

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية الهندسة - قسم العلوم العامة

الإمتحانات الفصلية - الدورة الاولى للعام الدراسي 2010/2009م

المادة: الحسبان

الزمن: 3 ساعات

الفصل: السنة الأولى بكالوريوس هندسة

التاريخ: 2010/2/18

الإسم:	التخصص:	رقم الجلوس:
--------------	---------------	-------------------

تعليمات عامة:-

المسألة	درجة المسألة	الدرجة المتحصلة	امضاء المصحح
1	20		
2	20		
3	20		
4	20		
5	20		
المجموع	100		

1. اكتب اسمك و رقم جلوسك في الأماكن المخصصة أعلاه
2. سجل بهذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أى مسودات و لا يسمح باستخدام أية ورقة إضافية خارجية بآية حالة من الأحوال
3. تأكد: أسئلة هذا الإمتحان (5 أسئلة) و مطبوعة على (8 صفحات)
4. الدوائر و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأصل التصحيح.

السؤال الاول

1- صنف كل من الدالتين a^x و $\log a^x$ على أساس انها زوجية أو فردية أو غير

ثبات

$$f(x) = a^x, f(-x) = a^{-x}, f(x) = -a^x$$

$$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$$

الدالة a^x لا زوجية ولا فردية

$$f(x) = \log a^x = x \log a, f(-x) = -x \log a, f(x) = -x \log a$$

$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة $\log a^x$ زوجية

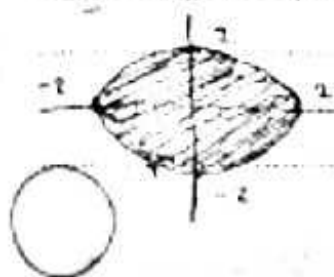
2- اوجد فترة تعريف الدالة الحقيقية $f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ وبين الفترة على

المستوي الحقيقي

$$0 \leq (x^2 + y^2) \leq 4$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

هذه معادلة دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 2.
 في مجال تعريف الدالة $f(x,y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ مع محيط
 الدائرة وما بداخلها التي معادلتها $x^2 + y^2 = 2$
 التمثيل



3- أوجد قيمة النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{\cot^2 x}\right)^{\cot^2 x}$$

عندما $x \rightarrow 0 \Rightarrow \cot^2 x \rightarrow \infty$

$$\lim_{\cot^2 x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\cot^2 x}\right)^{\cot^2 x} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xe^x + e^x) - \frac{1}{1+x}}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

بتميزبق لوبيتال مرة اخرى

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

4- لكثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ وبدون ايجاد الجذور اثبت ان
 لها جذر اول في الفترة $[0,2]$ وجذر ثلثي $[2,4]$ وجذر ثالث $[4,6]$

$$f(0) = -15 \text{ و } f(2) = 8 - 9 \times 4 + 23 \times 2 - 15 = 3$$

∴ يوجد جذر بين 0 و 2 لان $f(0) f(2) < 0$

$$f(2) = 3 \text{ , } f(4) = 4^3 - 9 \times 4^2 + 23 \times 4 - 15 = -3$$

∴ يوجد جذر بين 2 و 4 لان $f(2) f(4) < 0$

$$f(4) = -3 \text{ و } f(6) = 6^3 - 9(6)^2 + 23(6) - 15 = 15$$

في يوجد جذر بين 4 و 6 لأن $f(4)f(6) < 0$

السؤال الثاني

1- توجد $\frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية

$$y = xa^x \cosh x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cosh x + x a^x \ln a \cosh x + x a^x \sinh x$$

$$y = \cot^{-1} \sqrt{x^2 - 1} + \sec^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{-x}{(1 + x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Zero}$$

2- عبر عن $\sinh x$ في صورة أسية

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3- لتكن $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

بالضرب في e^y للطرفين والتحويل للطرف الآخر ثم بالتجميع والتقسيم

$$e^y - 2xe^y - 1 = 0 \Rightarrow$$

فهذه معادلة من الدرجة الثانية بالمتغير e^y وكلها

$$\Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = \ln[x + \sqrt{x^2 + 1}]$$

$$\Rightarrow y = \sinh^{-1} x = \ln[x + \sqrt{x^2 + 1}]$$

4- أثبت ان للمتسلسلة $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{48} + \dots$ مجموع الى ما لا نهاية و اوجد ذلك

المجموع في أبسط صورة
يمكن كتابة المتسلسلة من صورة المبرهنه الاسية

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{(\frac{3}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{3}{2})^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2})^n}{n!} = e^{\frac{3}{2}}$$

بما ان المبرهنه الاسية متقاربه لجميع قيم x المتناهية

المسئله متقاربه لجميع قيم x المتناهية

السؤال الثالث

1- اوجد متسلسلة تايلور للدالة $y = \ln(1+x)$ حول النقطة $x=0$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1, f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

2- اذا كان $x = a \cos^2 \theta$ و $y = b \sin^2 \theta$ حيث a, b ثوابت، اثبت ان

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$x = a \cos^2 \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -2a \sin 2\theta$$

$$y = b \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2b \sin \theta \cos \theta = b \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} \Rightarrow \frac{b \sin 2\theta}{-2a \sin 2\theta} = -\frac{b}{2a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \text{zero}$$



3- أوجد كل نقاط التوقف وميز بينها للدالة $y = x^3 e^{-x^2}$

لجميع نقاط التوقف

$$\frac{dy}{dx} = x^2(3-2x^2)e^{-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x=0, x=\sqrt{\frac{3}{2}}, x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

لـ $x=0$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 6(3-2 \cdot 0)e^{-0} > 0$$

لـ $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}} = 6(3-2 \cdot \frac{3}{2})e^{-\frac{3}{2}} > 0$$

بما أن $\frac{dy}{dx}$ لا يتغير إشارته، لا توجد نقطة انقلاب عند $x=0$ ،
الأعداد من هذا الدالة يدور من $x=0$ إلى $y=0$ (نقطة انقلاب)

لـ $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\sqrt{\frac{3}{2}}+ \epsilon} = (6\sqrt{3}\epsilon - 3\epsilon^3)e^{-\frac{3}{2}} > 0$$

نقطة انقلاب قصوى (لـ $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}})$)

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\sqrt{\frac{3}{2}}+ \epsilon} = (-6\sqrt{3}\epsilon + 3\epsilon^3)e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

لـ $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-\sqrt{\frac{3}{2}}- \epsilon} = (-6\sqrt{3}\epsilon + 3\epsilon^3)e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

نقطة انقلاب دنيا (لـ $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}})$)

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-\sqrt{\frac{3}{2}}- \epsilon} = (6\sqrt{3}\epsilon - 3\epsilon^3)e^{-\frac{3}{2}} > 0$$



4- إذا كان $u(x,y) = x^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} - y^2 \tan^{-1} \frac{y}{x}$ أثبت أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{x} \left[2y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right]$$

$$= \frac{x^3}{x^2+y^2} - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} [x^2+y^2] - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial (xy)} = 1 - 2y \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right] = 1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

السؤال الرابع
1- أجز التكميلات الآتية

$$\int x \sqrt{1+x} dx$$

يُعامل بالقرينين الذي يجعلها خالية من الجذور

$$u^3 = 1+x \Rightarrow x = u^3 - 1, \quad 3u^2 du = dx \Rightarrow u^2 du = \frac{dx}{3}$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x} dx &= \int (u^3 - 1) u (3u^2 du) = \int [3u^6 - 3u^3] du \\ &= \frac{3}{7} u^7 - \frac{3}{4} u^4 + C \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{7} (1+x)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

تحوّل البسط مشتقة المقام أذن

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

$$\int \sin 3\theta \cos 5\theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{2} (\sin 8\theta - \sin 2\theta) d\theta$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8\theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta + C$$

2- للتكامل $\int x^m (\ln x)^n dx$ حيث m, n أعداد صحيحة موجبة، أثبت أن

صيغة الاختزال تعطي

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1} \quad \text{بعلقة}$$

$$u = (\ln x)^n \Rightarrow du = n (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \quad \text{بمامل بالتجزئة}$$

$$dv = x^m dx \Rightarrow v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^{m+1} (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx$$

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$$

$$\int x^4 (\ln x)^3 dx \quad \text{مستخدما الصيغة أعلاه أوجد}$$

$$I_{4,3} = \frac{x^5}{5} (\ln x)^3 - \frac{3}{5} I_{4,2}$$

$$I_{4,2} = \frac{x^5}{5} (\ln x)^2 - \frac{2}{5} I_{4,1}$$

$$I_{4,1} = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} I_4$$

$$I_4 = \frac{x^5}{5} + C$$

السؤال الخامس

1- احسب قيمة التكاملات الآتية

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{1+x^6} dx$$

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \tan^{-1} u$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx$$

$$I_8 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx$$

$$I_6 \Big|_0^{\infty} = 6!$$

$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{2- اثبت ان}$$

$$\frac{1}{u} = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{u} - 1$$

بالحاصل بالتعويض

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{-\frac{du}{u^2}}{(\frac{1}{u}-1+1)\sqrt{(\frac{1}{u}-1)^2-1}} = \int_1^2 \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+1-1}}$$

$$= \int_1^2 \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{1-2u}} = \int_1^2 \frac{-du}{\sqrt{1-2u}} = \left[\sqrt{1-\frac{2}{x+1}} \right]_1^2$$

$$= \sqrt{1-\frac{2}{3}} - \sqrt{1-\frac{2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مع امنياتي لكم بالنجاح

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية الهندسة - قسم العلوم العامة

امتحانات إزالة الرسوب والمبطلين - الدورة الاولى للعام الدراسي 2010/2009م

الزمن 3 ساعات

المادة الحساب

التاريخ 2010 / 8 / 2

الفصل السنة الأولى بكالوريوس هندسة

الإسم	التخصص	رقم الجلوس
-------	--------	------------

تعليمات هامة:-

المسألة	درجة المسألة	درجة الترخيص	المجموع
1	20		
2	20		
3	20		
4	20		
5	20		
المجموع	100		

1. كتب اسمك و رقم جلوسك ونخصصك في الأماكن المخصصة أعلاه.
2. سجل بهذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أي مسودات و لا يسمح باستخدام أية ورقة إضافية خارجية بداية حصة من الأحوال
3. تكتب أسئلة هذا الامتحان (5 أسئلة) و مطبوعة على (8 صفحات)
4. النواتج و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأعمال التصحيح

المسائل الأولى

1. صف الدالة $\cosh x$ على أسس أنها زوجية أو فردية أو غير ذلك

$$f(x) = \cosh x, \quad f(-x) = \cosh(-x) = \cosh x$$

$$f(x) = f(-x)$$

∴ الدالة $\cosh x$ حالة زوجية

2. اوجد فترة تعريف الدالة الحقيقية $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ وبين الفترة على المستوى

الحقيقي

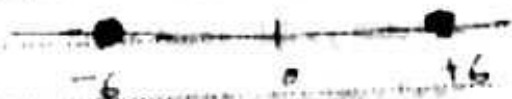
$$36 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 36$$

$$x \leq \pm 6$$

$$\therefore D_f = -6 \leq x \leq 6 = [-6, 6]$$

التمثيل على الخط العددي



3- أوجد قيمة النهاية التالية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x})^x = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$$

$$n = e^x$$

عندما $\infty < n < \infty$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n =$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

بعض كل من البسط والمقام من x^2 نبدأ

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x^2)}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x^2)}{x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 1 \quad \text{ولكنه}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x^2)}{x^4}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نبدأ

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{4x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

السؤال الثاني

1- أوجد $\frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية

$$y = xe^x \cosh x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cosh x + xe^x \cosh x + xe^x \sinh x$$



ثبت $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$
 $x = a(\theta - \sin \theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta)$

$$y = a(1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta}$$

$$= \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$



2- عر عن $\tanh x$ في صورة أسية

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$



$$\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x} \quad \text{3- أثبت ان}$$

L.H.S

$$= \left[1 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right] / \left[1 - \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right]$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

بتوحيد المقامات للبسط والقام نأخذ

$$\frac{\frac{2^x}{e+1} + \frac{2^x}{e-1}}{\frac{2^x}{e+1} - \frac{2^x}{e-1} + 1} = \frac{2^x}{2} = e^{2x}$$

4- أثبت أن الحد العام للمتسلسلة هو $6 + \frac{12}{8} + \frac{20}{27} + \frac{30}{64} + \dots$

ومن ثم اختر المتسلسلة من حيث التقارب والتباعد

منع $n=1$ $6 = 3 \times 2 = \frac{(1+1)(1+2)}{1^3}$ و $n=2$ $\frac{12}{8} = \frac{(2+1)(2+2)}{2^3}$

$n=3$ $\frac{20}{27} = \frac{4 \times 5}{27} = \frac{(3+1)(3+2)}{3^3}$

لذا الحد العام للمتسلسلة هو $\frac{(n+1)(n+2)}{n^3}$

$$6 + \frac{12}{8} + \frac{20}{27} + \frac{30}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{n^3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^3}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة متباعدة، إذن المتسلسلة $6 + \frac{12}{8} + \frac{20}{27} + \frac{30}{64} + \dots$ متباعدة بالأسس من مجموع متسلسلتين متقاربتين

السؤال الثالث

1- أوجد مفكوك تايلور للدالة $y = \tan^{-1} x$ حول النقطة $x=0$ مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=0$ هو مفكوك ماكدونالد

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

(1) $f(x) = \tan^{-1} x \Rightarrow f(0) = 0$ ، $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

(2) $f(x) = \frac{-2x}{(1+x)^2} \Rightarrow f(0) = 0$ ، $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(0) = -2$

(3) $f(x) \Rightarrow f(0) = 0$ ، $f'''(x) \Rightarrow f'''(0) = 24$

لذا $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{x}{y} \quad \text{الثبت أن} \quad \frac{x}{x-y} = \ln \frac{a}{x-y} \quad \text{2- ثابتان}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x-y} \right) = \frac{d}{dx} [\ln a - \ln(x-y)]$$

$$\frac{(x-y) - x[1 - \frac{dy}{dx}]}{(x-y)^2} = -\frac{1}{x-y} [1 - \frac{dy}{dx}]$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = -(x-y) [1 - \frac{dy}{dx}]$$

$$y \frac{dy}{dx} = 2y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{x}{y}$$

3- أوجد المشتقة النونية للدالة $y = \cos(ax+b)$

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin(ax+b) = -a \cos(ax+b + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 \sin(ax+b + \frac{\pi}{2}) = -a^2 \cos(ax+b + 2\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -a^3 \sin(ax+b + 2\frac{\pi}{2}) = -a^3 \cos(ax+b + 3\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -a^n \cos(ax+b + n\frac{\pi}{2})$$

4- أوجد النقاط على المنحنى $y = x^2 - 3x + 2$ التي يكون عندها المماس معامدا للمستقيم $y = x$ والنقاط على المنحنى $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 7$ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم $y = 2x$

للمنحنى $y = x^2 - 3x + 2$ $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$
 للمستقيم $y = x$ $\frac{dy}{dx} = 1$
 شرط التقامد $m_1 \times m_2 = -1$
 $(2x - 3) \times 1 = -1$
 $2x - 3 = -1 \Rightarrow x = 1$

عندما $x = 1 \Rightarrow y = 0$
 النقطة $(1, 0)$ هي التي يكون المماس معامدا للمستقيم
 للمنحنى $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 7$ $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 10$
 للمستقيم $y = 2x$ $\frac{dy}{dx} = 2$
 شرط التوازي $m_1 = m_2$

$6x^2 + 6x - 10 = 2$
 $6x^2 + 6x - 12 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1$, $x = -2$ قيمتين قسمن x من معادلة التمام للحداد

$y = 2$ و $y = 23$
 • النقاط هي $(-2, 23)$ و $(1, 2)$

المسألة الرابع
 1- أوجد التكاملات الآتية

$\int x \sqrt{2x+3} dx$

بمقابل بالتعويض الذي يجعلها خالية من الجذور

$u^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 - 3)$

$2u du = 2dx$

$\therefore \int x \sqrt{2x+3} dx = \int \frac{1}{2}(u^2 - 3) u du = \frac{1}{10} u^5 - \frac{1}{2} u^3 + C$

$= \frac{1}{10} (2x+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} (2x+3)^{\frac{3}{2}} + C$

$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ بمقابل بالتعويض

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$$

$$= \sin^{-1} e^x + C$$

$$\tan \theta = t \Rightarrow d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{d\theta}{1+\sin \theta} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \times \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2}$$

$$= 2 \int (t+1)^{-2} dt = 2 \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-2}{1+t} + C = \frac{-2}{1+\tan \theta} + C$$

2. لتكامل $\int x^m e^{ax} dx$ حيث m عدد صحيح موجب و a ثابت، أثبت ان صيغة الاختزال تعطى

$$I_m = \frac{1}{a} x^m e^{ax} - \frac{m}{a} I_{m-1} \quad \text{بواسطة}$$

$$u = x^m \Rightarrow du = m x^{m-1} dx, \quad dv = e^{ax} dx \Rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$I_m = \frac{1}{a} x^m e^{ax} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{ax} dx$$

$$I_m = \frac{1}{a} x^m e^{ax} - \frac{m}{a} I_{m-1}$$

السؤال الخامس
1- أحسب قيمة التكاملات الآتية

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ يُعامل بالتعويض

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} [\tan^{-1} u]$$

$$= \frac{1}{3} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$$

$$I_5 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} x$$

$$= \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$$

$$\text{أو } \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad \text{فان}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x = \frac{\pi}{2} - 1$$

2- أثبت أن

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

يُعامل بالتجزئة

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

مع امنيتي لكم بالتوفيق

الامتحانات الفصلية - الدورة الاولى للعام الدراسي 2011/2010

المادة: المثلث
الفصل: العدد الأولي مكالديوس خمسة
الترتيب: 3 درجات
التاريخ: 2011/2/11

الاسم	التخصص	رقم الجلوس
-------	--------	------------

نظميات عامة	السؤال	درجة السؤال	الدرجة المتحصلة	العضو المصحح
1. كتبت اسماء و رقم جلوسك في الأماكن المخصصة أعلاه	1	20		
2. حول بهذا القياس الإجابة عن جميع الأسئلة و أتي بمودت و لا يسمح باستخدام أية ورقة خارجية بلغة يدالة في الاموال	2	20		
3. تكمل أسئلة هذا الإمتحان (5 أسئلة) و مطبوعة على (8 صفحات)	3	20		
4. اذكر و الشكل المرسومة على الهوامش مخصصة لأجل التصحيح	4	20		
	المجموع	100		

السؤال الاول

1. إذا كان $f(x) = 2^x$ أثبت ان $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$

$$f(x+3) = 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 2^x \cdot 8$$

$$f(x-1) = 2^{x-1} = 2^x \cdot \frac{1}{2}$$

$$f(x+3) - f(x-1) = 2^x \cdot 8 - 2^x \cdot \frac{1}{2} = 2^x \left(8 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2^x \left(\frac{15}{2} \right)$$

بما $f(x) = 2^x$

بما $f(x+3) - f(x-1) = f(x) \left[\frac{15}{2} \right] = \frac{15}{2} f(x)$

2. وضح فترة تعريف الدالة الحقيقية $f(x, y) = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$ وبين الفترة على المستوى الحقيقي

$$16 - (x^2 + y^2) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 16$$

هذه معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 4
 في مجال تقريب الدالة $(\cos x)$ على مدار 2π مع دائرة $x^2 + y^2 = 4$ ومداخلها



3- بدون استخدام قاعدة لوبيتال أوجد قيمة النهاية التالية

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

عندما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\cos x \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{\cos x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\sec x} = e$$

4- خطط بيان الدالة $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$

المقاطع مع المحاور عند نقطة الأصل (0,0)

• اختبار قيم x عندما $x \rightarrow \pm \infty$

عند $x \rightarrow \pm \infty$ $f(x) \rightarrow 0$ (القيمة السالبة) ، عندما $x \rightarrow \pm \infty$ $f(x) \rightarrow 0$ (القيمة الموجبة)

• اختبار قيم x عندما $x \rightarrow \pm \infty$ $f(x) \rightarrow 0$

• اختبار قيم x عندما $x \rightarrow \pm \infty$ $f(x) \rightarrow 0$

• عندما $x \rightarrow 2$ $f(x) \rightarrow +\infty$ (اليسار) ، عندما $x \rightarrow -2$ $f(x) \rightarrow -\infty$ (اليمنى)

• عندما $x \rightarrow 2$ $f(x) \rightarrow -\infty$ (اليسار) ، عندما $x \rightarrow -2$ $f(x) \rightarrow +\infty$ (اليمنى)

• $x = \pm 2$ خطا تقارب

• الدالة فرقية



السؤال الثاني

1- أوجد $\frac{dy}{dx}$ لتدالة

$$x^y = e^{x-y}$$

ياخذ اللوغاريتم الطرفين

$$y \ln x = (x-y) \ln e$$

$$y \ln x = x - y$$

$$y \ln x + y = x$$

$$y = \frac{x}{1 + \ln x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \ln x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} = \frac{1 + \ln x - 1}{(1 + \ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \ln x / (1 + \ln x)^2$$

2. إذا كان $y = a \sin t$, $x = a(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$ أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \tan t$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t + a \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \sec^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= a \left[-\sin t + \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \right] = a \left[-\sin t + \frac{1}{\sin t} \right]$$

$$= \frac{a \cos t}{\sin t}$$

$$\frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{a \cos t}{\frac{a \cos t}{\sin t}} = \frac{a \cos t \cdot \sin t}{a \cos t} = \sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan t$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad \text{3- أثبت أن}$$

$$y = \coth^{-1} x \Rightarrow x = \coth y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$

$$x = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \Rightarrow x e^{2y} - x = e^{2y} + 1$$

$$\Rightarrow x e^{2y} - e^{2y} = x + 1 \Rightarrow e^{2y} [x - 1] = x + 1 \Rightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$e^y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \ln e^y = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{cath}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$u(x, y) = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad \text{إذا كان } \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow -4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} - \left[2y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{y^2}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right]$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} [x^2 + y^2] - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

السؤال الثالث

استخداما مفكوك مغلورين أثبت أن $e^{\pm \theta} = \cosh \theta \pm \sinh \theta$

$$f(\theta) = \cosh \theta \Rightarrow f(\omega) = 1, f(0) = \sinh \theta, f(\omega) = 0, f(0) = \cosh \theta \Rightarrow f(\omega) = 1$$

$$\cosh \theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (1)$$

$$f(\theta) = \sinh \theta \Rightarrow f(\omega) = 0, f(0) = \cosh \theta \Rightarrow f(\omega) = 1, f(0) = \sinh \theta, f(\omega) = 1$$

$$\sinh \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \quad (2)$$

$$e^{\pm \theta} = 1 \pm \theta + \frac{\theta^2}{2!} \pm \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} \pm \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$e^{\pm \theta} = \left[1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right] \pm \left[\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right]$$

منه (6) $e^{\pm i\theta} = \cosh \theta \pm i \sinh \theta$

2- أوجد قيمة حاصل الجمع للمتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= 3 \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right] + 2 \left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right]$$

$$= 3e + 2(e-1)$$

$$= 3e + 2e - 2$$

3- الإجابة x لجسم متحرك من نقطة ثابتة تحقق العلاقة

$$x = e^{-2t} \cos 3t$$

الزمن فأوجد ما يلي:

أ- مرة وعجلة الجسم بعد مضي ثلثية واحدة

ب- متى يتوقف الجسم لحظياً

4- أوجد المشتقة التامة للدالة

$$f(x) = \sin ax \quad \frac{dy}{dx} = a \cos ax = a \sin(ax + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 \cos(ax + \frac{\pi}{2}) = a^2 \sin(ax + \frac{2\pi}{2})$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = a^3 \cos(ax + \frac{2\pi}{2}) = a^3 \sin(ax + \frac{3\pi}{2})$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$$

السؤال الرابع
1- أدر العبارات الآتية

يعزب كل من البسط والمقام في $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}} \right)^2 dx = \int \operatorname{cosech}^2 x dx = \coth x + C$$

$$\int \sinh^6 \theta \cosh \theta d\theta$$

نكامل بالبدل $y = \sinh \theta \Rightarrow dy = \cosh \theta d\theta$

$$\int \sinh^6 \theta \cosh \theta d\theta = \int y^6 dy = \frac{y^7}{7} + C$$

$$= \frac{\sinh^7 \theta}{7} + C$$

2- لتكامل $\int \sin^m x \cos^n x dx$ حيث m, n أعداد صحيحة موجبة، أثبت أن صيغة الاختزال تعطى

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

بالملاقة

بالتعويض بالمتغيرات

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$dv = \sin^m x \cos^{n-2} x dx \Rightarrow v = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1}$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

بما أن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x dx$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}$$

$$\bigcirc \quad I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

السؤال الخامس

1- أحسب قيمة التكاملات الآتية

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \cosh x}$$

$\tanh \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1-t^2}$, $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \cosh x} &= \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1-t^2+1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{2} = \int_0^1 dt \\ &= \left[t \right]_0^1 = \tanh \frac{x}{2} \Big|_0^{\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \dots (1 \text{ or } \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \, dx = \frac{(7-1)(7-3)(7-5)}{7(7-2)(7-4)} \times 1 = \frac{6 \times 4 \times 2}{7 \times 5 \times 3} \times 1$$

$$\int_2^3 x \sqrt{1+x} \, dx$$

بما أن القويين الذي يجعلنا متاحة من الجذور

$$u^2 = 1+x \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow 2u \, du = dx$$

$$\int_2^3 (u^2 - 1) 2u^2 \, du = 2 \int_2^3 [u^4 - u^2] \, du = 2 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_2^3$$

$$= 2 \left[\frac{\sqrt{1+x}^5}{5} - \frac{\sqrt{1+x}^3}{3} \right]_2^3$$

2- أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له عند أي نقطة عليه هو $x e^{-x^2}$

علف بأن المنحنى يمر بالنقطة $(1, e^{-1})$

$$\frac{dy}{dx} = x e^{-x^2} \Rightarrow \int dy = \int x e^{-x^2} \, dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

وبما أن المماس يمر بالنقطة $(1, e^{-1})$ بالقيود

$$x=1, y=e^{-1} \Rightarrow C = \frac{3}{2} e$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{e} - e^{-x^2} \right]$$

مع امنواتي لكم بالتوفيق

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية الهندسة - قسم العلوم العامة

امتحانات ازالة الرسوب والبديل - الدورة الثانية للعام الدراسي 2011/2010م

المادة: التحصيل

الزمن: 3 ساعات

التاريخ: 2011/ 8/ 3

المحلل: السنة الأولى بكالوريوس

الاسم:

الرقم:

تعليمات هامة:-			
1.	اكتب اسمك و رقم جلوسك وتخصصك في الأماكن المخصصة لذلك.	السؤال	الدرجة
2.	سجل هذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أى مسودات و لا يسمح باستخدام أية ورقة إضافية خارجية بداية حافة من الأحوال.	1	20
3.	تأكد: ستة هذا الامتحان (5 امثلة) و مطبوعة على (8 صفحات).	2	20
4.	الدوائر و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأعمال التصحيح.	3	20
		4	20
		5	20
		المجموع	100
		الدرجة	المتحصل
		المتحصل	المتحصل

السؤال الاول

1- افترض ان $f(x) = \log_a \frac{1}{x}$ اثبت ان $f(a^3) = -3$

$$f(a^3) = \log_a \frac{1}{a^3} = \log_a a^{-3} = -3$$

$$\therefore f(a^3) = -3$$

2- وضح مجال تعريف الدالة الحقيقية $f(x, y) = \ln \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ وبين الفترة

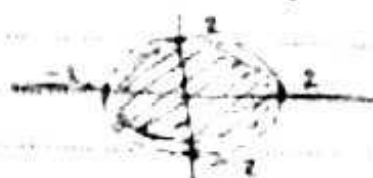
على المستوى الحقيقي

$$4 - (x^2 + y^2) > 0$$

$$x^2 + y^2 < 4$$

$$x^2 + y^2 < 2$$

بحال تقريب الدالة صرنا بداخل الدالة التي صارتها $x^2 + y^2 = 2$



3- بدون استخدام قاعدة لوبيتال أوجد قيمة النهاية التالية

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 0 = \text{zero}$$

○ $\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \text{zero}$

4- ناقش اتصال الدالة $f(x) = \frac{\tan x}{4 - x^2}$

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

الدالة غير متصلة عند التقاطع

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

المسألة الثاني

1- أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة

$$y = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$= y = \ln \tanh x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tanh x} \cdot \operatorname{sech}^2 x = \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\tanh x} = \frac{\frac{1}{\cosh^2 x}}{\frac{\sinh x}{\cosh x}}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{1}{\sinh x} = \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x$$



2. نلاحظ ان $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ ان $\frac{dy}{dx} = \cot \frac{t}{2}$

$$x = a(t - \sin t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

$$y = a(1 - \cos t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2}$$

اذ $\frac{dy}{dx} = \cot \frac{t}{2}$



3. نثبت ان $\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

$$\text{R.H.S} = \frac{2 \left[\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} \right]}{1 + \left[\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} \right]^2} = \frac{2 \left[\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} \right]}{\frac{[e^{2x} + 1]^2 + [e^{2x} - 1]^2}{[e^x + 1]^2}}$$

$$= \frac{2 [e^{2x} - 1] \cdot [e^x + 1]^2}{[e^{2x} + 1] [e^{2x} + 1]^2 + [e^{2x} - 1]^2} = \frac{2 [e^{2x} - 1] [e^x + 1]}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1 + e^{4x} - 2e^{2x} + 1}$$

$$= \frac{2(e^{2x} - 1)(e^x + 1)}{2e^{4x} + 2} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \tanh x$$

$$u(x, y) = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad \text{إثبات أن } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} - \left[2y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{y^2}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right]$$

$$= \frac{x^3}{x^2 + y^2} - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{x y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} [x^2 + y^2] - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 1 - 2y \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \right] = 1 - 2y \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]$$

$$= 1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

السؤال الثالث

1- مستخدما مفكوك مكلورين اثبت ان

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \dots$$

مفكوك ماكلورين

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$f(x) = \sec x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \sec x \tan x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \sec^3 x + \tan^2 x \sec x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = 3 \sec^3 x \tan x + \tan^3 x \sec x + 2 \sec^3 x \tan x \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 3 \sec^5 x + \tan^2 x 9 \sec^3 x + \tan^4 x \sec x + 3 \sec^3 x \tan^2 x + 12 \sec^5 x + 6 \tan^2 x \sec^3 x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 5$$

ما لم يحدد غير ذلك أو إن لم يذكر كذا



$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{(n+1)!} \quad \text{2. اثبت ان}$$



3. أوجد معطلي المماس والعمودي للقطع الزائد $2x^2 - 3y^2 = 6$ عند النقطة $(3, 2)$

$$4x - 6y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=3 \\ y=2}} = 1$$

معادلة المماس

$$(y - y_1) = \frac{dy}{dx} (x - x_1)$$

$$(y - 2) = (x - 3)$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$m_1, x, m_2 = -1$$

$$m_2 = 1$$

معادلة العمودي

$$(y - 2) = -(x - 3)$$

$$x + y - 5 = 0$$



4. أوجد المشتقة لتوابع الدالة $f(x) = \cos ax$

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin ax \Rightarrow -a \cos(ax + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \sin(ax + \frac{\pi}{2}) = a^2 \cos(ax + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -a^3 \sin(ax + 2\pi) = -a^3 \cos(ax + 3\pi)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n a^n \cos(ax + n\pi)$$

السؤال الرابع
1- أجز التكميلات الآتية

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

مجزأه من البسط والكاهم

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{4+e^{2x}} dx$$

يكاامل بالتقويض

$$y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$$

$$\int \frac{e^x}{4+e^{2x}} dx = \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{y}{2} + C = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{e^x}{2} + C$$

$$\int \sin^6 \theta \cos \theta d\theta$$

$$y = \sin \theta \Rightarrow dy = \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \sin^6 \theta \cos \theta d\theta &= \int y^6 dy = \frac{y^7}{7} + C \\ &= \frac{\sin^7 \theta}{7} + C \end{aligned}$$

2- للتكامل $\int \cos^n x dx$ حيث n عدد صحيح موجب ، أثبت أن صيغة الاختزال
تطلى

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{بملاحظة}$$

$$I_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= \int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$= I_{n-2} - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

بمعاملة بالتجزئة

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$dv = \cos^{n-1} x \sin x dx \Rightarrow v = -\frac{\cos^n x}{n-1}$$

$$\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = -\cos \frac{n-1}{n-1} x \sin x + \frac{1}{n-1} \int \cos^{n-1} x \cos x dx$$

$$= \frac{1}{n-1} I_n - \frac{\cos x \sin x}{n-1}$$

$$\bigcirc \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{\cos x \sin x}{n}$$

السؤال الخامس

1- احسب قيمة التكاملات الآتية

$$\int_1^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^4}}$$

$$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$$

بمعاملة بالتعويض

ولذلك يجب تغيير حدود التكامل بحالات

$$1 = u \quad \text{عندما } x = 1$$

$$81 = u \quad \text{عندما } x = 3$$

$$\therefore \int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^4}} dx = \frac{1}{4} \int_1^{81} \frac{du}{\sqrt{9+u}} = \left[\frac{1}{2} \sqrt{9+u} \right]_1^{81} = \frac{1}{2} (\sqrt{90} - \sqrt{10})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int_0^{\infty} x^7 e^{-x} dx = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ بمعاملة بالتعويض

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dt}{(t+1)^2}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+1)^{-2} dt = 2 \left[\frac{(t+1)^{-1}}{-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{-2}{1+t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{-2}{1+\tan \frac{x}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-2}{1+1} + \frac{2}{1+0} = -1 + 2 = 1$$

2- أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \cosh x$ ومحور x من $x=0$ إلى $x=1$

$$\int_0^1 \cosh x dx = \sinh x \Big|_0^1 = \sinh 1 - \sinh 0$$

مع امنياتي لكم بالتوفيق

الاسم:

التخصص:

رقم الجلوس:

تعليمات هامة:-

السؤال	درجة السؤال	الدرجة المخصصة	مضاء المصحح
1. اكتب اسمك و رقم جلوسك وتخصصك في الأماكن المخصصة أعلاه.	20		
2. سجل بها الشرائح الاجابة عن جميع الأسئلة و اى مسودات و لا يسمح باستخدام أية ورقة مسودة من حية بأية حالة من الأحوال.	20		
3. تكتب: أسئلة هذا الإمتحان (5 أسئلة) و مطبوعة على (8 صفحات).	20		
4. التواتر و الاشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأجل التصحيح.	20		
المجموع	100		

السؤال الأول

1- اذا كان $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(i) ما هو مجال f

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$x \geq \pm 1 \quad D_f = -1 \leq x \leq 1$$

(ii) اوجد الدالة f^{-1}

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 + 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ف} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

2- بدون استخدام قاعدة لوبيتال أوجد قيمة النهاية التالية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x})^{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$$

$$n = e^x \text{ مع}$$

$$\infty \leftarrow n \leftarrow \infty \leftarrow x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{e^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

3- اذعان $0 \leq x \leq 1$ ، عبر عن $\tan(\cos^{-1} x)$ كدالة جبرية في x

$$x = \cos y \iff y = \cos^{-1} x$$

$$\begin{aligned} \tan y &= \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$\therefore \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad 0 \leq x \leq 1$$

4- بدون حل المعادلة $f(x) = 0$ اثبت أن منحنى الدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 6$ يقطع محور x في نقطة واحدة في النطاق $[-2, -1]$

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) - 6$$

$$= -16 - 12 + 24 - 6 = -10$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) - 6$$

$$= -2 - 3 + 12 - 6 = +1$$

$\therefore$ بين الدالة يقطع المحور x في نقطة واحدة في النطاق $[-2, -1]$

السؤال الثاني

1- أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة

$$y = \sqrt{1 + 3 \cosh^2 x^2}$$

$$y = (1 + 3 \cosh^2 x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + 3 \cosh^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} (6 \cosh x^2 \cdot 2x \sinh x^2)$$

$$= \frac{6x \cosh x^2 \sinh x^2}{\sqrt{1 + 3 \cosh^2 x^2}}$$

2- إذا كان $v = e^{r \cos \theta} \sin(r \sin \theta)$, $u = e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta)$ أثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -e^{r \cos \theta} \sin(r \sin \theta) + e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta)$$

$$= e^{r \cos \theta} [\cos \theta \cos(r \sin \theta) - \sin \theta \sin(r \sin \theta)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = e^{r \cos \theta} \cos(\theta + r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -r \cos \theta e^{r \cos \theta} \sin(r \sin \theta) + (-r \sin \theta) \cos(r \sin \theta) e^{r \cos \theta}$$

$$= -r e^{r \cos \theta} [\cos \theta \sin(r \sin \theta) + \sin \theta \cos(r \sin \theta)]$$

$$= -r e^{r \cos \theta} \sin(\theta + r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -r \left[e^{r \cos \theta} \sin(\theta + r \sin \theta) \right] = -r \frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

3- عبر عن $\cosh^{-1} 3$, $\coth^{-1}(-2)$ في صورة لوغريتمات طبيعية

$$\cosh^{-1} x = \ln[x \pm \sqrt{x^2 - 1}]$$

$$\cosh^{-1} 3 = \ln[3 \pm \sqrt{4 - 1}] = \ln[3 + \sqrt{8}] =$$

$$\cosh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$\cosh^{-1}(-2) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-2+1}{-2-1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-1}{-3} \right| = \ln \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \ln \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4- اثبت ان $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

R.H.S

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) =$$

$$\frac{e^{x+y} + e^{-x-y} + e^{x-y} + e^{-x+y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x-y} - e^{x-y} + e^{-x+y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y)$$

السؤال الثالث

1- مستخدما دالامبير النعسي، لاي قيم x تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$ متقاربة

$$u_n = \frac{x^n}{2+n^2} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2+n^2}{n^2+n+1} \right|$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right| = |x|$$

قيم x هي الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

2- باستخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{x}{1}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} = 1$

أو $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 1 \Rightarrow \ln \lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$

أو $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3- فك الدالة $y = \frac{1}{1+x^2}$ حول $x=1$. تحصل على الحدود الثلاثة الاولى الغير الصفرية

لغدة الدالة نستعمل متسلسلة تايلر

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} + (x-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(x-1)^2}{2!} \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \dots$

4- أوجد المعامل التفاضلي من الرتبة الثالثة للدالة $x^3 \cos x$ مستخدما قاعدة لايبنتز

$D^3(x^3 \cos x) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{d^k}{dx^k} x^3 \frac{d^{3-k}}{dx^{3-k}} \cos x$

$$= u \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{3}{1} \frac{du}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{3}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} + v \frac{d^3 u}{dx^3}$$

$$u = x^5, \quad v = \cos x$$

$$\textcircled{1} D(x^5 \cos x) = x^5 \cos(x + \frac{3}{1}) + 3 \cdot 5x^4 \cos(x + \frac{2}{2}) + 3 \cdot 20x^3 \cos(x + \frac{1}{2}) + 60x^2 \cos x$$

المسألة الرابع
1- أجز التكميلات الآتية

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

يكمّل بالتقويين الذي يجعلها خالية من الجذر

$$u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1$$

$$2u du = dx$$

$$\textcircled{1} \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{2u^2 du}{u^2-1} = 2 \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1} = 2 \left[\int \frac{du}{u^2-1} + \int \frac{du}{u^2-1} \right]$$

$$= 2 \left[u - \coth^{-1} u + C \right]$$

$$= 2\sqrt{x+1} - \coth^{-1} \sqrt{x+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \frac{1}{4} \int \operatorname{sech}^2 x dx = \frac{1}{4} \tanh x + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C \quad \text{2- مستخدما التكامل بالكسور الجزئية اثبت ان}$$

$$\frac{1}{(a-u)(a+u)} = \frac{A}{a-u} + \frac{B}{a+u}$$

$$1 = (A-B)u + Au + Ba \Rightarrow A = \frac{1}{2a}, \quad B = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{du}{(a-u)(a+u)} = \frac{1}{2a} \int \frac{-du}{u-a} + \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u+a}$$

$$= \frac{1}{2a} \left[-\ln(u-a) + \ln(u+a) \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

3. لتكامل $\int \sec h^m ax \, dx$ حيث m عدد صحيح موجب ، استنتج صيغة الاختزال ومن ثم اوجد $\int \sec h^4 2x$



السؤال الخامس
ا- احسب قيمة التكامل المحددة الآتية

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sinh^2 x \cosh^2 x \, dx$$



$$\begin{aligned}
 & \int_2^4 \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx \\
 &= \int_2^4 \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} dx = \int_2^4 (x^2 + 2x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_2^4 \\
 &= \frac{4^3}{3} + 4^2 + 4 \times 4 - \left[\frac{8}{3} + 4 + 8 \right] \\
 &= \frac{160 - 44}{3} = 38.7
 \end{aligned}$$

كله بالتعويض

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{u} = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{u} - 1 \\
 & -\frac{1}{u^2} du = dx \\
 & \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{-\frac{du}{u^2}}{\left(\frac{1}{u} - 1 + 1\right)\sqrt{\left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 - 1}} = \int_1^2 \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + 1 - 1}} \\
 &= \int_1^2 \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{1-2u}} = \int_1^2 \frac{-du}{\sqrt{1-2u}} = \left[\sqrt{1-\frac{2}{x+1}} \right]_1^2 \\
 &= \sqrt{1-\frac{2}{3}} - \sqrt{1-\frac{2}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

ب- أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2$ والخطين $x = 2$, $x = 1$

$$A = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ unit}^2$$



مع امتناني لكم بالتوفيق