Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net



TÀI LIỆU KHÓA HỌC ĐỘC QUYỀN

KHÓA BON SEASON 2026
STEP 1 | KIẾN THỨC NỀN TẢNG TOÁN 12

Theme 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI GIẢNG LÍ THUYẾT - VÍ DỤ MINH HOẠ và BÀI TẬP RÈN LUYỆN

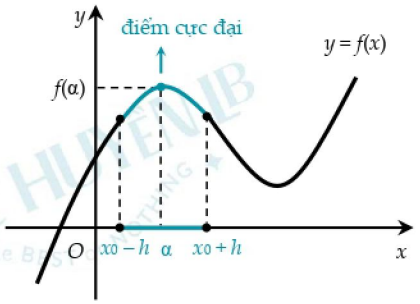
Xem bài giảng & thi online trên ngochuyenlb.edu.vn tại lớp:
STEP 1 | Nền tảng Toán 12 | 8 điểm

A Kiến thức cần nắm

1. Cực trị của hàm số

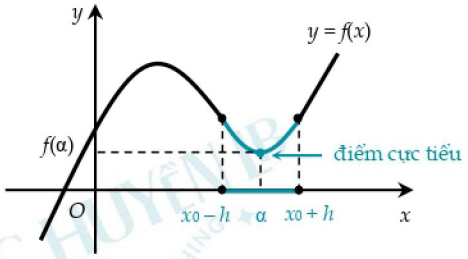
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.



Điểm $(\alpha;f(\alpha))$ là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.



Điểm $(\alpha;f(\alpha))$ là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

REMARK 1

- Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại α thì

  $x=\alpha\rightarrow$ điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số.

  $f(\alpha)\rightarrow \underbrace{\text{giá trị cực đại}}_{f_{CĐ}}\ \underbrace{(\text{giá trị cực tiểu})}_{f_{CT}}$ của hàm số.

  $M(\alpha;f(\alpha))\rightarrow$ điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu $\xrightarrow{\text{gọi chung}}$ điểm cực trị.

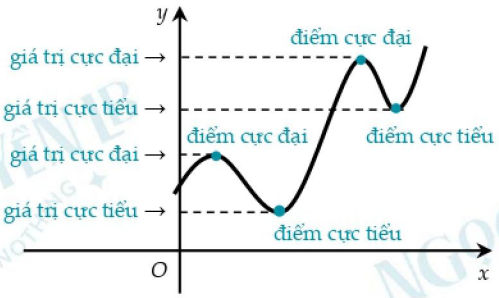
  $\underbrace{\text{Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)}}_{\text{gọi tắt: cực đại (cực tiểu)}}\xrightarrow{\text{gọi chung}}$ cực trị của hàm số.

ĐĂNG KÍ VÀ HỌC TẠI THANHVIENKHOAHOC.NET ZALO - 0778335643

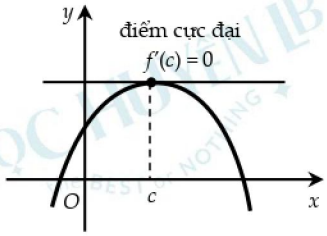
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

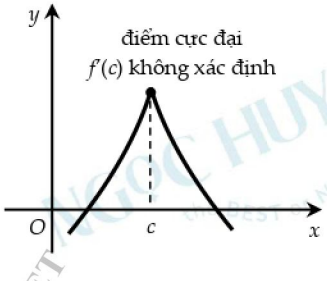
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

REMARK 2 Giá trị cực đại có thể nhỏ hơn giá trị cực tiểu của hàm số (xem hình minh họa).



REMARK 3 Với hàm số liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y'=0$ hoặc y' không xác định (được thể hiện ở hình bên dưới).

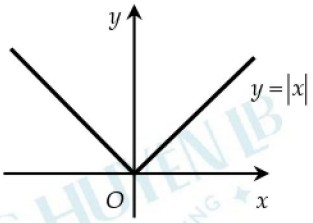




[Ví dụ] Cho đồ thị hàm số $f(x)=|x|$ như hình vẽ bên.

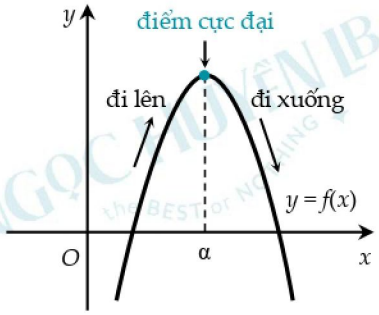
$$f'(x)=(|x|)'=\left(\sqrt{x^2}\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|}.$$

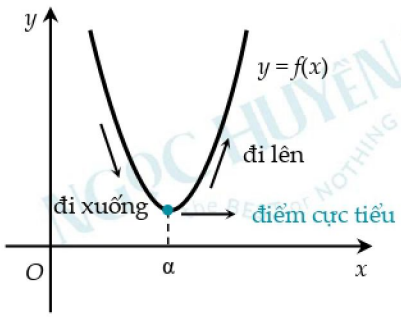
Mặc dù $f'(0)$ không xác định nhưng hàm số vẫn đạt cực tiểu tại $x=0$.

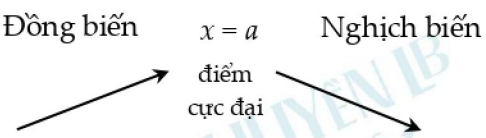


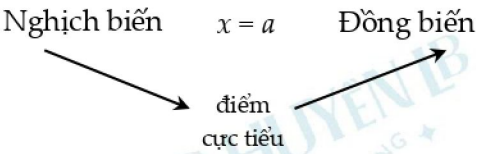
REMARK 4 Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên K và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\setminus\{\alpha\}$.

- Đồ thị hàm số đổi chiều từ đi lên sang đi xuống khi qua $x=a\Rightarrow x=a$ là điểm cực đại của hàm số.
- Đồ thị hàm số đổi chiều từ đi xuống sang đi lên khi qua $x=a\Rightarrow x=a$ là điểm cực tiểu của hàm số.









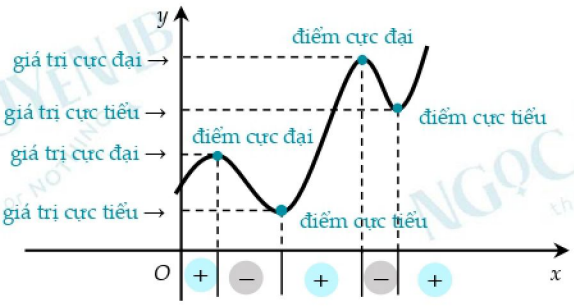
Từ REMARK 4 ta có:

Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên K hoặc $K\setminus\{\alpha\}$. Khi $f'(\alpha)=0$ hoặc $f'(\alpha)$ không xác định (tại α vẫn xác định).

Cô Ngọc Huyền LB | Hệ thống đào tạo Toán Ngọc Huyền LB
i chính đáng của chính các em, không chia sẻ tài liệu ĐỘC QUYỀN này cho người khác!
Độc quyền & duy
ngochuyenlb
ĐĂNG KÍ VÀ HỌC TẠI THANHVIENKHOAHOC.NET ZALO - 0917833643
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ "+" → "−" qua $x=\alpha$ thì $x=\alpha$ là **điểm cực đại** của hàm số $y=f(x)$.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ "−" → "+" qua $x=\alpha$ thì $x=\alpha$ là **điểm cực tiểu** của hàm số $y=f(x)$.



Dấu của $f'(x)$

2. Quy tắc tìm cực trị

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)=0$ hoặc không xác định (điểm tới hạn) (các điểm x_i).
- **Bước 3:** Xét sự đổi dấu của $f(x)$ qua các x_i và kết luận.
  - ✓ $f'(x)$ đổi dấu từ "+" → "−" $\to x=x_i$ là **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$.
  - ✓ $f'(x)$ đổi dấu từ "−" → "+" $\to x=x_i$ là **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

REMARK 1 Các điểm x_i phải thuộc tập xác định của hàm số.

REMARK 2 Như vậy để kiểm tra xem $x=a$ có là điểm cực trị của hàm số $f(x)$ không ta kiểm tra 3 yếu tố.

(1) α thuộc tập xác định của $y=f(x)$.

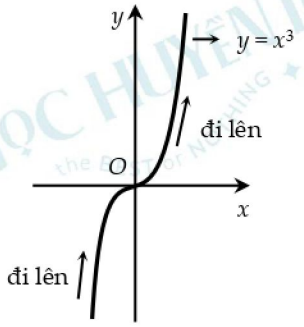
(2) $f'(\alpha)=0$ hoặc $f'(\alpha)$ không xác định.

(3) $f'(x)$ đổi dấu khi qua α.

REMARK 3 Luôn kiểm tra xem $f'(x)$ **có đổi dấu** khi qua $x=\alpha$ hay không.

[Ví dụ] Hàm số $f(x)=x^3$ có $f'(x)=3x^2$.

$f'(x)=0$ nhưng $f'(x)$ **không đổi dấu** khi qua $x=0$ nên $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số $f(x)=x^3$.



Cô Ngọc Huyền LB | Hệ thống đào tạo Toán Ngọc Huyền LB
i chính đáng của chính các em, không chia sẻ tài liệu ĐỘC QUYỀN này cho người khác!
Độc quyền & duy
ngochuyenlb
ĐĂNG KÍ VÀ HỌC TẠI THANHVIENKHOAHOC.NET ZALO - 07833643
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

B Ví dụ minh họa

Dạng thức 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

01 Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-6\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-7		-6		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-12	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-15	↘	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=-6$. **B.** $x=-7$. **C.** $x=-15$. **D.** $x=0$.

02 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=4$.

03 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x^2+2x-3)(x^2+4)(x-1)(x^3+8);\forall x\in\mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

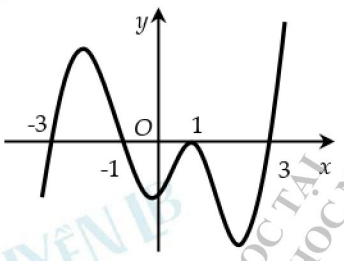
04 Hàm số $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

05 Hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là a và b. Tính $2a+3b$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 2.

06 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là



A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

ĐĂNG KÍ VÀ HỌC TẠI THANHVIENKHOAHOC.NET ZALO - 0778335643

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Dạng thức 2 Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

07 Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			1				1		

a) Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 1.

c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x=0$.

d) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3.

08 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x+1)x^2(x-3)(x^2-4);\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó:

a) Hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=-1$.

d) Giá trị cực đại của hàm số đã cho là $f(2)$.

09 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	

a) Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x=0$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là $f(-2)$.

10 Xét hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+1$.

a) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) $x=-3$ là điểm cực đại của hàm số đã cho.

c) $M(-3;-8)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

d) Với A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì $AB=\frac{3\sqrt{74}}{4}$.

Dạng thức 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

11 Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao $2\,m$ với vận tốc ban đầu là $24{,}5\,m/s$. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t)=2+24{,}5t-4{,}9t^2$. Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Cô Ngọc Huyền LB | Hệ thống đào tạo Toán Ngọc Huyền LB
i chính đáng của chính các em, không chia sẻ tài liệu ĐỘC QUYỀN này cho người khác!
Độc quyền & duy
ngochuyenlb
ĐĂNG KÍ VÀ HỌC TẠI THANHVIENKHOAHOC.NET ZALO - 0778635643
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

12 Một cửa hàng M có thu nhập mỗi ngày được ước tính theo công thức $T(x)=15x-\frac{3}{2}x^2+2$ (*triệu đồng*) với x là ngày thứ x trong tuần. Hỏi cửa hàng M có thu nhập cao nhất vào thứ mấy trong tuần?

13 Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{150}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ (*lít*) với $0\le t\le 90$. Tốc độ bơm nước ở thời điểm t phút được tính theo công thức $v(t)=V'(t)$. Tìm thời điểm mà tốc độ bơm nước là lớn nhất.

14 Nhà máy I chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy II. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng nhà máy I cung cấp cho nhà máy II số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy II (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (*triệu đồng*). Chi phí để nhà máy I sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+15x$ (*triệu đồng*) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 15 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Hỏi nhà máy I cung cấp cho nhà máy II bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất?

ĐĂNG KÍ VÀ HỌC TẠI THANHVIENKHOAHOC.NET ZALO - 0778335643

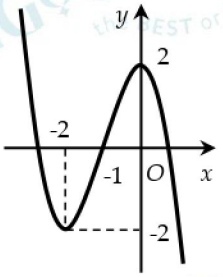
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

C Bài tập rèn luyện

Dạng thức 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

01 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=-2$.
B. $x=-1$.
C. $x=0$.
D. $x=2$.

02 Cho hàm số $y=f(x)$ xác định với mọi $x\neq 4$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** –3.

03 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1.
C. 3. **D.** 0.

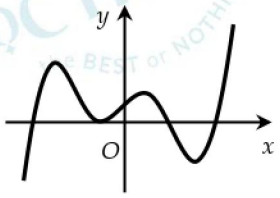
04 Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x)=(-x^2+4x)(x^2-5x+6)(x^4+8x);\forall x\in\mathbb{R}.$$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3.
C. 4. **D.** 2.

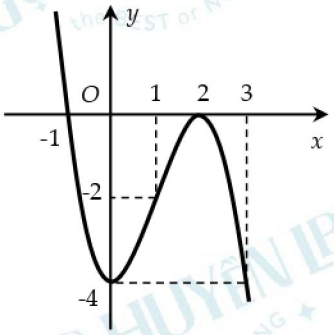
05 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

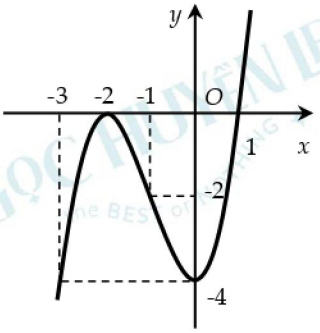
06 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $(0;-4)$. **D.** $(2;0)$.

07 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hiệu giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** –2. **D.** –4.

08 Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có hai điểm cực trị M, N. Khi đó hoành độ trọng tâm của tam giác OMN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** (

Cô Ngọc Huyền LB | Hệ thống đào tạo Toán Ngọc Huyền LB
i chính đáng của chính các em, không chia sẻ tài liệu ĐỘC QUYỀN này cho người khác!
Độc quyền & duy
ngochuyenlb
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net

09 Gọi A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ và B là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=g(x)=-x^3+3x-5$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{2}$.

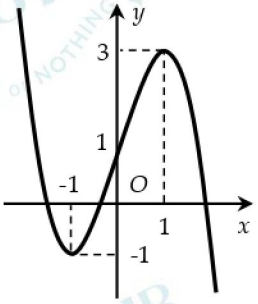
10 Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ là đường thẳng nào dưới đây?

A. $2x+y-4=0$. **B.** $x+2y-4=0$.

C. $2x+y+4=0$. **D.** $x+2y+4=0$.

Dạng thức 2 Câu trắc nghiệm đúng sai

11 Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



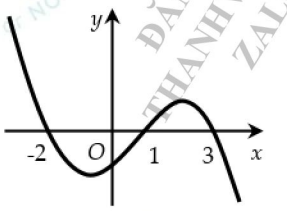
a) Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3.

d) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $(-1;1)$.

12 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

b) Hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực tiểu.

c) Điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là $x=-2$.

d) Giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ là $f(3)$.

13 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

a) Hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị.

b) Hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực đại.

c) Điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là $x=0$.

d) Tổng các giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ là $f(1)$.

14 Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-24x+13$.

a) Hàm số có một điểm cực trị.

b) $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $(-4;93)$.

d) Với A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì $I(39;-1)$ là trung điểm của AB.

15 Cho hai hàm số $y=f(x)=\sqrt{-4x-x^2}$ và $y=g(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2+24x-7$.

a) $x=-2$ là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực đại.

c) Với M, N lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=g(x)$ thì $\overrightarrow{MN}=\left(2;-\frac{4}{3}\right)$.

d) Với P là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì tọa độ trọng tâm G của ΔMNP là $G\left(\frac{8}{3};\frac{184}{9}\right)$ (trong đó M và N là hai điểm tìm được ở câu c).

Dạng thức 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

16 Một công viên giải trí tổ chức tuần lễ hội và ghi nhận lượng khách đến tham quan mỗi ngày theo công thức: $N(x)=14x-x^2+3$ với x là ngày thứ x trong tuần lễ hội. Vào ngày thứ mấy trong tuần thì công viên đón lượng khách đông nhất?

17 Công ty X sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $g(x)=x^3-77x^2+1000x+45000$ (*đồng*) và hàm doanh thu là $h(x)=-2x^2+1312x$ (*đồng*), với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của công ty X được xác định bằng hàm số $f(x)=h(x)-g(x)$. Khi đó lợi nhuận của công ty X đạt cực đại khi sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

18 Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu m/s?

Cô Ngọc Huyền LB | Hệ thống đào tạo Toán Ngọc Huyền LB
i chính đáng của chính các em, không chia sẻ tài liệu ĐỘC QUYỀN này cho người khác!
Độc quyền & duy
ngochuyenlb
Đăng Kí Và Học Duy Nhất Tại : https://thanhvienkhoahoc.net