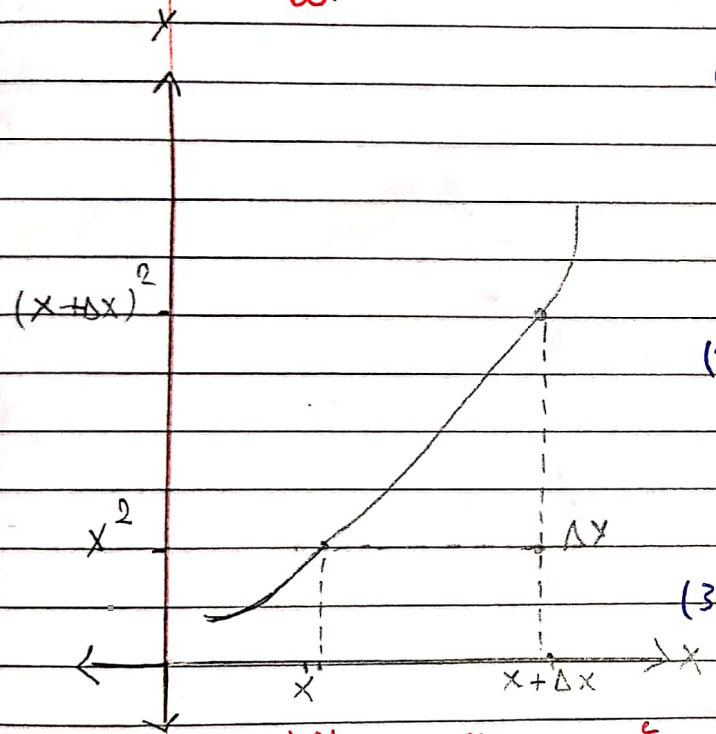
★ الإشتقاق ★
(تفاضل)

إذا كان $y = x^2$ برهن أن $\frac{dy}{dx} = 2x$:



(1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$

$= (x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x) - x^2$

$= \Delta x^2 + 2x\Delta x$

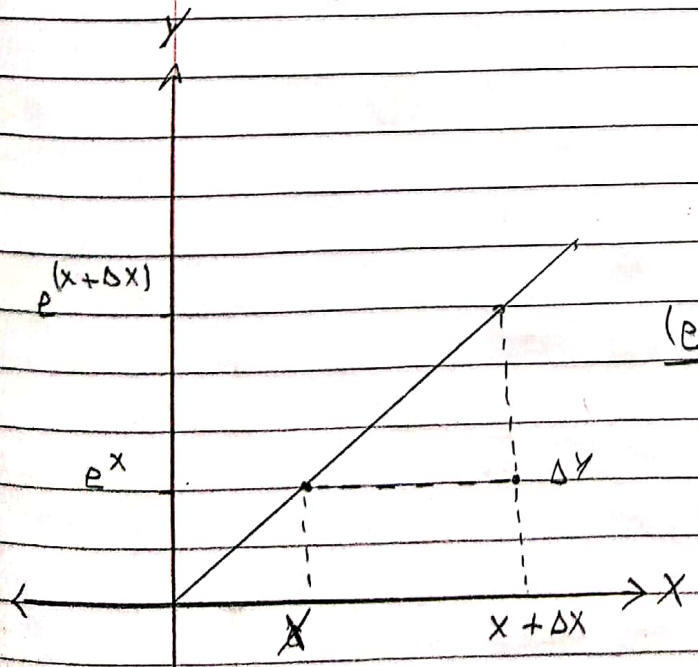
$= \Delta x(\Delta x + 2x)$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x}$

$= \Delta x + 2x$

(3) $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x) = \boxed{2x}$ #

إذا كان $y = e^x$ برهن أن $\frac{dy}{dx} = e^x$:



(1) $\Delta y = e^{(x+\Delta x)} - e^x$

$= e^x(e^{\Delta x} - 1)$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$

وكما في □

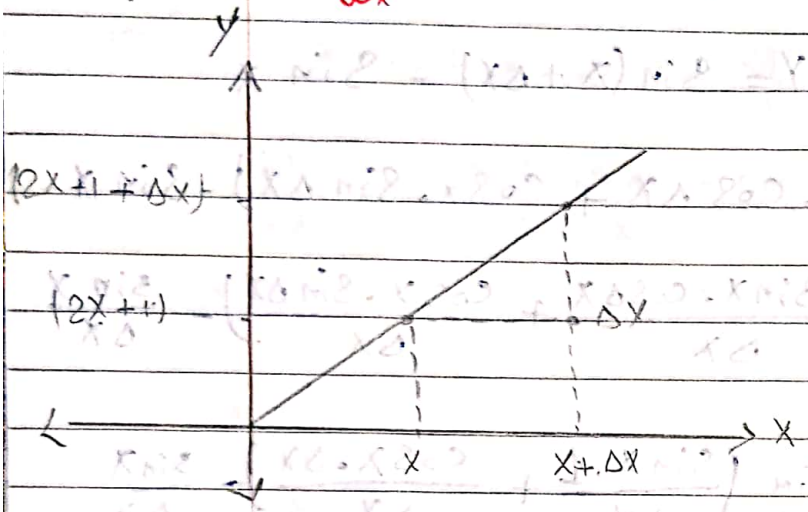
$\frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \square$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x$

(3) $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x = \boxed{e^x}$ #

Scanned by CamScanner

٣ إذا كان $Y = 2X + 1$ فإن $\frac{dY}{dX} = 2$



(1) $\Delta Y = (2X + 1 + \Delta X) - (2X + 1)$
$= \Delta X + 2$

(2) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta X + 2}{\Delta X} = 2$

(3) $\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} (2) = \boxed{2}$ #

٤ إذا كان $Y = \ln X$ فإن $\frac{dY}{dX} = X^{-1}$

(2) $Y = \ln X \Rightarrow \boxed{Y = \log_e X}$ (1) $\because \ln X = \log_e X$

$\Rightarrow \because \boxed{X = e^Y}$

$\frac{dX}{dY} = e^Y$

$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{e^Y} = \frac{1}{X} = \boxed{X^{-1}}$ #

$\boxed{\ln X = \log_e X}$

٥ إذا كان $Y = a^X$ فإن $\frac{dY}{dX} = a^X \ln a$

$Y = a^X$ (ln) بأخذ

$\ln Y = \ln a^X$

$\Rightarrow \ln Y = X \ln a$

$\therefore X = \frac{\ln Y}{\ln a}$

$\frac{dX}{dY} = \frac{1}{Y \ln a}$

$\frac{dY}{dX} = Y \ln a$

$Y = a^X$ بالتعويض

$\therefore \frac{dY}{dX} = \boxed{a^X \ln a}$ #

Scanned by CamScanner

٦ إذا كان $Y = \sin X$ برهن أن $\frac{dY}{dx} = \cos X$

(1) $\Delta Y = \sin(X+\Delta X) - \sin X$

$= (\sin X \cdot \cos \Delta X + \cos X \cdot \sin \Delta X) - \sin X$

(2) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \left(\frac{\sin X \cdot \cos \Delta X}{\Delta X} + \frac{\cos X \cdot \sin \Delta X}{\Delta X}\right) - \frac{\sin X}{\Delta X}$

(3) $\frac{dY}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \left(\frac{\sin X \cdot 1}{\Delta X} + \frac{\cos X \cdot \Delta X}{\Delta X}\right) - \frac{\sin X}{\Delta X}$

$= \boxed{\cos X}$ #

٧ إذا كان $Y = \cos X$ برهن أن $\frac{dY}{dx} = -\sin X$

(1) $\Delta Y = \cos(X+\Delta X) - \cos X$

$= (\cos X \cdot \cos \Delta X - \sin X \cdot \sin \Delta X) - \cos X$

(2) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \left(\frac{\cos X \cdot \cos \Delta X}{\Delta X} - \frac{\sin X \cdot \sin \Delta X}{\Delta X}\right) - \frac{\cos X}{\Delta X}$

(3) $\frac{dY}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \left(\frac{\cos X \cdot 1}{\Delta X} - \frac{\sin X \cdot \Delta X}{\Delta X}\right) - \frac{\cos X}{\Delta X}$

$= \boxed{-\sin X}$ #

٨ إذا كان $Y = \tan x$ برهن أن $\frac{dY}{dx} = \sec^2 X$

$Y = \tan x \Rightarrow Y = \frac{\sin X}{\cos X} \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot -\sin x}{(\cos x)^2}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\sec^2 x}$ #

Scanned by CamScanner

٩) إذا كان $Y = \cot x$ برهن أن $\frac{dY}{dx} = -\csc^2 x$

$$Y = \cot x \Rightarrow Y = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x} = \boxed{-\csc^2 x} \#$$

١٠) إذا كان $Y = \sec x$ برهن أن $\frac{dY}{dx} = \sec x \cdot \tan x$

$$Y = \sec x \Rightarrow Y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(0)\cdot(\cos x) - (-\sin x)\cdot(1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \boxed{\tan x \cdot \sec x} \#$$

١١) إذا كان $Y = \csc x$ برهن أن $\frac{dY}{dx} = -\csc x \cdot \cot x$

$$Y = \csc x \Rightarrow Y = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(0)(\sin x) - (\cos x)\cdot(1)}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \boxed{-\csc x \cdot \cot x} \#$$

Scanned by CamScanner

(١٢) إذا كان $y = \sin^{-1} x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(1) $x = \sin y \quad \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{dx}{dy} = \cos y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ ومنها

(3) $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ #

(١٣) إذا كان $y = \cos^{-1} x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(1) $x = \cos y \quad 0 \leq y \leq \pi$

(2) $\frac{dx}{dy} = -\sin y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ ومنها

(3) $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$ #

(١٤) إذا كان $y = \tan^{-1} x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

(1) $x = \tan y \quad \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$

$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ ومنها

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$ #

Scanned by CamScanner

III) إذا كان $y = \sec^{-1} x$ برهن أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(1) $x = \sec y \quad 0 \le y \le \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{dx}{dy} = \sec y \cdot \tan y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y}$

$\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ ، ومنها

$\tan^2 y = \sec^2 y - 1$

(3) $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}} = \boxed{\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}}$ #

IV) إذا كان $y = \csc^{-1} x$ برهن أن $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(1) $x = \csc y \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \quad y \neq 0$

(2) $\frac{dx}{dy} = -\csc y \cdot \cot y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc y \cdot \cot y}$

$\cot^2 y = \csc^2 y - 1$ ومنها

(3) $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc y \cdot \sqrt{\csc^2 y - 1}} = \boxed{\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$ #

V) إذا كان $y = \cot^{-1} x$ برهن أن $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$

(1) $x = \cot y \Rightarrow$ (2) $\frac{dx}{dy} = -\csc^2 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc^2 y}$

$0 \le y \le \pi$

$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y$ ومنها

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = \boxed{\frac{-1}{1+x^2}}$ #

Scanned by CamScanner

* إثبات * بخصائص σ-جبر

١ برهن أن $\emptyset \in \mathfrak{F}$:

$\because \Omega \in \mathfrak{F}$ وكذلك $\Omega^c = \emptyset$

$\therefore \Omega^c \in \mathfrak{F}$ $\therefore \boxed{\emptyset \in \mathfrak{F}}$ #

٢ برهن أن $(E_1 \cap E_2) \in \mathfrak{F}$:

$\because E_1^c , E_2^c \in \mathfrak{F}$

$\therefore (E_1^c \cup E_2^c) \in \mathfrak{F}$

$\Rightarrow (E_1^c \vee E_2^c)^c \in \mathfrak{F}$

$\Rightarrow (E_1^c)^c \wedge (E_2^c)^c \in \mathfrak{F}$

وكذلك $(E^c)^c = E$

$\therefore \boxed{(E_1 \cap E_2) \in \mathfrak{F}}$ #

Scanned by CamScanner

$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) \Leftrightarrow P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ برهن

$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3)$
$- P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

نفرض $P(E_4) = P(E_1 \cup E_2)$

$\therefore P(E_4) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ ①

نكمل باقي المسألة $P(E_4 \cup E_3) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$\therefore P(E_4 \cup E_3) = P(E_4) + P(E_3) - P(E_4 \cap E_3)$ ②

من ① بالتعويض في ② عن $P(E_4)$

$\therefore P(E_4 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_4 \cap E_3)$
$- P(E_1 \cap E_2)$ ④

نفرض $P(E_4 \cap E_3)$

$P(E_4 \cap E_3) \Leftrightarrow P(E_1 \cup E_2) \cap E_3 \Leftrightarrow P[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)]$

$= P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ ③

من ③ بالتعويض في ④ عن $P(E_4 \cap E_3)$

$\therefore P(E_4 \cup E_3) \Leftrightarrow P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3)$
$- P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ #

Scanned by CamScanner

★ إثبات ـ ★
التكامل ع

١ إثبات ـ التكامل بالتجزئ ع :

إذا كانت ـ دوال ـ التي ف x :

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

$$\Rightarrow u\,dv = d(u \cdot v) - v\,du$$

$$\therefore \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du \quad \#$$

٢ إثبات ـ التكامل المحدود :

$$I = \int f(x)\,dx = f(x) + c$$

$$Ib = f(b) + c \quad \text{(2) } (x = b)$$

$$Ia = f(a) + c \quad \text{(1) } (x = a)$$

$$Ib - Ia = f(b) - f(a)$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) \quad \#$$

Scanned by CamScanner

① برهنه آنه

$$A_T = h\left\{\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{(n-1)}\right\}$$

$$A_T = h\left(\frac{y_0+y_1}{2}\right) + h\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + h\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right) + \dots + h\left(\frac{y_{(n-1)}+y_n}{2}\right)$$

$$= h\left\{\left(\frac{y_0+y_n}{2}\right) + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{(n-1)}\right\} \#$$

② برهنه آنه

$$A_S = \frac{h}{3}\left\{(y_0+y_n) + 4(y_1+y_3+y_5+\dots+y_{(n-1)}) + 2(y_2+y_4+y_6+\dots+y_{(n-2)})\right\}$$

$$A_S = \frac{h}{3}\left\{(y_0+4y_1+y_2) + (y_2+4y_3+y_4) + (y_4+4y_5+y_6) + (\dots) + (y_{(n-2)}+4y_{(n-1)}+y_n)\right\}$$

$$= \frac{h}{3}\left\{(y_0+y_n) + 4(y_1+y_3+y_5+\dots+y_{(n-1)}) + 2(y_2+y_4+y_6+\dots+y_{(n-2)})\right\} \#$$

Scanned by CamScanner

★ الإثبات ★

رسم وتوفيح معنيات

١ برهن أن المعادلات التالية تستخدم لإيجاد العلاقة بين (Y,X) تمثل أسهل خط مستقيم بطريقة المتوسط المربعات !!

الإثبات ← ١ خطوات

① $Y = a + bx + e$

② $e = Y - a - bx$

③ $e^2 = (Y - a - bx)^2$

④ $\Sigma e^2 = \Sigma (Y - a - bx)^2$

⑤ $\frac{\partial S}{\partial a} = 2 * \Sigma (Y - a - bx) * (-1)$

⑥ $-2 = 0 \qquad \Sigma (Y - a - bx) = 0$

مرفوض

⑦ $\Sigma Y - na - b\Sigma x = 0$

⑧ $\boxed{\Sigma y = na + b\Sigma x}$ *

٢ برهن أن المعادلات التالية تستخدم لإيجاد العلاقة بين (Y,X) تمثل أسهل خط مستقيم بطريقة مربعات الانحرافات الصغرى !!

الإثبات ← ١ خطوة منهم أول ⑧

فى الإثبات المرفوض ↑

نكمل الإثبات

⑤ من الخطوة الأولى ← ⑨ $\frac{\partial S}{\partial b} = 2 * \Sigma (Y - a - bx) * -x$

⑩ $2 = 0 \qquad \Sigma (-xY + ax + bx^2) = 0$

مرفوض

⑪ $-\Sigma xy + a\Sigma x + b\Sigma x^2 = 0$

⑫ $\boxed{\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2}$ #

Scanned by CamScanner

٣ الدالة الأسية لكي نعرف تمثل علاقة أسية أم لا ؟؟

Semi log paper

$$Y = a e^{bX}$$

① $\ln Y = \ln a + \ln e^{bX}$

② $\boxed{\ln Y = \ln a + bX}$ #

٤ دالة القوى لكي نعرف تمثل علاقة دالة قوى أم لا ؟؟

Log log Paper

$$Y = a X^{b}$$

① $\ln Y = \ln a + \ln X^{b}$

② $\boxed{\ln Y = \ln a + b \ln X}$ #

Scanned by CamScanner