

الاسم: <u>الحمد المورزي</u>	باسم الله الرحمن الرحيم جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا كلية الهندسة قسم العلوم العامة والامتحانات	التخصص: رقم الطاب:
-----------------------------	---	-----------------------------------

الاختبارات الفصلية - الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي 2016/2017م

الزمن : ساعتان
التاريخ 2017/8/

المادة: الجبر الخطي
السنة: الاولى بكالوريوس

تعليمات هامة : اكتب اسمك وتخصصك في الاماكن المخصصة
الصفحة الاولى

1- أي العبارات التالية صائبة وايهما خاطئة

(أ) الضرب النقطي للمتجهات كمية قياسية بينما الضرب الاتجاهي كمية متجهة

(ب) اذا كانت A مصفوفة غير شاذة فان النظام الخطي المتجانس $\underline{x} = 0$ يكون له حل غير صفري

(ت) اذا كانت A مصفوفة مربعة من النوع 4×4 فان رتبة A تساوي 4

(ث) العبارات التالية كلها متوافقة

(1) المصفوفة A غير شاذة

(2) النظام المتجانس $\underline{x} = 0$ ليس له الا الحل الصفرى

(3) المصفوفة A متوافقة صفويا لمصفوفة الوحدة I

(4) $\det(A) = 0$

(ج) أى نظام خطى مكون من n معادلة في n من المتباينيل يكون دائما متوائما

(ح) الضرب الاتجاهي يتفق العلاقة $A \times B = -B \times A$

(خ) انقيم الذاتية للمصفوفة لا توجد من العلاقة $|A - \lambda I| = 0$

(د) اذا كانت A و B مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ وان المصفوفة B غير شاذة فان:

$$|B| = |(A^{-1}BA)| \quad (1)$$

$$|(A+B)| = |A| + |B| \quad (2)$$

$$|(A^T B^T)| = |A| |B| \quad (3)$$

السؤال الثاني

• اكتب حرف الإجابة الصحيحة داخل المستطيل

(أ) كل سؤال يوجد به إجابة صحيحة ، اختر الإجابة الصحيحة

1- يقال أن المصفوفة $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ متمثلة إذا كان :

a $A = A^{-1}$ b $A = A'$ c $a_{ij} = a_{ji}$ d $|A| = 0$

2... القيم الذاتية للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ هي :

a $(-4, 1)$ b $(4, -1)$ c $(4, 1)$ d $(-4, -1)$

3- إذا كانت $A_{3,3} = [a_{ij}]$ و $|A| = 2$ فإن $|3A|$ تساوي :

a 54 b 6 c 9 d 27

4- إذا كانت $A_{4,4} = [a_{ij}]$ مصفوفة غير شاذة فإن $\text{rank}(A)$ يساوي :

a 1 b 2 c 3 d 4

5- لتكن $A_{n,n} = [a_{ij}]$ فإن A مصفوفة متثلثة عينا :

a $a_{ij} = 0 \forall i < j$ b $a_{ij} = 0 \forall i > j$ c $a_{ij} = 0 \forall i \leq j$ d $a_{ij} = 0 \forall i \geq j$

6- إذا كان $Ax = b$ و $|A| = 0$ فإن النظام الخطي يكون له :

a حل وحيد b ليس له حل c عدد لا نهائي من الحلول d كل ماورد صحيح

7- لتكن $A_{n,n} = [a_{ij}]$ فإن A مصفوفة قابلة للعقب :

a $AB \neq BA$ b $AB \leq BA$ c $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ d $AB = BA$

8- إذا كانت $|B| = -3$ و $|A| = 2$ فإن قيمة $|A^{-1}B^T|$ تساوي :

a $-3/2$ b $3/2$ c $2/3$ d $-2/3$

9- الشرط الضروري الكافي لكي يكون لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة $Ax = 0$ الحل الصفري فقط هو :

a $\text{rank}(A) = n$ b $|A| = 0$ c $|A| \neq 0$ d $\text{rank}(A) \neq n$

مع امنياتي لكم بالتوفيق

حاول الإجابة عن جميع الاسئلة

السؤال الاول

1- (أ) إذا كان u دالة متجانسة ذات رتبة n في المتغيرين x و y أثبت أن

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

(ب) إذا كان $z = \sin^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$ أثبت أن $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \tan z$

2- لتكن $\psi(x, y) = c$ حيث c ثابت، أثبت أن

$$(i) \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

$$(ii) \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\psi_{xx}\psi_y^2 - 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_x^2\psi_{yy}}{\psi_y^3}$$

السؤال الثاني

1- (أ) استنتج معادلة القطع المكافئ الذي محوره ينطبق مع محور X ورأسه $(0,0)$ ومفتوح من جهة اليسار (الرسم مطلوب).

(ب) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y - 3 = 0$ ورأسه نقطة الاصل

2- النقطة $w(x, y)$ تتحرك في المستوى بحيث أن $x = 3 \sin t$, $y = 8 \cos t$ اكتب المعادلة بدلالة x, y وما نوع القطع؟

3- حدد الاختلاف المركزي (e) للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

السؤال الثالث

1- حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

2- حدد نوع القطع المخروطي الذي نمثله كل معادلة ممايلي:

(i) $8y^2 - 6x^2 + 4xy + 2y - 6x - 4 = 0$

(ii) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

(iii) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

مع امنياتي لكم بالتوفيق

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \tan z \quad \text{اثبت ان} \quad Z = \sin^{-1} \left[\frac{x^3 + y^3}{x+y} \right] \quad \text{اذا كان}$$

$$u = \frac{x^3 + y^3}{x+y} \quad \text{تفرض ان}$$

$$u = \frac{1 + \frac{y}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^3}} = \frac{1 + (\frac{y}{x})^3}{\frac{1}{x^2} [1 + \frac{y}{x}]} = x^2 \left[\frac{1 + (\frac{y}{x})^3}{1 + \frac{y}{x}} \right]$$

بقسمه على من البسط والمقام على x^3 نجد ان

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u \quad (1)$$

$$u = \sin z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos z \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos z \frac{\partial z}{\partial y}$$

بالعقود يعين في المعادلة (1) نجد ان

$$x \cos z \frac{\partial z}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \sin z$$

بالقسمة على $\cos z$ نجد ان

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \tan z$$

$$\psi(x,y) = c \quad \text{اثبت ان}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

الانما يبارن المعاد حيث c ثابتة فالتفاضل

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

بسم الله الرحمن الرحيم

الحل النموذجي للاختبار الجبر الخطي والهندسة لطالب
السنه الاولى بكالوريوس هندسه للفصل الدراسي الثاني
2016/2017

السؤال الاول

1- لي اذا كان u دالة متجانسة ذات رتبة n من المتغيرات x, y اثبت

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

الاثبات
من مبرهنة اويلر

$$(i) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

بالتفاضل الجزئي للمعادلة (1) بالنسبة لـ x ولا نجد ان

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = n \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(iii) \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n \frac{\partial u}{\partial y}$$

بجبر المعاد (ii) و (iii) في x والمعادله (1) لا والجمع نجد ان

$$\left[x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \left[x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = n \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = n(nu)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

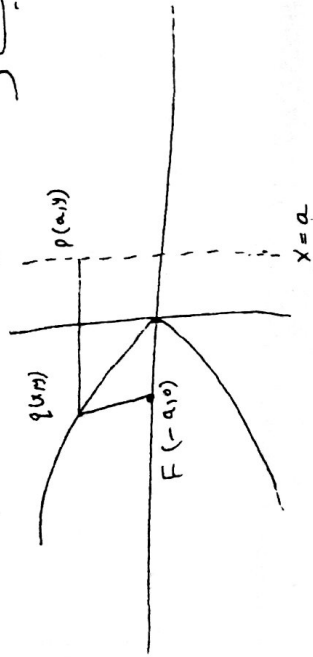
من المعادله (ii) ونجد ان

$$nu + \left[x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = n^2 u$$

$\Rightarrow$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

السؤال الثاني
الاستنتاج معادلة القطع الذي له نقطة الأصل ومركزه
البؤري



من تعريف القطع المكافئ

$$|PF| = |PQ|$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

بتربيع الطرفين نحصل

$$(x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

بالجمع نحصل

$$y^2 = -4ax$$

(ب) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي معارلة ورأسه $y-3=0$ ورأسه

نقله إلى أصل

معاد معارلة الدليل $y=3$ الرأس $(0,0)$

$$x^2 = -4ay$$

معاد $a=3$

$$x^2 = -12y$$

$$\text{و} \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x} / \frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial y}} = -\frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{dy}{dx^2} = \frac{-p_{xx} p_y^2 - 2p_x p_y p_{xy} + p_x^2 p_{yy}}{p_y^3}$$

نقوم بان

$$p_x = p, \quad p_y = q, \quad p_{xx} = r$$

$$p_{xy} = s, \quad p_{yy} = t$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} \quad \text{--- (1)}$$

تفاضل المعادلة (1) بالنسبة لـ x

$$\frac{dy}{dx^2} = -\frac{q \frac{dp}{dx} - p \frac{dq}{dx}}{q^2} \quad \text{--- (2)}$$

ونسمي p تساوي p_x ، ونكدر دالة x, y : التفاضل العام للدالة p

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$= r + s \left[-\frac{p}{q} \right] = \frac{qr - ps}{q} \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$= s + t \left[-\frac{p}{q} \right] = \frac{qs - pt}{q} \quad \text{--- (4)}$$

بالتعويض (3) و (4) في (2) نحصل

$$\frac{dy}{dx^2} = -\frac{qr - ps + p^2 t}{q^2}$$

أو

$$\frac{dy}{dx^2} = -\frac{p_{xx} p_y^2 - 2p_x p_y p_{xy} + p_x^2 p_{yy}}{p_y^3}$$

السؤال الثالث

1- حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

المعادلة مقلوبة في الصورة القياسية

المركز $(-1, -2)$

$$a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4$$

$$c = \sqrt{9+16} = 5$$

الرأسان

$$(2, -2), (-4, -2)$$

البؤشيان $(4, -2), (-6, -2)$

خطا الشقاء $y+2 = \frac{4}{3}(x+1), y+2 = -\frac{4}{3}(x+1)$

2- حدد نوع القطع الذي تمثله كل معادلة

$$(i) 8y^2 - 6x^2 + 4xy + 2y - 6x - 4 = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$b = 4, a = -6, c = 8$$

$$4^2 - 4(-6)(8) =$$

$$16 + 192 = 208 > 0$$

هو القطع زائد

$$(ii) 3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$$

$$b = 3, a = 4, c = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$9 - 4(4)(0) = 9 > 0$$

هو القطع زائد

2- المنقطة $w(x)$ نتحرك في المستوى بحيث

$$y = 8 \cos t \quad \text{و} \quad x = 3 \sin t$$

اكتب المعادلة بدلالة x, y وما نوع القطع.

$$x = 3 \sin t, y = 8 \cos t$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \sin^2 t$$

$$\frac{y}{8} = \cos t \Rightarrow \frac{y^2}{64} = \cos^2 t$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$$

نوع القطع قطع ناقص

3- حدد الاختلاف المركزي e للقطع الناقص

$$\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

أولاً نحسب c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 100 - 9$$

$$c = \sqrt{91}$$

الاختلاف المركزي e

$$e = \frac{c}{a}$$

$$a = 10, c = \sqrt{91}$$

$$e = \frac{\sqrt{91}}{10} = 0.95$$

$$(iii) \quad 3x^2 + 6x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$$

$$a=3, b=0, c=2$$

$$b^2 - 4ac =$$

$$0 - 4(3)(2) = < 0$$

القطع ناقص.

بسم الله الرحمن الرحيم
الحل النموذجي للاختيار الثاني لمادة الجبر الخطي
لطلاب السنة الأولى بكالوريوس شتاتل للعلم
2016 / 2017

السؤال الأول
١- اوجد f_x و f_y للدوال الآتية

$$(i) f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$f_x = \frac{1}{y}$$

$$f_y = -\frac{x}{y^2}$$

$$(ii) f(x, y) = \frac{y}{x}$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2}$$

$$f_y = \frac{1}{x}$$

$$(iii) f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$$

$$f_y = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$$

$$(iv) f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$f_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

مثال ٢١ $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ مثال ٢١ - ٢

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

$$f_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$f_{xx} = \frac{[-(x^2 + y^2)]x_0 + y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{[x^2 + y^2]^2}$$

$$f_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy} = \frac{[(x^2 + y^2)]x_0 - x \cdot 2y}{[x^2 + y^2]^2} = \frac{-2xy}{[x^2 + y^2]^2}$$

$$\therefore f_{xx} + f_{yy} = \left[\frac{2xy}{[x^2 + y^2]^2} - \frac{2xy}{[x^2 + y^2]^2} \right] = 0$$

مثال ٢٢ $u(x, y) = x^2 + y^2$ مثال ٢٢ - ٣

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\therefore du = 2x dx + 2y dy$$

السؤال الثاني

١ - إذا كان

$$Z = \sin^{-1} \left[\frac{x^3 + y^3}{x+y} \right] \quad \text{اثبت ان}$$

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y} = 2 \tan Z$$

نفرض ان

$$u = \frac{x^3 + y^3}{x+y} \Rightarrow u = x^2 \left[\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{1 + \frac{y}{x}} \right]$$

∴ u دالة متجانسة من الرتبة 2

و u تحقق معادلة أويلر

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u \quad \text{--- (1)}$$

و لكن

$$u = \sin Z$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \cos Z \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos Z \frac{\partial Z}{\partial y}$$

بالنعويض في المعادلة (1) نجد ان

$$x \cos Z \frac{\partial Z}{\partial x} + y \cos Z \frac{\partial Z}{\partial y} = 2 \sin Z$$

بالقسمة على $\cos Z$

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y} = 2 \tan Z$$

2 - اثبت ان المقدار

$$(y + e^x) dx + (\sin y + x) dy$$

يمثل تفاضل تام (كس)

$$p(x,y) = y + e^x$$

نفرض ان

$$q(x,y) = \sin y + x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

∴ الحقبة
 $(y + e^x)dx + (\sin y + x)dy$
 هي تكاملية كاملة

حيث $u = (\ln xy) \cdot x$
 $x^3 + y^3 + 3xy = 1$

3- إذا كان

جـ $\frac{du}{dx}$
 بفرصة

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

بالنسبة إلى dx

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln xy + \frac{x}{xy} \cdot y = 1 + \ln xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \ln xy + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

ولكن $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 + 3y}{3y^2 + 3x} = -\frac{x^2 + y}{y^2 + x}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \ln xy - \frac{x}{y} \left[\frac{x^2 + y}{y^2 + x} \right]$$