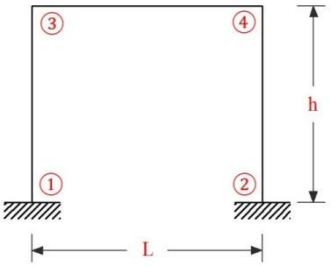
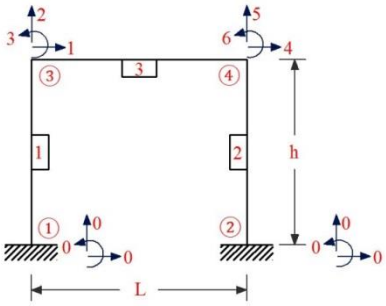
YAPI STATİĞİ II UYGULAMA PAKETİ II

Uygulama 1: Verilen Sistemlerin serbestlik derecelerini belirleyiniz. Sistemin rijitlik matrisi yöntemi ile çözümü için; Deplasman durumlarını şekil üzerinde göstererek kodlama tablolarını oluşturunuz.



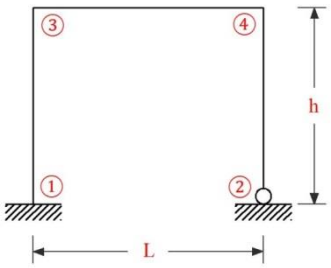


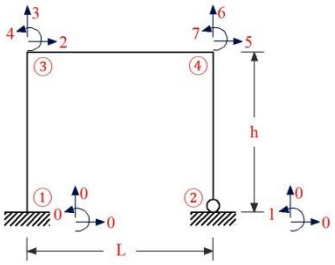
Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	1-3	000 123
2	2-4	000 456
3	3-4	123 456

Sistem

Serbestlik Derecesi
SD=4.3-6=6

Kodlama Tablosu



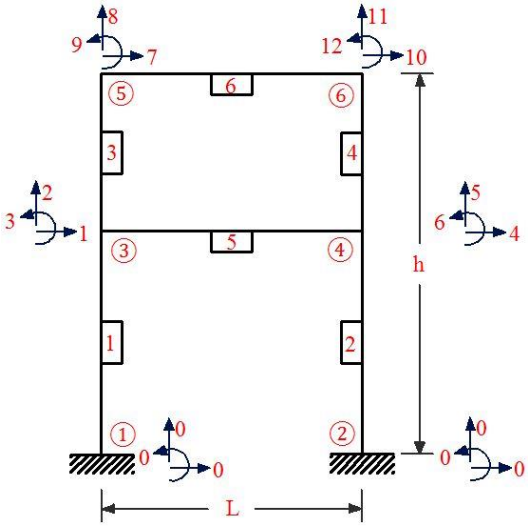


Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	1-3	000 234
2	2-4	001 567
3	3-4	234 567

Sistem

Serbestlik Derecesi
SD=4.3-5=7

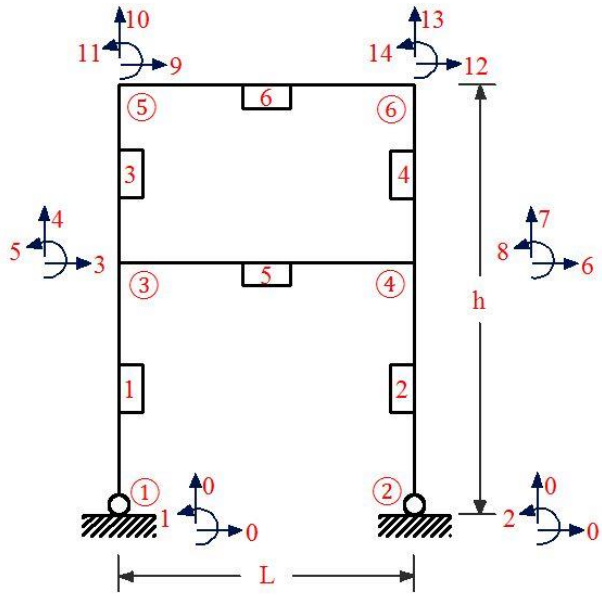
Kodlama Tablosu



Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	1-3	0 0 0 1 2 3
2	2-4	0 0 0 4 5 6
3	3-5	1 2 3 7 8 9
4	4-6	4 5 6 10 11 12
5	3-4	1 2 3 4 5 6
6	5-6	7 8 9 10 11 12

Serbestlik Derecesi
SD=6.3-6=12

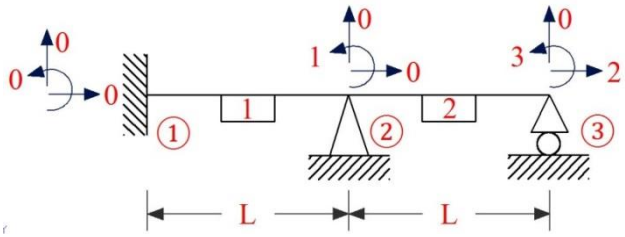
Kodlama Tablosu



Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	1-3	001 345
2	2-4	002 678
3	3-5	345 9,10,11
4	4-6	678 12,13,14
5	3-4	345 678
6	5-6	9,10,11 12,13,14

Serbestlik Derecesi
SD=6.3-4=14

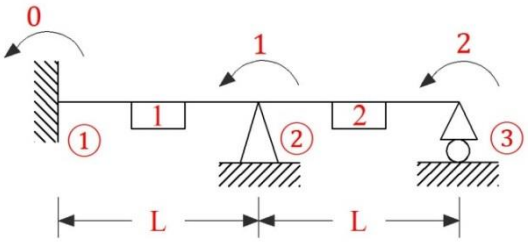
Kodlama Tablosu



Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	1-2	000 001
2	2-3	001 203

Serbestlik Derecesi
SD=3.3-6=3

Kodlama Tablosu

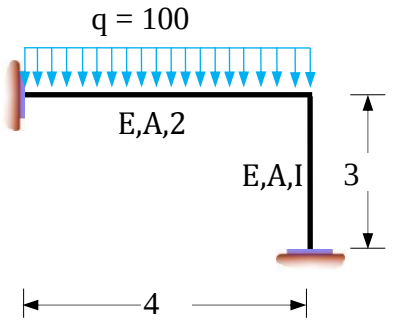


Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	1-2	01
2	2-3	12

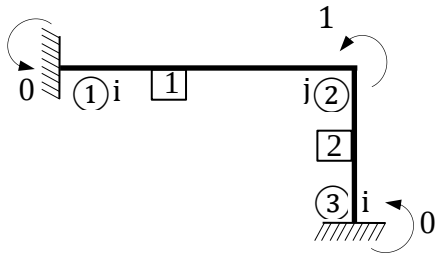
Kısaltılmış RM ile Çözüm
Serbestlik Derecesi
SD=3.1-1=2

Kodlama Tablosu

Uygulama 2: Verilen taşıyıcı sistemi eksenel deformasyonları ihmal ederek rijitlik matrisi yöntemi (kısaltılmış rijitlik matrisi) ile çözünüz



1. Düğüm, eleman ve deplasman numaraları



2. Kodlama Tablosu

Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları	Açı (β)
1	1-2	0 1	0°
2	3-2	0 1	90°

3-Eleman Rijitlik Matrisleri

$$[K]_1 = [K]_1' = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & \quad 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{4E2I}{4} & \frac{2E2I}{4} \\ \frac{2E2I}{4} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[K]_2 = [K]_2' = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & \quad 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{4EI}{3} & \frac{2EI}{3} \\ \frac{2EI}{3} & \frac{4EI}{3} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

4-Sistem Rijitlik Matrisi

Sistem serbestlik derecesi 1 olduğundan sistem denklemi de 1x1 boyutlu olacaktır.

$[K]_{1x1}.\{D\}_{1x1} = \{Q\}_{1x1}$

Eleman rijitliklerinin sisteme katkısının belirlenmesinde kodlama tekniğinden yararlanılacaktır. Bunun için; eleman kod numaraları vektörlerinden yararlanılarak sistem koordinatlarındaki eleman rijitlik matrislerinden ilgili terimler, sistem Rijitlik matrisine taşınacaktır. Kodlama tekniğinde; kod numaraları vektörleri; Eleman Rijitlik matrislerinin üzerine satır olarak, sağ tarafını da sütun olarak yazılır. Birinci ve ikinci elemanlar için yukarıda verilen matrisler ve gösterimden yararlanılarak, sistem rijitlik matrisi elde edilecektir.

$$[K_{11}] = (2EI)_1 + \left(\frac{4EI}{3}\right)_2 = \frac{10EI}{3}$$

5-Ankastrelik Uç Kuvvetleri

Kısaltılmış RM kullanılırken yalnızca ankastrelik uç momentleri; ankastrelik uç kuvvetleri vektörünü oluşturmaktadır. Üzerinde ara yük olan birinci eleman için;

$$\{f\}_{①} = \{f\}'_{①} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ \frac{-qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 133{,}33 \\ -133{,}33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ dir.}$$

6-Sistem Yük Vektörleri

Eleman ankastrelik uç kuvvetlerinden hangilerinin sistem yük vektörüne taşınacağına; eleman kod numaraları vektörü ile karar verilmektedir. Bunun için kod numaraları vektörü; eleman ankastrelik uç kuvvetleri vektörünün sağ tarafına yazılacak ve ilgili terimler ters işaretli olarak sistem yük vektörüne taşınacaktır. $\{Q\}_{11} = 133{,}33$

7-Sistem Denkleminin Çözümü

$$[K].\{D\} = \{Q\} \Longrightarrow \frac{10EI}{3}.D_1 = 133{,}33 \Longrightarrow D_1 = \frac{40}{EI}$$

8-Eleman Deplasman Vektörü

Eleman kod numaralarına karşılık gelen sistem deplasmanları eleman deplasman vektörünü oluşturur.

$$\{d\}_1 = \{d\}_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{40}{EI} \end{Bmatrix}, \{d\}_2 = \{d\}_2' = \begin{Bmatrix} 0 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{40}{EI} \end{Bmatrix}$$

9-Eleman Uç Kuvvetleri

Her eleman için eleman denklemleri kullanılarak uç kuvvetleri hesaplanacaktır.

$[K].\{d\} + \{f\} = \{p\}$

1.Eleman

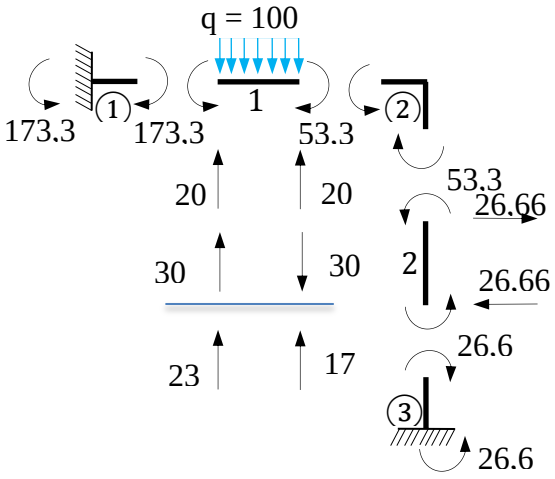
$$\begin{bmatrix} 2EI & EI \\ EI & 2EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{40}{EI} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 133,33 \\ -133,33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 173,33 \\ -53,33 \end{Bmatrix}$$

2.Eleman

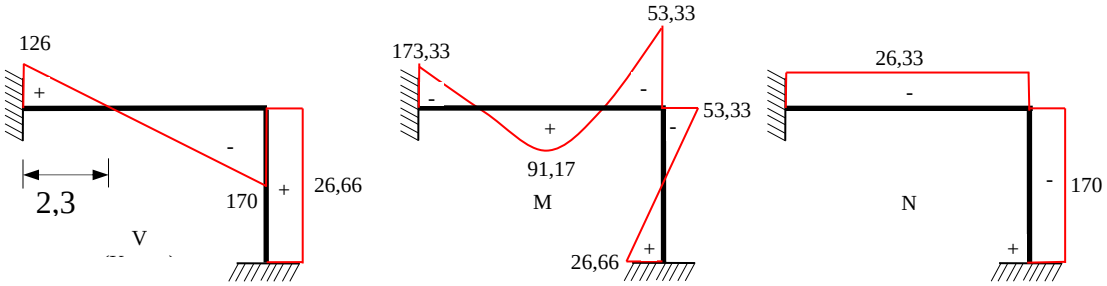
$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{3} & \frac{2EI}{3} \\ \frac{2EI}{3} & \frac{4EI}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{40}{EI} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26,66 \\ 53,33 \end{Bmatrix}$$

10. Taşıma Şeması ve Uç Kesme Kuvvetleri

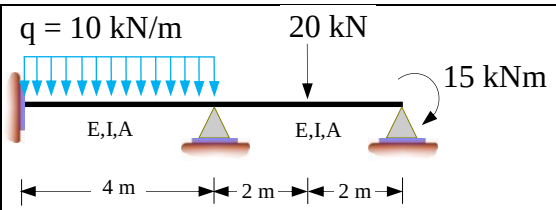
Eleman uç kesme kuvvetleri; $T_{ij} = T_{oij} + \frac{M_i + M_j}{L}$ ile belirlenmektedir.



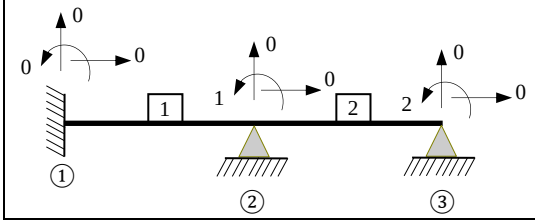
11- Diyagram Çizimi



Uygulama 3: Verilen sürekli kirişin,
Düğüm dönmelerini,
Çubuk uç kuvvetlerini,
Kesit tesirleri diyagramlarını rijitlik matrisi yöntemiyle elde ediniz.



1. Eleman, Düğüm ve deplassman Numaraları



2. kodlama tablosu

Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları	Açı (β)
1	1-2	000 001	0°
2	2-3	001 002	0°

3-Eleman Rijitlik Matrisleri

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}_{6x6}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_{6x6} \Rightarrow \begin{matrix} EA=1 \\ EI=1 \\ L=4 \end{matrix} \begin{matrix} \Rightarrow \frac{EA}{L}=\frac{1}{4}=0,25 \\ \Rightarrow \frac{12EI}{L^3}=\frac{12}{4^3}=0,1875 \\ \Rightarrow \frac{6EI}{L^2}=\frac{6}{4^2}=0,3750 \\ \Rightarrow \frac{2EI}{L}=\frac{2}{4}=0,50 \\ \Rightarrow \frac{4EI}{L}=\frac{4}{4}=1 \end{matrix}$$

1.eleman

$$[K]_1=[K]_1^{'}=\begin{matrix} \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \\ -0,25 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1875 & 0,375 & 0 & -0,1875 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 1 & 0 & -0,375 & 0,5 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1875 & -0,375 & 0 & 0,1875 & -0,375 \\ 0 & 0,375 & 0,5 & 0 & -0,375 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}_{6x6}$$

2.eleman

$$[K]_2=[K]_2^{'}=\begin{matrix} \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \\ -0,25 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1875 & 0,375 & 0 & -0,1875 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 1 & 0 & -0,375 & 0,5 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1875 & -0,375 & 0 & 0,1875 & -0,375 \\ 0 & 0,375 & 0,5 & 0 & -0,375 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}_{6x6}$$

4-Sistem Rijitlik Matrisi

Eleman tablosunda en büyük sistem serbestlik derecesi 2'dir..

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1{,}0+1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

$(K_{11})_{\text{sistem}} = (K_{66})'_1 + (K_{33})'_2,\ (K_{12})_{\text{sistem}} = (K_{63})'_2,\ (K_{22})_{\text{sistem}} = (K_{66})'_2$

5-Ankastrelik Uç Kuvvetleri

$$\{f\}_1 = \{f\}'_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{-qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ 13{,}33 \\ 0 \\ 20 \\ -13{,}33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \quad \{f\}_2 = \{f\}'_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

6-Sistem Yük Vektörü

$$\{Q\}_{2x1} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}_{\text{Direk}} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}_{\text{Ara yük}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 13{,}33-10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}33 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

7-Sistem Denkleminin Çözümü

$$[K] * \{D\} = \{Q\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}33 \\ -5 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} D_1 = 3{,}33 \\ D_2 = -6{,}66 \end{matrix}$$

8-Eleman Deplasman Vektörleri

$$\{d\}_1 = \{d\}'_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3{,}33 \end{Bmatrix};\ \{d\}_2 = \{d\}'_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ 0 \\ 0 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}33 \\ 0 \\ 0 \\ -6{,}66 \end{Bmatrix}$$

9-Eleman Uç Kuvvetleri

$\{P\} = \{K\}.\{d\} + \{f\}$ $\quad \{\ \} \Longrightarrow$ Eleman koordinatı

$\{P\}' = \{K\}'.\{d\}' + \{f\}'$ $\quad \{\ \}' \Longrightarrow$ Sistem koordinatı

1.eleman

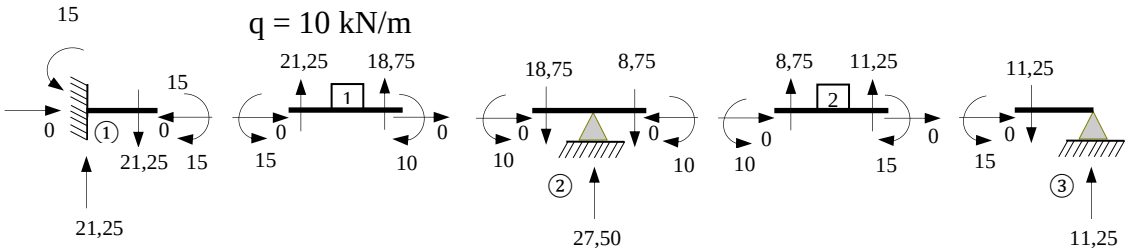
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1875 & 0{,}375 & 0 & -0{,}1875 & 0{,}375 \\ 0 & 0{,}375 & 1 & 0 & -0{,}375 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1875 & -0{,}375 & 0 & 0{,}1875 & -0{,}375 \\ 0 & 0{,}375 & 0{,}5 & 0 & -0{,}375 & 1 \end{bmatrix}_{6x6} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3{,}33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 13{,}33 \\ 0 \\ 20 \\ -13{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21{,}25 \\ 15{,}0 \\ 0 \\ 18{,}75 \\ -10 \end{bmatrix}$$

2.eleman

$$\begin{matrix} & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1875 & 0,375 & 0 & -0,1875 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 1 & 0 & -0,375 & 0,5 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1875 & -0,375 & 0 & 0,1875 & -0,375 \\ 0 & 0,375 & 0,5 & 0 & -0,375 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}_{6x6} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,33 \\ 0 \\ 0 \\ -6,66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8,75 \\ 10 \\ 0 \\ 11,25 \\ -15 \end{bmatrix}$$

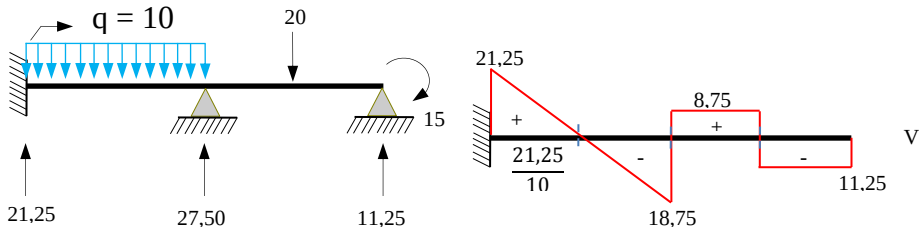
10- Taşıma Şeması

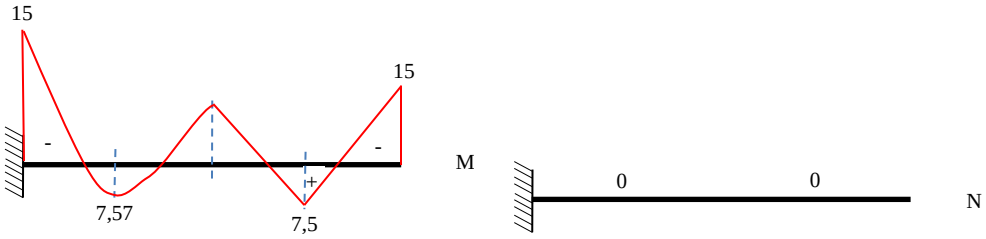


Not: Her düğüm ve eleman kendi içinde dengede olmalıdır. Her bir düğüm ve tüm sistem için;

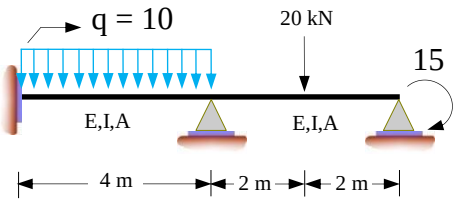
$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

11-Diyagramlar

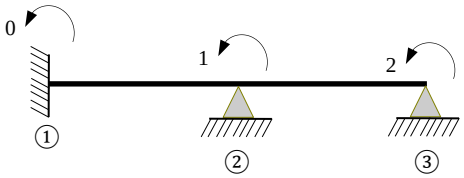




Uygulama 4: Verilen sürekli kirişin; Kısaltılmış rijitlik matrisi (düğüm noktası sabit sürekli kiriş) ile çözümünü yapınız



1-Numaralandırma



2. Kodlama Tablosu

E. No	Tarifi	Kod Numaraları	Açı (β)
1	1-2	0 1	0°
2	2-3	1 2	0°

3-Eleman Rijitlik Matrisleri

$\frac{4EI}{L} = 1,\ \frac{2EI}{L} = 0{,}5$

$$[K]_1 = [K]_1' = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} \qquad [K]_2 = [K]_2' = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

4-Sistem Rijitlik Matrisi: $[K] = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$

5-Ankastrelik Uç Momentleri

$$\{f\}_1 = \{f\}_1' = \begin{Bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ \frac{-qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13{,}33 \\ -13{,}33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\{f\}_2 = \{f\}_2' = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{-PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

6-Sistem Yük Vektörü

$$\{Q\}_{2x1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3{,}33 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}33 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

7-Sistem Denklem Çözümü

$$[K].\{D\} = \{Q\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}33 \\ -5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} D_1 = 3{,}33 \\ D_2 = -6{,}66 \end{matrix}$$

8-Eleman Deplasman Vektörü

$$\{d\}_1 = \{d\}_1' = \begin{Bmatrix} 0 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}_2 = \{d\}_2' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}33 \\ -6{,}66 \end{Bmatrix}$$

9-Eleman Uç Kuvvetleri

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

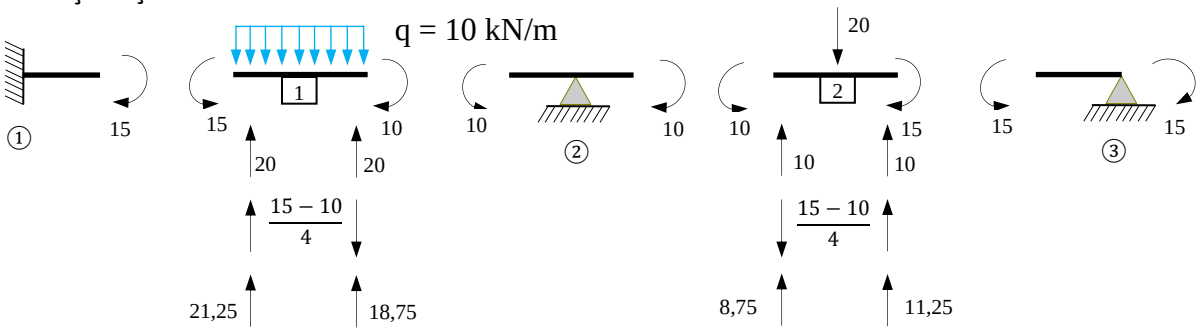
1.eleman

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13{,}33 \\ -13{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

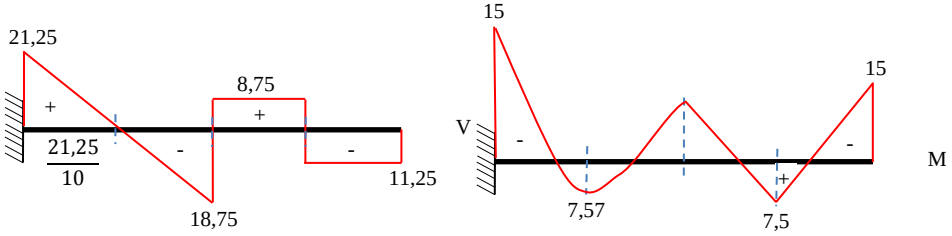
2.eleman

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13{,}33 \\ -13{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

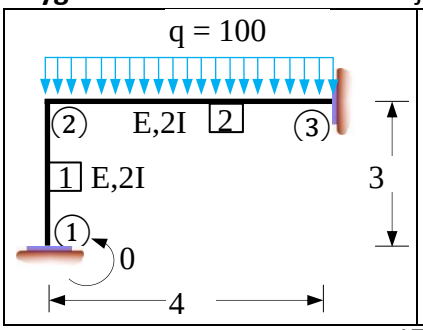
10-Taşıma Şeması



11-Diyagramlar



Uygulama 5: Verilen sistemi Rijitlik matrisi yöntemiyle çözünüz



E. N	Tarifi	Kodlar	β
1	1-2	0 1	0°
2	2-3	1 0	90°

$$[K]_1 = \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{3} & \frac{2EI}{3} \\ \frac{2EI}{3} & \frac{4EI}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad [K]_2 = [K]_2 = \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{4E2I}{4} & \frac{2E2I}{4} \\ \frac{2E2I}{4} & \frac{4E2I}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

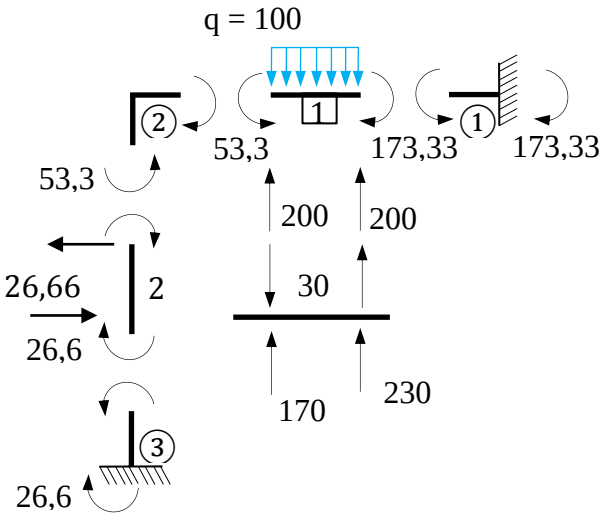
$$[K]_{1x1} = (k_{11})_1 + (k_{11})_2 = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{4} = \frac{10EI}{3}$$

$$\{f\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \quad \{f\}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ \frac{-qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 133,33 \\ -133,33 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, \{Q\} = -133,33$$

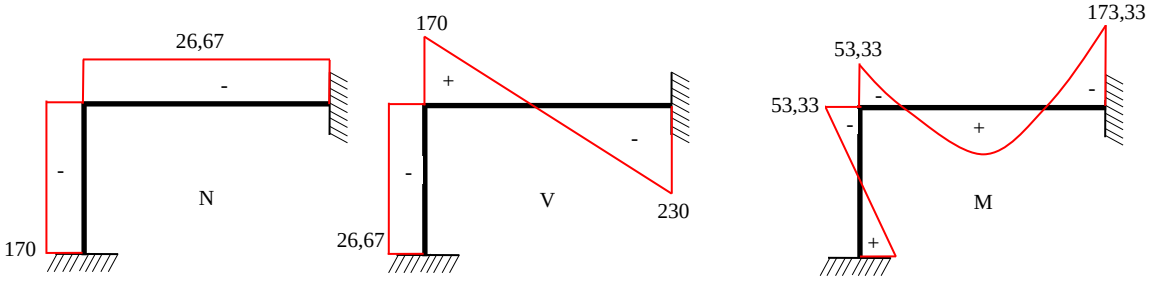
$$[K] * [D] = [Q] \Longrightarrow \frac{10EI}{3} * D_1 = -133,33 \Longrightarrow D_1 = -\frac{40}{EI}, \{d\}_1 = \{d\}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \{d\}_2 = \{d\}' = \begin{Bmatrix} D_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k] * \{d\} + \{f\} = \{P\}$$

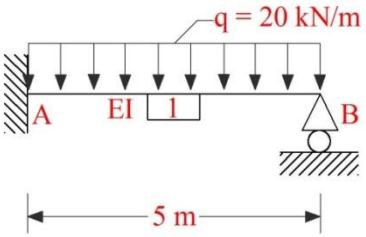
1.eleman $\begin{bmatrix} \frac{4EI}{3} & \frac{2EI}{3} \\ \frac{2EI}{3} & \frac{4EI}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{40}{EI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26,66 \\ -53,33 \end{bmatrix}$, 2.eleman $\begin{bmatrix} 2EI & EI \\ EI & 2EI \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{40}{EI} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 133,33 \\ -133,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,33 \\ -173,33 \end{bmatrix}$



$$N_{21} = -170$$
$$N_{23} = -26,67$$



Uygulama 6: Verilen sistemde eksenel deformasyonlarI ihmal ederek kesit tesirleri diyagramlarını elde ediniz



Genel ifadeleri elde edebilmek için q ve L yerine değerleri konulmadan çözüm yapılacaktır.

Kodlama tablosu

Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları
1	A-B	0 1

Eleman rijitlik matrisi:

$$[K]_1' = [K]_1 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Sistem rijitlik matrisi: $[K]_{1x1} = \frac{4EI}{L}$

Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri: $\{f\}_1 = \{f\}_1' = \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

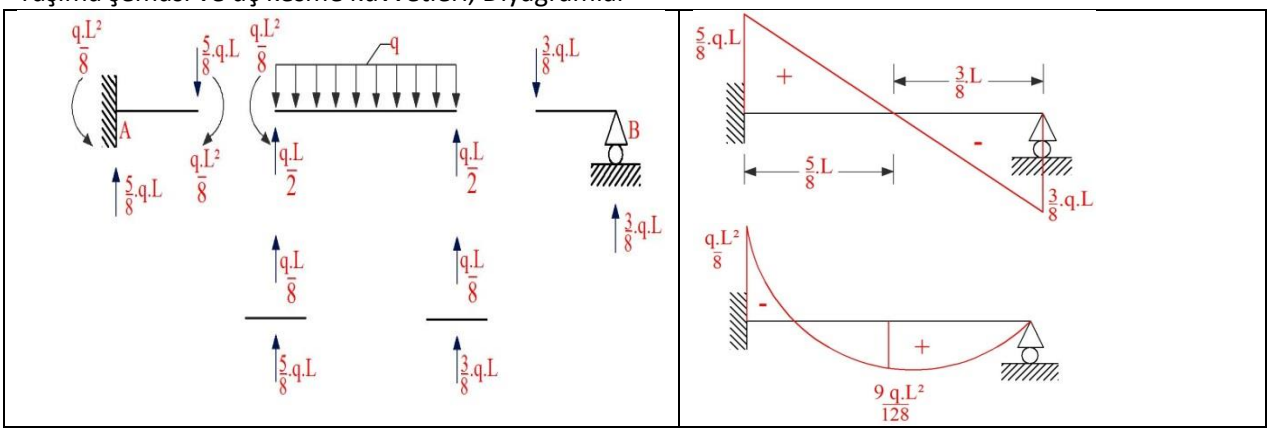
Sistem yük vektörü: $\{Q\}_{1x1} = \frac{qL^2}{12}$

Sistem Denklemi: $[K].\{D\} = \{Q\} \Rightarrow \frac{4EI}{L} * D_1 = \frac{qL^2}{12} \Rightarrow D_1 = \frac{qL^3}{48EI}$

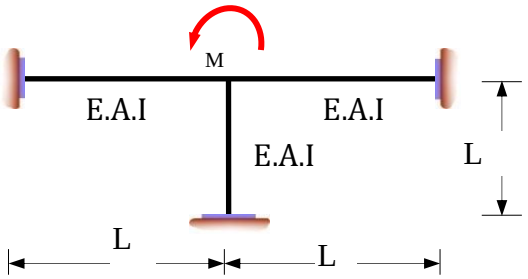
Eleman uç deplasmanları: $\{d\}_1 = \{d\}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^3}{48EI} \end{bmatrix}$

Eleman uç Kuvvetleri: $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^3}{48EI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$

Taşıma şeması ve uç kesme kuvvetleri, Diyagramlar

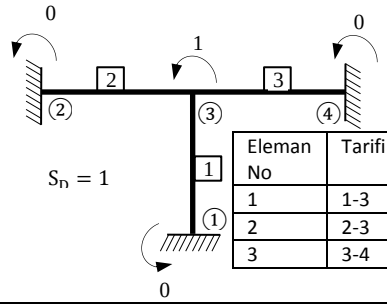


Uygulama 7: Verilen taşıyıcı sistemin kesit tesirleri diyagramlarını Eksenel deformasyonları ihmal ederek Rijitlik matrisi yöntemiyle, elde ediniz



Eksenel deformasyonlar ihmal edilirse kısaltılmış rijitlik matrisi kullanılabilir

1-2:Numaralndırma ve kodlama tablosu



Eleman No	Tarifi	Kod Numaraları	Açı (β)
1	1-3	0 1	0°
2	2-3	0 1	90°
3	3-4	1 0	0°

3. Eleman Rijitlik Matrisi

Üç eleman içinde I ve L aynı sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisinde eleman koordinatları ile aynıdır

$$[K]_1 = [K]_1 = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \qquad [K]_2 = [K]_2 = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \qquad [K]_3 = [K]_3 = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

4-Sistem Rijitlik Matrisi

$$[K]_{1x1} = [K_{11}] = [K_{11}]_1 + [K_{22}]_2 + [K_{11}]_3 = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{12EI}{L}$$

5-Eleman Ankastrelik Uç Kuvvetleri Ara Yük Olmadığından;, $\{\mathbf{f}\}_1 = \{\mathbf{f}\}_2 = \{\mathbf{f}\}_3 = \begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}$

6-Sistem Yük Vektörü: $\{\mathbf{Q}\}_{2x1} = \{\mathbf{Q_1}\}_{\text{Ara yük}} + \{\mathbf{Q_1}\}_{\text{Direk yük}} = \{\mathbf{0}\} + \{\mathbf{M}\} = \{\mathbf{M}\}$

7-Sistem Denklem Çözümü: $[K].\{D\} = \{Q\}$, $\frac{12EI}{L}.D_1 = M \implies D_1 = \frac{ML}{12EI}$

8-Çubuk ve Deplasmanları: $\{d\}_1 = \begin{Bmatrix}0\\ D_1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ \frac{ML}{12EI}\end{Bmatrix}$, $\{d\}_2 = \begin{Bmatrix}0\\ D_1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ \frac{ML}{12EI}\end{Bmatrix}$, $\{d\}_3 = \begin{Bmatrix}D_1\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{ML}{12EI}\\ 0\end{Bmatrix}$

9-Çubuk Uç Kuvvetleri

1.Eleman

$$\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\ \frac{ML}{12EI}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{M}{6}\\ \frac{M}{3}\end{bmatrix}$$

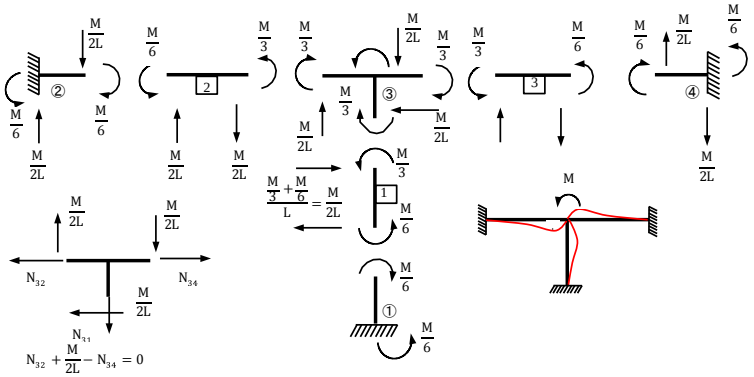
2.Eleman

$$\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0\\ \frac{ML}{12EI}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{M}{6}\\ \frac{M}{3}\end{bmatrix}$$

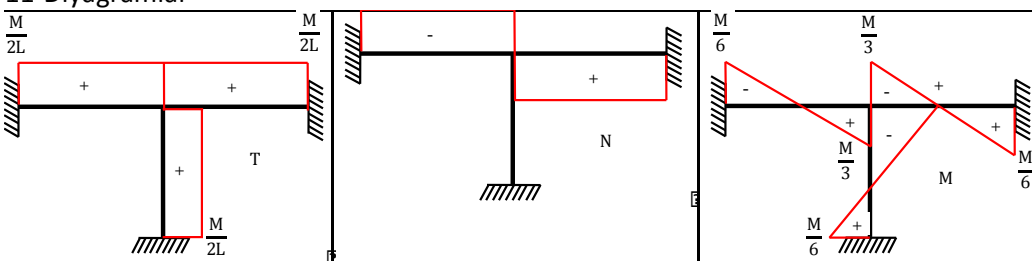
3.Eleman

$$\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\frac{ML}{12EI}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{M}{3}\\ \frac{M}{6}\end{bmatrix}$$

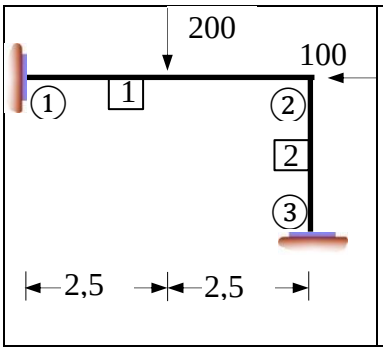
10.Taşıma Şeması ve Uç Kesme Kuvvetleri



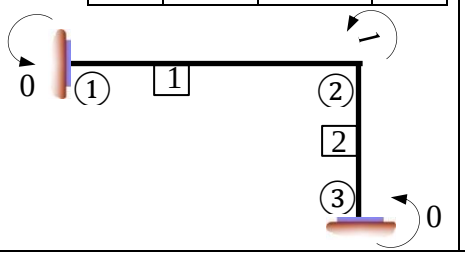
11-Diyagramlar



Uygulama 8: Verilen sistemi rijitlik matrisi yöntemi ile çözerek kesit tesirleri diyagramlarını elde ediniz



EN	Tarifi	Kod N.	β
1	1-2	0 1	0°
2	2-3	1 0	90°



Eleman Rijitlik Matrisleri,

$$[K]_1=[K]_3=\begin{matrix}&0&1\\0&\frac{4EI}{5}&\frac{2EI}{5}\\1&\frac{2EI}{5}&\frac{4EI}{5}\end{matrix}\qquad [K]=\begin{matrix}&0&1\\0&\frac{4EI}{4}&\frac{2EI}{4}\\1&\frac{2EI}{4}&\frac{4EI}{4}\end{matrix}$$

Sistem Rijitlik Matrisi

$$[K]_{(11)}=(k_{11})_{①}+(k_{11})_{②}=\frac{4EI}{5}+\frac{4EI}{4}=\frac{9EI}{5}$$

Ankastrelik Uç Kuvvetleri: $\{f\}_{①}=\{f\}'=\begin{Bmatrix}\frac{PL}{8}\\\frac{-PL}{8}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}125\\-125\end{Bmatrix}$ $\qquad \{f\}_{②}=\{f\}'=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$

Sistem Yük Vektörü: $\{Q\}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-(-125)\\0\end{Bmatrix}=125$

Sistem Denklemi ve Sistem Deplasmanları: $[K]*[D]=[O]\Longrightarrow\frac{9EI}{5}*\Delta_1=125\Longrightarrow\Delta_1=\frac{69,5}{EI}$

Eleman Deplasman vektörleri: $\{d\}_1=\{d\}'=\begin{Bmatrix}0\\69,5/EI\end{Bmatrix}$ $\qquad \{d\}_2=\{d\}'=\begin{Bmatrix}69,5/EI\\0\end{Bmatrix}$

Eleman Uç Kuvvetleri: $[k]*\{d\}+\{f\}=\{p\}$

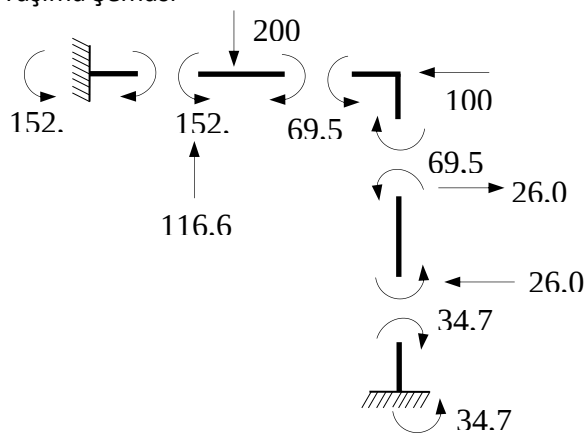
1. Elaman

$$\begin{bmatrix}\frac{4EI}{5}&\frac{2EI}{5}\\\frac{2EI}{5}&\frac{4EI}{5}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0\\\frac{69,5}{EI}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}125\\-125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}\Rightarrow P_1=152,8\\ \Rightarrow P_2=-69,5$$

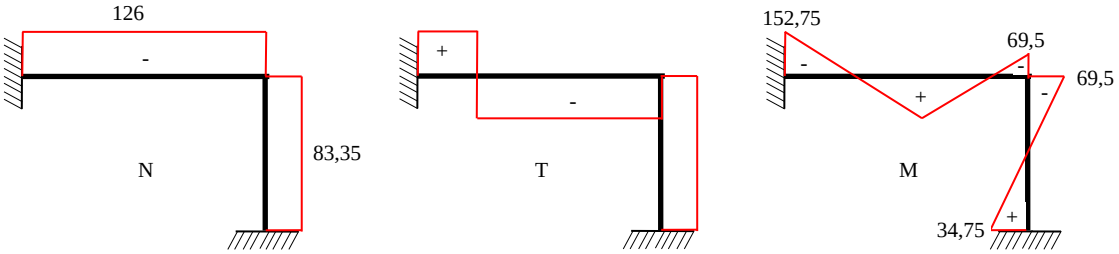
, 2. eleman

$$\begin{bmatrix}\frac{4EI}{4}&\frac{2EI}{4}\\\frac{2EI}{4}&\frac{4EI}{4}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}69,5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}\Rightarrow P_1=69,5\\ \Rightarrow P_2=34,75$$

Taşıma Şeması

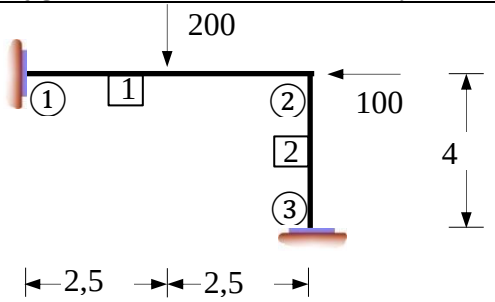


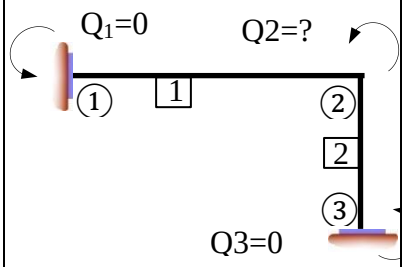
Diyagramlar



$$N_{21}=-126,06\,,N_{23}=-83,35$$

Uygulama 9:: Verilen sistemi açı yöntemi ile çözerek kesit tesirleri diyagramlarını elde ediniz





Çubuk Birim Deplasman Sabitleri

1.Eleman için,

$k_{ii} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{5}$, $k_{ij} = \frac{2EI}{5}$

2.Eleman için,

$k_{ii} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4}$, $k_{ij} = \frac{2EI}{4}$

Ankastrelik Uç Momenteleri

$M_{a12} = -M_{a21} = \frac{PL}{8} = 125$, $M_{a23} = -M_{a32} = 0$

Düğüm Denge Denklemleri: $\Sigma M_{aij} + M_i + Q_i * \Sigma k_{ii} + \Sigma Q_j * k_j = 0$

$(\Sigma M_{a21} + M_{23}) + M_2 + Q_2[(k_{ii})_1 + (k_{ii})_2] + Q_1(k_{ji})_1 + +(k_{ii})_2] + Q_3(k_{ji})_2 = 0$

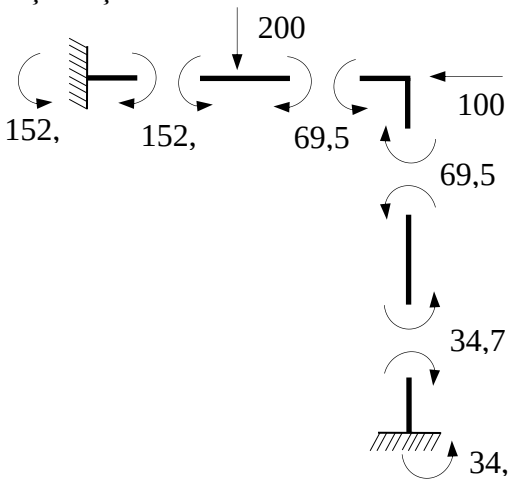
$(-125 + 0) + 0 + Q_2\left(\frac{4EI}{5} + \frac{4EI}{4}\right) = 0 \Longrightarrow Q_2 = \frac{69,5}{EI}$

Çubuk Uç Momentleri

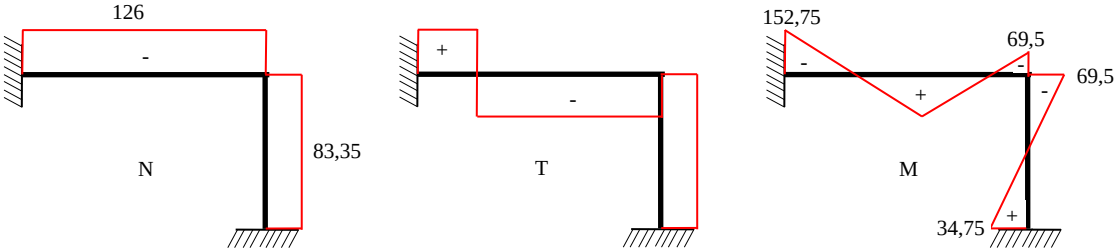
$M_{a12} = M_{a12(2Q_1+Q_2)} * \frac{2EI}{L} = 152,8$, $M_{a21} = M_{a21(2Q_2+Q_1)} * \frac{2EI}{L} = -69,5$

$M_{a23} = M_{a23(2Q_2+Q_3)} * \frac{2EI}{L} = 69,5$, $M_{a32} = M_{a32(2Q_3+Q_2)} * \frac{2EI}{L} = 34,75$

Taşıma Şeması

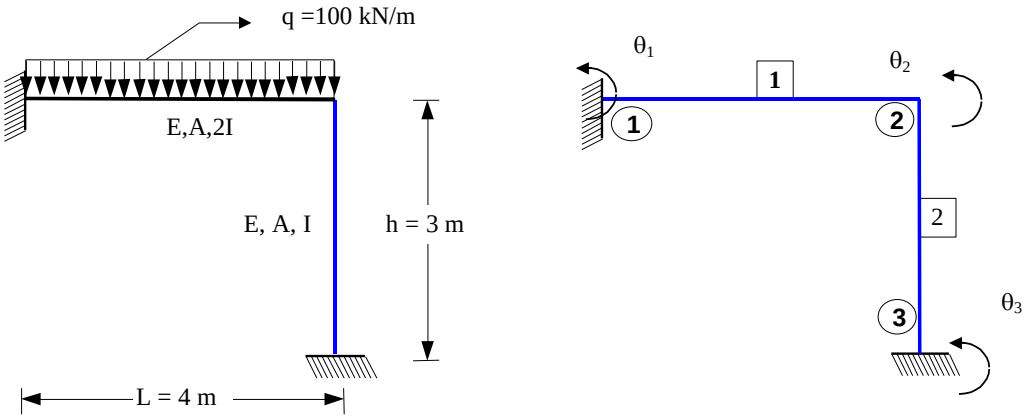


Diyagramlar



$N_{21} = -126,06$, $N_{23} = -83,35$

Uygulama 10: Verilen Çerçeve sistemi Açı Yöntemi İle Çözünüz



Sistemin 1 ve 3 numaralı düğümleri ankastre olduğundan dönmeler tutulmuştur. Yalnız 2 numaralı düğümde θ_2 dönmesi sistemin bilinmeyenidir.

Eleman birim deplasman katsayıları Birinci eleman için $(k_{ii})_1 = \frac{4EI}{L} = \frac{4E2I_0}{4} = 2EI_0$ $(k_{ji})_1 = \frac{2EI}{L} = \frac{2E2I_0}{4} = EI_0$	İkinci eleman için $(k_{ii})_2 = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI_0}{3} = 1.333EI_0$ $(k_{ji})_2 = \frac{2EI}{L} = \frac{2EI_0}{3} = 0.667EI_0$
Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri Yalnız birinci elemanda ara yük vardır $M_{a12} = \frac{qL^2}{12} = 133.33$ $M_{a21} = -\frac{qL^2}{12} = -133.33$	**Düğüm denge denklemleri** Sistemin bilinmeyen tek dönmesi 2 numaralı düğümdeki θ_2 dir. Bunun için 2 düğümde denge denkleminin yazılması yeterli olacaktır. Düğüm denge denklemi ve θ_2 dönmesi;

$$\sum M_{aij} + M_i + \theta_i.\sum k_{ii} + \sum k_{ij}.\theta_j = 0$$

$$M_{a21} + 0 + \theta_2.[(k_{11})_1 + (k_{11})_2] + \theta_1.(k_{12})_1 + \theta_3.(k_{12})_2 = 0$$

$$-133.33 + 0 + \theta_2(2EI_0 + 1.333EI_0) + 0 + 0 = 0$$

$$\theta_2 = \frac{133.33}{3.333EI_0} = \frac{39.99}{EI_0} rad$$

şeklinde hesap edilir.

Eleman Uç Momentleri

Eleman uç momentleri için ifade; $(2.\theta_i + \theta_j)\frac{2EI}{L} + M_{aij} = M_{ij}$ şeklinde idi

$$(\theta_i + 2.\theta_j)\frac{2EI}{L} + M_{aji} = M_{ji}$$

Her eleman için bu denklemi uygulayarak iki adet uç momenti elde edebiliriz.

1 numaralı eleman (1-2 arasında)

$$M_{12} = (2.\theta_1 + \theta_2)\frac{2E2I_0}{L} + M_{a12} = (0 + \frac{39.99}{EI_0})\frac{2E2I_0}{4} + 133.33 = 173.32 kNm$$

$$M_{21} = (\theta_1 + 2.\theta_2)\frac{2E2I_0}{L} + M_{a21} = (0 + 2.\frac{39.99}{EI_0})\frac{2E2I_0}{4} - 133.33 = -53.35 kNm$$

2 numaralı eleman (2-3 arasında)

$$M_{23} = (2.\theta_2 + \theta_3)\frac{2EI_0}{L} + M_{a23} = (2.\frac{39.99}{EI_0} + 0)\frac{2EI_0}{3} + 0 = 53.32\text{kNm}$$

$$M_{32} = (2.\theta_3 + \theta_2)\frac{2EI_0}{L} + M_{a32} = (0 + \frac{39.99}{EI_0})\frac{2EI_0}{3} = 26.66kNm$$

Eleman Uç kesme Kuvvetleri

Eleman uç kesme kuvvetleri için denklem;

$$\frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_j + T_{oij} = T_{ij}$$ idi

$$-\frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_j + T_{oji} = T_{ji}$$

1 elemanın uç kuvvetleri

$$T_{12} = \frac{6E2I_0}{4^2}\theta_1 + \frac{6E2I_0}{4^2}\theta_2 + T_{o12} = 0 + \frac{6E2I_0}{4^2}.\frac{39.99}{EI_0} + 200 = 229.99\text{kN}$$

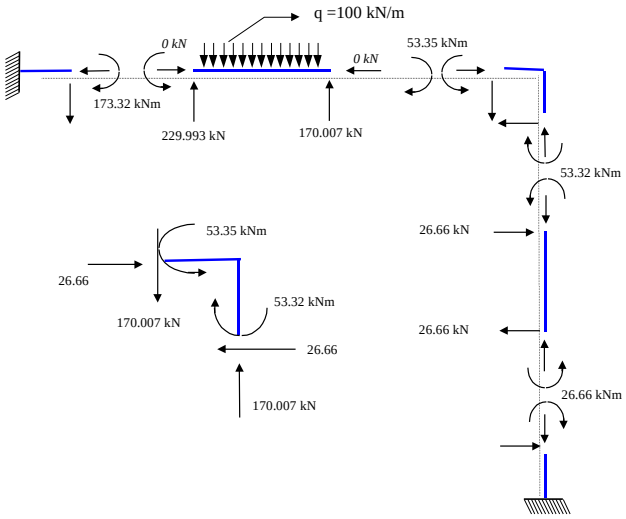
$$T_{21} = -\frac{6E2I_0}{4^2}\theta_2 - \frac{6E2I_0}{4^2}\theta_1 + T_{o21} = -\frac{6E2I_0}{4^2}.\frac{39.99}{EI_0} + 200 = 170.00\text{kN}$$

2 elemanın uç kuvvetleri

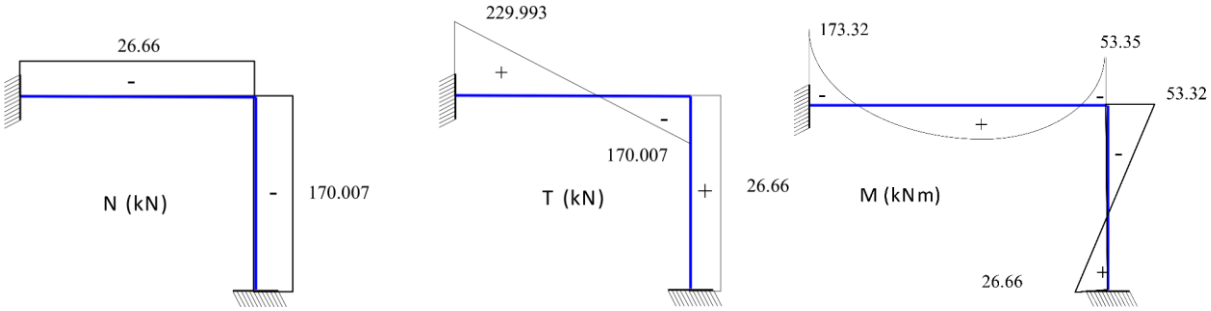
$$T_{23} = \frac{6EI_0}{3^2}\theta_2 + \frac{6EI_0}{3^2}\theta_3 + T_{o23} = \frac{6EI_0}{3^2}.\frac{39.99}{EI_0} = 26.66\text{kN}$$

$$T_{32} = -\frac{6EI_0}{3^2}\theta_3 - \frac{6EI_0}{3^2}\theta 2 + T_{032} = 0 - \frac{6EI_0}{3^2}.\frac{39.99}{EI_0} = -26.66\text{kN}$$

Taşıma Şeması

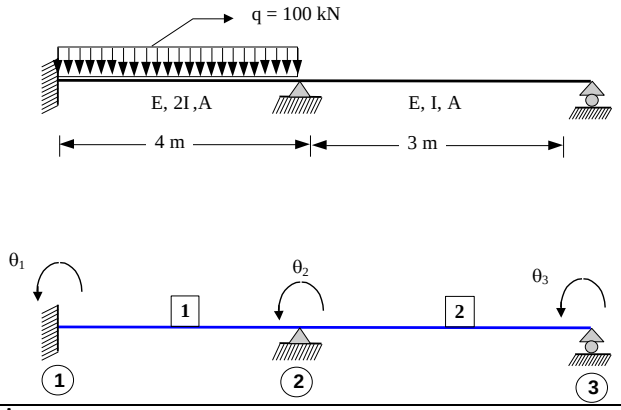


Kesit Tesirleri Diyagramları



Uygulama 11: Açı Yöntemi İle Sürekli kiriş

Şekilde verilen sürekli kirişi açı yöntemi ile çözelim. Kirişin yükleme durumu ve düğüm serbestlik dereceleri Yanda verilmiştir. Sistemin 1 düğümü ankastre olduğundan θ_1 dönmesi tutulmuştur. 2 ve 3 numaralı düğümlerindeki θ_2 ve θ_3 dönmeleri sistemin bilinmeyenidir



Eleman birim deplasman katsayıları

Birinci eleman için

$$(k_{ii})_1 = \frac{4EI}{L} = \frac{4E2I_0}{4} = 2EI_0$$

$$(k_{ji})_1 = \frac{2EI}{L} = \frac{2E2I_0}{4} = EI_0$$

İkinci eleman için

$$(k_{ii})_2 = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI_0}{3} = 1.333EI_0$$

$$(k_{ji})_2 = \frac{2EI}{L} = \frac{2EI_0}{3} = 0.667EI_0$$

Eleman Ankastrelik uç kuvvetleri

Yalnız birinci elemanda yük vardır

$$M_{a12} = \frac{qL^2}{12} = 133.33$$

$$M_{a21} = -\frac{qL^2}{12} = -133.33$$

Düğüm denge denklemleri

2 ve 3 numaralı düğümlerde bilinmeyen 2 adet dönme olduğundan bu düğümlerde denge denklemleri yazılacaktır.

$$\sum M_{aij} + M_i + \theta_i . \sum k_{ii} + \sum k_{ij} . \theta_j = 0$$

2 Düğümünde denge denklemi

$$M_{a21} + 0 + \theta_2 . [(k_{11})_1 + (k_{11})_2] + \theta_1 . (k_{12})_1 + \theta_3 . (k_{12})_2 =$$

$$-133.33 + 0 + \theta_2 (2EI_0 + 1.333EI_0) + 0 + 0.667EI_0 . \theta_3 = 0$$

$$3.333EI_0 . \theta_2 + 0.667EI_0 . \theta_3 = 133.33 \qquad (1)$$

3 Düğümünde denge denklemi

$$M_{a32} + 0 + \theta_3 . (k_{11})_2 + \theta_2 . (k_{12})_2 = 0$$

$$0 + 0 + \theta_3 (1.333EI_0) + 0 + 0.667EI_0 . \theta_2 = 0$$

$$0.667EI_0 . \theta_2 + 1.333EI_0 . \theta_3 = 0 \qquad (2)$$

Deplasmanların Hesabı

1 ve 2 numaralı denklemler birlikte çözülerek; düğüm dönmeleri hesaplanabilir.

$$EI_0 \begin{bmatrix} 3.333 & 0.667 \\ 0.667 & 1.333 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 133.33 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$EI_0 \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 44.45 \\ -22.23 \end{Bmatrix}$$

Eleman Uç Momentleri

Her eleman için moment denge denklemi uygulayarak iki adet uç momenti elde edebiliriz.

1 numaralı eleman (1-2 arasında)

$$M_{12} = (2.\theta_1 + \theta_2)\frac{2E2I_0}{L} + M_{a12} = (0 + \frac{44.45}{EI_0})\frac{2E2I_0}{4} + 133.33 = 177.78kNm$$

$$M_{21} = (\theta_1 + 2.\theta_2)\frac{2E2I_0}{L} + M_{a21} = (0 + 2.\frac{44.45}{EI_0})\frac{2E2I_0}{4} - 133.33 = -44.44kNm$$

2 numaralı eleman (2-3 arasında)

$$M_{23} = (2.\theta_2 + \theta_3)\frac{2EI_0}{L} + M_{a23} = (2.\frac{44.45}{EI_0} - \frac{22..23}{EI_0})\frac{2EI_0}{3} + 0 = 44.44kNm$$

$$M_{32} = (2.\theta_3 + \theta_2)\frac{2EI_0}{L} + M_{a32} = (-2\frac{22.23}{EI_0} + \frac{44.45}{EI_0})\frac{2EI_0}{3} = 0kNm$$

Eleman Uç kesme Kuvvetleri

Eleman uç kesme kuvvetleri için denklem; $\frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_j + T_{oij} = T_{ij}$ idi

$$-\frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_j + T_{oji} = T_{ji}$$

1 elemanın uç kuvvetleri

$$T_{12} = \frac{6E2I_0}{4^2}\theta_1 + \frac{6E2I_0}{4^2}\theta_2 + T_{o12} = 0 + \frac{6E2I_0}{4^2}.\frac{445}{EI_0} + 200 = 233.33kN$$

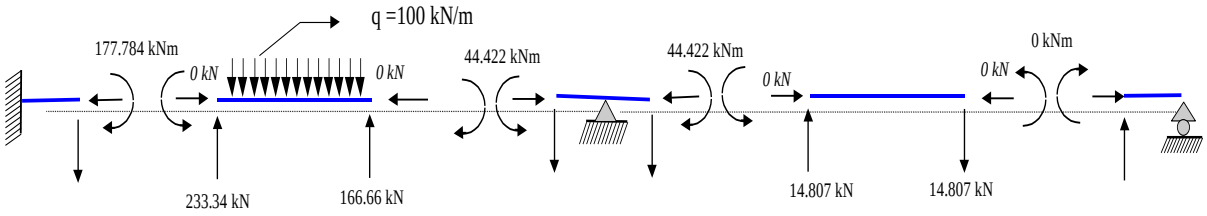
$$T_{21} = -\frac{6E2I_0}{4^2}\theta_2 - \frac{6E2I_0}{4^2}\theta_1 + T_{o21} = -\frac{6E2I_0}{4^2}.\frac{44.45}{EI_0} + 200 = 166.67kN$$

2 elemanın uç kuvvetleri

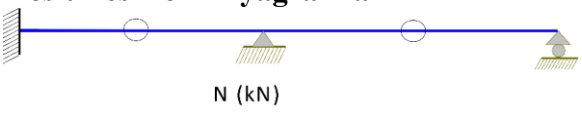
$$T_{23} = \frac{6EI_0}{3^2}\theta_2 + \frac{6EI_0}{3^2}\theta_3 + T_{o23} = \frac{6EI_0}{3^2}.\frac{44.45}{EI_0} - \frac{6EI_0}{3^2}.\frac{22.23}{EI_0} = 14.82N$$

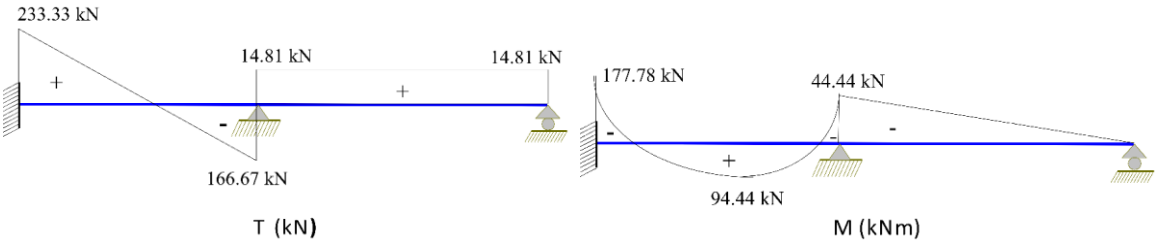
$$T_{32} = -\frac{6EI_0}{3^2}\theta_3 - \frac{6EI_0}{3^2}\theta 2 + T_{032} = -\frac{6EI_0}{3^2}.\frac{22.23}{EI_0} - \frac{6EI_0}{3^2}.\frac{44.45}{EI_0} = -14.82kN$$

Kesit Tesirleri



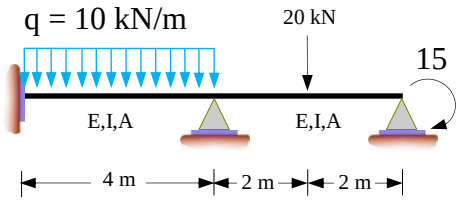
Kesit Tesirleri Diyagramları



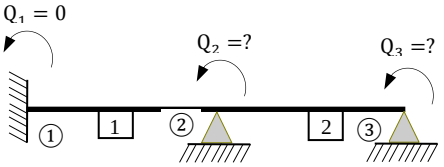


Açı Yöntemi ile yapılan çözümlerin; rijitlik matrisi yöntemi ile elde edilenler ile aynı olduğu görülmüştür.

Uygulma 12: Verilen sürekli kiriş sistemini Açı Yöntemiyle çözelim



1-Numaralandırma



2-Eleman Birim Deplasman Sabitleri

$$(k_{ii})_{1-2} = (k_{ii})_1 = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI, \quad (k_{ij})_{1-2} = (k_{ij})_1 = \frac{2EI}{L} = \frac{2EI}{4} = 0{,}5\ EI$$

$$(k_{ii})_{2-3} = (k_{ii})_2 = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI, \quad (k_{ij})_{2-3} = (k_{ij})_2 = \frac{2EI}{L} = \frac{2EI}{4} = 0{,}5\ EI$$

3-Ankastrelik Uç Momentleri

$$M_{a12} = -M_{a21} = \frac{qL^2}{12} = \frac{10.4^2}{12} = 13{,}33\ kNm, \quad M_{a21} = -13{,}33\ kNm$$

$$M_{a23} = -M_{a32} = \frac{PL}{8} = \frac{20*4}{8} = 10\ kNm, \quad M_{a32} = -10\ kNm$$

4-Düğüm Denge Denklemleri

$$\Sigma M_{aij} + M_i + Q_i * \Sigma k_{ii} + \Sigma Q_j * k_{ij} = 0$$

② ve ③ **düğümleri için denge denklemleri yazılır.**

② düğümü için denge denklemi

$$\Sigma M_{a21} + M_{23} + M_2 + Q_2 * ((k_{ii})_1 + (k_{ii})_2) + Q_1 * (k_{ii})_1 + Q_3 * (k_{ij})_2 = 0$$

$$-13{,}33 + 10 + Q_2 * (EI + EI) + Q_3 * (0{,}5\ EI) = 0$$

$$2EI * Q_2 + 0{,}5\ EI * Q_3 = 3{,}33 \quad (1)$$

③ düğümü için denge denklemi

$$\Sigma M_{a32} + M_3 + Q_3 * (k_{ii})_2 + Q_2 * (k_{ij})_2 = 0$$

$$-10 + 15 + Q_3 * (EI) + Q_2 * (0{,}5\ EI) = 0$$

$$EI.\,Q_3 + 0{,}5\ EI.\,Q_2 = -5 \quad (2)$$

① ve ② denklemlerinin matris formunda yazalım

$$\begin{bmatrix} 2\ EI & 0{,}5\ EI \\ 0{,}5\ EI & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}33 \\ -5 \end{bmatrix} \Longrightarrow Q_2 = \frac{3{,}33}{EI}\ ,\ Q_3 = \frac{-6{,}66}{EI}$$

Rijitlik matrisiyle elde edilen sistem denkleminin aynısı elde edilmiştir.

6-Eleman Uç Momentleri (M_{ij} ve M_{ii})

$$M_{ij} = (2Q_i + Q_j) * \frac{2EI}{L} + M_{aij}\ ,\ M_{ji} = (Q_i + 2Q_j) * \frac{2EI}{L} + M_{aji}$$

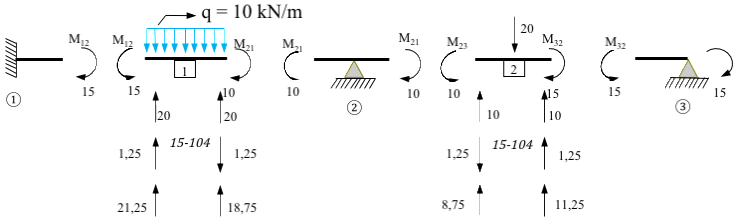
$$M_{12} = (2Q_1 + Q_2) * \frac{2EI}{4} + M_{a12} \Rightarrow \frac{3{,}33}{EI} * \frac{2EI}{4} + 13{,}33 = 15\ kNm$$

$$M_{21} = (Q_1 + 2Q_2) * \frac{2EI}{4} + M_{a21} \Rightarrow \frac{2 * 3{,}33}{EI} * \frac{2EI}{4} - 13{,}33 = -10\ kNm$$

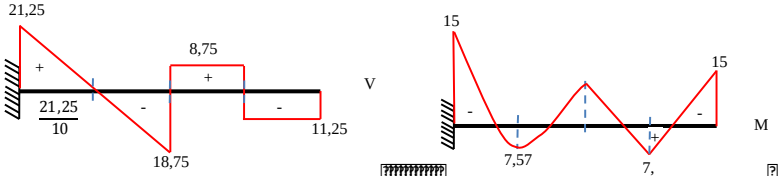
$$M_{23} = (2Q_2 + Q_3) * \frac{2EI}{4} + M_{a23} \Rightarrow \left(\frac{2 * 3{,}33}{EI} - \frac{6{,}66}{EI}\right) * \frac{2EI}{4} + 10 = 10\ kNm$$

$$M_{32} = (Q_2 + 2Q_3) * \frac{2EI}{4} + M_{a32} \Rightarrow \left(\frac{3{,}33}{EI} - \frac{2 * 6{,}66}{EI}\right) * \frac{2EI}{4} - 10 = -15\ kNm$$

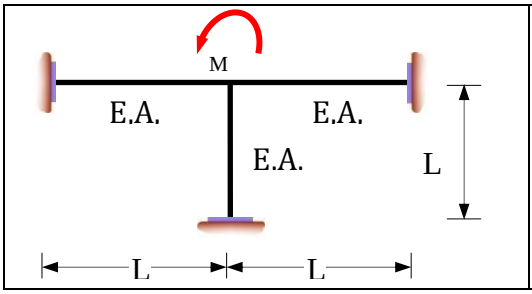
7- Uç Kesme Kuvvetleri ve Taşıma Şeması

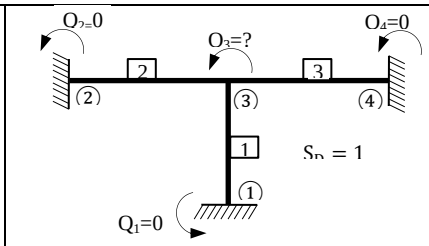


8-Diyagram Çizimi



Uygulama 13: Verilen Sitemi Açı Yöntemi ile çözerek kesit tesirleri diyagramlarını elde ediniz





1. Birim deplasman sabitleri;
Tüm çubuklar aynı;

$$\mathbf{K_{ii}} = \frac{\mathbf{4EI}}{\mathbf{L}}$$

$$\mathbf{K_{ij}} = \frac{\mathbf{2EI}}{\mathbf{L}}$$

2.Ankastrelik Uç Momentleri
Ara yükler yoktur.

3. Düğüm Denge Denklemleri

Tek bilmeyen olduğu için 3 numaralı düğümde denge denklemleri yazılacaktır.

3.düğüm denğesi (i=3)

$$\Sigma M_{aij} + M_i + Q_i.\Sigma k_{ii} + Q_j.K_{ij} = 0;\quad 0 - M + Q_3\left(\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L}\right) + 0 + 0 + 0 = 0\,;\ Q_3 = \frac{ML}{12EI}$$

4.Çubuk Uç Momentlerinin Hesabı

$$M_{ij} = (2Q_i + Q_j).\frac{2EI}{L} + M_{aij}, \qquad M_{ji} = (Q_i + 2Q_j).\frac{2EI}{L} + M_{aji}$$

1.eleman: (1-3 çubuğu)

$$M_{13} = (2Q_1 + Q_3).\frac{2EI}{L} + M_{a13} \Rightarrow \frac{ML}{12EI}.\frac{2EI}{L} = \frac{M}{6},\ M_{31} = (Q_1 + 2Q_3).\frac{2EI}{L} + M_{a31} \Rightarrow \frac{2ML}{12EI}.\frac{2EI}{L} = \frac{M}{3}$$

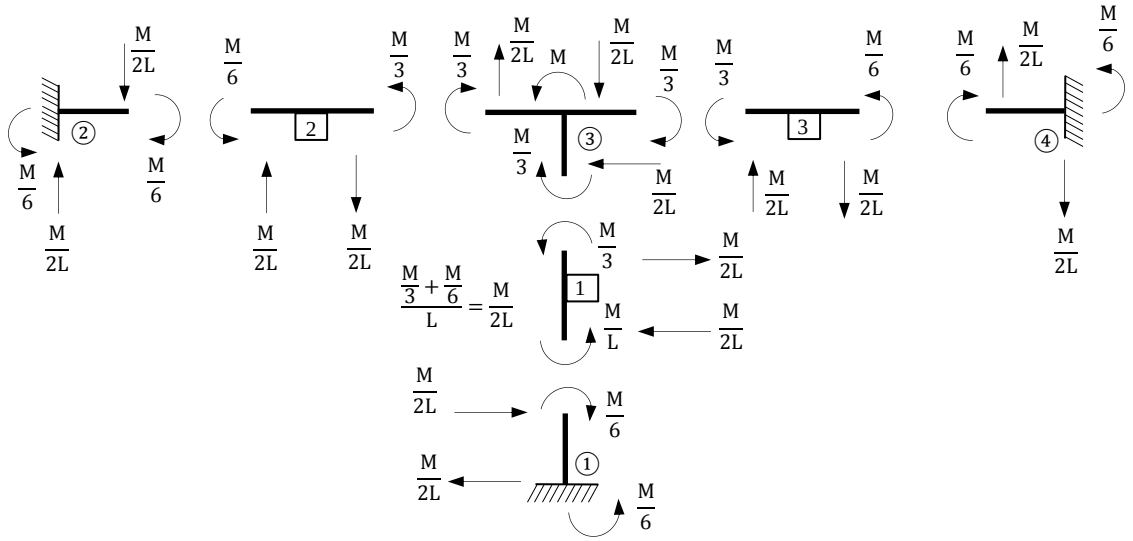
2.eleman: (2-3 çubuğu)

$$M_{23} = (2Q_2 + Q_3).\frac{2EI}{L} + M_{a23} \Rightarrow \frac{ML}{12EI}.\frac{2EI}{L} = \frac{M}{6},\ M_{32} = (Q_2 + 2Q_3).\frac{2EI}{L} + M_{a32} \Rightarrow \frac{2ML}{12EI}.\frac{2EI}{L} = \frac{M}{3}$$

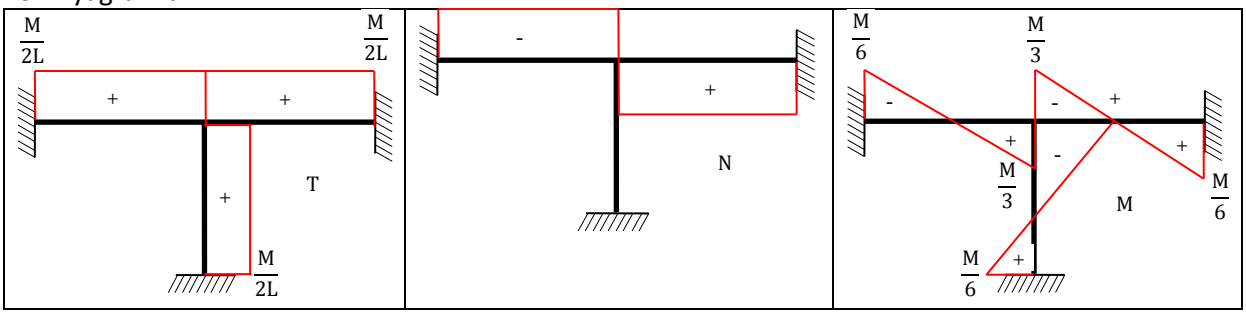
3.eleman: (3-4 çubuğu)

$$M_{34} = (2Q_3 + Q_4).\frac{2EI}{L} + M_{a34} \Rightarrow \frac{2ML}{12EI}.\frac{2EI}{L} = \frac{M}{3},\ M_{43} = (Q_3 + 2Q_4).\frac{2EI}{L} + M_{a43} \Rightarrow \frac{ML}{12EI}.\frac{2EI}{L} = \frac{M}{6}$$

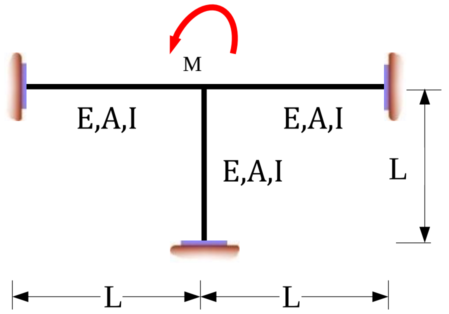
5. Taşıma Şeması ve Uç Kuvvetleri



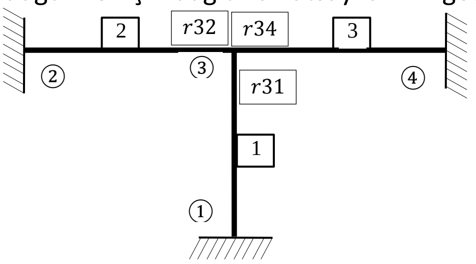
6. Diyagramlar



Uygulama 14: Verilen Sitemi Cross Yöntemi ile çözerek kesit tesirleri diyagramlarını elde ediniz



1. Numaralandırma, moment dengesi yapılacak düğümler için dağıtma katsayılarının gösterilmesi



2. Birim Deplasman Sabiti

Tüm çubuklar aynı; $\mathbf{K_{ii}} = \frac{\mathbf{4EI}}{\mathbf{L}}$, $\mathbf{K_{ij}} = \frac{\mathbf{2EI}}{\mathbf{L}}$

3. Dağıtma Katsayılarının Hesabı

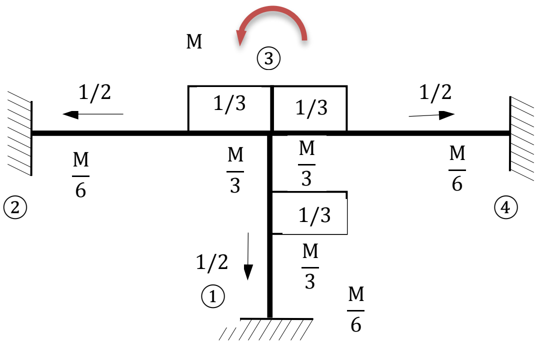
$$r32 = \frac{(k_{ii})_{32}}{(k_{ii})_{32} + (k_{ii})_{31} + (k_{ii})_{34}} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L}} = \frac{1}{3}$$

$$r31 = \frac{(k_{ii})_{31}}{(k_{ii})_{31} + (k_{ii})_{32} + (k_{ii})_{34}} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L}} = \frac{1}{3}$$

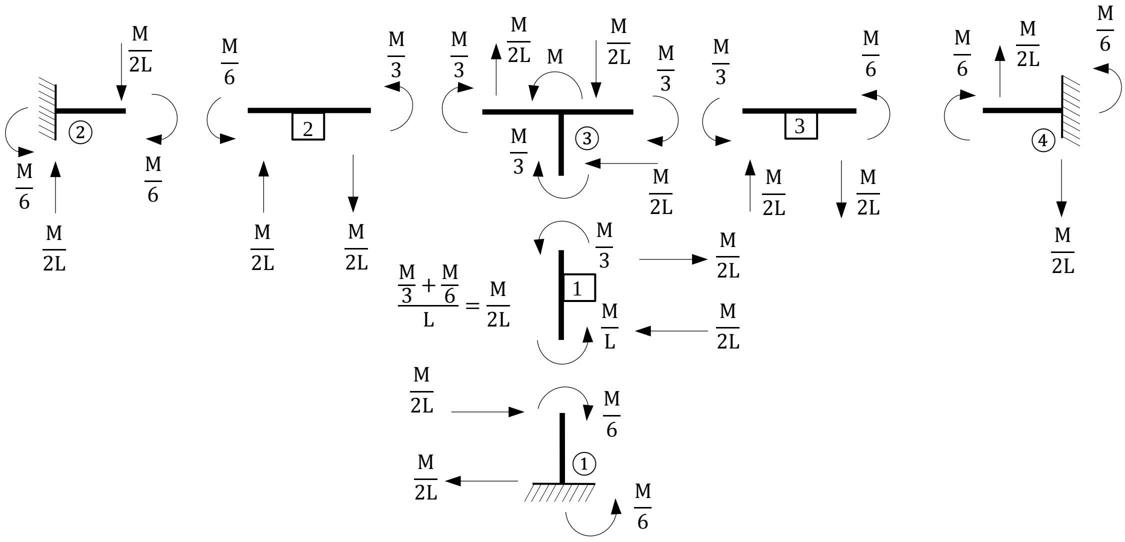
$$r34 = \frac{(k_{ii})_{34}}{(k_{ii})_{34} + (k_{ii})_{32} + (k_{ii})_{31}} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L}} = \frac{1}{3}$$

4. Ankastrelik Uç Momentleri; Ara yükler =0

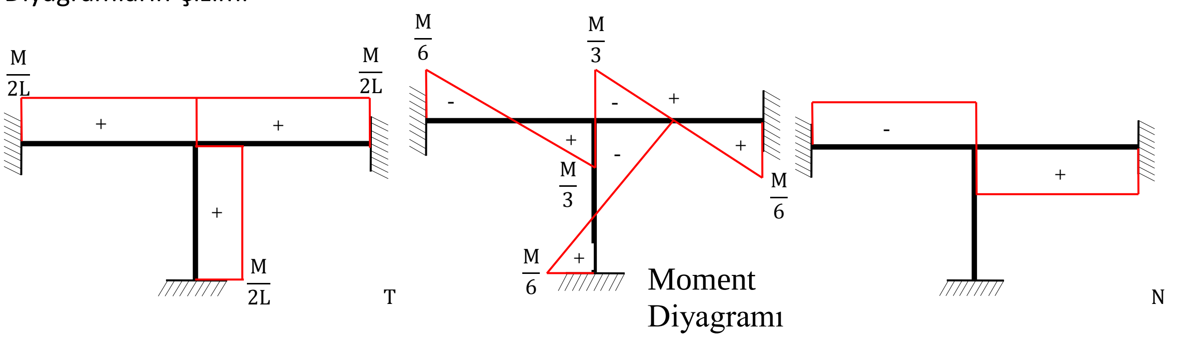
5. Moment Dağıtma (Dengeleme)



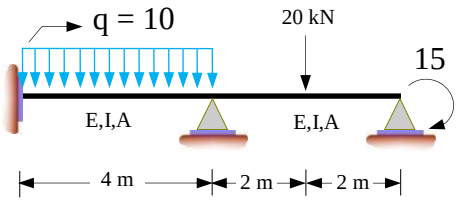
Taşıma Şeması ve Uç Kuvvetleri

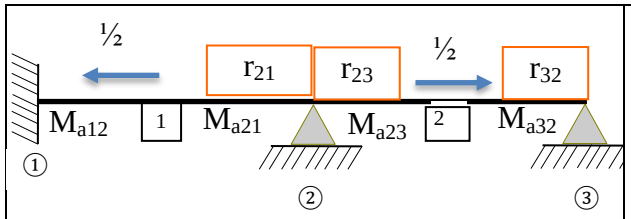


Diyagramların Çizimi



Uygulama 15: Verilen sistemin kesit tesiri diyagramlarını cross yöntemiyle elde ederek bulunan sonuçları, açı ve rijitlik matrisi yöntemiyle elde edilenleri karşılaştırınız





Ankastre Uç Momentleri

Hatırlatma: Üzerinde ara yük olan ve iki ucu Ankastre mesnetli bir elemanın mesnet reaksiyonlarını; "ankastrelik uç kuvvetleri" denilmektedir.

$$M_{a12} = -M_{a21} = \frac{qL^2}{12} = \frac{10*4^2}{12} = 13{,}33 \text{ kNm}$$

$$M_{a23} = -M_{a32} = \frac{PL}{8} = \frac{20*4}{8} = 10 \text{ kNm}$$

2-Çubuk Rijitlikleri

1-2 - Çubuğu (1.eleman): $K_{ii} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI$

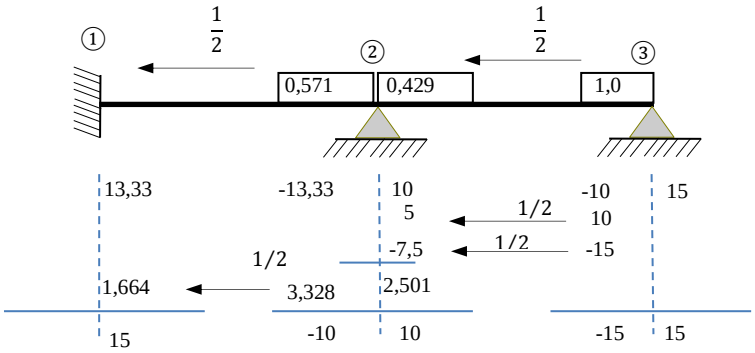
2-3 – Çubuğu (2.eleman): $K_{ii} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{4} = 0{,}75\ EI$

3-Dağıtma Katsayıları

$r21 = \frac{(k_{ii})_{21}}{(k_{ii})_{21}+(k_{ii})_{23}} = \frac{EI}{EI+0{,}75\ EI} = 0{,}571$, $r23 = \frac{(k_{ii})_{23}}{(k_{ii})_{21}+(k_{ii})_{23}} = \frac{0{,}75\ EI}{EI+0{,}75\ EI} = 0{,}429$

Bir Düğümdeki Dağıtma Katsayılarının Toplamı 1.0 olmalı

4-Moment dengeleme (Dağıtma)

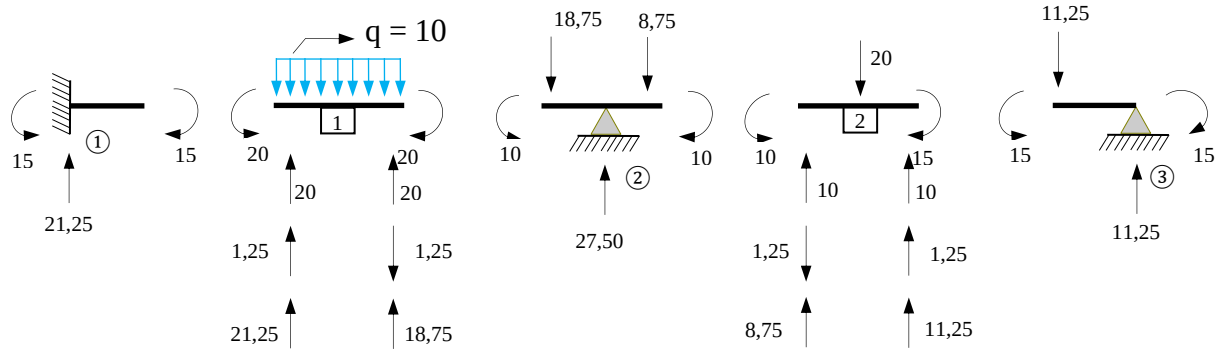


3 Düğümünde 2-1 çuğu için Dağıtma katsayısı 1.0 olduğundan tüm momentlerin terr işaretlileri bu uca yazılır

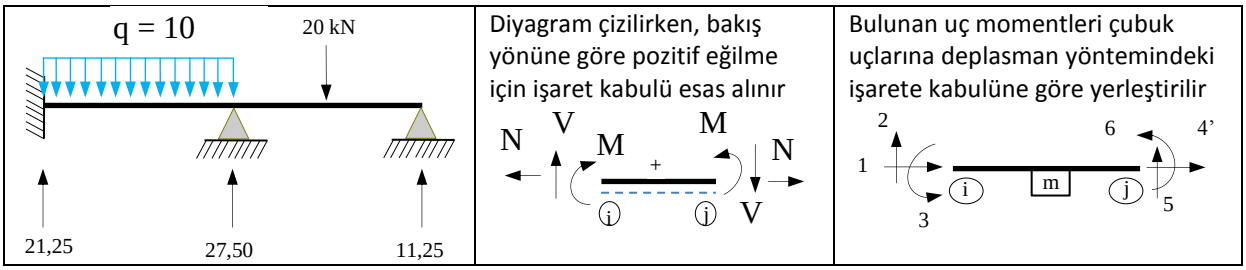
2 düğümünde Moment Dağıtma
(-13,33+10+5-7,5) = -5,83
-5,83.0,571.(-1) = 3,328
-5,83.0,429.(-1) = 2,501

2 düğümünde 2-1 çubuğuna dağıtılan momentin yarısı 1 uçuna geçer (Geçiş katsayısı ½ dir)

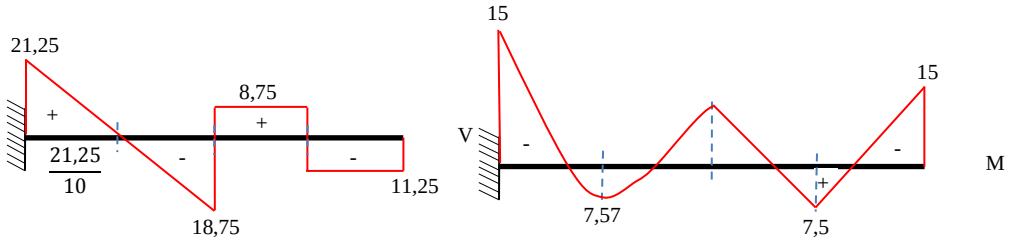
5-Taşıma Şeması ve Uç Kesme Kuvvetleri



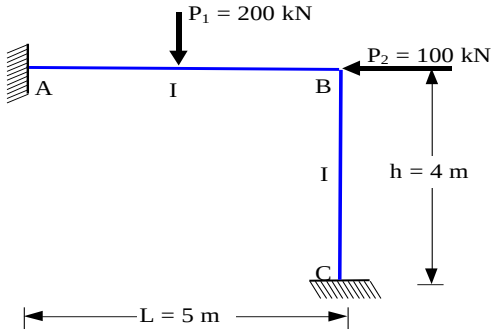
Tüm Sistemde; $\Sigma F_y = 0$; $4*10+20 = 60$; $21{,}25+27{,}50+11{,}25 = 60$	Pozitif eğilme	Deplasman yönetmi işaret kabülü



6-Diyagram Çizimi;



Uygulama 16:Şekilde verilen sistemin kesit tesiri diyagramlarını cross yöntemi ile çizelim.



Çubuk Ankastrelik uç Momentleri

$M_{aAB}=-M_{aBA}=(PL/8)=125$ kNm

Çubuk Rijitlikleri

$$(k_{11})_{A-B}=\frac{4EI}{L}=\frac{4EI}{5}=0.8EI$$

$$(k_{12})_{A-B}=\frac{2EI}{L}=\frac{2EI}{5}=0.4EI$$

$$(k_{11})_{B-C}=\frac{4EI}{L}=\frac{4EI}{4}=EI$$

$$(k_{12})_{B-C}=\frac{2EI}{L4}=\frac{2EI}{5}=0.5EI$$

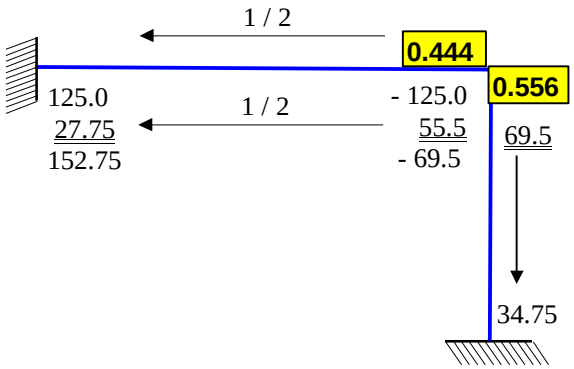
Dağıtma Katsayıları

Dağıtma sadece B düğümünde yapılacaktır.

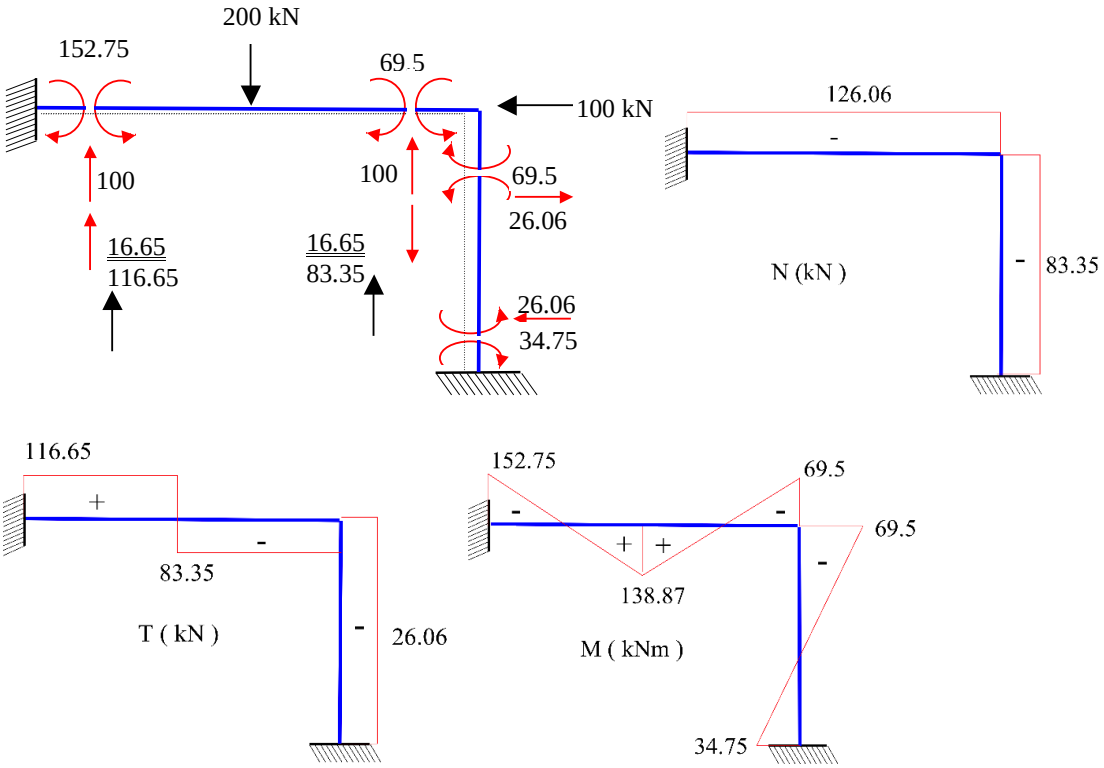
$$r_{B-A}=\frac{0.8EI}{0.8EI+EI}=0.444$$

$$r_{B-C}=\frac{EI}{0.8EI+EI}=0.556$$

Moment Dengelemesi



Taşıma Şeması ve diyagramlar



Elde edilen sonuçlar Rijitlik matrisi yöntemi ile aynıdır.

