Verilen çerçeve sistemi açı ya da Cross Yöntemi ile Çözerek;<br>4.a. Çubuk Uç Kuvvetleri ve Taşıma Şeması (15)<br>4.b Kesme Kuvvet diyagramını çiziniz. (15)<br>4.c Eğilme Momenti diyagramını çiziniz. (15)<br>4.d Çerçevenin deforme olmuş şeklini çiziniz. (15) | <br>Şekil 4 |