



محتويات الوحدة

الصفحة	الموضوع
	المقدمة
	تمهيد
	اهداف الوحدة
	1. تدوير المحاور
	2. المعادلة العامة من الدرجة الثانية
	1.2. تمييز القطوع المخروطية
	3. حذف الحد xy
	4. الفضاء الثلاثي (نظام الإحداثيات الديكارتية)
	5. الإحداثيات الأسطوانية
	6. العلاقة بين الإحداثيات الاسطوانية والديكارتية
	1.6. التحويل من نظام اسطواني إلى نظام ديكارتي
	2.6. التحويل من نظام كارتيزي إلى نظام اسطواني
	7. الإحداثيات الكورية
	8. العلاقة بين الإحداثيات الكورية والإحداثيات الأسطوانية
	1.8. التحويل من نظام كوري إلى اسطواني
	2.8. التحويل من نظام اسطواني إلى كروي
	الخلاصة
	إجابات التدريبات
	مسرد المصطلحات
	المراجع

المقدمة

تمهيد

نقدم إليك عزيزي الدارس الوحدة الخامسة من مقرر 161 رياضيات (1) الهندسة التحليلية وهي بعنوان "المعادلة من الدرجة الثانية والفضاء الثلاثي"، لما لهذان الموضوعان من أهمية كبيرة في الرياضيات ، حيث تستخدم المعادلة العامة لتميز القطوع المخروطية، ويستخدم الفضاء الثلاثي في تمثيل النقاط والمعادلات في الفضاء.

وسوف نتعرف في هذه الوحدة على تدوير المحاور والمعادلة العامة من الدرجة الثانية وحذف الحد $x y$ والفضاء الثلاثي والاحداثيات الاسطوانية والكروية والعلاقة بين الاحداثيات الاسطوانية والديكارتية وبين الاسطوانية والكروية.

ستحتاج في هذه الوحدة إلى شئ من التخيل وخصوصاً عند الحديث عن الاحداثيات الاسطوانية والاحداثيات الكروية ، وهذا امر مفيد للغاية ذلك أن العالم الذي نعيش فيه هو عالم ثلاثي الابعاد من حيث المكان، وستجد أن هذه الوحدة ذات صلة وثيقة بمعارفك السابقة واحتياجاتك المعرفية في المستقبل.

نأمل أن تكون وحدة ممتعة لك، كما نرجو المساهمة في نقدها وتطويرها.

ونتمنى لك التوفيق.

أهداف الوحدة



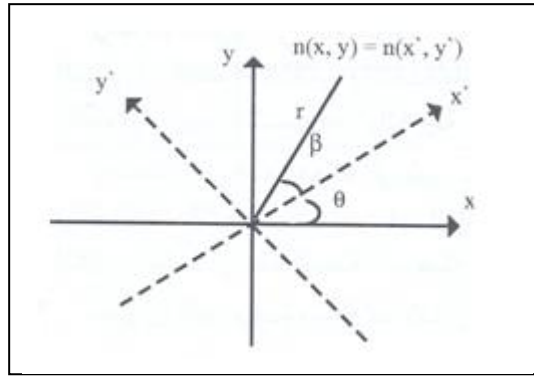
عزيزي الداس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن :

- 1- تشتق علاقة لتدوير المحاور .
- 2- تميز القطوع المخروطية من المعادلة العامة .
- 3- تحذف الحد xy .
- 4- تعرّف الاحداثيات الديكارتية وتعين نقطة في الفضاء الديكارتى .
- 5- تعرّف الاحداثيات الاسطوانية وعلاقتها بالدسكارتية .
- 6- تحوّل نقاط من نظام اسطوانى إلى ديكارتى وبالعكس .
- 7- تعرّف نظام الاحداثيات الكروية وعلاقتها بالاسطوانية .
- 8- تحول نقاط من نظام كروي إلى نظام اسطوانى .

1. تدوير المحاور

في هذا البند سوف نعرف نظاماً ديكارتياً ينتج بتثبيت نقطة الأصل وتدوير المحور x والمحور y حول نقطة الأصل إلى وضع جديد (أو بزاوية مقدارها θ) يصبحان فيه (x', y') وكل تحويل من هذا النوع يسمى بتدوير المحاور. والآن سوف نشرح تدوير المحاور كما هو موضح في الشكل (1).

الشكل (1)



إذا دورنا محور x ومحور y بزاوية مقدارها θ حول

نقطة الأصل فإن النقطة $n(x, y)$ في النظام x, y تصبح

$n(x', y')$ في النظام x', y' ونريد إيجاد العلاقة بين

الاحداثيات (x', y') والاحداثيات (x, y)

نلاحظ أن :

$$x = r \cos(\theta + \beta)$$

$$y = r \sin(\theta + \beta)$$

$$\dots x' = r \cos \beta \dots (1)$$

$$\dots (2)$$

$$y' = r \sin \beta$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية :

$$\cos(\theta + \beta) = \cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \beta$$

$$\sin(\theta + \beta) = \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta$$

إذن :

$$.....(3) x = r \cos(\theta + \beta) = (\cos \theta) r \cos \beta - (\sin \theta) r \sin \beta$$

$$.....(4) y = r \sin(\theta + \beta) = (\sin \theta) r \cos \beta + (\cos \theta) r \sin \beta$$

والآن عوض (1) , (2) في (3) , (4) لنجد أن :

$$x = \cos \theta . x' - \sin \theta . y'$$

$$y = \sin \theta . x' + \cos \theta . y'$$

وبعبارة أخرى :

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

حيث θ زاوية الدوران

.....(*)

مثال (1):

إذا دار المحوران $x y$ بزاوية مقدارها 30° وكان الاحداثيان للنقطة n في النظام $x y$ هما $(2, -7)$ فما احداثيها في النظام x', y' .

الحل:

نستخدم العلاقة (*)

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$7 = x' (\cos 30^\circ) - y' (\sin 30^\circ)$$

$$7 = x' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - y' \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$7 = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y' \dots \dots \dots (1)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

والآن

$$-2 = x' (\sin 30) + y' (\cos 30)$$

$$-2 = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \dots\dots\dots(2)$$

نحل المعادلتين (1) , (2) وكما يلي:

نجد قيمة 'y بدلالة 'x من المعادلة (1)

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - 7$$

بضرب المعادلة في العدد (2) نجد :

$$y' = \sqrt{3}x' - 14 \dots\dots\dots(3)$$

عوض (3) في المعادلة (2)

$$-2 = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}x' - 14)$$

$$-2 = \frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}x' - 7\sqrt{3}$$

$$-2 = 2x - 7\sqrt{3}$$

$$2x' = 7\sqrt{3} - 2$$

$$x' = \frac{7\sqrt{3}}{2} - 1$$

عوض قيمة 'x في المعادلة (3) تجد :

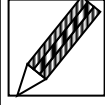
$$y' = \sqrt{3}\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} - 1\right) - 14$$

$$= \frac{21}{2} - \sqrt{3} - 14 = \frac{-7}{2} - \sqrt{3}$$

اذن الاحداثيات الجديدة هي :

$$n\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{-7}{2} - \sqrt{3}\right)$$

تدريب (1)



إذا دار محور x, y بزاوية مقدارها 30° جد x', y' للنقاط التالية في محور

x, y :

(A) (2,-3) (B) (1, -3)

2. المعادلة العامة من الدرجة الثانية

إن الصورة العامة للمعادلة التربيعية من الدرجة الثانية هي :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \dots (4)$$

حيث A, C لا يساويان الصفر معاً $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

2.1 تمييز القطوع المخروطية

من المعادلة العامة عند القيام باختيار الثوابت (A, B, C, D, E, F) قد يكون بيان

المعادلة (4) دائرة أو قطعاً مكافئاً أو ناقصاً أو زائداً أو خطين مستقيمين متقاطعين أو متوازيين أو نقطة أو مجموعة خالية .

والسؤال الذي ينشأ الآن هو:

إذا أخذنا المعادلة التربيعية العامة (4) فكيف نصنف المنحنى الذي تمثله هذه المعادلة؟؟

وللإجابة عن السؤال سنفرض أولاً أن $B=0$ ونضع نظرية بدون برهان تساعدنا في التصنيف

المطلوب، ثم نأخذ الحالة التي تكون فيها $B \neq 0$ ونستعمل دوران المحاور بزاوية مناسبة لحذف

الحد الذي يحتوي x, y ومن ثم نستخدم الأسلوب الأول في تصنيف القطوع .

نظرية:

إن المعادلة : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ تمثل :

(1) قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين : إذا كانت إشارة حاصل ضرب A, C سالبة أي إذا كان $(AC < 0)$.

(2) قطعاً ناقصاً أو نقطة ، أو مجموعة خالية ، إذا كانت $A \neq C$ وإشارة حاصل ضرب A, C موجبة أي كان $(A \neq 0, AC > 0)$.

(3) دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية إذا كانت $(A \neq 0, A = C)$.

(4) قطعاً مكافئاً أو خطين متوازيين أو خطاً واحداً أو مجموعة خالية إذا كانت $(AC = 0)$ ولم

يكن كل من A, C صفراً في آن واحد . وحتى تكون المعادلة ممثلة لقطع مكافئ يجب أن

تكون : $(A \neq 0, C \neq 0, E \neq 0)$ أو $(A = 0, C \neq 0, D \neq 0)$

ولتوضيح هذه النظرية نأخذ الأمثلة التالية:

مثال (2):

$$y^2 - 8y + 8x + 8 = 0$$

الحل:

لاحظ أن : $A = 0$, $C = 1$, $D = -8$, $E = -8$, $F = 8$, $AC = 0$ وليس كلاهما صفراً
فإن المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً وذلك لأن $(A = 0, C \neq 0, D \neq 0)$.

مثال (3):

$$7x^2 - 9y^2 - 14x - 54y - 137 = 0$$

الحل:

$$A = 7, C = -9, D = 14, E = -54, F = -137$$

$$AC = (7)(-9) = -63 < 0$$

ل هذا فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين ، ومن أجل أن ننفي أنها تمثل
خطين متقاطعين يجب أن نكمل المربعات ونكتب المعادلة على الصورة :

$$r^2(x-h)^2 + m^2(y-k)^2 = L$$

حيث $r, m, L \neq 0$ اعداد حقيقية ، وبإكمال المربع للمعادلة :

$$7x^2 - 9y^2 - 14x - 54y - 137 = 0$$

نحصل على المعادلة :

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{7} = 1$$

وهذه المعادلة على الصورة :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

فهي معادلة قطع زائد محوره القاطع يوازي محور x ومركزه $M(1, -3)$

مثال (4):

ماذا تمثل المعادلة : $25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$

الحل :

لاحظ أن : $A = 25$, $C = 16$, $D = -100$, $E = -32$, $F = -284$

وأن : $AC = (25)(16) = 400 > 0$

وأن : $A \neq C$

فإن هذه المعادلة تكتل قطعاً ناقصاً أو نقطة أو مجموعة خالية ، وحتى ننفي أن تكون نقطة أو مجموعة خالية يجب أن نكمل المربعات ونثبت أن المعادلة على الصورة :

$$r^2 (x-h)^2 - m^2 (y-k)^2 = L$$

حيث $m, r, L \neq 0$ أعداد حقيقية .

وبإكمال المربع للمعادلة :

$$25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$$

لنحصل على:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

فهي معادلة قطع ناقص محوره الأكبر يوازي محور y ومركزه $M(2,1)$

مثال (5):

ماذا تمثل المعادلة : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

الحل :

لاحظ أن : $A = 1$, $C = 1$, $D = -4$, $E = -6$, $F = -12$

وأن : $A = C$

ولهذا فإن المعادلة تمثل دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية ، ولإستبعاد كونها تمثل نقطة أو مجموعة خالية يجب أن نكمل المربع في كل من x, y ونضع المعادلة على الصيغة :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = L$$

حيث $L > 0$

وبإكمال المربع للمعادلة $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

نحصل على: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

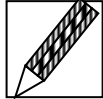
وهذه المعادلة من الصورة القياسية :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

فهي معادلة دائرة مركزها $M(2, 3)$ ونصف قطرها 5 .

تدريب (2)

صنف المعادلة : $16x^2 - y^2 - 32y - 6x - 57 = 0$



السؤال الذي ينشأ الآن: كيف نعالج تصنيف منحنى المعادلة التربيعية العامة

عندما $B \neq 0$. للأجابة عن هذا السؤال ندرس البند التالي:

3. حذف الحد xy

في هذا البند سوف نجيب عن السؤال الأخير ، وهو كيف نصنف المعادلة العامة إذا كان $B \neq 0$ والإجابة عن هذا السؤال هو حذف الحد xy .

إن تدوير المحاور الذي درسناه في هذا البند الأول من هذه الوحدة سيساعدنا في تبسيط معادلات من الدرجة الثانية وذلك بحذف الحد xy ، وبالعودة إلى المعادلة العامة من الدرجة الثانية:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \dots\dots(4)$$

$$A, B, C, D, E, F, \in \mathbb{R}, B \neq 0$$

ولحذف الحد xy في المعادلة 4 نستخدم علاقة تدوير المحاور :

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

وبتعويض قيمة xy من علاقة تدوير المحاور في المعادلة (4) نجد أن :

$$A[x' \cos \theta - y' \sin \theta]^2 + B[x' \cos \theta - y' \sin \theta][x' \sin \theta + y' \cos \theta]$$

$$+ C[x' \sin \theta + y' \cos \theta]^2 + D[x' \cos \theta - y' \sin \theta]$$

$$+ E[x' \sin \theta + y' \cos \theta] + F = 0$$

ولكن الذي نريده هو حذف الحد الذي يحوي 'y' ، x وبالتالي نأخذ فقط معامل الحد الذي

يحوي على 'y' ، x هو :

$$\begin{aligned} -2 A \cos \theta \sin \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \cos \theta \sin \theta \\ = -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ = (C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta \end{aligned}$$

وحتى نحذف الحد 'y' ، x يجب أن يكون معاملهما يساوي صفراً أي أن :

$$(C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0$$

أي أن :

$$(A - C) \sin 2\theta = B \cos 2\theta$$

وهنا يوجد حالتان :

أولاً : إذا كانت $A = C$ وعندها نحصل على :

$$B \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + n \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}$$

إذن لحذف 'y' ، x وإذا كانت $A = C$ نضع بدل $\theta = \frac{\pi}{4}$ (اخترنا $n=0$) .

ثانياً : $A \neq C$ وعندها نحصل على :

$$(A - C) \sin 2\theta = B \cos 2\theta$$

نقسم الطرفين على $\cos 2\theta$ فنحصل على :

$$(A - C) \tan 2\theta = B$$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

ولإيجاد الزاوية θ نأخذ معكوس الظل للطرفين $(\tan^{-1})$:

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A - C}\right) + n \pi$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{B}{A-C} \right) + \frac{1}{2} n \pi$$

إذن لحذف الحد 'y' 'x' وإذا كانت $A \neq C$ بديل θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{B}{A-C} \right)$$

(اخترنا $n=0$)

مثال (6):

صنف المعادلة : $xy=2$ وارسم المنحنى الذي تمثله .

الحل:

لتصنيف المعادلة (1) $xy = 2$ نلجأ إلى حذف الحد xy وفي هذه الحالة $A = C = 0$

إذن نختار :

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

ومن علاقة الدوران :

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y') \dots \dots (2)$$

والآن :

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$y = \frac{1}{2} (x' + y') \dots \dots (3)$$

نعوض (2) , (3) لنجد أن :

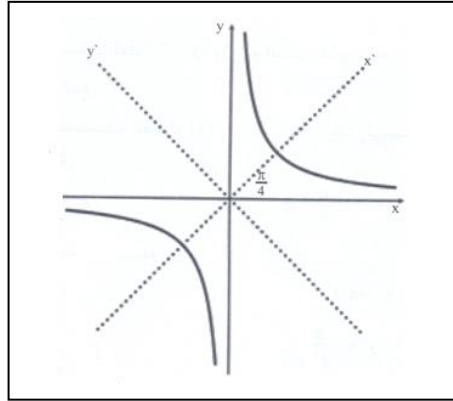
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') = 2$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 2$$

$$x'^2 - y'^2 = 4$$

وهي معادلة قطع زائد في المستوى 'x 'y

أنظر الشكل (2)



مثال (7):

صنف المعادلة:

$$11x^2 + \frac{12}{\sqrt{3}}xy + 7y^2 = 1$$

وارسم المنحنى الذي تمثله المعادلة :

الحل:

$$11x^2 + \frac{12}{\sqrt{3}}xy + 7y^2 = 1 \dots\dots (1)$$

نلاحظ أن:

$$A=11, B=\frac{12}{\sqrt{3}}, C=7$$

وبما أن: $A \neq C$ نأخذ :

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{B}{A-C} \right)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{12}{\sqrt{3}}}{11-7} \right)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{12}{\sqrt{3} \cdot (4)}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} (60^\circ) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

وباستخدام معادلة الدوران:

$$x' = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$x = x' \cos \frac{\pi}{6} - y' \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$y = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'$$

إذن:

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \dots (2)$$

$$y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \dots (3)$$

نعوض (2) , (3) في (1) لنجد أن:

$$11\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y')\right]^2 + \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \cdot \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \\ + 7\left[\frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y')\right]^2$$

وبتبسيط المعادلة نجد أن:

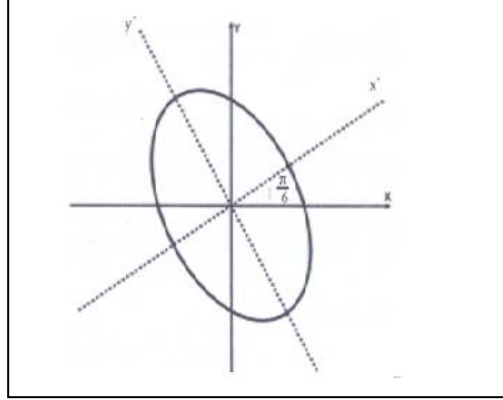
$$13x'^2 + 5y'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 2\sqrt{3}x'y' = 1$$

$$13x'^2 + 5y'^2 = 1$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{13}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

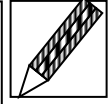
وهي معادلة قطع ناقص انظر الشكل (3) في المستوى 'y 'x.

الشكل (3)



تدريب (3)

جد زاوية الدوران θ التي تحذف الحد ' y ' من المعادلة التربيعية المناظرة للمعادلة $xy=1$



أسئلة تقويم ذاتي

* صنف منحنى المعادلات التالية :

1) $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$

2) $x^2 - 2y^2 + x + y = 0$

* صنف منحنى كل من المعادلات التالية :

3) $x^2 + 4x - y + 1 = 0$

4) $y^2 + 2y - x - 1 = 0$

5) $9x^2 + 4y^2 + 18x = 8y + 23$

6) $4x^2 - y^2 - 16x + 10y - 17 = 0$

7) $y^2 - 9x^2 - 8y + 36x - 29 = 0$

8) $5x^2 + 5y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$

* إذا دار محورا x, y بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{6}$ جد ' x', y' ' للنقطة (2,3) في

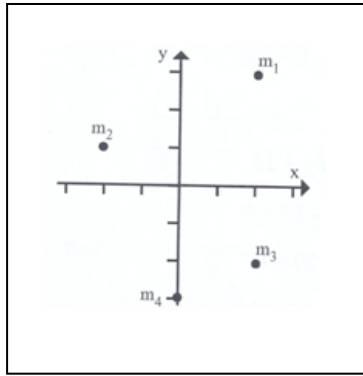
محور xy .



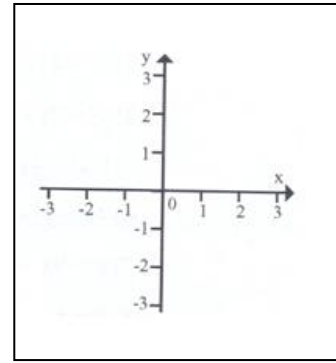
4. الفضاء الثلاثي (نظام الاحداثيات الديكارتية)

سبق و أن درسنا في الوحدة الأولى نظام الاحداثيات الديكارتية في المستوى المكون من محورين متعامدين متقاطعين في نقطة تسمى نقطة الأصل (0) ، ويسمى الخط الافقي محور x والخط الرأسى محور y الشكل (4) وعلمت أن كل نقطة في المستوى تمثل بزوج مرتب واحد (a, b) يسمى العدد a الاحداثى x للنقطة ، ويسمى العدد b الاحداثى y للنقطة .

الشكل (5)



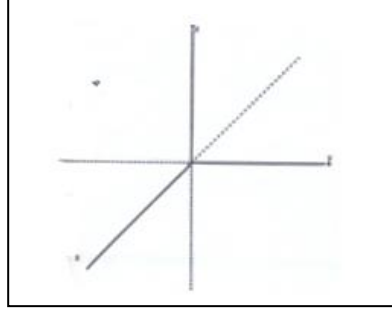
الشكل (4)



كذلك فإن كل زوج مرتب (a, b) يمثل نقطة واحدة فقط في المستوى وهي تقاطع المستقيمين $x=a, y=b$ ففي الشكل (5) احداثيات النقاط m_1, m_2, m_3, m_4 هي $(2, 3), (-2, 1), (-2, -2), (0, -3)$ على الترتيب.

إن نظام الاحداثيات الديكارتية يمكن تعميمه لتمثيل النقاط في الفضاء باستخدام ثلاثة مستقيمات متعامدة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى نقطة الأصل (O)، وتسمى هذه المستقيمات بالمحاور، وهي محور x ، محور y ، ومحور z ، الشكل (6). وفي العادة نرسم محوري x, y في مستوى افقي، ومحور z عمودي على هذا المستوى .

الشكل (6)

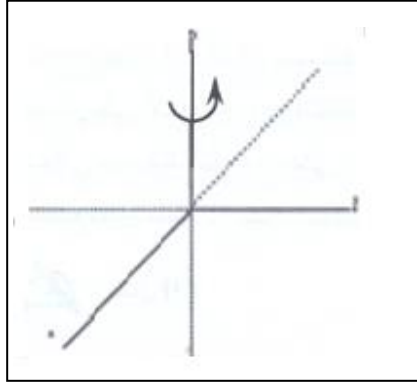


أما ترتيب هذه المحاور ، فينتج حسب قاعدة اليد اليمناء التي تنص على : افتح اصابع اليد اليمنى، بحيث يكون الابهام عمودياً على الأصابع الأربعة تشير إلى محور x ، فإذا ضُمت الاربعة

باتجاه المحور y فإن الابهام سيشير إلى اتجاه z الموجب.

في الشكل (7) تمثل الخطوط المتصلة الأجزاء الموجبة من

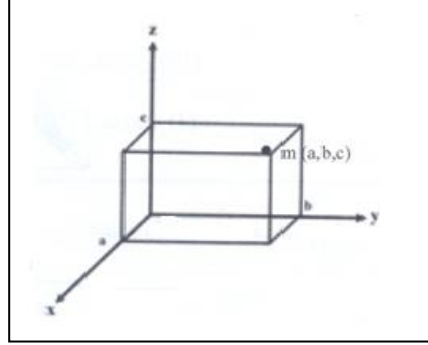
الشكل (7)



المحاور والخطوط المنقطعة الأجزاء السالبة منها إن كل زوج من المحاور يحدد مستوى يسمى مستوى الاحداثي فمستويات الاحداثي هي مستوى $x y$ ، مستوى $y z$ ، مستوى $x z$ وهذه المستويات تقسم في الفضاء إلى ثمانية أجزاء، كل جزء منها يسمى ثمناً والثمان المحصور بالأجزاء الموجبة من المحاور يسمى الثمن الأول أما باقي الاثمان فلا يوجد لها ترتيب معين.

والآن لتكن m نقطة في الفضاء، ارسم من هذه النقطة ثلاثة مستويات موازية لمستويات الأحداثي، أو معامدة لمحاور

الشكل (8)

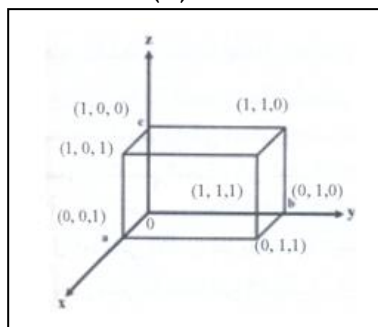


الأحداثيات ، ولتكن نقاط تقاطع هذه المستويات مع محور x ، محور y ، محور z ، هي على الترتيب a, b, c فتكون إحداثيات النقطة m هي الثلاثي (a, b, c) الشكل (8). أي أن كل نقطة في الفضاء تمثل بثلاثي مرتب واحد فقط، والعكس صحيح أيضاً، فكل ثلاثي مرتب (a, b, c) يمثل نقطة واحدة في الفضاء. ولتحديد هذه النقطة نعين الأعداد a, b, c على محاور الأحداثيات x, y, z على الترتيب ومن كل نقطة نرسم مستوى عمودي على المحور ، فتكون نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المطلوبة. لاحظ أن إحداثيات نقطة الأصل (0) هي $(0, 0, 0)$ وإحداثيات النقاط على محاور x, y, z هي الصورة $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ على الترتيب وفي الثمن الأول تكون إحداثيات النقاط موجبة .

مثال (8):

الشكل (9) يمثل احداثيات رؤوس مكعب ، طول ضلعه وحدة واحدة ، و يقع أحد رؤوسه على نقطة الأصل وسطوحه موازية لمستويات الاحداثي ويقع في الثمن الأول . يمكنك إيجاد احداثيات نقطة في الفضاء مثل m بطريقة

الشكل (9)

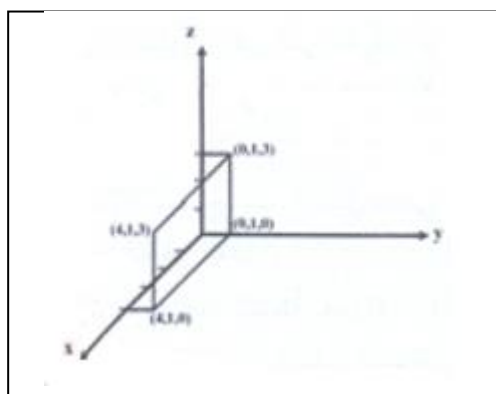


أخرى بإيجاد احداثيات مسقط النقطة على مستوى xy فتحصل على الاحداثيين x, y للنقطة m أما الاحداثي z فيكون احداثي مسقط النقطة m على محور z وبعبارة الخطوات تستطيع تعيين نقطة إذا علمت احداثياتها.

مثال (9):

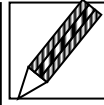
عين النقطة $(4, 1, 3)$ في نظام الاحداثيات الديكارتية .
الحل : انظر الشكل (10)

الشكل (10)



تدريب (4)

عين النقطة $(-3, -3, 2)$ في نظام الاحداثيات الديكارتية.



أسئلة تقويم ذاتي



1) عين النقاط التالية في نظام الاحداثيات الديكارتية .

$(-3, 1, 0)$, $(0, 0, -2)$, $(2, 2, -1)$, $(2, 1, 1)$

2) جد المسافة بين $(2, -3, 1)$ ومستويات الاحداثي .

3) ارسم متوازي مستطيلات يقع في الثمن الأول ، وواجهه توازي مستويات الاحداثي وأحد رؤوسه

عند النقطة $(0, 1, 1)$ وطول ضلعه الموازي لمحور x يساوي (3)
وطول الضلع الموازي لمحور y يساوي (5) ، وطول الضلع الموازي

5. الاحداثيات الاسطوانية

تذكر أنه يمكننا تعيين أية نقطة في الفضاء الديكارتي باستخدام ثلاثة متغيرات z, y, x منسوبة إلى ثلاثة محاور أحداثية متعامدة، وسنرى الآن كيف يمكن تعيين أية نقطة في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية ذات المتغيرات الثلاثة θ, r, z ، حيث المتغير z هو ذاته المتغير z في نظام الاحداثيات الديكارتية والاحداثي r هو الطول الذي نريده والاحداثي θ هو الزاوية .

ملاحظة : سنفرض أن θ, r, z ، محصورة في الفترات التالية :

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z \in (-\infty, \infty)$$

مثال (10):

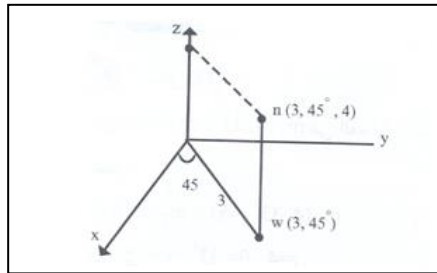
عين النقطة $n(3, 45^\circ, 4)$ في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية .
الحل :

$$n(3, 45^\circ, 4) = n(r, \theta, z)$$

$$r = 3, \theta = 45^\circ, z = 4 \quad \text{إذن:}$$

1. نعين في المستوى xy زاوية مقدارها 45° باتجاه عكس عقارب الساعة ابتداءً من محور x .

الشكل (11)



2. نحدد الطول 3 وحدة (قيمة r) على المستقيم الذي يحدد الزاوية 45° مع محور

. X

3. قيم العمود w_n على المستوى xy من النقطة $w(3, 45^\circ)$ بمقدار 4 وحدات وفي

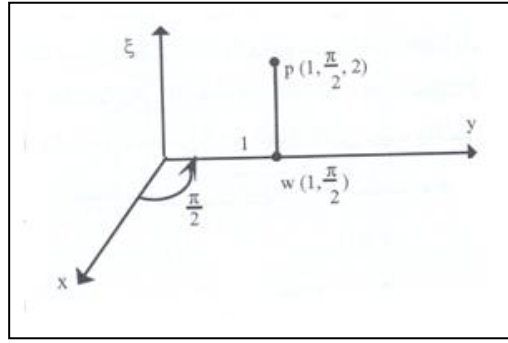
الاتجاه الموجب لمحور z .

4. فتكون النقطة $(4, 45^\circ, 3)$ هي النقطة المطلوبة كما واضح في الشكل (11).

مثال (11) :

عين النقطة $p(1, \frac{\pi}{2}, 2)$ في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية

الشكل (12)



الحل:

$$P(1, \pi, 2) = p(r, \theta, z)$$

$$r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}, z = 2$$

إذن:

1. عين في المستوى xy زاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ باتجاه عكس عقارب الساعة ابتداءً من

محور x .

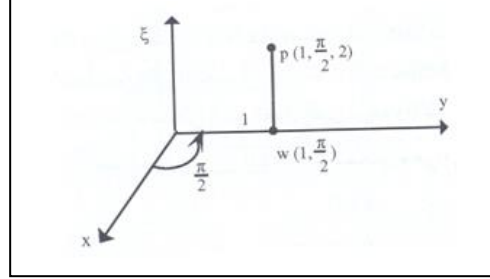
2. نحدد الطول (قيمة r) على المستقيم الذي يحدد الزاوية $\frac{\pi}{2}$ مع محور x .

3. نقيم العمود w_p على المستوى xy من النقطة $w(1, \frac{\pi}{2})$ بمقدار وحدتين وفي

الاتجاه الموجب لمحور z .

4. تكون النقطة $p(1, \frac{\pi}{2}, 2)$ هي النقطة المطلوبة كما واضح في الشكل (12).

الشكل (12)



تدريب (5)

مثال (12)

عين النقطة $m_2(4, 33^\circ, -5)$ في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية.

الحل:

$$m_2(4, 33^\circ, -5) = m_2(r, \theta, z)$$

$$r = 4, \theta = 33^\circ, z = -5$$

إذن :

1. نعين في المستوى xy باتجاه زاوية مقدارها (33°) باتجاه عكس عقارب الساعة ابتداء

من محور x .

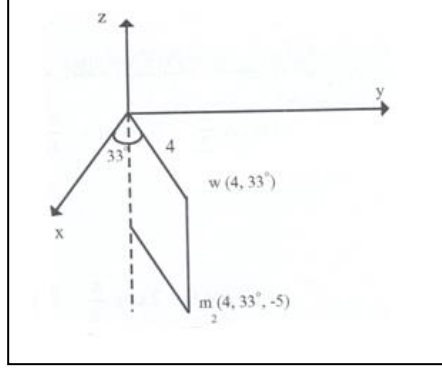
2. نحدد الطول 4 (قيمة r) على المستقيم الذي يحدد الزاوية 33° مع محور x .

3. نقيم العمود w_{m_2} على المستوى xy من النقطة $w(4, 33)$ بمقدار 5 وحدات وفي

الاتجاه السالب لمحور z .

4. تكون النقطة $m_2(4, 33^\circ, -5)$ هي النقطة المطلوبة كما في الشكل (13).

الشكل (13)



6. العلاقة بين الاحداثيات الاسطوانية الديكارتية

6.1 التحويل من النظام الاسطواني إلى النظام الديكارتى

للتحويل من نظام الاحداثيات الاسطوانية إلى نظام الاحداثيات الديكارتى نستخدم

العلاقات التالية:

$$1. \quad x = r \cos \theta$$

$$2. \quad y = r \sin \theta$$

$$3. \quad z = z$$

مثال (13):

حول احداثيات النقاط التالية من نظام الاحداثيات الاسطوانية إلى نظام الاحداثيات

الديكارتى .

$$(a) \left(2, \frac{\pi}{2}, -3 \right), (b) \left(6, \frac{\pi}{6}, 7 \right)$$

الحل :

بالنسبة للنقطة الحل :

بالنسبة للنقطة (a)

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 2 (0) = 0$$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2(1) = 2$$

$$z = -3$$

إذن النقطة في النظام الديكارتي هي : $(0, 2, -3)$

بالنسبة للنقطة (b) :

$$x = r \cos \theta = 6 \cos \frac{\pi}{6} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3}$$

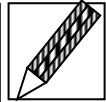
$$y = r \sin \theta = 6 \sin \frac{\pi}{6} = 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 3$$

$$Z = 7$$

إذن النقطة في النظام الديكارتي هي : $(3\sqrt{3}, 3, 7)$

تدريب (5)

حوّل إحداثيات النقطة $Q(1, \frac{\pi}{2}, 2)$ إلى الإحداثيات الديكارتية .



6.2 التحويل من النظام الديكارتي إلى النظام الاسطواني

للتحويل من نظام الإحداثيات الديكارتية إلى نظام الإحداثيات الاسطوانية نستخدم

العلاقات التالية :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

مثال (14):

حول احداثيات النقط التالية من نظام الاحداثيات الديكارتية إلى نظام الاحداثيات الاسطوانية .

$$(a) (1, 1, 4) \quad (b) (2, -2, 4)$$

الحل :

بالنسبة للنقطة (a)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z = z \Rightarrow z = 4$$

إذن النقطة في الاحداثيات الاسطوانية هي :

$$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 4)$$

بالنسبة للنقطة (b)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} -1 = \frac{-\pi}{4}$$

$$z = z \Rightarrow z = 4$$

إذن احداثيات النقطة في النظام الاسطواني هي :

$$(2\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}, 4)$$

أسئلة تقويم ذاتي



1- عين النقطتين التاليتين في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية :

$$E_1 (3, 70^\circ, 8) (A)$$

$$E_2 (10, \pi, 6) (B)$$

2- حول النقطة التالية إلى النظام الديكارتي .

$$(1, \frac{\pi}{3}, 3)$$

3- حول النقطتين التاليتين من احداثيات ديكارتية إلى احداثيات اسطوانية.

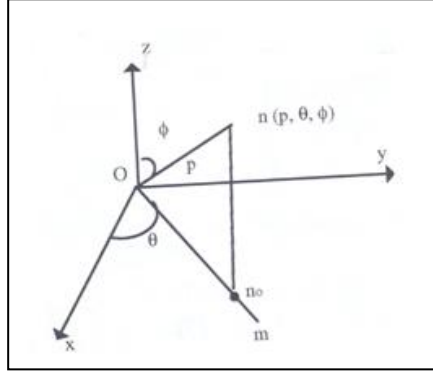
$$m_1 (-4, 4, -2), m_2 (-5, -12, 0)$$

7. الاحداثيات الكروية

أي نقطة في الفضاء يعبر عنها في نظام الاحداثيات الكروية باستخدام الثلاثي $n(p, \theta, \phi)$ حيث ترمز p لبعـد النقطة n عن نقطة الأصل O وترمز θ لقياس الزاوية كما في الاحداثيات الاسطوانية وأما ϕ فترمز لقياس الزاوية on و oz في إتجاه عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل (14) ولتعيين أي نقطة في الفضاء (p, θ, ϕ) نتبع الخطوات التالية :

- 1- ارسم خطاً من نقطة الأصل O بحيث يحصر بينه وبين محور x زاوية موجبة مقدارها θ (عكس عقارب الساعة) .
 - 2- ارسم خطاً في المستوى zom من النقطة o بحيث يحصر بينه وبين محور z زاوية مقدارها ϕ (عكس عقارب الساعة)
 - 3- على الخط الأخير عين نقطة تبعد بمقدار p عن نقطة الأصل . سمّ هذه النقطة n وتكون $n(p, \theta, \phi)$, النقطة المطلوبة .
- لاحظ أنه إذا كانت no هي مسقط النقطة n

الشكل (14)



على المستوى xy فإنها تقع على المستقيم om الواقع فيه. من الشكل يمكن استنتاج أن النقطة no تبعد عن نقطة الأصل بمقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ وهذا يساوي قيمة r .
وفي الاحداثيات الكروية سنعتبر أن قيمة p تنحصر في الفترة $[0, \infty]$ وأن:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

مثال (15):

عين النقطة $n(4, 60^\circ, 60^\circ)$ في نظام الاحداثيات الكروية .

الحل:

$$n(p, \theta, \phi) = n(4, 60^\circ, 60^\circ)$$

إذن :

$$p = 4, \theta = 60^\circ, \phi = 60^\circ$$

1. ارسم خطأً من نقطة الأصل O بحيث يحصر بينه وبين محور x زاوية موجبة

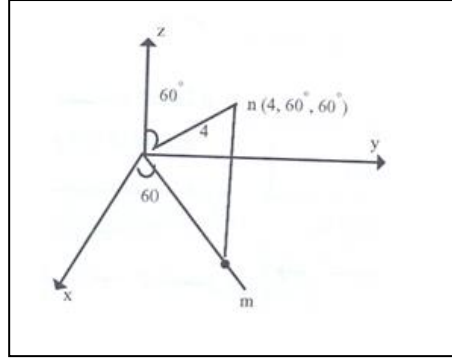
مقدارها 60° (عكس عقارب الساعة).

2. ارسم خطأً في المستوى zom من النقطة O بحيث يحصر بينه وبين محور z

زاوية مقدارها (60°) (مع عقارب الساعة).

3. على الخط الاخير عين نقطة تبعد بمقدار (4) عن نقطة الأصل لتحصل على المقطة ($4, 60^\circ, 60^\circ$) n كما في الشكل (15).

الشكل (15)



تدريب (7)

عين النقطة ($3, 45^\circ, 30^\circ$) m في نظام الاحداثيات الكروية .



8. العلاقة بين الاحداثيات الكروية والاسطوانية

8.1 التحويل من نظام الاحداثيات الاسطوانية إلى نظام

الاحداثيات الكروية .

للتحويل من إحداثيات اسطوانية إلى احداثيات كروية نستخدم العلاقة التالية :

$$P = \sqrt{r^2 + z^2} \quad -1$$

$$\theta = \theta \quad -2$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{r}{z} \quad -3$$

مثال (16):

حول احداثيات النقطة $(2, \frac{\pi}{2}, 2\sqrt{3})$ من احداثيات اسطوانية إلى احداثيات كروية .

الحل :

$$r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}, z = 2\sqrt{3}$$

$$P = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\theta = \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{r}{z} = \tan^{-1} \frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

إن احداثيات النقطة $(2, \frac{\pi}{2}, 2\sqrt{3})$ بالاحداثيات الكروية هي : $(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

8.2 التحويل من احداثيات كروية إلى اسطوانية

للتحويل من نظام الاحداثيات الكروية إلى نظام الاحداثيات الاسطوانية نستخدم

العلاقات التالية:

$$r = p \sin \theta \quad (1)$$

$$\theta = \theta \quad (2)$$

$$z = p \cos \theta \quad (3)$$

مثال (17):

حول احداثيات النقطة $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ من نظام الاحداثيات الكروية إلى نظام الاحداثيات

الاسطوانية .

الحل :

$$p = 2, \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$r = p \sin \phi = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = p \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

إذن النقطة في الاحداثيات الاسطوانية هي: $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{2})$

أسئلة تقويم ذاتي



1- عين النقطة $w (5, 80^\circ, 40^\circ)$ باستخدام الاحداثيات الكروية .

2- حول النقاط من النظام الكروي إلى النظام الاسطواني .

(a) $(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

(b) $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$

3- حول النقاط التالية من النظام الاسطواني إلى النظام الكروي .

(c) $(\sqrt{2}, -45^\circ, 1)$

(d) $(4, \sqrt{10}, 108.4^\circ, 3)$

الخلاصة

عزيز الدارس، مع نهاية هذه الوحدة ، وهذا المقرر ، دعنا نستعرض أهم ما ورد في هذه الوحدة الأخيرة من نقاط .

(1) تدوير المحاور حيث

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

θ زاوية الدوران .

(2) تمييز القطوع المخروطية من المعادلة العامة ودرسنا نظرية حول ذلك نقول :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ : إذا كانت المعادلة التربيعية}$$

فإن المعادلة تمثل :

* قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين إذا كانت $Ac < 0$

* قطعاً ناقصاً أو نقطة أو مجموعة إذا كانت $A \neq 0, AC > 0, A \neq C$

* دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية إذا كانت $(A \neq 0, A = C)$

* قطع مكافئ أو خطين متوازيين أو خطاً واحداً أو مجموعة خالية إذا كانت $AC = 0$ ولم يكن كل من A, C صفراً في آن واحد .

(3) حذف الحد xy باستخدام تدوير المحاور من المعادلة التربيعية وذلك لتبسيطها وتصنيفها.

(4) عرفنا الفضاء الثلاثي وكيف نعين نقطة على الصورة (a, b, c) في الفضاء الديكارتي.

(5) عرفنا الاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) وكانت العلاقة بين الاحداثيات الاسطوانية والكارتيزية هي :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

(6) عرفنا الاحداثيات الكروية (p, θ, ϕ) وكانت العلاقة بين الاحداثيات الكروية والاسطوانية هي:

$$r = p \sin \phi, \theta = \theta, z = p \cos \phi, p = \sqrt{r^2 + z^2}, \phi = \tan^{-1} \frac{r}{z}$$

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$(A) \quad \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2} - 1 \right)$$

$$(B) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

تدريب (2)

لاحظ أن : $A = 16, C = -1, D = -32, E = -6, F = -57$

وأن : $AC = -16 < 0$ ، ولهذا فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين ومن أجل

أو ننفي أنها تمثل خطين متقاطعين يجب أن نكمل المربعات ونكتب المعادلة على الصورة

$$r^2 (x-h)^2 + m^2 (y-k)^2 = L$$

حيث $L \neq 0, m, r$ أعداد حقيقية. ونترك لك التأكد منه وتستننتج أن المعادلة تمثل قطعاً زائداً .

تدريب (3)

لاحظ أن : $A = 0, B = 1, C = 0, E = 0, F = -1$

وبما أن $A = C = 0$ نأخذ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ومن علاقة تدوير المحاور نجد أن :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y')$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y')$$

وتصبح صورة المعادلة $xy = 1$ هي :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y') = 1$$

أي أن :

$$x^2 - y^2 = 2$$

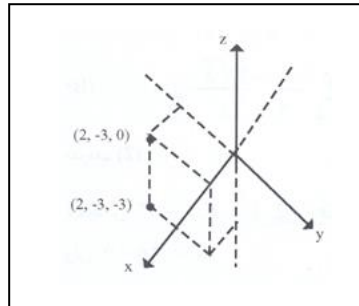
وهذه معادلة قطع ناقص.

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

أي :

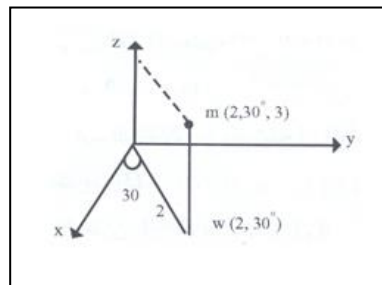
تدريب (4)

انظر الرسم المجاور



تدريب (5)

انظر الرسم المجاور



تدريب (6)

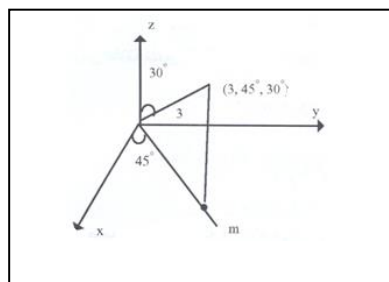
$$x = r \cos \theta = (1) \cos \frac{\pi}{2} = (1)(0) = 0$$

$$y = r \sin \theta = (1) \sin \frac{\pi}{2} = (1)(1) = 1$$

$$z = 2$$

إذن النقطة (0 , 1 , 2)

تدريب (7)



مسرد المصطلحات

* دوران المحاور Rotation of Axes

هو تحويل هندسي للمحاور للحصول على نظام جديد $x' y'$ من النظام القديم xy عن طريق دوران المحاور حول نقطة الاصل بزاوية قياسها q ضد عقارب الساعة وتكون:

$$x' = x \cos q + y \sin q$$

$$y' = -x \sin q + y \cos q$$

* نظام الاحداثيات الديكارتية (الكارتيزية) Cartesion Coordinates

نظام احداثي للتمثيل في الفضاء تستخدم فيه الاحداثيات (x, y, z) التي تقاس على المحاور الاحداثية x, y, z المتعامدة متى متى ويستخدم النظام للتعبير عن النقط وتمثيل المعادلات في الفضاء.

* نظام الاحداثيات الاسطوانية Cylindrical Coordinates

نظام احداثي للتمثيل في الفضاء تستخدم فيه الاحداثيات (r, q, z) للتعبير عن النقط وتمثيل المعادلات في الفضاء.

* نظام الاحداثيات الكروية Spherical Coordinates

نظام احداثي للتمثيل في الفضاء تستخدم فيه الاحداثيات (p, q, f) للتعبير عن النقط وتمثيل المعادلات في الفضاء.

المراجع العربية والاجنبية

المراجع العربية

- 1- عوض عدنان؛ وعزام ، مفيد؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، أحمد، الهندسة الإحداثية. عمان: جامعة المستقبل المفتوحة، ط2، 2003 .
- 2- نصير ، عبدالمجيد ؛ والناشف ، بسام ، الحسبان : التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية . عمان: دار البشير، 1989 .
- 3- سمور ، خالد ، الرياضيات والهندسة التحليلية . عمان : دار الفكر ، ط1 ، 1999 .

المراجع الاجنبية

- **Silverman R.A , Calculus with Analytic Geometry .** New Jersey : Prentice – Hall , 1985.
- Swokowski , E.W . ,**Calculus with Analytic Geometry.** Prindle ,Weberand Schmidt ,3 rded 1984 .
- Salas S.I. ,**Calculus ; one and Several Varaiaables.** Wiley , 1980 .