

اصل باسقاط

التخصص:	بسم الله الرحمن الرحيم جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا كلية الهندسة قسم العلوم العامة	الاسم: اكد التمرجي
---------------	--	-----------------------------

الاختبارات الفصلية - الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي 2015/2016م

المادة: الجبر الخطي والهندسة
السنة: الأولى بكالوريوس هندسة
الزمن: ساعتان
التاريخ: 2016/8/5

تعليمات هامة

- اكتب اسمك وتخصصك في الاماكن المخصصة

السؤال الاول

اكمل العبارات الرياضية التالية

- (أ) لتكن $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ بقا ان A :
- (1) مصفوفة مثلثية عليا اذا كان $a_{ij} = 0 \forall i > j$ او العناصر أسفل القطر الرئيسي كلها اصفار
 - (2) مصفوفة متماثلة اذا كان $A = A^T$ او $a_{ij} = a_{ji}$ لذالك
 - (3) مصفوفة شاذة اذا كان $\det A = 0$ او $\text{rank } A < n$
 - (4) مصفوفة قابلة للقلب اذا كان $\det A \neq 0$ او $\text{rank } A = n$ او $AB = BA = I$

- (ب) اذا كتبت $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ و $B_{n \times n} = [b_{ij}]$ مصفوفات غير شاذة فان:
- (1) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
 - (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 - (3) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
 - (4) $(AB)^T = B^T A^T$
 - (5) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

(ج) اذا كان $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ و $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$

$$\|A\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \|A\| \quad (أ) 1.$$

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = |A||B| \cos \theta = A \cdot B \quad (ب)$$

$$A \times B = |A||B| \sin \theta u = -B \times A = A \times B \quad (ج)$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

امتحان مسابقة

$$\sqrt{(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + (A_3 - B_3)^2} = \|A - B\| \quad (د)$$

2/: المتجهين A, B يقلل انهما :

$$A \cdot B = 0 \quad (أ) \text{ متعامدان اذا كان}$$

$$|A \cdot B| = \|A\| \cdot \|B\| \quad \text{أو} \quad A \times B = 0 \quad (ب) \text{ متوازيان اذا كان}$$

$$A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \quad (ج) \text{ في نفس الاتجاه اذا كان}$$

سؤال الثاني

1- اذا كانت المصفوفات A, B من النوع 5×5 و $|A| = 6$ ، $|B| = 4$ فما هي قيمة كلا من

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{|A|} = |A^{-1}| \quad (أ)$$

$$\frac{1}{3 \times 6} = \frac{1}{3|A|} = \frac{1}{3 \times 6} = |(3A)^{-1}| \quad (ب)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3|A|} = |3A^{-1}| \quad (ج)$$

$$24 = 6 \times 4 = |A| \cdot |B| = |AB| \quad (د)$$

$$144 = 6 \times 5 \times 6 = |A| |B| |A^T| = |ABA^T| \quad (هـ)$$

$$6 = |A| = \frac{1}{|B|} |A| \cdot |B| = |B^{-1}| |A| |B| = |B^{-1}AB| \quad (ف)$$

2- أي العبارات التالية صحيحة وإيهما خاطئة

صحيحة

(أ) الضرب النقطي للمتجهات كمية قياسية بينما الضرب الاتجاهي كمية متجهة

خاطئة

(ب) اذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن النظام الخطي المتجانس $AX = 0$ يكون له حل غير صفري

خاطئة

(ت) اذا كانت A مصفوفة مربعة من النوع 4×4 فإن رتبة A تساوي 4

(ث) العبارات التالية كلها متكافئة

(1) المصفوفة A غير شاذة

(2) النظام المتجانس $AX = 0$ ليس له الا الحل الصفري

(3) المصفوفة A مكافئة صفيا لمصفوفة الوحدة I

(4) $\det(A) \neq 0$

صحيحة

(ح) أي نظام خطي مكون من n معادلة في n من المجاهيل يكون دائما متوائما

خاطئة

واظف الموفق

حاول الاجابة عن جميع الاسئلة

السؤال الاول

1- (أ) اذا كان u دالة متجانسة ذات رتبة n في المتغيرين x و y اثبت ان

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

(ب) اوجد $\frac{dv}{dy}, \frac{du}{dx}$ اذا كان $h(x, y, u, v) = 0, \phi(x, y, u, v) = 0$

$$2- \text{ اذا كان } v = \frac{\cos x}{\sin y}, u = \frac{\cos y}{\sin x}, z = \frac{\sin u}{\cos v} \text{ اوجد } \frac{\partial z}{\partial x}$$

3- لتكن $\phi(x, y) = c$ حيث c ثابت ، اثبت ان

$$(i) \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y}$$

$$(ii) \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{yy}}{\phi_y^3}$$

ومن ثم اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $x^2 + y^2 = a(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

4- باستخدام التكامل الثنائي اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$$y = x^2, x = y^2$$

السؤال الثاني

1- (أ) استنتج معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور X ورأسه (M, N)

ومفتوح من جهة اليمين (الرسم مطلوب).

(ب) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره $y = 0$ ويمر بالنقطتين $(2, -3), (3, 2)$.

2- النقطة $w(x, y)$ تتحرك في المستوى بحيث ان $x = 2t + 3, y = t^2 + 7$

اكتب المعادلة بدلالة x, y وما نوع القطع ؟

3- جد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 12x$

عند النقطة $(2, 4)$.

4- احسب الاختلاف المركزي (e) للقطع الذي معادلته $x^2 = -20y$.

السؤال الثالث

1- (أ) جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 1, 0)$ وطول محوره الاكبر يساوي 4

(ب) أوجد خصائص القطع الناقص $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

2- أوجد معادلة المماس والعمودي علي المماس عند النقطة $(-2, 1)$ لمنحني القطع الناقص

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

3- صنف المعادلات التالية

(i) $y^2 - 8y - 8x + 8 = 0$

(ii) $7x^2 - 9y^2 - 14x - 54y - 137 = 0$

(iii) $25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$

4- أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 4, 0)$ ويتقاطع مع محور x عند $x = \pm 3$

مع امنياتي لكم بالتوفيق



هذا النموذج من مادة الجبر الخطي للاختيار رقم (2)
للعام الدراسي 2015 - 2016 الفصل الثاني

سؤال الأول

لناشيت ان $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$

بما ان u دالة متجانسة من الرتبة n فان مبرهنه اويلر متحققة

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = n \cdot u \quad \text{--- (1)}$$

باميرار التفاضل الجزئي بالنسبة لـ x و y للمعادلة (1) نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = n \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{--- (2)}$$

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{--- (3)}$$

اضرب المعادلة (2) بـ x و المعادلة (3) بـ y ثم اجمع المعادلتين

$$(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}) + (x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = n(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}) \quad \text{--- (4)}$$

نضربنا $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

من (1) و (4) نجد ان

$$nu + (x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = n^2 u$$

$$\therefore x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

(ب) اوجد $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ اذا كان $\varphi(x,y,u,v)=0$, $h(x,y,u,v)=0$

للجاء $\frac{du}{dx}$ تجرى التفاضل التام بالنسبة للتغير x باعتبار y ثابت للنتية

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0 \quad \text{--- (2)}$$

بقا المعادلتين (1) و (2) نحصل على

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dx} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{dx} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial(h, \phi)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(h, \phi)}{\partial(u, v)}}$$

لـ إيجاد $\frac{dv}{dy}$ نجرى التفاضل التام بالنسبة للتغير y باعتبار x ثابتاً للـ التغير

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{dy} = 0$$

يقسم طرف المعادلة على dy فنجد

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{dy} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dy} = -\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{dy} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial h}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & -\frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} & -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial(h, \phi)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(h, \phi)}{\partial(u, v)}}$$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ $z = \frac{\sin u}{\cos v}$, $u = \frac{\cos y}{\sin x}$, $v = \frac{\cos x}{\sin y}$ 2 - 136

$$z = f(u, v), \quad u = \phi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\cos u}{\cos v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin x \cdot 0 - \cos y \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos y \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos u}{\cos v} \left[-\frac{\cos y \cos x}{\sin^2 x} \right] + \left[\frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \right] \left[-\frac{\sin x}{\sin y} \right]$$

$$= -\frac{\frac{\cos y}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos u}{\cos v} - \frac{\frac{\sin u}{\cos v} \cdot \sin v \cdot \sin x}{\cos v \sin y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -u \cot x \cos u \sin y + z \sin v \sin x$$

(i)

$$\phi(x, y) = c$$

$$d\phi = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

بقسمة الطرفين على dx نحصل على

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad \text{أو} \quad \text{①}$$

$$\phi_x + \phi_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \quad \phi_y \neq 0 \rightarrow \text{②}$$

(ii)

$$\phi_x = p, \quad \phi_y = q, \quad \phi_{xx} = r$$

$$\phi_{xy} = s, \quad \phi_{yy} = t$$

مفروضات

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q \frac{dp}{dx} - p \frac{dq}{dx}}{q^2} \quad \text{③}$$

قياساً على المعادلة ① يمكن أن نكتب

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$= r + s \left[-\frac{p}{q} \right] = \frac{qr - ps}{q}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$= s + t \left[-\frac{p}{q} \right] = \frac{qs - pt}{q}$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة ③ نحصل على

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{z^2 r - 2pqs + p^2 t}{z^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\phi_{xx} \phi_y^2 - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_{yy} \phi_x^2}{\phi_y^3} \quad \text{أو}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\phi_{xx} \phi_y^2 - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_{yy} \phi_x^2}{\phi_y^3}$$

باستخدام التكامل الثنائي اوجد المساحة المصورة بين $y=x^2$, $x=y^2$
 نحدد القاعدة التي سوف نستخدمها لاجراء المساحة

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx$$

نحدد حدود التكامل

$$y = x^2 \quad \text{--- ①}$$

$$x = y^2 \quad \text{--- ②}$$

بتعويض ① في ② نجد

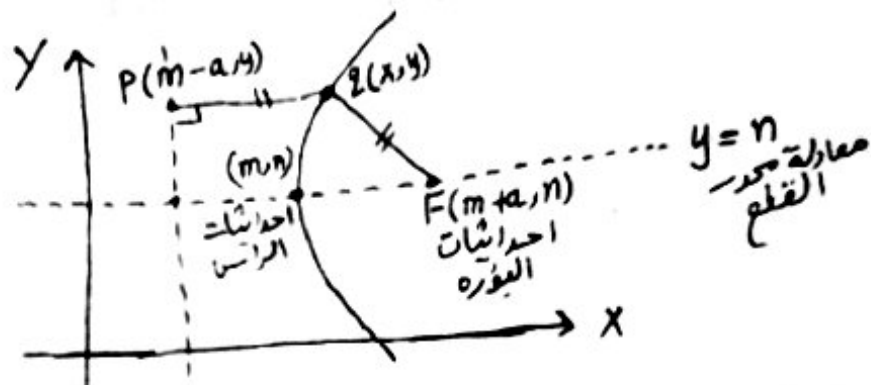
$$x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, g_1(x) = x^2, g_2(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 \left[y \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



معادلة الدليل $x = m - a$

من تعريف القطع المكافئ

$$QF = QP$$

من قانون البعد بين نقطتين يمكن إيجاد QF , QP

$$\sqrt{[x - (m + a)]^2 + (y - n)^2} = \sqrt{[x - (m - a)]^2 + (y - 0)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد

$$[x - (m + a)]^2 + (y - n)^2 = [x - (m - a)]^2$$

بفك المربعات التالية نجد

$$x^2 - 2x(m + a) + (m + a)^2 + (y - n)^2 = x^2 - 2x(m - a) + (m - a)^2$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 2xm - 2xa + m^2 + 2am + a^2 + (y - n)^2 = x^2 - 2xm + 2xa + m^2 + a^2 - 2am$$

بتجميع الحدود المتشابهة نحصل على

$$(y - n)^2 = 4xa - 4ma$$

$$(y - n)^2 = 4a(x - m)$$

(ب) اوجد معادلة القطع الذي محوره $y = 0$ ويمر بالنقطتين (3, 2) و (2, -3) احداثيات الرأس $(m, 0)$ لانه يقع على محور x

$$y^2 = 4a(x - m)$$

النقطة (3, 2) تحقق المعادلة

$$2^2 = 4a(3 - m) \Rightarrow 4 = 12a - 4am \quad \text{--- ①}$$

النقطة (-1, -3) تحقق المعادلة

$$(-3)^2 = 4a(2 - m) \Rightarrow 9 = 8a - 4am \quad \text{--- ②}$$

نطرح ② من ① نجد

$$-5 = 4a \Rightarrow a = -\frac{5}{4} \quad \text{--- ③}$$

عوض ③ في ① نجد

$$m = \frac{19}{5}$$

نكتب المعادلة بدلالة x, y وما نوع القطع
 $x = 2t + 3, y = t^2 + 7$ $w(x, y)$ نتحرك من المستوى بحيث t

من المعادلة $x = 2t + 3 \Rightarrow$

$$t = \frac{x-3}{2}$$

ليقومين قيمة t من المعادلة $y = t^2 + 7$ نجد t

$$y = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 7 \Rightarrow$$

$$y - 7 = \frac{(x-3)^2}{4}$$

$$(x-3)^2 = 4(y-7)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ

جد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 - 4x + 12$
 عند النقطة $(2, 4)$

$$y - y_1 = 2a(x + x_1) \quad \text{معادلة المماس}$$

$$(x_1, y_1) = (2, 4) \quad \text{النقطة}$$

بما أن النقطة $(2, 4)$ تقع على منحنى القطع المكافئ تحقق المعادلة

$$y^2 = 12x \Rightarrow y^2 = 4ax$$

$$16 = 8a \Rightarrow a = \frac{16}{8} = 2$$

ليقومين قيمة a والنقطة (x_1, y_1) من معادلة المماس نجد t

$$4y = 4(x+2)$$

$$y = x + 2 \quad \text{معادلة المماس}$$

ولابحار معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(2, 4)$

بما أن ميل المماس 1 إذن ميل العمودي عليه هو -1

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$(y - 4) = -(x - 2)$$

$$x + y = 6$$

الاختلاف المركزي (e) للقطع الذي مدارته $X^2 = 20y$

بما أن المدارة تمثل قطعاً مكافئاً

إذاً الاختلاف المركزي (e) يساوي الواحد .

سؤال الثالث

(أ) جد معادلة القطع الناقص بؤرتاه $(\pm 1, 0)$ وطول محوره الأكبر يساوي 4

بما أن البؤرتين على محور x إذاً محوره الأكبر ينطبق على محور x

$$\text{إذاً معادلته } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{طول محوره الأكبر} = 4 \\ 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{المسافة بين البؤرتين} = 2 \\ 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\text{ومن العلاقة } c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

$$b = \sqrt{3}$$

وبتقويض قيم a و b في المعادلة نجد أن

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(ب) اوجد خصائص القطع الناقص $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

$$\text{نكتب وضع المعادلة} \\ (x^2 + 6x) + (4y^2 - 8y) = -9$$

$$\text{نكمل المربع الكامل في } x \text{ و } y \\ (x^2 + 6x) + [4(y^2 - 2y)] = -9 \\ (x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 2y + 1) - 9 + 4 + 4 = -9$$

$$(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

أحداثيات المركز (1, -3)

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

بما أن a^2 يقطع x يحتوي على x المحور الأكبر يوازي محور x

$$2a = 4$$

المحور الأصغر

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$2b = 2$$

أحداثيات الرأسية (1, -1), (1, -5)

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

أحداثيات البؤرتين (1, -3 + $\sqrt{3}$), (1, -3 - $\sqrt{3}$)

$$y = 1$$

$$x = -3$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 - أوجد معادلة المماس والعمود على المماس عند النقطة (1, -2) لمثلث القطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 8$

$$(x_1, y_1) = (-2, 1)$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{(-2)(-1)}{(8)(1)} = \frac{1}{2}$$

ميل العمود على 2 -

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$\frac{-2x}{8} + \frac{(1)y}{2} = 1$$

$$-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 + \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow y = 2 + \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

معادلة المماس على

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - 1) = -2(x + 2)$$

$$y - 1 = -2x - 4$$

$$y = -2x - 3$$

3- صف المعادلات التالية (i) $y^2 - 8y - 8x + 8 = 0$

$$b^2 - 4ac$$

$$b=0, a=0, c=1$$

$$0 - 4(0)(1) = 0$$

∴ المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً

$$(ii) 7x^2 - 9y^2 - 14x - 54y - 137 = 0$$

$$a=7, b=0, c=-9$$

$$0 - 4(7)(-9) > 0$$

∴ المعادلة تمثل قطعاً زائداً

$$(iii) 25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$$

$$a=25, b=0, c=16$$

$$0 - 4(25)(16) < 0$$

∴ المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً

معدلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 4, 0)$ ويتقاطع مع

$$x \text{ عند } x = \pm 3$$

بما أن البؤرتين تقعان على محور x إذن مركز القطع يقع
على محور x ومركزه $(0, 0)$

$$c = 4, \quad a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$= 16 - 9 = 7$$

$$b = \pm \sqrt{7}$$

$$\text{اذن معادلته } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بالتعويض قيم a^2 و b^2 نحصل

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

بالعوض

