الوحدة الرابعة

القطع الزائد

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
اهداف الوحدة	
1. تعريف القطع الزائد وعناصره	
2. المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل	
3. إيجاد عناصر القطع الزائد	
4. إشتقاق المعادلات بصورة عامة	
5. إيجاد العناصر من المعادلة العامة	
6.معادلة المماس والعمودي على المماس	
الخلاصة	
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	
إجابات التدريبات	
إجابات اسئلة التقويم الذاتي	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

مقدمة

تمهيد

نقدم إليك عزيزي الدارس الوحدة الرابعة من مقرر 161 رياضيات (1) الهندسة التحليلة وهي بعنوان " القطع الزائد ".

إن القطع الزائد هو أحد القطوع المخروطية والتي تنتج من خلال قطع مخروط بسطح مستو ، وكغيره من القطوع فهو ذو اهمية كبيرة في علم الرياضيات ويرتبط ايضاً بعلوم أخرى كعلم الفيزياء والفلك وغيرها من العلوم.

وسف نتعرف في هذه الوحدة على تعريف القطع الزائد وعناصره مثل البؤرتين والرأسين ومحاور التماثل ومعادلة القطع الزائد بالصورة القياسية والصورة العامة ومعادلة المماس للقطع الزائد ومعادلة العمودي على المماس والرسم البياني لمنحنى القطع والاختلاف المركزي.

اهلاً بك مرة اخرى في هذه الوحدة ، نرجو أن تستمع بدراستها أن تساهم في تقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن

1. **تعرف** القطع الزائد .
2. **تشتق** معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .
3. **تشتق** معادلة القطع الزائد الذي مكزه M(h, k) .
4. **تجد** خصائص القطع الزائد
5. **تعرف** الاختلاف المركزي للقطع الزائد .
6. **تؤسم** منحنى القطع الزائد .
7. **تجد** معادلة المماس عند نقطة للقطع الزائد .
8. **تجد** معادلة العمودي على المماس عند نقطة للقطع الزائد .
9. **تشرح** مفهوم المحل الهندسي للقطع الزائد .

1. تعريف القطع الزائد وعناصره

سنتعرف في هذه الوحدة على نوع اخر من القطوع المخروطية وهو القطع الزائد.
حيث سنتناول في هذا البند تعريف وعناصر القطع الزائد .

لتكن F1 (-5, 0) , F2 (5, 0) نقطتين في المستوى الديكارتي نعينهما في المستوى ولنأخذ النقاط التالية :

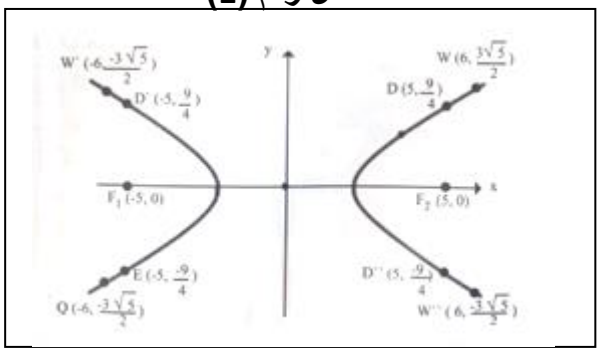
$$D\left(5,\frac{9}{4}\right), W\left(6,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right), D'\left(-5,\frac{9}{4}\right), W'\left(-6,\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)\right)$$

$$D''\left(5,\frac{-9}{4}\right), W''\left(6,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right), E\left(-5,\frac{-5}{4}\right)$$

$$Q\left(-6,\frac{-\sqrt[3]{5}}{2}\right)$$

ثم نعين هذه النقطة في المستوى الاحداثي ونصل بينهما بخط منحن ممهد متصل فنحصل على المنحنى الموضح في الشكل (1) .

الشكل رقم (1)



وبحساب الفرق المطلق لبعدي النقطة $D(5,\frac{9}{4})$ عن النقطتين F_1,F_2 نجد أن:

$$|D\,F_1 - DF_2| = \left|\sqrt{(5+5)^2+(\frac{9}{4})^2} - \sqrt{(\frac{9}{4})^2}\right| = 8$$

ونلاحظ أيضاً أن الفرق المطلق لبعدي النقطة $W\left(6,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$ عن النقطتين F_1,F_2 يساوي:

$$\left|\sqrt{(6+5)^2+(\frac{\sqrt[3]{5}}{2})}\sqrt{(6-5)^2+(\frac{3\sqrt{5^2}}{2})}\right|$$

$$= \left|\sqrt{\frac{529}{4}} - \sqrt{\frac{49}{4}}\right|$$

$$= \left|\frac{23}{3} - \frac{7}{2}\right| = \left|\frac{16}{2}\right| = 8$$

ويكون هذا صحيحاً لبقية النقط الواقعة على المنحنى كما في الشكل (1) .

وبشكل عام: لتكن F_1 , F_2 نقطتين في المستوى الديكارتي ، تامسافة بينهما 2c وليكن 2a عدداً حقيقياً موجباً حيث 2c >2a وإذا كانت N (x, y) أي نقطة في المستوى الديكارتي تتحرك بحيث إن الفؤق المطلق بين بعديهما عن النقطتين F_1 ,F_2 يكون دائماً ، مساوياً للعدد الثابت 2a ، فإنها ترسم منحنياً هو المحل الهندسي لها ، يسمى قطعاً زائداً وبناءً عليه فإن:

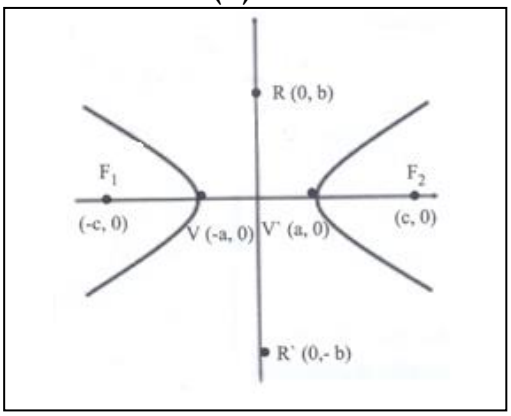
تعريف (1)

القطع الزائد هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية N(x, y) والتي تتحرك بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي N(x, y) عن نقطتين ثابتين F_1,F_2 (تسميان البؤرتين) يساوي مقدار ثابت.

*** عناصر القطع الزائد:**

بالنظر إلى الشكل (2) نلاحظ الخصائص التالية للقطع الزائد وهي:

الشكل (2)



(1) للقطع الزائد محوران للتماثل هما:

a) المستقيم المار بالبؤرتين F_1,F_2 والمركز O يسمى المحور البؤري أو المحور القاطع.

b) المستقيم العمودي على المحور القاطع والمار بالمركز O ويسمى المحور المرافق.

(2) مركز القطع الزائد هو النقطة O.

(3) رأسا القطع الزائد هما النقطتان v, v'.

(4) يسمى البعد بين البؤرتين (F_1 F_2) البعد البؤري ويساوي 2c.

(5) نصف البعد البؤري هو المسافة بين البؤرة والمركز ويساوي c.

(6) البعد بين الرأسين (v v') = طول المحور القاطع ويساوي 2a .

(7) طول القطعة المستقيمة (R R') = طول المحور المرافق ويساوي 2b.

تعريف (2):

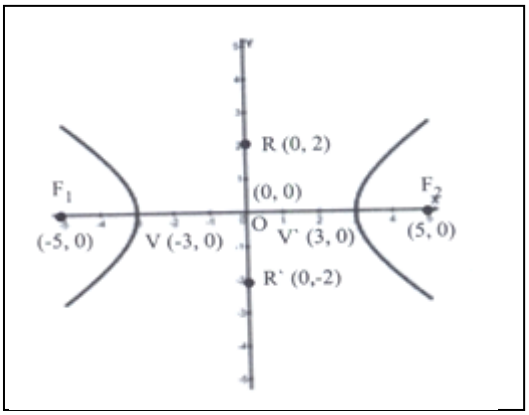
الاختلاف المركزي للقطع الزائد هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع ويرمز له بالرمز e $e = \frac{c}{a}$

وبما أن c > a إذن $\frac{c}{a}$ 1 أي الاختلاف المركزي في القطع الزائد اطبر من واحد صحيح .

مثال (1):

أوجد العناصر الأساية للقطع الزائد في الشكل (3)

الشكل (3)



الحل:

(1) طول المحور القاطع (v v'): vv' =2a = 2x3 = 6

(2) طول المحور المرافق (R R') : R R'= 2b = 2x2 = 4

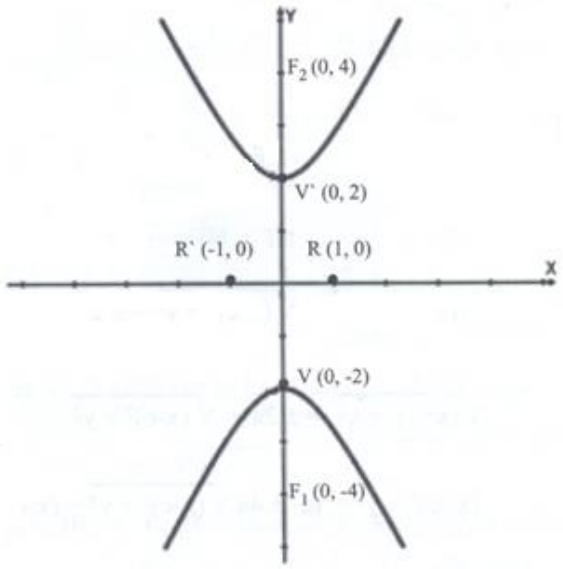
(3) البعد البؤري $(F_1\ F_2)$: $F1\ F2 = 2c = 2x5 = 10$

(4) الاختلاف المركزي (e): $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

تدريب (1)

أوجد طول المحور القاطع و المرافق والبعد البؤري والاختلاف المركزي للقطع المرسوم في الشكل (4):

الشكل (4)



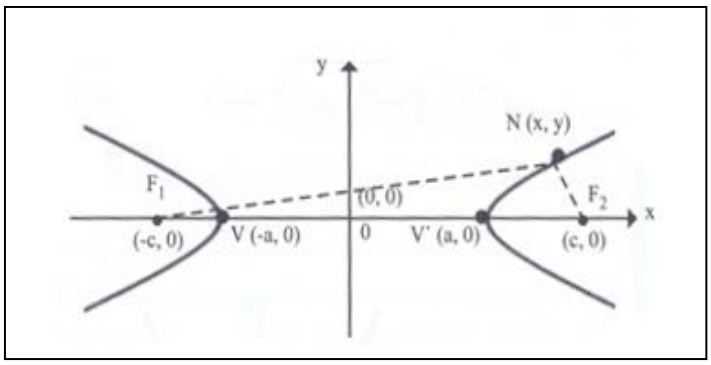
2. المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل

في هذا البند سوف نشتق المعادلةالقياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور x أو محور y.

أولاً: القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محوره x.

لنأخذ القطع الزائد في الشكل (5).

الشكل (5)



ونطبق تعريف القطع الزائد:

أي أن: $|NF_1 - NF_2| = 2a$

$NF_1 - NF_2 = \pm 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

أو: $$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2} + (x-c)^2 + y^2$$

وبفك الأقواس والاختصار:

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

وبتبسيط المعادلة :

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

وبتربيع الطرفين :

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2\,cx + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 - 2a^2\,cx + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 = a^4 - 2a^2\,cx + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 = a^4 + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 - c^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^4 - a^2\,c^2$$

$$x^2\,(a^2 - c^2) + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (a2 – c2) نجد:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

وبما أن a < c من تعريف القطع الزائد وان كلاً من العددين a وc موجب فإن المتباينة a < c لا تتغير بتربيع طرفيها أي أن a2 < c2 أي a2 – c2 < 0 .

وإذا عرفنا المقدارالثابت b بالشكل –b = a2 – c2

فإننا نستطيع كتابة المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

بالصورة :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

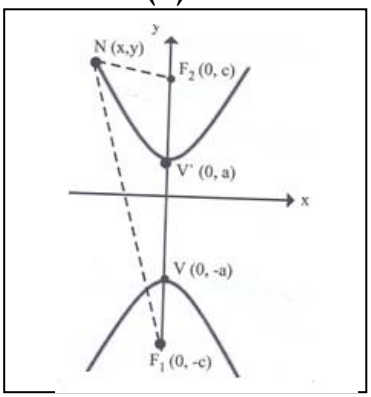
حيث a , b عددان حقيقيان موجبان .

ويطلق على العلاقة (1) الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور x حيث أن :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ثانياً: وإذا كانت البؤرتان للقطع الزائد هما F1(0, -c) , F2 (0, c) فيكون المحور القاطع منطبقاً على محور y كما في الشكل (6) .

الشكل (6)



وبالأسلوب السابق نفسه في إيجاد معادلة القطع تحصل على معادلة اخرى قياسية للقطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{....(2)}$$

حيث a , b عددان حقيقيان موجبان ، $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

ويطلق على العلاقة (2) الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور y .

ملاحظات:

(1) a2 دائماً مقام الكسر الأول والمتغير الموجود في البسط الذي مقامه a2 يكون دائماً هو المحور القاطع أو يكون المحور القاطع يوازيه .

(2) من المعادلة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

أي أن :

$x^2 - y^2 = a^2$ .....*

ويسمى القطع الزائد الذي معادلته على صورة المعادلة (*) القطع الزائد متساوي الاضلاع.

(3) قيمة cتعطى دائماً بالعلاقة : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (2):

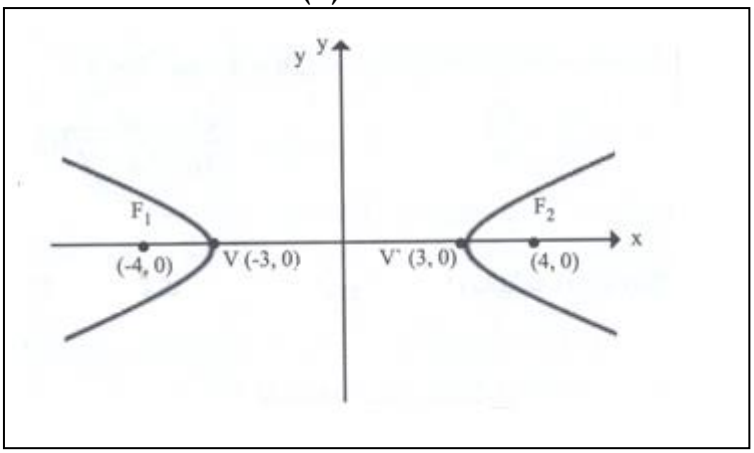
أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (±4 , 0) ويتقاطع مع محور x عند x = ±3

الحل :

بما أن البؤرتين تقعان على محور x ، إذن محوره القاطع ينطبق على محور x ، ومركزه (0,0) انظر الشكل (7) .

لاحظ أن: C = 4 , a =3

الشكل (7)



ومن العلاقة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

$b = \pm\sqrt{7}$

إذن معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وبتعويض قيم a^2 , b^2 نجد أن :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

مثال (3):

أوجد معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع ينطبق على محور x ومركزه نقطة الأصل وطول محوره القاطع (8) والمرافق (4)

الحل:

المعادلة هي : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

طول المحور القاطع : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

طول المحور المرافق : $2b = 4 \Rightarrow b = 4$

إذن المعادلة هي : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

مثال (4):

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر منحناه بالنقطة (2,3) وطول محوره المرافق $(2,\sqrt{3})$ ثم ارسم منحناه.

الحل : (يوجد حلان)

أولاً: نفرض أن محوره القاطع ينطبق على محور x ومعادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

طول المحور المرافق $2b = 2\sqrt{3} \Leftarrow$

$b = \sqrt{3}$

إذن تصبح المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

وبما أن منحناه يمر بالنقطة (2,3) إذن تحقق معادلته :

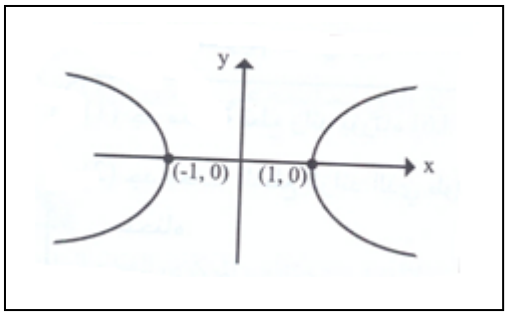
$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{3} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a^2} - 3 = 1$$

$$\frac{4}{a^2} = 4 \Rightarrow \boxed{a^2 = 1}$$

إذن تصبح المعادلة :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

انظر الشكل (8)



ثانياً: نفرض أن محوره القاطع ينطبق على محور x

ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

طول المحور المرافق $2b = 2\sqrt{3} \Leftarrow b = \sqrt{3} \Leftarrow$

إذن تصبح المعادلة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{3} = 1$

وبما أن منحناه يمر بالنقطة (2,3) إذن فهي تحقق معادلته :

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = 1 + \frac{4}{3}$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{7}{3}$$

بالضرب التبادلي: $7\ a^2 = 27$

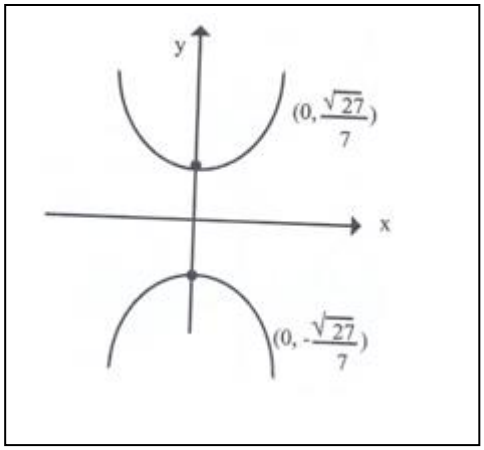
$$a^2 = \frac{27}{7}$$

إذن تصبح المعادلة :

$$\frac{y^2}{\frac{27}{7}} - \frac{x^2}{3} = 1$$

إي أن : $$\frac{7y^2}{27} - \frac{x^2}{3} = 1$$

انظر الشكل (9)



تدريب (2)

جد معادلة قطع زائد بؤرتاه (7±,0) وطول محوره القاطع (8) وحدات .

أسئلة تقويم ذاتي

(1) جد معادلة قطع زائد بؤرتاه (±0,6) ويتقاطع مع محور y عند y = ±4 .

(2) جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه ($\pm\sqrt{8}$, 0) ثم ارسم منحناه .

(3) جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه (2,0) ويمر منحناه بالنقطة (2,3) .

3. إيجاد عناصر القطع الزائد

في هذا البند سوف نتعلم كيف نجد عناصر القطع الزائد الذي معادلته على الصورة (1) أو (2) والامثلة التالية توضح ذلك :

مثال (5):

أوجد بؤرتي ورأسي وطولي المحورين القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

ثم ارسم المنحنى البياني له

الحل:

احداثيات المركز (0,0)

الأول = $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

وبما ان البسط الذي مقامه a2 يحتوي على المتغير x ورأس القطع هو نقطة الأصل اذن المحور القاطع ينطبق على محور x إذن احداثيات الرأسين (0, ±2)

طول المحور القاطع $\Leftarrow 2a = 2x\ 2 = 4$

ومعادلته $y = 0$

الثاني = $b2 = 1 \Rightarrow b = 1$

ولكن : $\Leftarrow \sqrt{5} = c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$

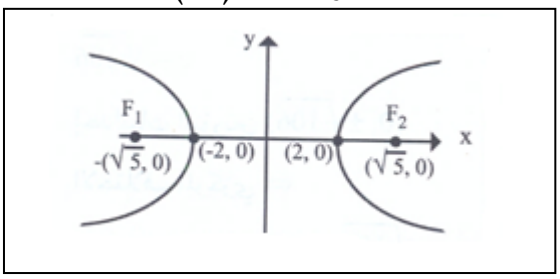
إذن احداثيات البؤرتين $(\pm\sqrt{5}, 0)$

طول المحور المرافق $\Leftarrow 2b = 2x1 = 2$

ومعادلته $x = 0$

الاختلاف المركزي $\Leftarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

انظر الشكل (10)



مثال (6):

أوجد بؤرتي ورأسي وطولي المحورين القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد .

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{25} = 1$$

الحل:

احداثيات المركز (0,0)

الأول = $a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

وبما أن بسط a2 يحتوي على المتغير y إذن المحور القاطع ينطبق على محور y .

إذن احداثيات الرأسين $(0,\pm9)$

وطول المحور القاطع $\Leftarrow 2a = 2 \times 9 = 18$

ومعادلته $x = 0$

الثاني = $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

طول المحور المرافق $\Leftarrow$ $2b = 2 \times 5 = 10$

ومعادلته $y = 0$

لكن : $c^2 = a^2 + b^2 = 81 + 25 = 106$

$c = \sqrt{106}$

إحداثيات البؤرتين $(0, \pm\sqrt{106})$

الاختلاف المركزي $\Leftarrow$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{106}}{9} > 1$$

مثال (7):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الزائد:

$4x^2 - 16y^2 = 64$

نكتب المعادلة بالصورة القياسية:

نقسم جميع الحدود على 64 فنحصل على :

$$\frac{x^2}{\frac{64}{4}} - \frac{y^2}{\frac{64}{16}} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

احداثيات الرأس $(0,0)$

$a = 4 \Rightarrow a2 = 16$ = الأول

وبما أن بسط a2 يحتوي على المتغير x إذن المحور القاطع ينطبق على محور x إذن الرأسان $(\pm 4, 0)$

طول المحور القاطع : $2a = 2\ (4) = 8$

ومعادلته $y = 0$

$b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$ =

طول المحور المرافق$2b = 2\ (2) = 4$

ومعادلته : $x = 0$

ولكن : $c2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$

$c = \sqrt{20}$

إذن احداثيات البؤرتين $(\pm\sqrt{20}, 0)$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{4} > 1$$

تدريب (3)

اكتب المعادلة التالية بالصورة القياسية:

$2x^2 - 4y^2 = 8$

أسئلة تقويم ذاتي

1- جد احداثيات المركز والرأسين والبؤرتين ومعادلة كل من المحورين القاطع والمرافق وطولهما للقطع الزائد :

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$$

2- جد إحداثيات المركز والرأسين والبؤرتين ومعادلة كل من المحورين القاطع والمرافق وطولهما للقطع الزائد:

$16\,x2 - 9\,y2 = 144$

3- احسب طول المحور القاطع للقطع الزائد:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$$

4- إذا كانت : $9\,x2 - 25\,y2 + 225 = 0$ تمثل معادلة قطع زائد وكانت N (x, y) نقطة واقعة عليه فجد الفرق المطلق بين بعدي النقطة N عن بؤرتي هذا القطع .

4. إشتقاق المعادلات بصورة عامة

في هذا البند سوف نشتق معادلات عامة للقطع الزائد الذي مركزه M(h, k) ومحوره القاطع يوازي محور x او يوازي محور y.

أولاً: إذا كان محوره القاطع يوازي محور x .

وفي هذه الحالة نجري إنسحاب للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور x وستكون معادلته كما نعرف بالنسبة للمحاور ' y ' x الجديدة هي:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ldots (*)$$

ومن علاقة الانسحاب:

$$x' = x - m$$
$$y' = y - n$$

نطبق هذه العلاقة على المحاور الجديدة ' y ' x والتي مركزها M (h, k) فينتج أن :

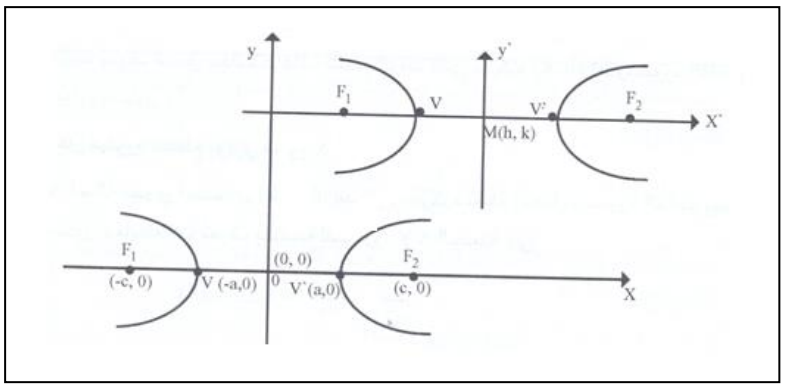
$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

نعوض قيم ' x , ' y في المعادلة (*) فينتج أن :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots (1)$$

وتسمى العلاقة (1) معادلة قطع زائد مركزه M (h, k) ومحوره القاطع يوازي محور x (انظر الشكل (11)) .

الشكل (11)



ملاحظات:

من خلال الشكل (11) نستطيع كتابة الملاحظات التالية :

1- المحور القاطع يوازي محور x وطوله 2a ومعادلته y = k.

2- المحور المرافق يوازي محور y ومعادلته x = h .

3- احداثيات البؤرتين: $F_2 (c + h, k)$ $F_1(-c + h, k)$

4- احداثيات الرأسين: $V(-a + h ,k)$, $V'(a + h, k)$

ثانياً: إذا كان محوره القاطع يوازي محور y

وفي هذه الحالة نجري انسحاب للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور y ، وستكون معادلته كما نعرف بالنسبة للمحاور ' y ' x الجديدة هي:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1 \quad \text{.....(**)}$$

وبالتعويض بقيم $x' = x - h$

$y' = y - k$

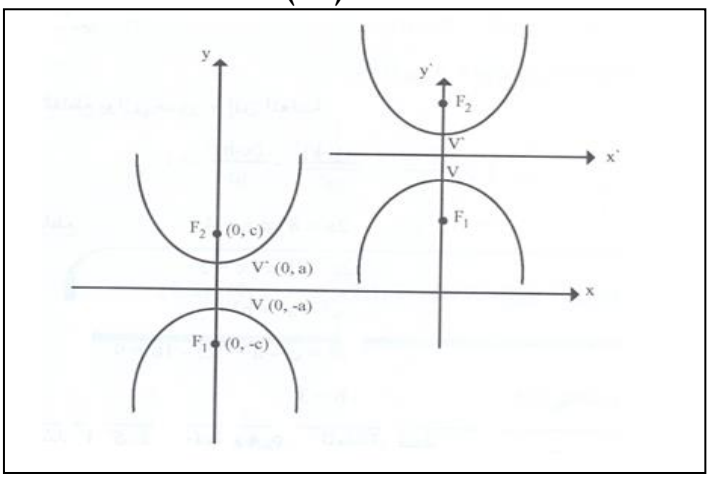
في المعادلة (**) نحصل على :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{.....(2)'}$$

تسمى العلاقة '(2) معادلة ....

M (h , k) ومحوره يوازي محور y انظر الشكل (12) .

الشكل (12)



ملاحظات :

وبالنظر الى الشكل (12) نستطيع كتابة الملاحظات التالية :

1) المحور القاطع يوازي محور y وطوله 2a ومعادلته x =h .

2) المحور المرافق يوازي محور x وطوله 2b ومعادلته y = k .

3) احداثيات البؤرتين : $F_1 (h , -c +k)$

$F_2(h, c +k)$

4) احداثيات الرأسين :

$V(h , -a + k)$

$V'(h , a+ k)$

مثال (8):

أوجد معادلة قطع زائد محوره القاطع مواز لمحور y ومركزه النقطة (1, 2−) وطول محوره القاطع (8) والبعد البؤري له يساوي (10) .

الحل:

بما أن المحور القاطع يوازي محور y غذن المعادلة :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

طول المحور القاطع : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

البعد البؤري: $2c = 10 \Rightarrow c = 5$

ومن العلاقة: $c2 = a2 + b2$

$B2 = c2 - a2 = 25 - 16 = 9$

$b = 3$

وبتعويض احداثيات المركز (1 , 2−) وقيم a, b في المعادلة نجد أن :

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

مثال (9):

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (4− ,7) وطول محوره القاطع (8)

الحل :

بما أن البؤرة والمركز على مستقيم يوازي محور x ومركزه (4− , 2) إذن المعادلة :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

طول المحور القاطع : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$C = 7 - 2 = 5$

$b2 = c2 - a2$

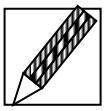
$= 25 - 16 = 9$

وبتعويض احداثيات المركز وقيم a , b في المعادلة :

نجد أن :

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

تدريب (4)



أوجد معادلة قطع زائد بؤرتاه (2, 5) , (2, 1-) ورأساه (2, 0) , (2, 4)

أسئلة تقويم ذاتي

1- جد معادلة قطع زائد مركزه (3, 2) وإحدى بؤرتيه (3 , 8) والبعد بين رأسيه بمقدار (6) عن البعد بين بؤريته .

2- جد معادلة قطع زائد بؤرتاه (1,0) , (1, 6) ورأساه (1, 1) , (1, 5)

3- جد معادلة قطع زائد إحدى بؤرتيه (4, 3) ومركزه (4-, 3) وطول محوره القاطع (10).

5. إيجاد العناصر من المعادلة العامة

في هذا البند سوف نجد عناصر القطع الزائد والذي معادلته معطاه بالصورة العامة والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال (10):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

ثم ارسم منحناه .

الحل:

إحداثيات المركز M(-1,1)

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ = الأول

وبما أن بسط a2 يحتوي على المتغير x إذن المحور القاطع يوازي محور x احداثيات الرأسين V(-3,1) = V (-2 + (-1) , 1) = V (-a + h, k)

V' (a +h, k) = V (2+(-1), 1) = V(1,1)

طول المحور القاطع : $2a = 2 \times 2 = 4$

ومعادلته : $Y = k \Rightarrow y = 1$

الثاني = b2 = 2 $\Rightarrow$ b = $\sqrt{2}$

ومن العلاقة : $c^2 = a^2 + b^2$

$= 4 + 2 = 6$

$c = \sqrt{6}$

إذن احداثيات البؤرتين :

$F_1 (-c + h, k) = F_1 (-\sqrt{6} + (-1), 1) = F_1 (-\sqrt{6} - 1, 1)$

$F_2 (c + h, k) = F_2 (\sqrt{6} + (-1), 1) = F_2 (\sqrt{6} - 1, 1)$

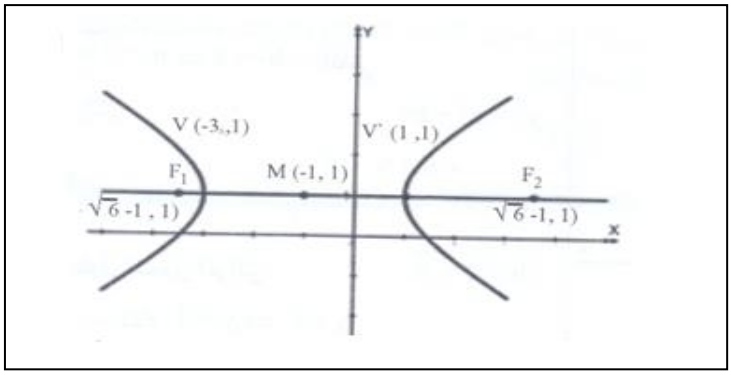
طول المحور المرافق: $2b = 2 x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

معادلته : $x = h \Rightarrow x = -1$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ورسمة المنحنى كما في الشكل (13)

الشكل (13)



مثال (11):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(y-1)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1$$

ثم ارسم منحناه:

الحل:

احداثيات المركز $M(h , k) = M (2, 1)$

الاول $= a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8}$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير y إذن المحولر القاطع يوازي محور y.

طول المحور القاطع : $2a = 2\sqrt{8}$

ومعادلته : $x = h \Rightarrow x = 2$

احداثيات الرأسين :

$$V (h,-a +k) = (2, -\sqrt{8} +1)$$
$$V' (h, a + k) = (2,\sqrt{8} +1)$$

الثاني $= b^2 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8}$

ولكن : $c^2 = a^2 + b^2$

$$= 8 + 8 = 16$$
$$C = 4$$

طول المحور المرافق : $2b = 2\sqrt{8}$

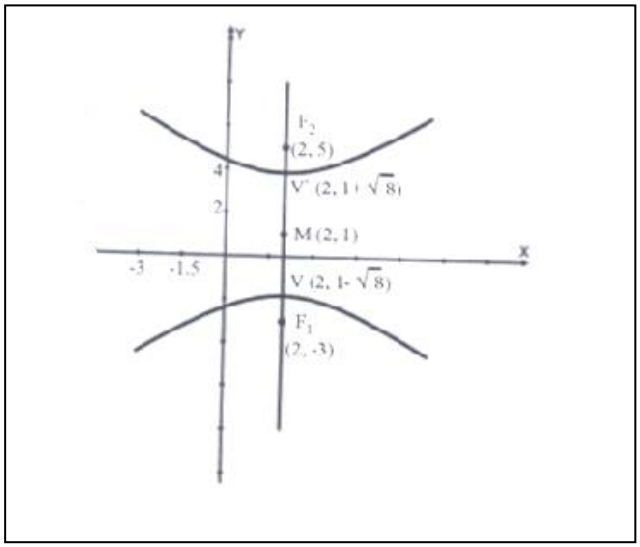
ومعادلته : $y = 1 \Rightarrow y = k$

احداثيات البؤرتين :

$$F_1 (h, -c +k) = (2, -4 +1) = (2,-3)$$
$$F_2 (h, c+ k) = (2, 4+1) = (2,5)$$

ومنحنى القطع كما في الشكل (14).

الشكل (14)



تدريب (5)

عين نوع المنحنى الممثل بالمعادلة : 9 x2 – 16 y2 – 36 y = 124

ثم اوجد عناصره الأساسية ، ثم ارسم منحناه

أسئلة تقويم ذاتي

1- اوجد المركز واحداثيات الرأسين والبؤرتين وطول المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(x-2)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

2- أوجد احداثيات البؤرتين والرأسين والمركز وطول المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(y-5)^2}{81} - \frac{(x+4)^2}{64} = 1$$

6. معادلة المماس والعمودي على المماس

في هذا البند سوف نتعرف على معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1,y_1) .

وإن معادلة هذا المماس تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

وميل هذا المماس يعطى بالعلاقة التالية :

$$m_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

حيث m1: ميل المماس :

وميل العمودي على المماس عند النقطة (x_1 ,y_1) = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$

أي :

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

حيث m2 ميل العمودي على المماس .

مثال (12):

أوجد معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد : $x^2 - 9y^2 = 9$ عند النقطة $(5,\frac{4}{3})$

الحل:

النقطة $(5,\frac{4}{3})$ تقع على منحنى القطع لأنها تحقق معادلته .

نقسم جميع الاطراف على (9)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$$

ومعادلة المماس هي :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

وبالتعريف بقيمة (x_1 , y_1) وقيم b , a نجد :

$$\frac{5x}{9} - \frac{\frac{4}{3}y}{1} = 1$$

$$\frac{4}{3}y = \frac{5}{9}x - 1$$

$$y = \frac{5}{12}x - \frac{3}{4}$$

ميل المماس:

$$m_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

إذن العمودي:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{\frac{-1}{5}}{12} = \frac{-12}{5}$$

إذن معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_2 (x - x_1)$$

$$y - \frac{4}{3} = \frac{-12}{5} - (x - 5)$$

$$y - \frac{4}{3} = \frac{-12}{5} - x + 5$$

$$y = \frac{-12}{5}\ x + 12 + \frac{4}{3}$$

أسئلة تقويم ذاتي

إذا كانت $x2 - 4\ y2 = 16$

تمثل معادلة قطع زائد أوجد .

1) ميل المماس لمنحنى القطع الزائد عند النقطة $(\sqrt{32},2)$.
2) أوجد معادلة المماس لمنحنى القطع الزائد عند النقطة $(\sqrt{32},2)$.
3) أوجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(\sqrt{32},2)$.

الخلاصة

عزيزي الدارس، مع نهاية هذه الوحدة دعنا نستعرض معاً أهم النقاط التي وردت فيها:

1) تعريف القطع الزائد : وهو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية N (x ,y) بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي N(x ,y) عن نقطتين ثابتين F_2 , F_1 يساوي مقداراً ثابتاً .

2) الاختلاف المركزي : وهو بالنسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع ويرمز له بالرمز e حيث $e = \frac{c}{a}$

3) المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وهي :

A) محورهالقاطع ينطبق على محور x ومعادلته : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

B) محوره القاطع ينطبق على محور y ومعادلته : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

4) المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h , k) وهما :

A) محوره القاطع الذي يوازي محور xومعادلته : $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

B) محوره القاطع يوازي محور yومعادلته :$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

5) إيجاد عناصر القطع وهي احادثيات المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي ورسم منحنى القطع .

6- إيجاد معادلة المماس لمنحنى القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1 , y_1) وهي :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

7) إيجاد معادلة العمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد عند نفس النقطة (x_1,y_1) وهي : $y - y_1 = m_2 (x - x_1)$

حيث m2 ميل العمودي وتساوي $\frac{-1}{m_1}$، جيث m1 ميل المماس

وتعطى بالعلاقة : $m_1 = \frac{b_1 x_1}{a^2 y_2}$

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، نستعرض في الوحدة الاخيرة تعميماً للوحدات الاربعة الأول، حيث نتناول المعادلة العامة من الدرجة الثانية" وكيف نحدد أي قطع تمثل تلك المعدلة، وكيفية رسمها في الفضاء الثلاثي ضمن المحاور الديكاريتة او الكروية. إنها وحدة ممتعة بحق، أرجو أن تجدها سهلة ومشوقة .

إجابات التدريبات

تدريب (1)

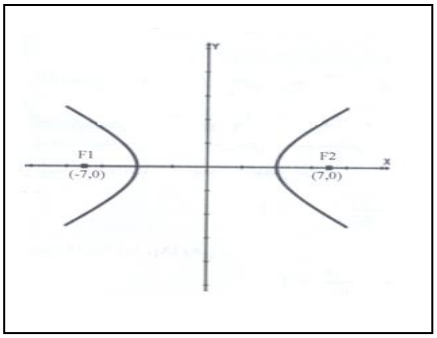
طول المحور القاطع : 2a = 2 (2) = 4

طول المحور المرافق : 2b = 2 (1) = 2

البعد البؤري : 2c = 2 (4) = 8

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

تدريب (2) انظر الشكل



نلاحظ أن c = 7

طول المحور القاطع =8 اي $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

لكن $c^2 = a^2 + b^2$

$b2 = c2 - a2 = 49 - 16 = 33 \Rightarrow b = \sqrt{33}$

المعادلة :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$$

تدريب (3)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

تدريب (4)

احداثيات المركز = $(2,2) = (\frac{4+0}{2}, \frac{2+2}{2})$

$a = 4 - 2 = 2$

$c = 5 - 2 = 3$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

إذن المعادلة هي :

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

تدريب (5)

$9\,x^2 - 36x - 16\,y^2 + 32\,y = 124$

$9\,(x^2 - 4x) - 16\,(y^2 - 2y) = 124$

$9\,(x^2 - 4x + 4) - 16\,(y^2 - 2y + 1) = 124 + 36 - 16$

$9\,(x-2)^2 - 16\,(y-1)^2 = 144$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

معادلة قطع زائد مركزه (2,1)

الأول = $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير x ، إذن المحور القاطع يوازي محور x ،

طول المحور القاطع $\Leftarrow 2a = 2\,(4) = 8$

ومعادلته : $y = 1$

الثاني = $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

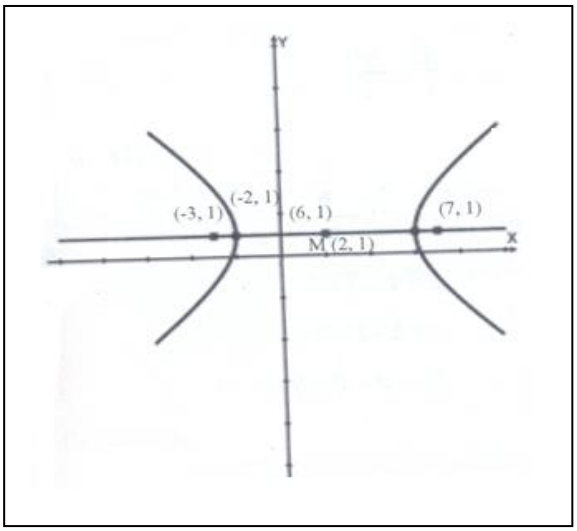
$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow$ **c = 5**

ومعادلته : $x = 2$

احداثيات الرأسين : (6 , 1), (−2, 1)

احداثيات البؤرتين :(1 , 3−) (1 , 7)

منحناه كما في الشكل:



مسرد المصطلحات

*** قطع زائد Hyperbola**

هو المحل الهندسي للنقطة N(x ,y) المتحركة في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق لبعديهما عن نقطتين ثابتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً .

*** الاختلاف المركزي Eccentricity**

وهي نسبة تحدد نوع القطع المخروطي و كما يلي :

e = 1 للقطع المكافئ ، e >1 للقطع الزائد ، 1 > e > 0 للناقص

*** إنسحاب المحاور Translation pf Axes**

هو تحويل هندسي للمحاور للحصول على نظام جديد x’ y’ من النظام القديم x y بحيث تكون x’=x – m

y’ = y – n ، حيث (m , n) احداثيات مركز النظام x’ y’ عن انساحاب النظام x y .

المراجع العربيّة والاجنبيّة

المراجع العربية:

1- عوض عدنان؛ وعزام، مفيد ؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، أحمد ، الهندسة الاحداثية، عمان: جامعة القدس المفتوحة، ط 2 ، 2003 .

2- نصير، عبدالمجيد؛ والناشف، بسام، الحسبان: التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، عمان: دار البشير 1989م.

3- سمور، خالد الرياضيات والهندسة التحليلية، عمان: دار الفكر ، ط 1، 1999م.

المراجع الاجنبية:

- Silverman R. A, Calculus with Analytic Geometry , New Jersey: Prentice – Hall,1985. – Stokowski , E. W , Calculus with Analytic Geometry Prindle , Weberand Schmidt, rded . 1984.

- Salas S. I , Calculus; one and Several Variables . Wiley , 1980.