



جامعة القاهرة
كلية الزراعة - قسم المحاصيل

الرياضيات

الأستاذ الدكتور

ضياء أحمد القاضي

كود	الفصل الدراسى
102	٢٠١٩-٢٠٢٠

توفيق المنحنيات

CURVE FITTING

العلاقات الخطية – طريقة الفروق المجزأة (المنقسمة) -

أهداف توفيق المنحنيات

١) استنباط المعادلات الخطية وغير الخطية من البيانات المتاحة للمتغيرات تحت الدراسة .

٢) استقراء واستنتاج النتائج المتحصل عليها بعد التوصل إلي صيغة رياضية للمعادلات الخطية والغير خطية .

٣) التنبؤ والاستكمال لنتائج داخل وخارج حدود النتائج المتحصل عليها وذلك بتقدير حقلياً للتوفير في تكلفة القياس بمعني استيفاء الجداول العديد من القيم بين كل زوج من القيم .

أولا : العلاقات الخطية

طريقة المربعات الصغرى Method of Least Squares

تعتبر طريقة المربعات الصغرى لتوفيق الخط المستقيم ($y = mx + c$) لمجموعة من النقاط التجريبية

$(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2),\ldots\ldots, (x_n , y_n)$

هي إحدى التطبيقات الهامة لأساسيات أيجاد النهايات الصغرى للدوال متعددة المتغيرات .

بفرض:

$d_1=y_1-(mx_1+ c),..,d_n = y_n-(m\ x_n + c)$

$f(m,c)=d_1^2 + d_2^2 +.... + d_n^2$

وتهدف طريقة المربعات الصغرى إلى إيجاد نقطة النهاية الصغرى للسطح(m,c) إحداثيات w

$= f\ (m\ ,c)$ في الفضاء m c w-

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - mx_i - c)$$

وبالتالي نحصل علي اثنين من المعادلات الاعتدالية (المعتدلة) هما

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m \sum_{i=1}^{n} x_i + nc \quad \text{.....(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{.....(2)}$$

وحيث أن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 2n \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial m} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\begin{vmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = 4\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

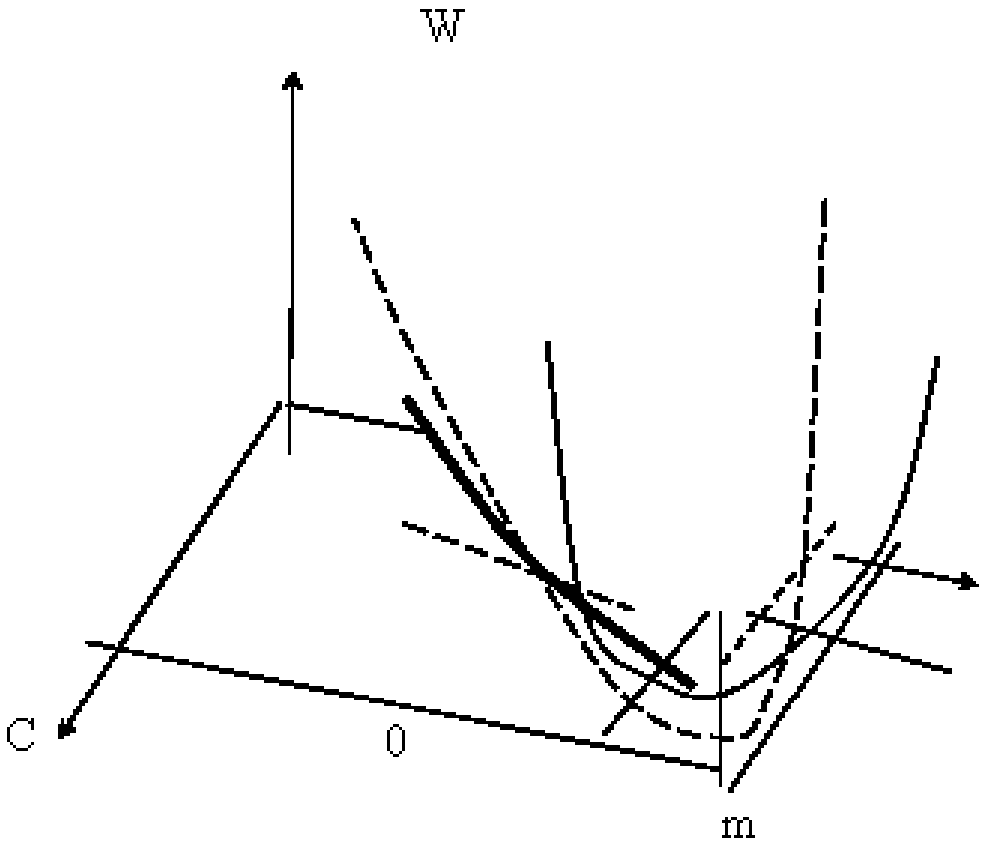
minimaفانه بالتالي تتحقق الشروط اللازمة والكافية للنهاية الصغرى

يمكننا الحصول على (1), (2)وبحل المعادلتين (m , c)
في معادلة خط المربعات الصغرى $y = mx + c$

وعلى غرار ما سبق يمكننا اشتقاق <u>ملاحظة :</u>
المعادلات الاعتدالية التي تحقق شروط النهاية الصغرى للدالة

$$F(a, b, c, \ldots) = \sum (y - (a + bx + cx^2 + \ldots))^2$$

واللازمة للحصول علي ثوابت الدوال غير الخطية (كثيرات الحدود polynomial function في حالة ($n \geq 2$)



$\partial f / \partial m = 0$ $\partial f / \partial c = 0$

x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2
0	5.0	0.0	0
1	4.4	4.4	1
2	3.6	7.2	4
3	3.2	9.6	9
4	1.8	7.2	16
5	1.6	8.0	25
6	1.1	6.6	36
7	0.1	0.7	49
$\sum_i x_i = 28$	$\sum_i y_i = 20.8$	$\sum_i x_i\, y_i = 43.7$	$\sum_i x^2_i = 140$

$\therefore \quad 20.8 - 28\ m - 8c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$43.7 - 140\ m - 28c = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

7فإذا تم قسمة طرفي المعادلة الاولي على ٢ والضرب في

$\therefore \quad 72.8 - 98\ m - 28\ c = 0$

وبطرح المعادلتين الاخيرتين :

$29.1 + 42\ m = 0$

$m = (-29.1 / 42) = -0.693$

$C = 5.02$

المعادلة المطلوبة هى:

$$y = -\ 0.693\ x\ + 5.02$$

وتوجد طرق أخري لتحديد الخط الذي يمثل العلاقة الموجودة احسن تمثيل وتعتبر بعضها أكثر دقة من الأخرى .

(ب) طريقة الفروق المجزأة (المنقسمة) Divided differences

للحصول علي المعادلة التي تحدد العلاقة بين x متغيرين y، باستخدام معادلة نيوتن للفروق المجزأة

Newton’ s divided differences formula

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\, y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, y(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\, y(x_0, \ldots, x_n)$$

حيث $y(x_0, x_1) = (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)$

$$y(x_0, x_1, x_2) = (y(x_1, x_2) - y(x_0, x_1)) / (x_2 - x_0)$$

$$y(x_o, x_1, \ldots, x_n) = (y(x_1 \ldots .., x_n) - y(x_o, \ldots, x_{n-1}) / (x_n - x_o)$$

ويمكن باستخدام جدول الفروق difference table
تحديد الفروق المطلوبة

x_0 y_0

$y(x_0, x_1)$

x_1 y_1 $y(x_0, x_1, x_2)$

$y(x_1, x_2)$ $y(x_0, x_1, x_2, x_3)$

x_2 y_2 $y(x_1, x_2, x_3)$ $y(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$y(x_2, x_3)$ $y(x_1, x_2, x_3, x_4)$

x_3 y_3 $y(x_2, x_3, x_4)$

$y(x_3,$

[مثال]

استخدم طريقة الفروق المجزأة في إيجاد دالة الدرجة الاولي التي تمثل العلاقة بين المتغيرين x , y

x	1	2	3	4	5	6
y	4	7	10	13	16	19

[الحـــل]

X	y	$y(x_i, x_i)$	
1	4		
		3	
2	7		
		3	
3	10		$\therefore y = 4 + 3 (x - 1)$
		3	$\therefore y = 3x + 1$
4	13		
		3	
5	16		
		3	
6	19		

جـ) طريقة المتوسطات Method of Averages

إذا كان لدينا مجموعة من النقط كما هو
وما يناظره xفي المثال السابق للمتغير
، مثال ذلك عند yمن البيانات التجريبية
دراسة العلاقة بين كمية التسميد من سماد
معين والمحصول، أو العلاقة بين
الرطوبة الجوية ونســـــــبة

الإصابة المرضية أو الحشرية أو العلاقة بين متوسط دخل الفرد ومعدل استهلاكه.

فإذا كانت العلاقة في الصورة : $y = m\ x + c$

وإذا كانت النقطة (x_n , y_n) تقع علي المستوي الممثل لهذه العلاقة

$\therefore y_n - m x_n - c = 0$

ولكن إذا كانت هذه النقطة لا تقع علي المستقيم فإن :

$y_n - m\ x_n - c = r_n$

وتمثل البعد العمودي residual هي المتبقي r_n حيث لتلك النقطة أعلي الخط المستقيم . والمتبقي قد يكون موجباً أو سالباً إذا كانت تلك النقطة أعلي أو أسفل الخط علي التوالي فإذا أخذ في الاعتبار جميع النقط الموقعة plotted points فإنه في هذه الطريقة نفترض أن أحسن خط هو الذي يجعل المجموع الكلي لانحرافات من النقط n النقط يساوي صفراً، وبذلك إذا كان لدينا عدد الموقعة فان :

$$y_1 - m\,x_1 - c + y_2 - m\,x_2 - c + \ldots\ldots + y_n - m\,x_n - c = 0$$

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) - m\,(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n) - n\,c = 0$$

$$\sum y - m \sum x - n\,c = 0$$

$$m \sum x + n\,c = \sum y$$

من c , m وبالطبع فإننا لا نستطيع تقدير قيم هذه المعادلة لأنها تشتمل علي مجهولين، لذلك نقوم بتقسيم النقط الموقعة إلي قسمين متساويين إذا كان عدد النقط زوجياً ومتساويين تقريباً إذا كان عدد النقط فردياً ونعمل معادلتين منفصلتين (في صورة المعادلة السابقة) وبالتعويض في المعادلتين يمكننا تقدير قيم c , m

، نأخذ في الاعتبار البيانات ولتوضيح تلك الطريقة وبتجزيء n = 8 الموجودة في المثال السابق حيث هذه النقط الثمانية إلي جزئين متساويين في عدد كما y ، ومجموع x النقط ونوجد مجموع قيم يلي:

	I			II	
x		y	x		y
0 1 2 3		5.0 4.4 3.6 3.2	4 5 6 7		1.8 1.6 1.1 0.1
$\sum = 6$		16.2	22		4.6

وحيث إنه يوجد ٤ قيم في كل مجموعة فإنه يمكننا من البيانات السابقة كتابة المعادلتين التاليتين :

$6\,m + 4\,c = 16.2$ . . . . . (1)

$22\,m + 4\,c = 4.6$ . . . . . (2)

وبطرح المعادلة الثانية من الأولي فإن

$16\,m = -11.6$ . . $m = -0.725$

وبالتعويض عن قيمة m في أي من المعادلتين السابقتين

$\therefore \quad c = 5.14$

$\therefore$: المعادلة المطلوبة هي

$y = -0.725\,x + 5.14$

ثانياً : العلاقات غير الخطية التي يمكن وضعها في صورة خطية

وفي هذا الجزء نناقش بعض العلاقات غير الخطية الكثيرة الاستعمال في المجالات البيولوجية .

أ) معادلة المنحني الذي في صورة قانون القوة Power Law

$$y = A^{xn}$$

حيث n , a ثوابت ، وقد سبق دراسة دوال القوي في الجزء الأول .

فإذا كان لدينا مجموعة من البيانات التي نعتقد أنها تتبع قانون القوة فنحتاج إلى إيجاد قيم a , n وباستخدام الورق البياني العادي سوف نجد صعوبات كثيرة لتحديد أنسب منحني لتمثيل البيانات الموجودة وتحديد قيم الثوابت من المنحني سوف يكون عشوائياً .

وهناك بعض الطرق التي تمكننا من التغلب علي تلك الصعوبات فمن معلوماتنا باللوغاريتمات والتي سبق التأكيد عليها في الجزء الأول يمكننا كتابة المعادلة السابقة في الصورة التالية

$$\log y = \log A + n \log x$$

$$y' = n x' + \log A$$

A ، حيث أن $x' = \log x$, $y' = \log y$ حيث
ثابت أيضاً $\log A$ ثابت فإن

والمعادلة الأخيرة ما هي إلا معادلة خط مستقيم . وبذلك بدلا من توقيع البيانات الأصلية نقوم بتوقيع log y بما يناظره من log x . فإذا كانت البيانات تخضع لقانون القوة السابق ذكره فإن النقط سوف تقع علي خط مستقيم . ويمكننا بالتالي تحديد الخط الأحسن تمثيلا بالطرق السابق ذكرها .

وحيث أنه أمكننا تحديد الخط الأنسب فيمكننا هو ميل n بالتالي تحديد قيم الثوابت، حيث log الخط المستقيم وتقاطعه للمحور الصادي A

[مثال] x, y بين ما إذا كانت علاقة قانون القوة يمكن أن تمثل العلاقة بين

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1.00	1.19	1.32	1.41	1.5	1.57	1.63

[الحـــــل]

كما يلي x, y نقوم بإيجاد لوغاريتمات قيم كل من

x	1	2	3	4	5	6	7
x ′ = log x	0	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451
y	1	1.19	1.32	1.41	1.5	1.57	1.63
y′ = log y	0	0.0755	0.1206	0.1492	0.1761	0.1959	0.2122

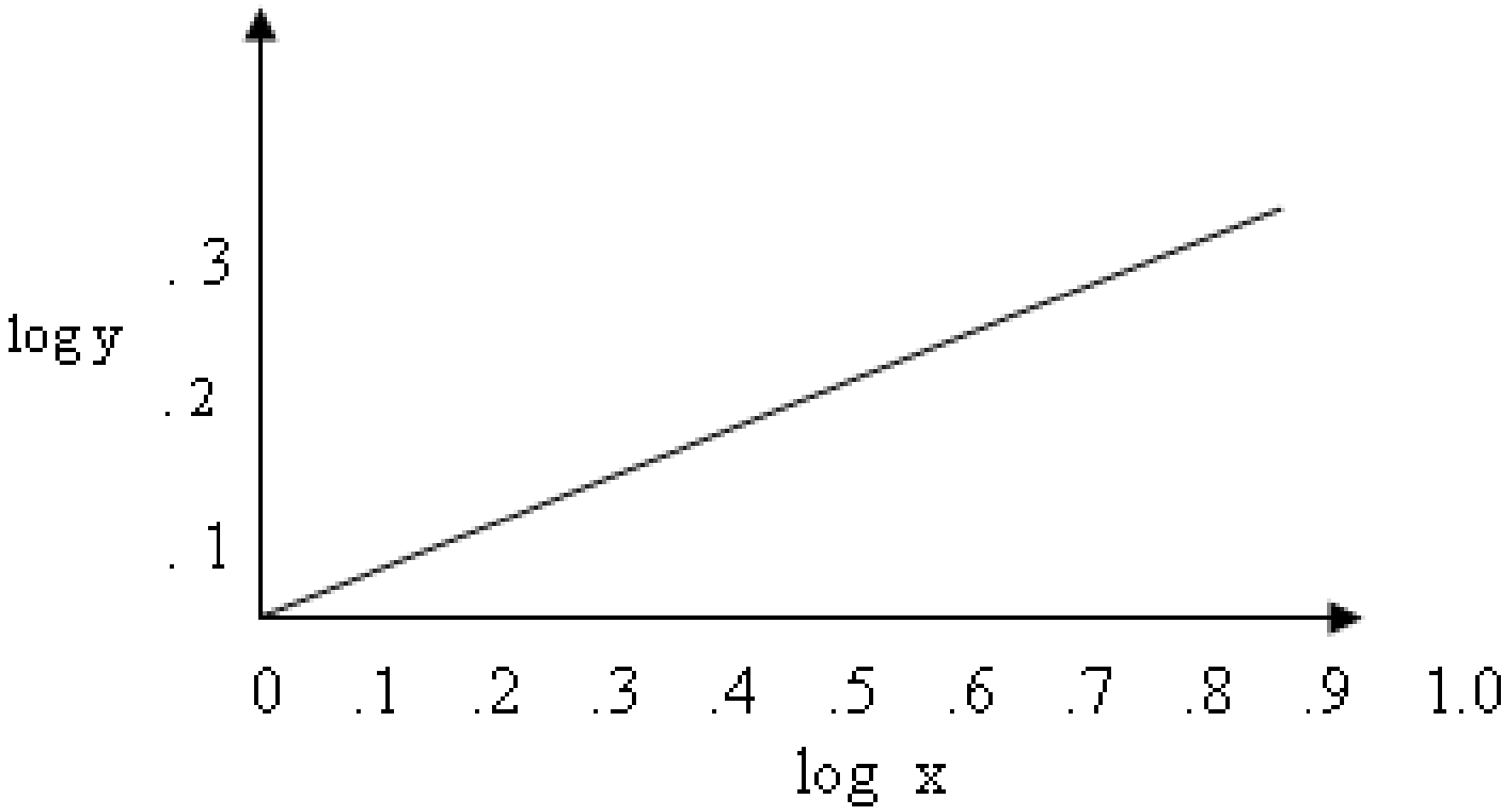
علي ورق بياني x' , y' وبتوقيع قيم عادي كما في الشكل التالي ويظهر هنا من هذا الشكل أن النقط تقع تقريباً علي ويمر بنقطة خط مستقيم انحداره $\frac{1}{4}$ يساوي الأصل وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة السابقة الذكر

$y = n\ x + \log\ A$

$\therefore\ y = (\frac{1}{4})\ x + 0$

فإن $A = 1$ وحيث أن $\log A = 0$ ($n = \frac{1}{4}$) وبذلك فإن

وبالتالي فإن تلك البيانات تمثلها معادلة بالصورة: $y = x^{\frac{1}{4}}$


log y
. 3
. 2
. 1
0
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1.0
log x

The use of log – log paper : استعمال الورق اللوغاريتمي الكامل

إذا أخذنا في الاعتبار مجموعة البيانات :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2.0	2.8	3.45	4.0	4.46	4.9	5.3	5.65	6.0	6.3

فإنه يتضح لنا أنه لا توجد علاقة مستقيمة بين x , y وعلي ذلك نحاول معرفة ما إذا كان قانون القوة يمكن أن يمثل تلك العلاقة

X	Log x	Y	Log y
1	0	2.00	0.301
2	0.301	2.80	0.447
3	0.477	3.45	0.538
4	0.602	4.00	0.602
5	0.699	4.46	0.649
6	0.778	4.90	0.690
7	0.845	5.30	0.724
8	0.903	5.65	0.752
9	0.954	6.00	0.778
10	1.000	6.30	0.799

وبتوقيع تلك البيانات علي ورق بياني عادي (الشكل التالي أ) نجد أن الخط المستقيم الأنسب لتلك البيانات ميله يساوي 0.5 والجزء الذي يقطعه الإحداثي الصادي يساوي 0.3 وبالتالي فان المعادلة الناتجة هي:

$$\log y = \tfrac{1}{2} \log x + 0.3$$

$$= \tfrac{1}{2} \log x + \log 2$$

$$\therefore \quad y = 2 \, (x)^{1/2}$$

في هذه الحالة قد تم إهمال الفرق البسيط الناتج لأن
$\log 2 = 0.301$

ويعتبر توقيع البيانات الأصلية علي ورق log – log paper من لوغاريتمي كامل أفضل وأسرع الطرق في هذا المجال (الشكل التالي ب) حيث يجري توفير الوقت اللازم لإيجاد لوغاريتمات كل من y , x .

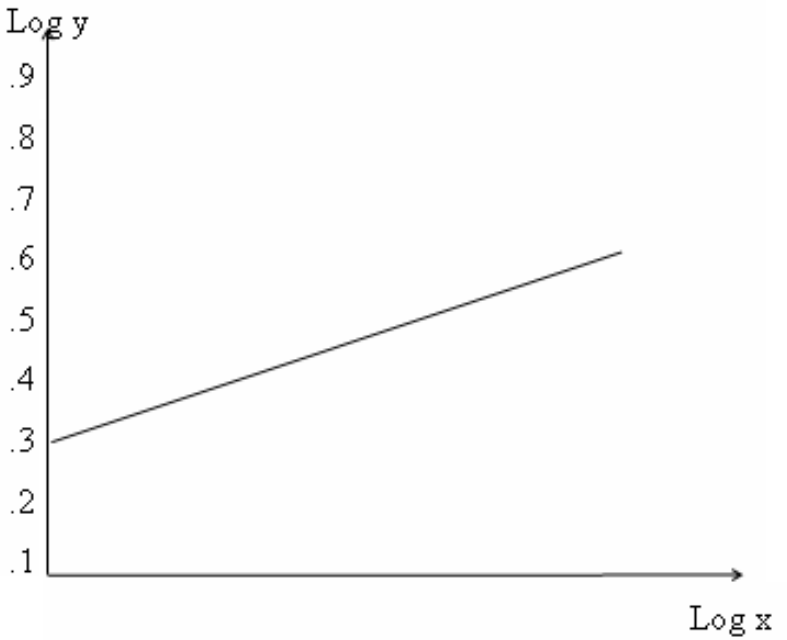
ويتضح من الشكل التالي (ب) أن البيانات تقع علي خط مستقيم وميل هذا الخط هو النسبة (a / b) وقيم a , b . يجب قياسها بالوحدات المطلقة وبذلك فإن (a / b) = 0.5) والجزء الذي يقطعه هذا الخط من المحور الصادي يساوي 2.0

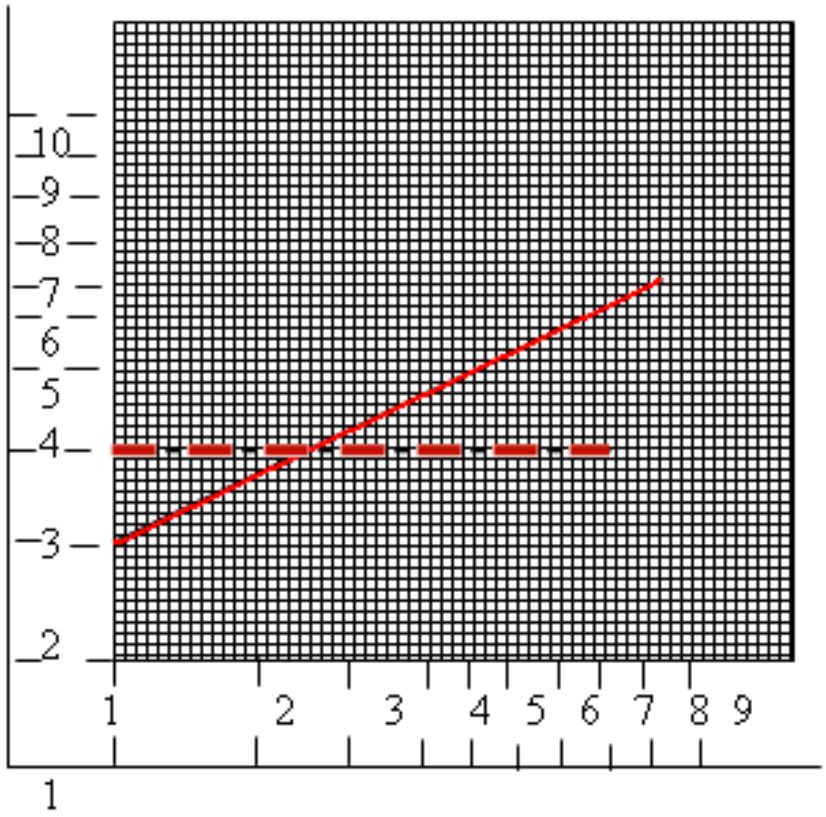
وحيث أننا وقعنا البيانات علي ورق لوغاريتمي كامل فإن :

$$\log y = \tfrac{1}{2} (\log x) + \log 2$$

$$\therefore \quad y = 2 (x)^{\frac{1}{2}}$$

وعموماً فإننا نتوقع أن أي نتائج قائمة علي مقاييس تشتمل علي نوعين مختلفين من الأبعاد dimension يمكن مطابقتها لمنحنيات من الطراز ، مقاييس الاتساع السابق مثال ذلك إيجاد العلاقة بين الطول والوزن ، والسطح والقطر ، والمساحة ، الارتفاع والحجم ، ..... الخ


Log y
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
Log x


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1

ب) معادلة المنحني في الصورة الأسية Exponential Law

$$y = A \exp(mx)$$

هي ثوابت وتلك المعادلة يكثر استخدامها في المجالات البيولوجية m,A حيث

يلاحظ الطالب العلاقة بين الصورة السابقة للمعادلة الأسية والصورة

$$y = a^x$$

بفرض أن $m = 1n\ a$ حيث $(1n\ a) = \log_e a$:

$$a = e^m$$

$$\therefore\ a^x = (e^m)^x = e^{mx}$$

Exponential Law تابع (ب) معادلة المنحني في الصورة الأسية

وهناك العديد من الأمثلة لتلك العلاقة الاسية في المجالات الزراعية كدراسة العلاقة بين الوقت والحجم لكائن معين أو عشيرة معينة كما هو الحال في قانون فانت هوف Vant Hoff ’s Law الذي يبين أن معدل التفاعل يتضاعف تقريباً لكل زيادة في درجة الحرارة مقدارها ١٠ درجة مئوية .

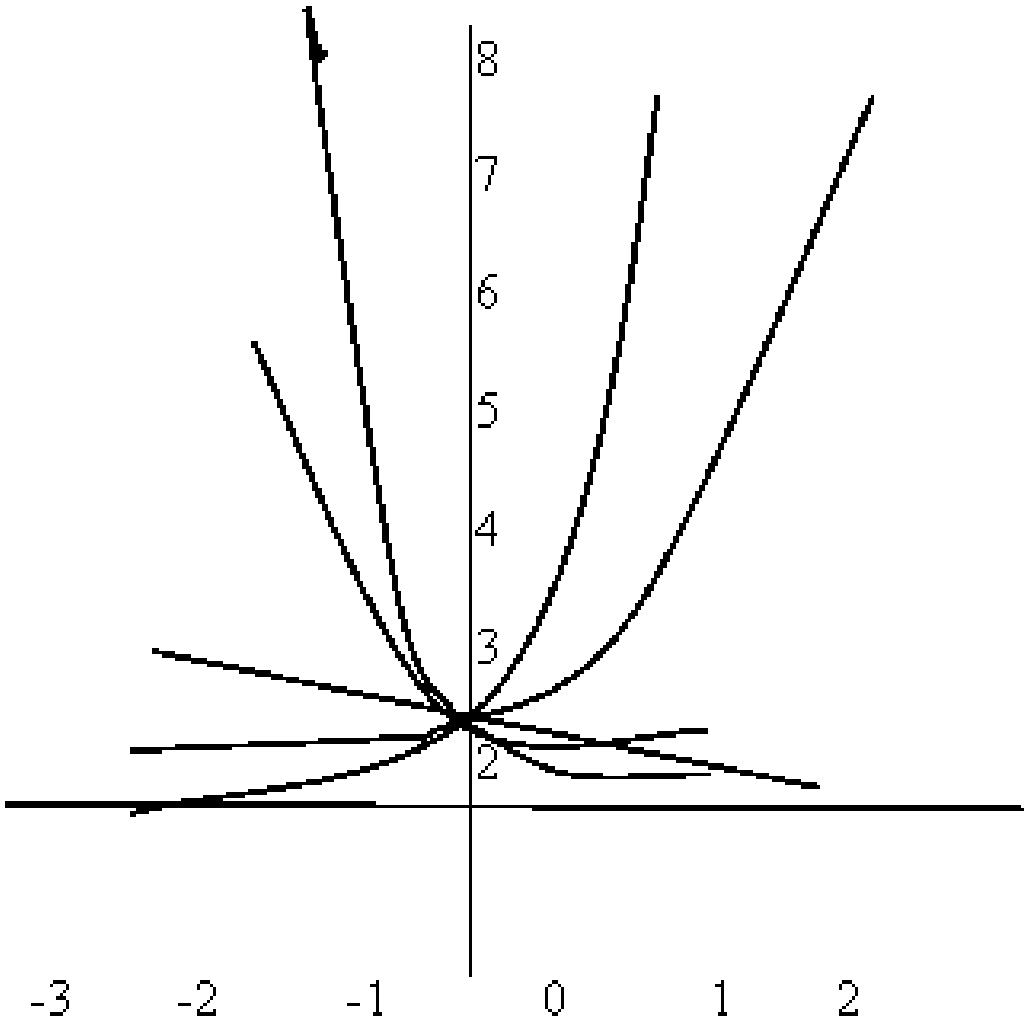
والعديد من الاستجابات النباتية معروف أنها تتبع هذا القانون إلي درجة كبيرة علي الأقل خلال مدي محدود من درجة الحرارة فالعلاقة بين درجة الحرارة ومعدل التلف في ثمار الفاكهة والخضراوات غالباً ما يمكن دراستها بافتراض أن العلاقة الموجودة بين درجة الحرارة ومعدل التلف هي علاقة أسية.

ومنحنيات العلاقة $y = \exp(mx)$ (حيث $A = 1$) تتضح في الشكل التالي) . m لقيم مختلفة للثابت m سواء ويلاحظ من هذا الشكل أنه مهما إختلفت قيم $(0, 0)$ كانت موجبة أو سالبة فإن المنحني يمر بالنقطة وأن المنحني يقترب من المحور السيني ولكن لا $(1$ فإن المنحني يقطع ($A \neq 1$) يقطعه . وإذا كانت ($0, A$) المحور الصادي عند

ولاختبار هل مجموعة من البيانات التي تمثل العلاقة بين المتغيرين x , y تتبع العلاقة الاسية أم لا ؟ نقوم بأخذ اللوغاريتمات الطبيعية لطرفي المعادلة

$$y = A \cdot \exp(m x)$$

$$\therefore \ln y = \ln A + m x$$


8
7
6
5
4
3
2
-3
-2
-1
0
1
2

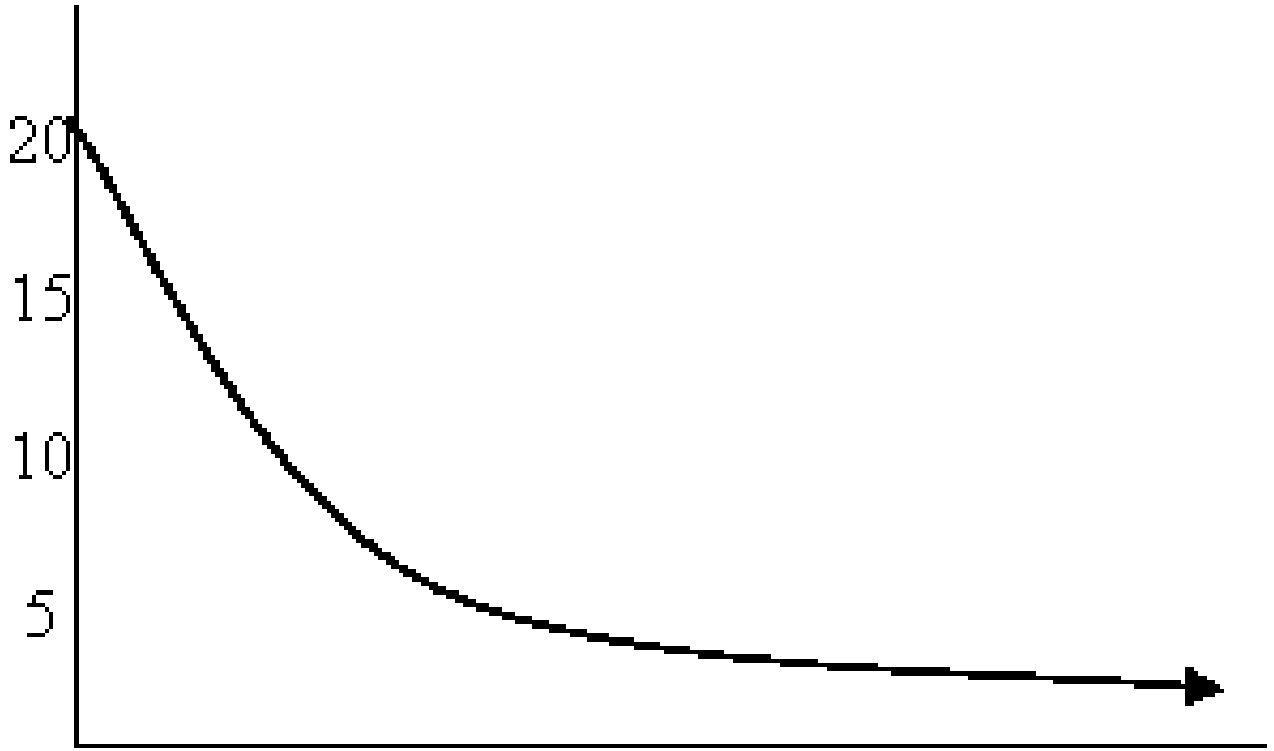
(y = 1n y) ثابت فيمكن توقيع 1n A حيث
المختلفة ونحصل علي خط مستقيم x لقيم
وميل هذا y = 1n A + m x معادلتـــــه :
، والجزء الذي يقطعه المستقيم من m المستقيم هو
A المحور الصادي هو

[مثال]

في y عند دراسة تركيزات مادة ما في الدورة
تم الحصول علي البيانات الآتية x أوقات مختلفة

x (t)	0	10	20	30	40	50	60
y (c)	20.1	10.3	6.5	4.7	2.6	1.8	1.2

ولتحديد ما إذا كان فقد المادة يتبع المعادلة الأسية، نقوم أولا بتوقيع البيانات السابقة علي ورق بياني عادي (الشكل التالي) نجد أن المنحني يبدو أنه يتبع العلاقات الأسية ولذلك نقوم باختبار ما إذا كانت النقط تقع علي منحني بالصورة : $c = A \exp(kt)$


20
15
10
5

هو الوقت t هو تركيز المادة ، c حيث
.وبأخذ لوغاريتمات (اللوغاريتمات الطبيعية) للتركيزات فنحصل علي البيانات التالية:

t	0	10	20	30	40	50	60
1n c	3.0007	2.3321	1.8718	1.5476	.9555	.5878	.1823

وعند توقيع تلك البيانات (الشكل التالي أ) نري أن النقط تقع وبطريقة مناسبة علي خط مستقيم وبالتالي نفترض أن النقط تقع علي المستقيم ∴ 1n c = 1n A + K t

ومن تقاطع المستقيم مع المحور الصادي نجد أن :

1n A = 2.84 ∴ A = 17.1

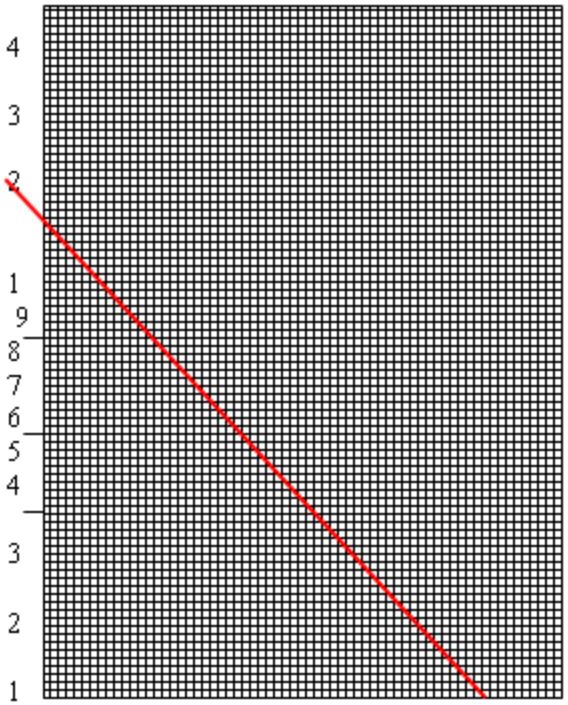
ومن ميل المستقيم نجد أن :

$$k = - 2.84 / 63 = - 0.045$$

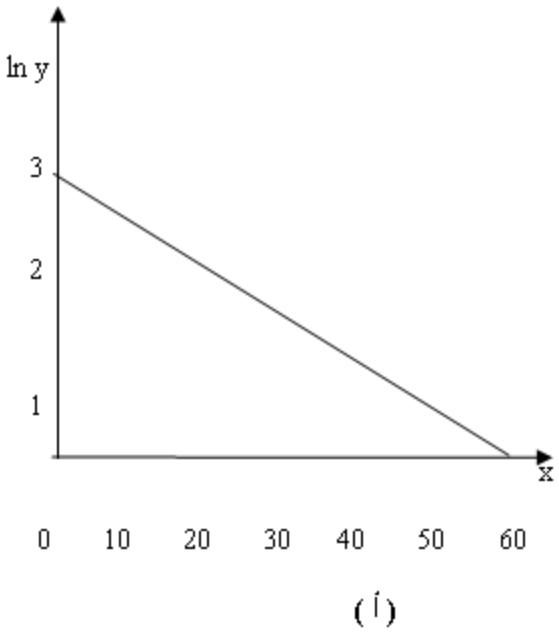
ويتضح من البيانات أن المادة نزول من الدورة تبعاً للعلاقة الأسية الاتيه :

$$C = 17.1 \ exp \ (- 0.045 \ t)$$

وفي هذا المثال لم نستعمل أي من الطريقتين السابقتي الذكر لتحديد أنسب خط لتمثيل تلك العلاقة حيث كما يظهر في الشكل التالي (أ) أن النقط تقع بطريقة مناسبة علي الخط



(ب)



(أ)

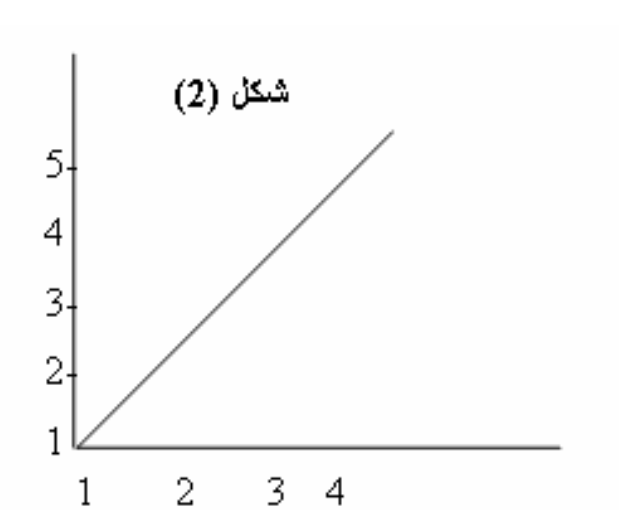
الورق النصف لوغاريتمي : Semi - log paper

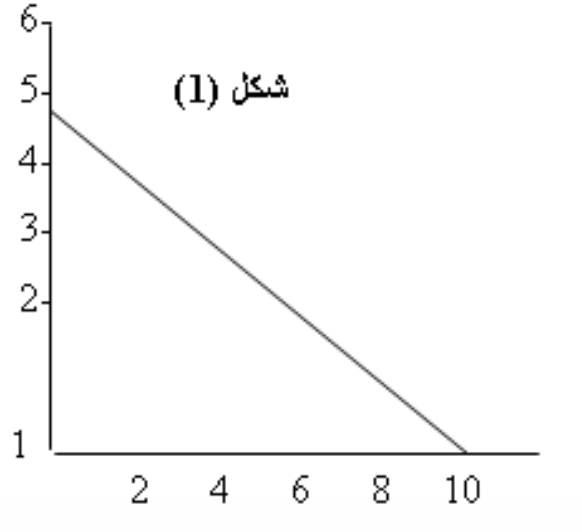
وباعتبار البيانات الموجودة في المثال السابق ولكن سوف نقوم باستعمال الورق النصف لوغاريتمي بدلا من الورق البياني العادي. وفي هذه الحالة نقوم بتوقيع البيانات الأصلية بدون إيجاد لوغاريتمات التركيزات (الشكل السابق ب) ومن الواضح أن النقط مرتبة في وضع يماثل ما هو موجود في الشكل السابق - أ) .

يحصل عليها مباشرة من الشكل Aوقيمة عند تقاطع المستقيم مع المحور الصادي . ويحتاج تقدير ميل الخط إلي عناية ويعتبر أنسب تقدير لميل المستقيم بأخذ لوغاريتم الجزء المقطوع من المحور الصادي بواسطة المستقيم وقسمته علي الجزء المقطوع من المحور السيني بواسطة المستقيم كما سبق دراسة ذلك

[مثال]

في كل من الشكلين Y = F (X) استنتج النموذج الرياضي للعلاقة الدالية
Ln 5 = 1.6 (١) ، (٢) علماً بأن





شكل (١) : مرسوم علي ورق لوغاريتمي جزئي semi-log paper وهي دالة أسية علي الصورة $Y = A\, e^{mx}$

$\ln 5 = 1.6$

$y = 5\, e^{-0.16\, x}$

$m = -\frac{1.6}{10} = -0.16$

شكل (٢) مرسوم علي ورق لوغاريتمي كامل Log-log paper وهي دالة قوي علي الصورة

$y = A X^n$

$y = X\ 1.4$

$n =$ ميل الخط $= \frac{4.2}{3} = 1.4$

ثالثاً - الطراز كثير الحدود The polynomial Type

إن اختبار صورة معينة من العلاقات التي سوف تعبر عن علاقة غير مستقيمة أفضل تمثيل تعتبر من الأهمية بمكان في المجالات البيولوجية . وعموماً فإن هناك نوعين من الحلول ، الأول وهو استخدام التحويلات مثل التحويلات اللوغاريتمية التي سبق ذكرها في حالة علاقات القوي والعلاقات الاسية .

أما الثاني فهو الحل المباشر وذلك بتطبيق البيانات الأصلية المتحصل عليها للمنحني الذي يتم اختباره.

وقد سبق في الجزء الأول مناقشة الدوال كثيرة الحدود polynomial functions التي في الصورة :

$$y = p\ (x)\ = a_0\ x^n\ +\ a_1\ \ x^{n-1} + \ldots a_{n-1}\ x\ +\ \ a_n$$

عدد صحيح موجب أو صفر ، n حيث
إذا كانت n من الدرجة p ويقال أن الدالة
ودرجة الدالة هي قيمة أكبر أس $a_0 \neq 0$ 0
يظهر في التعبير الرياضي لها . x للمتغير

ويمكن كتابة المعادلة السابقة في الصورة :

$$y = a + b x + c x^2 + d x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتدل النقط في هذه المعادلة علي إنه يمكن إضافة حدود أخري كما نرغب . فإذا كانت المعادلة تشتمل علي أول حدين علي الجانب الأيمن فتعرف بأنها معادلة خط مستقيم وإذا انتهت بالحد الثالث (cx2) فتعرف بأنها معادلة من الدرجة الثانية وإذا انتهت المعادلة بالحد dx3 فيطلق عليها معادلة من الدرجة الثالثة وهكذا .

وقد سبق في الجزء الأول مناقشة منحنيات الدرجة الأولى والثانية والثالثة والرابعة . ونهدف هنا إلي إيجاد منحني لدرجة معينة يمثل العلاقة الموجودة احسن تمثيل أو بمعني آخر x , y بين المتغيرين نحاول البحث عن منحني لدرجة معينة يجعل مجموع مربعات انحرافات النقط الموقعة اقل ما يمكن :

وللحصول علي المعاملات (الثوابت) التي سوف تعطي a , b , c , d , ... كثيرات حدود فتؤدي إلي تقليل مجموع مربعات الانحرافات إلي الحد الأدنى سوف تستعمل ما يعرف بالمعادلات الطبيعية Normal equations وبذلك سوف نحتاج إلي عدد من هذه المعادلات بعدد الثوابت أو (درجة المعادلة المرغوب استخدامها + ١)

والمعادلات الطبيعية هي كما يلي :

$$an + b\sum x + c\sum x^2 + d\sum x^3 + \dots\dots\dots = \sum y$$

$$a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 + d\sum x^4 + \dots\dots\dots = \sum xy$$

$$a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 + d\sum x^5 + \dots\dots\dots = \sum x^2 y$$

$$a\sum x^3 + b\sum x^4 + c\sum x^5 + d\sum x^6 + \dots\dots\dots = \sum x^3 y$$

ويمكن الاستمرار بنفس النظام حتى الدرجة المرغوبة

مثال

سوف نستعمل هنا نتائج تجربة عملت لتقييم محصول الفاصوليا (y) في أعمار مختلفة عند وقت الحصاد . (x) وتاريخ أول جمعة استعمل كأساس وأعطيت قيمة (x = 0) وقيم x للجمعات المتوالية هي عدد الأيام من تاريخ الأساس

x	0	4	7	10	13	18
y	27.4	39.3	46.2	47.8	44.5	24.5

والتقديرات اللازمة لحسابات المعادلات الطبيعية حتى الدرجة الثانية هي كما يلي

x	y	x^2	x^3	x^4	x y	x^2 y
0	27.4	0	0	0	0	0
4	39.3	16	64	256	157.2	628.8
7	46.2	49	343	2491	323.4	2263.8
10	47.8	100	1000	10000	478.0	4780.0
13	44.5	169	2197	28561	578.5	7520.5
18	24.5	324	5832	104976	441.0	7938.0
52	229.7	658	9436	146194	1978.1	23131.1

وسنختبر أولا مدي ملائمة الخط المستقيم لتمثيل العلاقة بين y , x :

$an + b\sum x = \sum y$ $\qquad$ $a\sum x + b\sum x2 = \sum xy$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين

$6\ a + 52\ b = 229.7$ . . . . . (1)

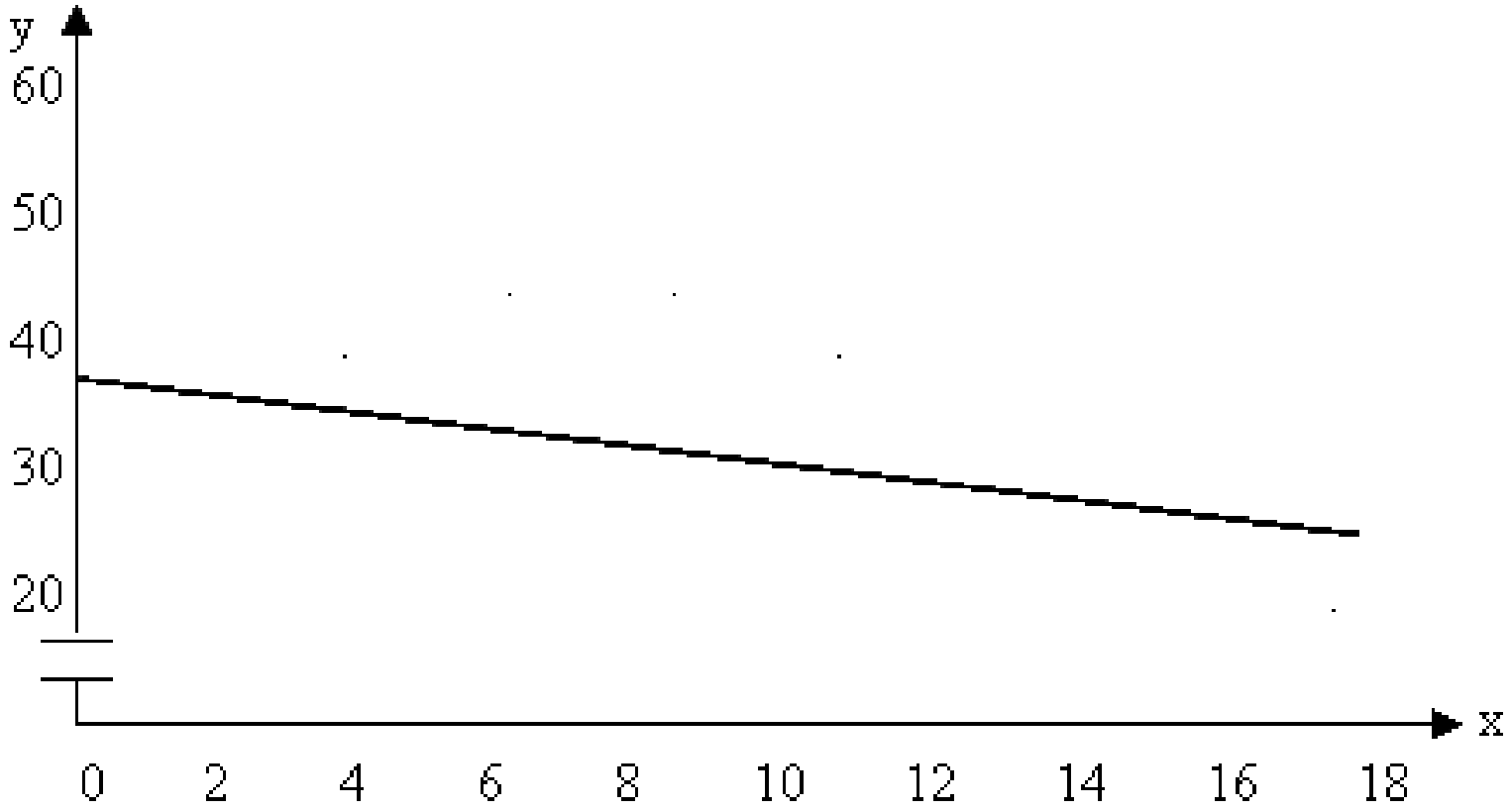
$52\ a + 658\ b = 1978.1$ . . . . . (2)

وبحل المعادلتيــن (1) ، (2)

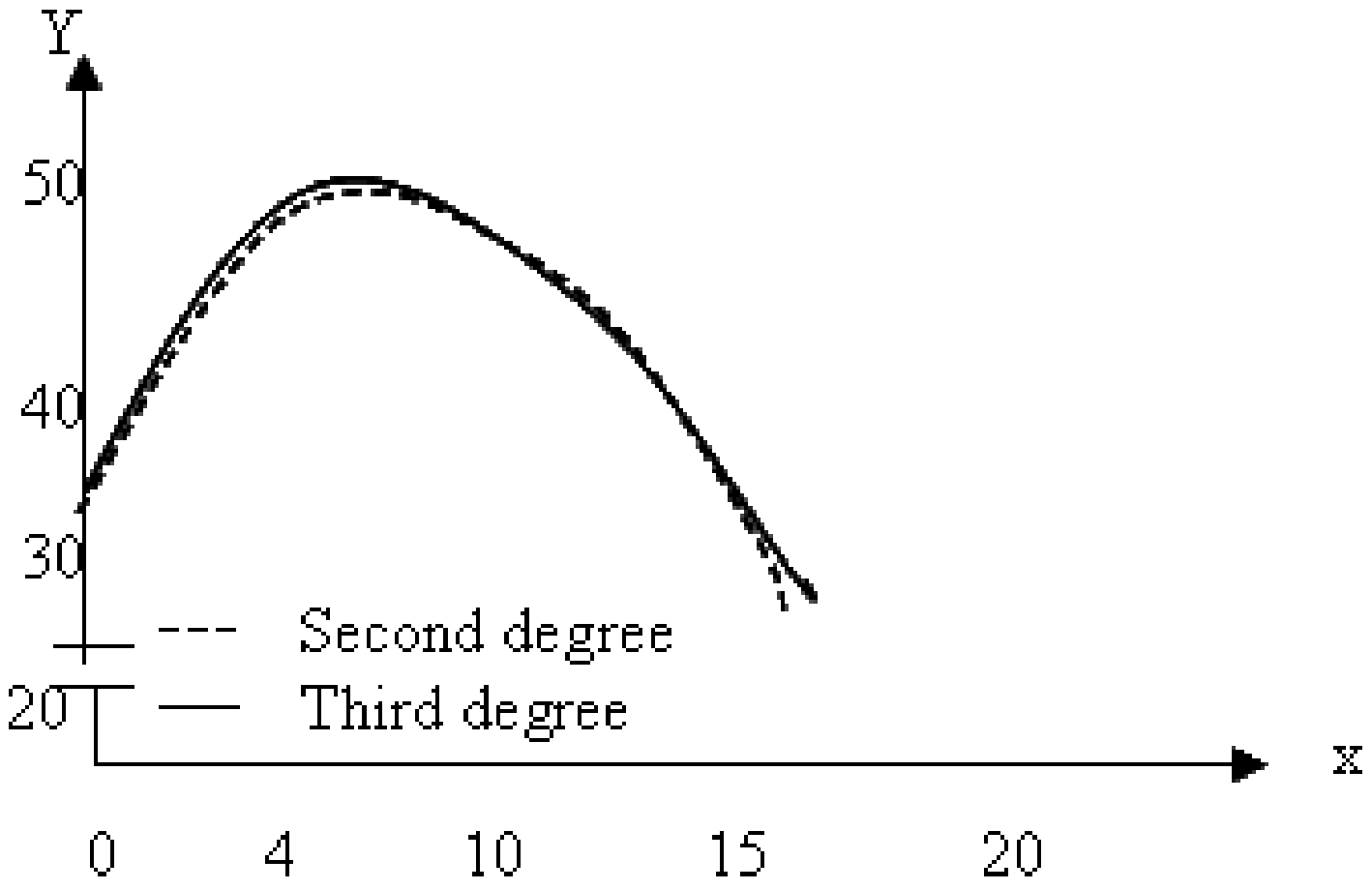
$\therefore b = -.0609 \qquad a = 38.8114$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $y = 38.81 - .0609\ x$

المناظرة لها y وقيم x وإذا ما تم توقيع قيم علي ورق بياني عادي (الشكل التالي أ) نجد أن الخط المستقيم غير صالح لتمثيل العلاقة الموجودة بين ميعاد الحصاد وكمية المحصول . وتطبيق معادلة الخط المستقيم هنا باستخدام المعادلات الطبيعية لكي تعطى الطالب فرصة التمرين علي استخدام المعادلات الطبيعية قبل تتبع منحنيات الدرجات الأعلى



(أ)



(ب)

لنفس quadratic curve والان نقوم بتطبيق منحني الدرجة الثانية النتائج

$$a\,n + b\sum x + c\sum x^2 = \sum y$$

$$a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 = \sum x\,y$$

$$a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 = \sum x^2\,y$$

$$\therefore 6a + 52b + 658c = 229.7 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$52a + 658b + 9436c = 1978.1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$658a + 9436b + 146194c = 23131.1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

يمكن الحصول علي المعادلة الآتية : (2) ، (1)ومن المعادلتين

$$1244\ b + 22400\ c = -75.8 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

يمكن الحصول علي المعادلة (3) ، (1)ومن المعادلتيــن الآتية :

$$22400\ b + 444200\ c = -12356.0$$

ومن المعادلتيـــن (4) ، (5)

$\therefore \quad c = -.2690$

وبالتعويض في المعادلة(4)

$\therefore \quad b = 4.7828$

وبالتعويض عن c , b)) في (1)

$\therefore \quad a = 26.3327$

وبذلك يمكننا الحصول علي معادلة الدرجة الثانية :

$y = 26.33 + 4.78\ x - .269\ x\ 2$

واذا ما قمنا برسم منحني الدرجة الثانية (الشكل السابق ب) نجد أنه مناسباً لتمثيل العلاقة الموجودة بين ميعاد الحصاد ومحصول الفاصوليا . وإذا أردنا القيام بتطبيق منحني الدرجة الثالثــة يلزمنا الحصول Third degree curve بالإضافة إلي $\Sigma x6$, $\Sigma x3y$, $\Sigma x5$ علي التقديرات السابقة

ونقوم بالتعويض في أربعة معادلات طبيعية للحصول علي الثوابت d , c ويترك للطالب كتمرين a , b , للحصول علي تلك الثوابت بنفس الطريقة السابقة .

وبذلك يمكن الحصول علي قيم الثوابت :

$d = -.00736$ $c = -.07015$

$b = 3.48886$ $a = 27.31449$

وبالتالي فإن معادلة الدرجة الثالثة هي كما يلي :

$$y=27.314 + 3.488\ x - .07015\ x^2 - .00736\ x^3$$

وبرسم منحني الدرجة الثالثة ومقارنته بمنحني الدرجة الثانية (شكل ب) من حيث تمثيل العلاقة الموجودة يتضح لنا أن منحني الدرجة الثالثة أكثر تمثيلا لتلك العلاقة .

Divided differences طريقة الفروق المجزأة

تستخدم طريقة الفروق المجزأة السابق مناقشتها في تحديد كثيرة الحدود التي تمثل العلاقة بين متغيرين y , x



أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي تمثل العلاقة بين y , x

x	4	6	8	10
y	1	3	8	20

[الحـــل]

x	y			
4	1			
		1		
6	3		(3/8)	
		2.5		(4/48)
8	8		(7/8)	
		6		
10	20			

$$\therefore y = 1 + 2/3\,(x - 4) + (x - 4)(x - 6) + 4/48\,(x - 4)$$
$$(x - 6)(x - 8)\ 3/8$$
$$y = 1/24\ (\ 2 \times 3 - 27 \times 2 + 142\ x - 240\ )$$

مثال

البيانات التالية تمثل وقت جمع محصول علي فترات من بداية(X) الفاصوليا بعد النضج
- أوجد معادلة (Y)النضج – والمحصول الناتج باستخدام نيوتن للفروق Y = P (X) المنحني المجزأة

X	0	1	2	3	4
Y	5	6.25	8	10.25	13

X	Y		Δ^1		Δ^2			
0	50.00							
		→	1.25					
1	6.25				$\frac{0.50}{2}$	= 0.25		
		→	1.75					0
2	8.00				$\frac{0.50}{2}$	= 0.25		
		→	2.25					0
3	10.25				$\frac{0.50}{2}$	= 0.25		
			2.75					
4	13.00							

$$Y = y_0 + (x - x_0) + (x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 5 + (x - 0)(1.25) + (x - 0)(x - 1)(0.25)$$
$$= 5 + 1.25\,x + (x^2 - x)(0.25)$$
$$= 5 + 1.25\,x + 0.25\,x^2 - 0.25\,x$$
$$Y = 0.25\,x^2 + x + 5$$

مثال

إذا كانت $y = f(x)$ أوجد معادلة انسب منحني يمثل العلاقة

X :	**1**	**2**	**3**	**4**
Y :	**5**	**7**	**11**	**29**

[الحـــل]

نستخدم طريقة نيوتن للفروق المجزأة

X	Y	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$
1	5			
		2	$\frac{4-2}{3-1}=1$	
2	7			
		4	$\frac{7-1}{4-1}=\frac{6}{3}=2$	
3	11			
		18		
4	29			

$$Y = y_0 + (x - x_0)\Delta_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_0^2 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta_0^3$$
$$= 5 + (x - 1)(2) + (x - 1)(x - 2)(1) + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(2)$$
$$= 5 + 2x - 2 + x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x + 2x^2 - 6x + 4$$

∴ انسب منحني يمثل العلاقة هو

$y = 9 - 5x + x^3$



إذا كانت $y = f(x)$ أوجد معادلة أنسب منحني يمثل العلاقة

X	1	2	3	4	5
Y	0	4	10	18	28

X	Y		Δ^1			Δ^2
1	0					
		→	4			
2	4		→		$\frac{6-4}{3-1}$	= 1
		→	6			
3	10		→		$\frac{8-6}{4-2}$	= 1
		→	8			
4	18		→		$\frac{10-8}{5-3}$	= 1
		→	10			
5	28					

$$Y = y_0 + (x - x_0)\ \Delta_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\ \Delta_0^2$$

$$= 0 + (x - 1)(4) + (x - 1)(x - 2)(1)$$

$$= 4x - 4 + x^2 - 3x + 2$$

$$y = x^2 + x - 2$$

وهي معادلة انسب منحني

مثال

في دراسة العلاقة بين عدد الوحدات من السماد (x) المضافة وكمية المحصول (y) تم الحصول علي البيانات التالية

x	1	2	3	4
y	1	3	9	19

[الحـــل]

X	Y		Δ^1			Δ^2		
1	1							
		→	2					
2	3			→	$\frac{4}{2}$	= 2		
		→	6				0	
3	9			→	$\frac{4}{2}$	= 2		
		→	10					
4	19							

$$Y = y_0 + (x - x_0)\ \Delta y_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\ \Delta_0^2$$

$$= 1 + (x - 1)(2) + (x - 1)(x - 2)(2)$$

$$= 1 + 2x - 2 + 2x^2 - 6x + 4$$

$$= 1 - 2 + 4 + 2x - 6x + 2x^2$$

$$= 3 + 2x - 6x + 2x^2$$

$$y = 3 - 4x + 2x^2$$

$$\therefore\ y = 2x^2 - 4x + 3$$

Interpolation and prediction (الاستيفاء) والتنبؤ الاستكمال

نهدف بدراسة هذا البند إلي مناقشة تطبيقات بعض أساسيات التحليل العددي Numerical analysis في المجالات البيولوجية التي نلخصها فيما يلي:

استيفاء Interpolation للقيم الواقعة y ((x القيم لدالة القيم التي تكون عندها $x_0 , \ldots , x_n$ بين $y_0 , \ldots , y_n$ معلومة .

وذلك بتقدير العديد Sub tabulation استيفاء الجداول علي $x_i + 1$, x_i من القيم بين كل زوج من القيم x_i فيمكن h سبيل المثال إذا كانت الفترة الاصلية لجدول ما اختزالها إلي (h / 10) .

y (x) ويشتمل علي تقدير قيم Prediction التنبؤ خارج حدود البيانات المتوفره x_o , ... , x_n.

طريقة الفروق المجزأة (المنقسمة)

Newton′ s divided difference formula

$$y_x=y_0+(x-x_0)\,\Delta y_0+(x-x_0)(x-x_1)\,\Delta 2y_0+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,\Delta 3y_0+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,\Delta n y_0$$

حيث

$$\Delta y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},.\Delta y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\Delta y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2},\ldots\text{etc..}$$

$$\Delta^2 y_0=\frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{x_2-x_0},\ \Delta^2 y_1=\frac{\Delta y_2-\Delta y_1}{x_3-x_1},\ \Delta^3 y_0=\frac{\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0}{x_2-x_0}\ \ldots\ldots\text{etc}$$

من , ... , Δy_0 , $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ وتعتبر الفروق المنقسمة الاولي والثانية والثالثة وهكذا

ولتسهيل العمليات الحسابية يمكن تكوين جدول الفروق التالى Difference Table :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

ويلاحظ في البنود السابقة أنه أستخدم صورة أخري لمعادلة نيوتن للفروق المنقسمة تذكرها هنا مرة أخري للمقارنة

$y_x = y_0 + (x - x_0)\, y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) y(x_0, x_1, x_2) + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\, y(x_0, \ldots, x_n)$.

حيث استخدمت الرموز

$y(x_0, x_1)$ ، .... ، $y(x_0, x_1, x_2)$, $y(x_0, x_1, x_2, x_3)$,

، . . . . . وتعبر عن الفروق المنقسمة $\Delta^3 y_0$, $\Delta^2 y_0$, Δy_0 التي تناظر

الأولي ، الثانية ، الثالثة ، . . . علي التوالي .

مثال

إذا علم أن $\log 658 = 2.8182$,

$\log 654 = 2.8156$

$\log 661 = 2.8202$, $\log 659 = 2.8189$

أوجد $\log 656$ باستخدام معادلة

Newton's divided differences

[الحـــل]

DIFFERENCES TABLE

x	Log x = y	Δ^1	Δ^2	Δ^3
654 x_0	2.8156 y_0			
		.00065		
658 x_1	2.8182 y_1		.00001	
		.00070		– .000004
659 x_2	2.8189 y_2		– .000017	
		.00065		
661 x_3	2.8202 y_3			

باستخدام معادلة نيوتن للفروق المنقسمة

$$y_x = y_0 + (x - x_0)\,\Delta^1 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\,\Delta^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots$$

$$y_{656.} = 2.8156 + (656 - 654)(.00065) + (656 - 654)(656 - 658)(.00001) + (656 - 654)(656 - 658)(656 - 659)(-.000004)\,.$$

$$= 2.8156 + 0.0013 - 0.00004 - 0.000048$$

$$= 2.816812$$

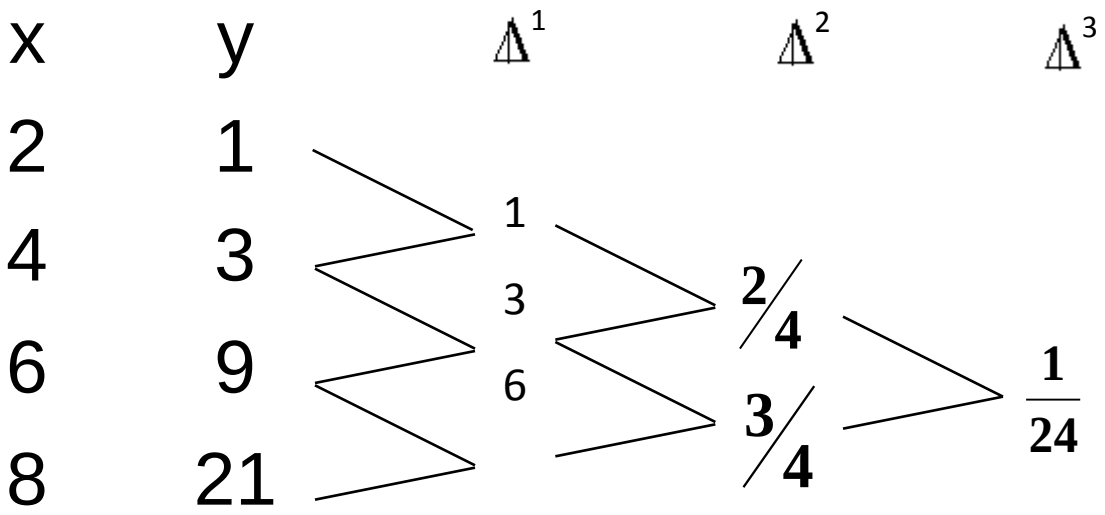
∴ باستخدام معادلة نيوتن للفروق المنقسمة $\log 656 \sim 2.8168$

مثال

باستخدام طريق نيوتن للفروق المجزأة، أوجد معادلة أنسب خط مستقيم لتمثيل العلاقة بين x , y

x	2	4	6	8
y	1	3	9	21

[الحـــل]


x
y
Δ^1
Δ^2
Δ^3
2
1
4
3
6
9
8
21
1
3
6
$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{24}$

$$y = 1 + (x-2)(1) + (x-2)(x-4)(2/4) + (x-2)(x-4)(x-6)(1/24)$$

$$= 1 + x - 2 + 1/2\left(x^2 - 6x + 8\right) + 1/24\left(x^3 - 12x^2 + 44x - 48\right)$$

$$= x - 1 + 0.5x^2 - 3x + 4 + 0.04x^3 - 0.5x^2 + 1.8x - 2$$

$$= 1 - 2.2x + 0.04x^3$$

مثال

استخدم احدى طرق توفيق المنحنيات لإيجاد معادلة أنسب منحنى ( ) ، (عدد xلتمثيل العلاقة بين المتغيرين (عمر النبات بالاسبوع ( ) مع التوضيح بيانياً – ثم (y = f (x)، حيث yالأوراق على النبات (استخدم المعادلة المتحصل عليها فى إيجاد عدد الأوراق المتوقع على أسابيع اذا كانت:8النبات عند عمر

x	4	7	10	13	16
y	3	7	13	21	31

[الحـــل]

	x		y	Δ	$^2\Delta$
x_0	4	y_0	3		
				$\frac{7-3}{7-4}=\frac{4}{3}$	
x_1	7	y_1	7		
					$\frac{2-1.3}{10-4}=0.1$
x_2	10	y_2	13	$\frac{13-7}{10-7}=\frac{6}{3}$	
					$\frac{2.6-2}{13-7}=0.1$
x_3	13	y_3	21	$\frac{21-13}{13-10}=\frac{8}{3}$	
					$\frac{3.3-2.6}{16-10}=0.1$
x_4	16	y_4	31	$\frac{31-21}{16-13}=\frac{10}{3}$	

$$y = y_0 + (x - x_0)\ \Delta^1_0 + (x - x_0)(x - x_1)\ \Delta^2_0$$

$$y = 3 + (x - 4)\ \tfrac{4}{3} + (x - 4)(x - 7)\ 0.1$$

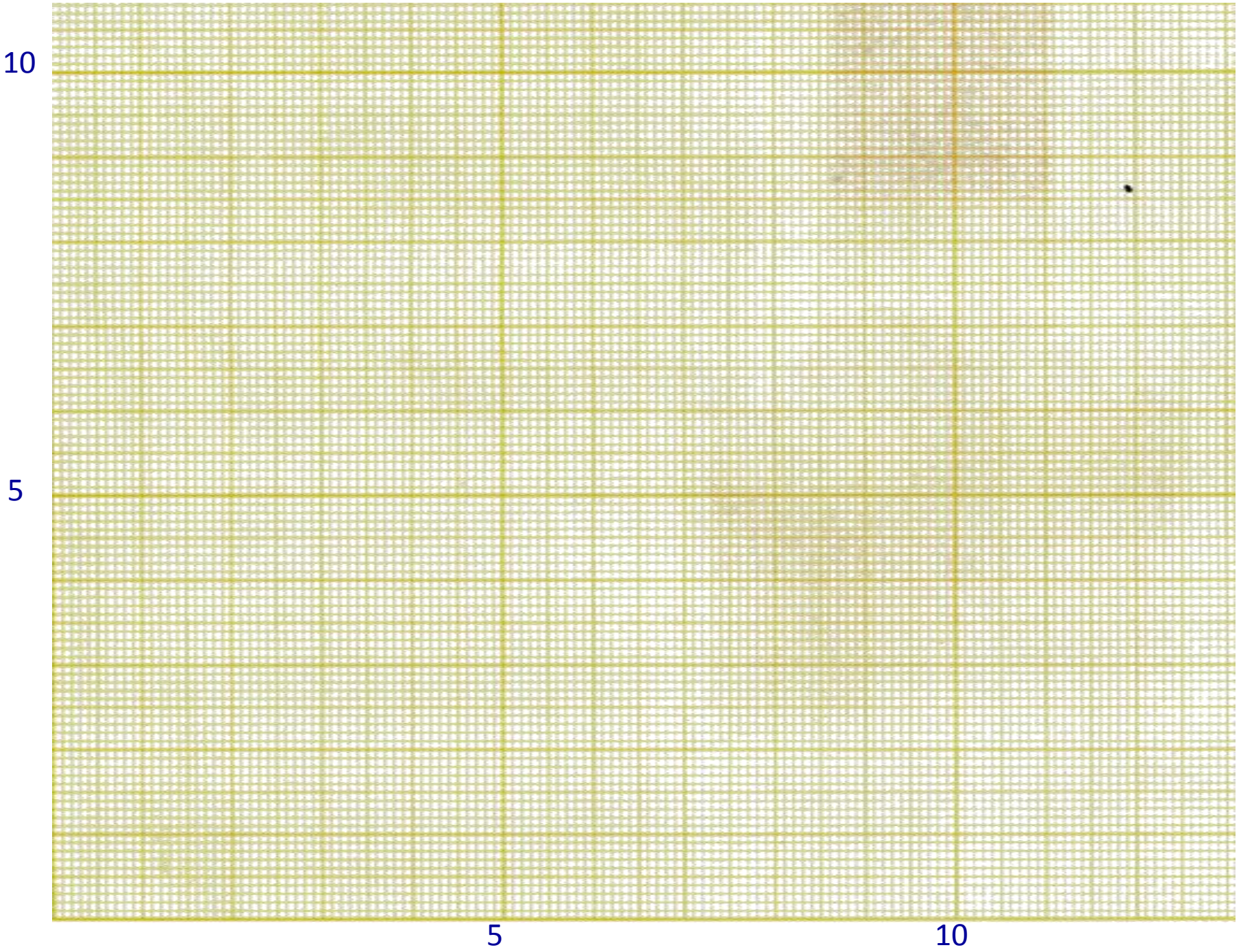
$$y = 3 + 1.3\ tx - 5.2 + (x^2 - 11x + 28)\ 0.1$$

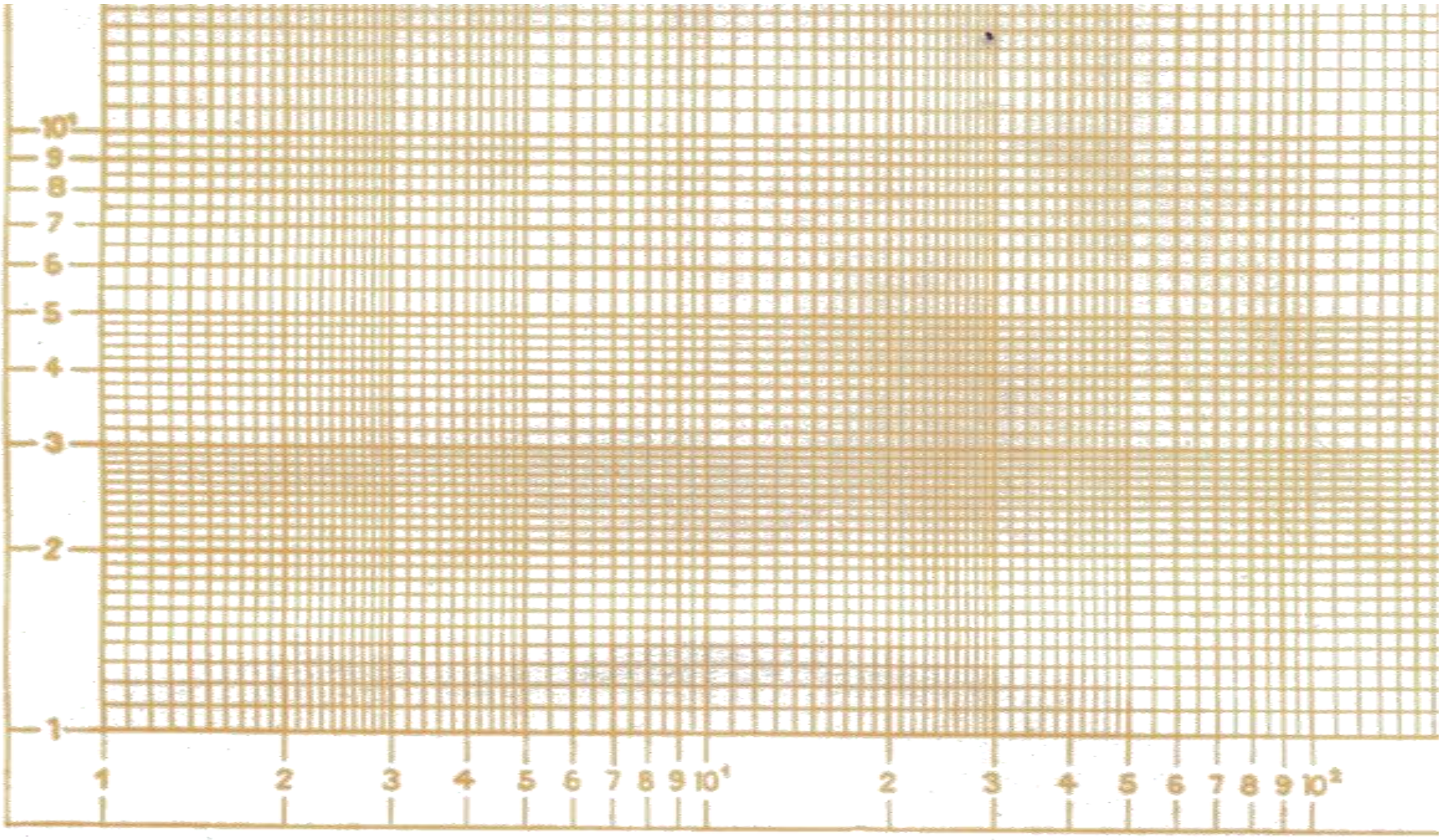
$$y = 0.6 + 0.2\ x + 0.1\ x^2$$

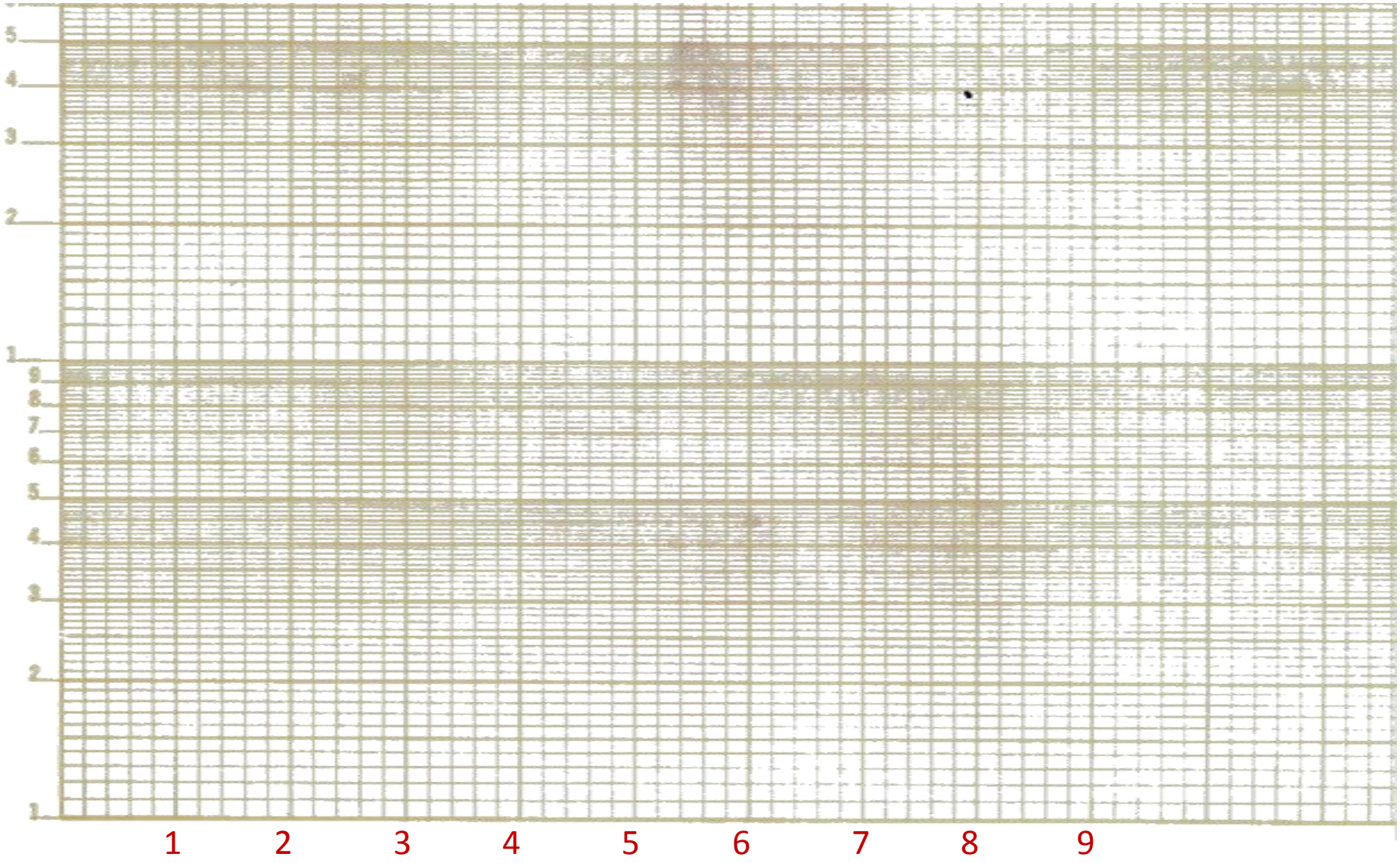
عمر النبات عند ٨ أسابيع

$$y = 0.6 + 0.2\ (8) + 0.1\ (8)^2 = 0.6 + 1.6 + 6.4$$

$$y = 8.6$$


10
5
5
10


10^1
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10^1
2
3
4
5
6
7
8
9
10^2


5
4
3
2
1
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$y = a x^n \quad \textbf{Power function}$$

$$\log y = \log a + n \log x$$

$$y' = a' + nx'$$

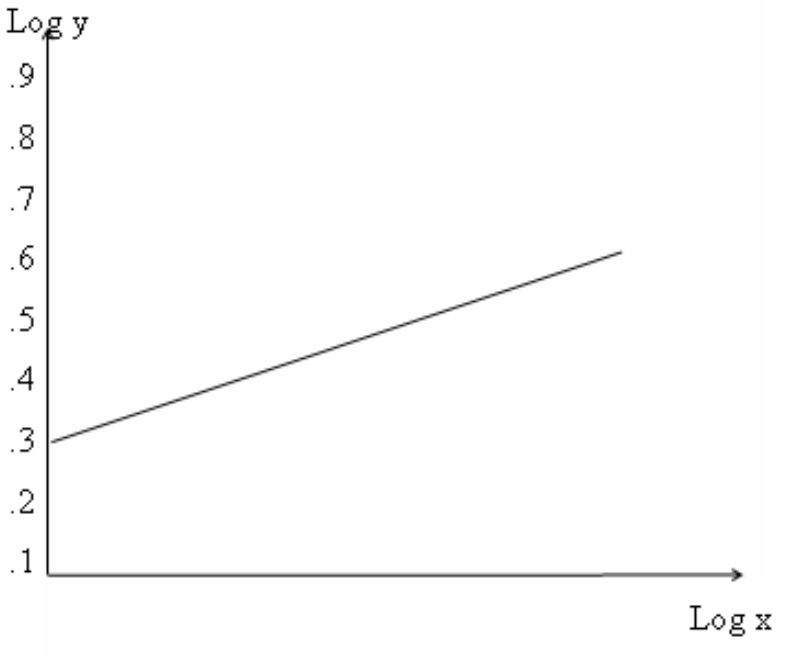
$$\log y = \log 2 + \frac{1}{2} \log x$$

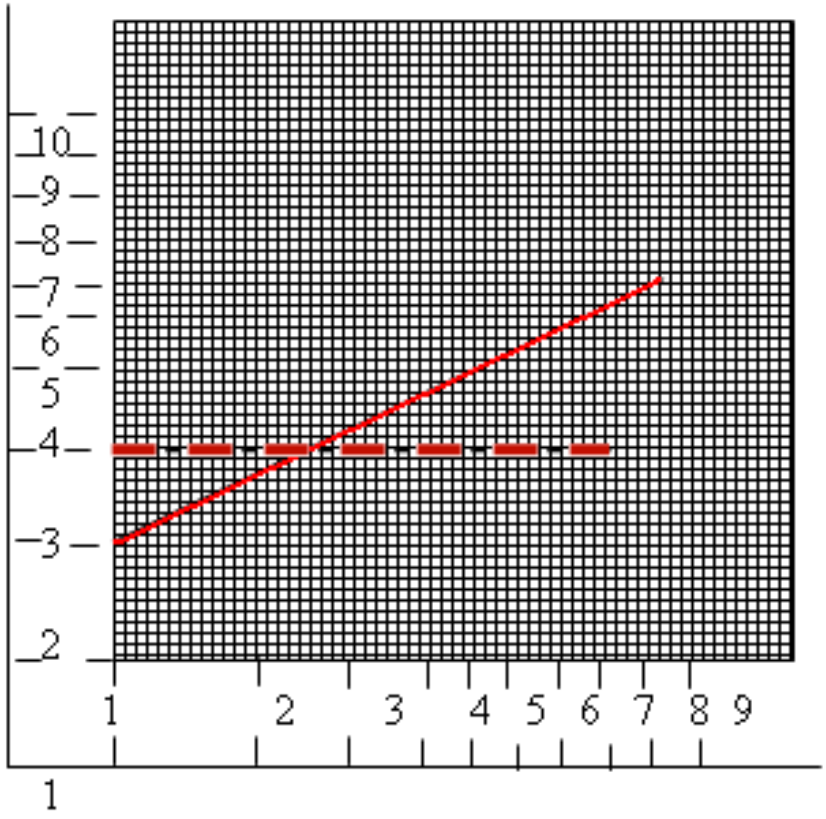
$$y = 2 x^{\frac{1}{2}}$$

الميل = المقابل باسم

المجاور بالسم

قياس مطلق


Log y
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
Log x


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1

$y = a^{mx}$ Exponential F.

$\ln y = \ln a + mx$

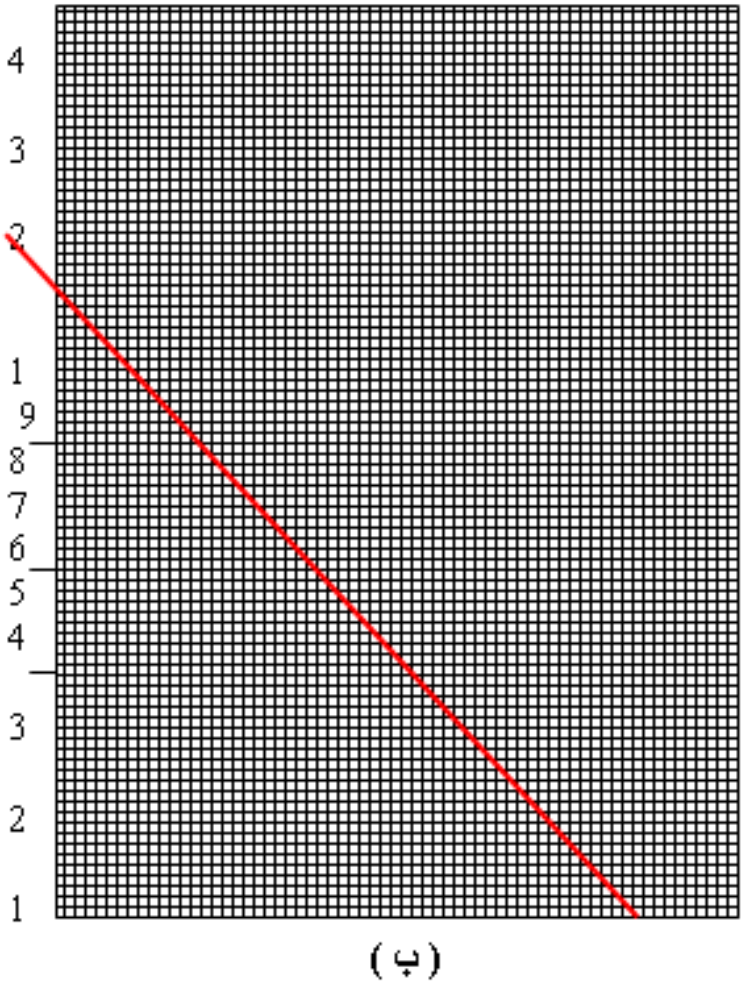
$y' = a' + mx$

$\ln a = 2.84$

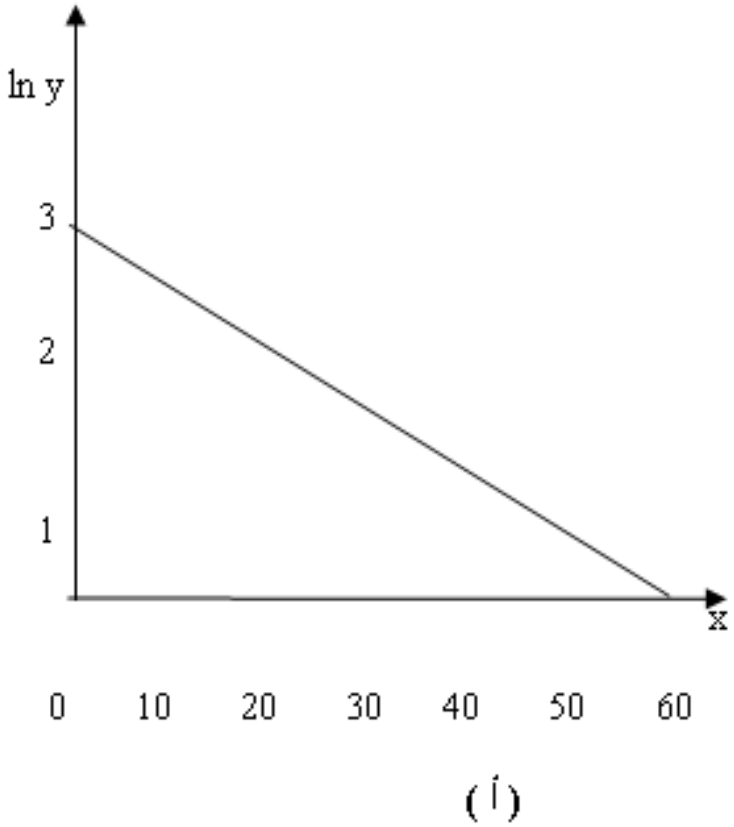
$y' = a' + mx \qquad a = 17.1$

$$m = -\frac{\ln a}{63} \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = -\frac{2.84}{63} = -0.045$$

$$\therefore y = 17.1e^{-0.045x}$$



(ب)



(أ)

$$y = y_0 + (x - x_0)\Delta_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_0^2$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta_0^3 + \ldots\ldots$$

x	0	1	2	3	4
y	0	2	6	12	20

Δ^1 2 4 6 8

Δ^2 1 1 1

$y = x^2 + x$

$$y = 0 + 2(x - 0) + 1(x - 0)(x - 1)$$
$$= 2x + x^2 - x$$
$$= x^2 + x$$