
الوحدة الثالثة
القطع الناقص

محتويات الوحدة

الموضـــوع	رقم الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
أهداف الوحدة	
1. تعريف القطع الناقص	
2. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل	
3. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$	
4. إيجاد عناصر القطع الناقص	
5. معادلة المماس والعمودي على المماس	
الخلاصة	
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	
إجابات التدريبات	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

المقدمة

تمهيد

نقدم إليك عزيزي الدارس الوحدة الثالثة من مقرر 161 رياضيات 1 الهندسة التحليلية، وهي بعنوان "القطع الناقص".

أن القطع الناقص هو أحد القطوع المخروطية والتي تنتج من خلال قطع مخروطي بسطح مستوٍ، وكغيره من القطوع فهو ذو أهمية كبيرة في علم الرياضيات، وارتبط ايضاً بعلوم أخرى كعلم الفيزياء وعلم الهندسة وغيرها من العلوم.

سوف نتعرف في هذه الوحدة على تعريف القطع الناقص والمحور والبؤرتين والمعادلة النمطية ومعادلة المماس وشروطها والعلاقة بين بعدي نقطتين والحالات الخاصة والعامة للقطع الناقص.

نرحب بك مرة أخرى في هذه الوحدة، نرجو أن تستفيد منها، وأن تساهم في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1- **تعرّف** القطع الناقص.

2- **تشتق** معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق عل محور x أو محور y.

3- **تجد** العناصر الأساسية للقطع الناقص.

4- **تشتق** معادلة قطع ناقص محوره يوازي المحورين الاحداثيين.

5- **تعرّف** الاختلاف المركزي.

6- **تجد** معادلة المماس عند نقطة.

1. تعريف القطع الناقص

تعرفت عزيزي الدارس، في الوحدة الثانية أحد أنواع القطوع المخروطية وهو القطع المكافئ، وسوف تتعرف في هذه الوحدة نوعاً آخر من القطوع المخروطية وهو القطع الناقص، وفي هذا البند سوف نتناول تعريفه وخصائصه كما يأتي:

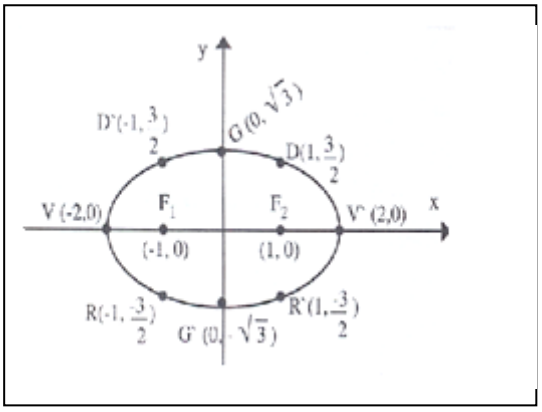
لتكن $F_1(-1,0)$ ، $F_2(1,0)$ نقطتين نعينهما في المستوى الإحداثي ولنأخذ بعض النقاط مثل:

$$V(\pm 2,0), R\left(-1,\frac{-3}{2}\right), R'\left(1,\frac{-3}{2}\right), G\left(0-\sqrt{3}\right)$$

$$G(0,\sqrt{3}), D\left(1.\frac{3}{2}\right), D\left(-1,\frac{3}{2}\right)$$

وبالمثل نجد أثم تعين النقطة في المستوى الأحداثي ونصل بينهما بخط منحنٍ ممهد متصل فنحصل على المنحنى الموضح في الشكل (1).

الشكل (1)



وعند حساب مجموع بعدي النقطة $D\left(1,\frac{3}{2}\right)$ من المنحنى عند النقطة $F_2(1,0), F_1(-1,0)$ نجد أن:

$$DF_1 + DF_2 = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

وبالمثل نجد أن مجموع بعدي النقطة $V'(2,0)$ من المنحنى عند النقطتين F_2, F_1 يساوي

$$V'F_1 + V'F_2 = \sqrt{(2+1)^2 + (0)^2} + \sqrt{(2-1)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{9} + \sqrt{1} = 4$$

ويكون هذا صحيحاً لبقية النقط الواقعة على المنحنى كما في الشكل (1).

وبشكل عام لتكن F_2, F_1 نقطتين في المستوى الإحداثي، المسافة بينهما $2C$، وليكن $2a$ عدداً حقيقياً موجباً بحيث $(2a \succ 2C)$، وإذا كانت $N(x,y)$ أي نقطة في المستوى الإحداثي تتحرك بحيث يكون مجموع بعديهما عن النقطتين F_2, F_1 دائماً مساوياً للعدد الثابت $2a$ فإنها ترسم منحنى هو المحل الهندسي لها ويسمى قطعاً ناقصاً، وعليه فإن:

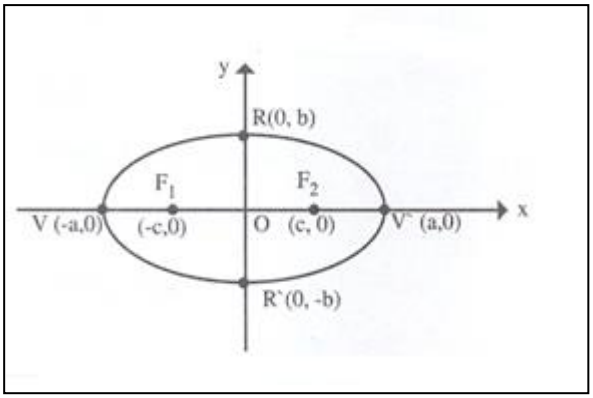
تعريف (1)

القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية $N(x,y)$ بحيث يكون مجموع بعدي $N(x,y)$ عن النقطتين ثابتين F_2, F_1 (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً.

* عناصر القطع الناقص:

بالنظر إلى الشكل (2):

الشكل (2)



نجد أن القطع الناقص يتمتع بالعناصر الثالية:

1. للقطع الناقص محورين للتماثل:

A. المستقيم المار بالبؤرتين F_2, F_1 والمركز O يسمى المحور الأكبر أو (المحور البؤري).

B. المستقيم العمودي على المحور الأكبر والمار بالمركز O يسمى المحور الأصغر.

2. مركز القطع الناقص النقطة O .

3. تسمى النقط V, V', R, R' ررؤوس القطع الناقص.

4. يسمى البعد بين البؤرتين (F_1F_2) البعد البؤري يساوي 2C .

5. نصف البعد البؤري وهو المسافة بين البؤرة والمركز يساوي C.

6. البعد بين الرأسين (VV') = طول المحور الأكبر= 2a.

7. البعد بين الرأسين (RR') = طول المحور الأصغر=2b.

تعريف (2):

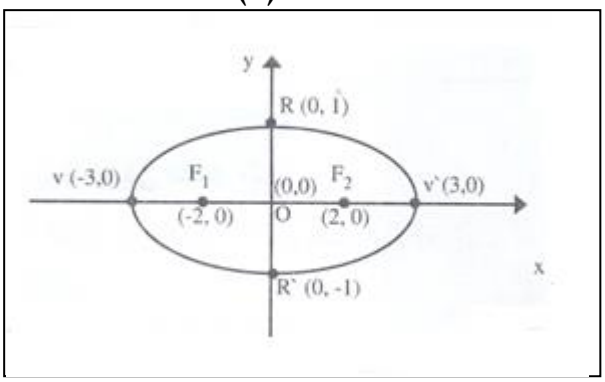
الاختلاف المركزي للقطع الناقص: هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز (e) حيث $e = \frac{c}{a}$.

وبما أن $(c \prec a)$ يكون الاختلاف المركزي دائماً أصغر من واحد وأكبر من صفر أي أن $0 \prec e \prec 1$.

مثال (1):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الناقص في الشكل (3).

الشكل (3)



الحل:

1) طول المحور الأكبر (VV')

$$VV' = 2a = 2(3) = 6$$

2) طول المحور الأصغر (RR')

$$RR' = 2b = 2(1) = 2$$

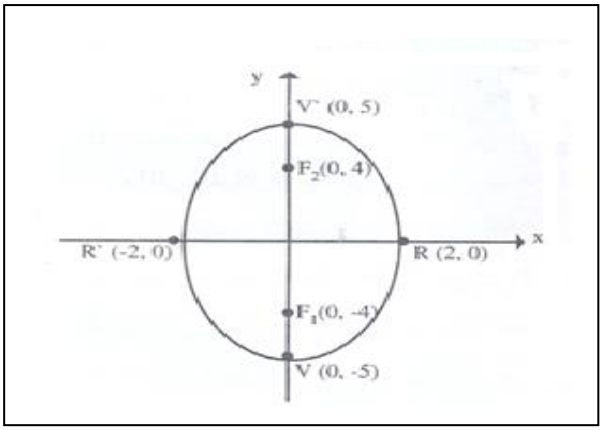
3) البعد البؤري (F_1F_2)

$$F_1F_2 = 2C = 2(2) = 4$$

4) الاختلاف المركزي (e):

$$e = \frac{c}{e} = \frac{2}{3} \prec 1$$

الشكل (4)



تدريب (1)

أوجد العناصر الأساسية للقطع الناقص في شكل (4)

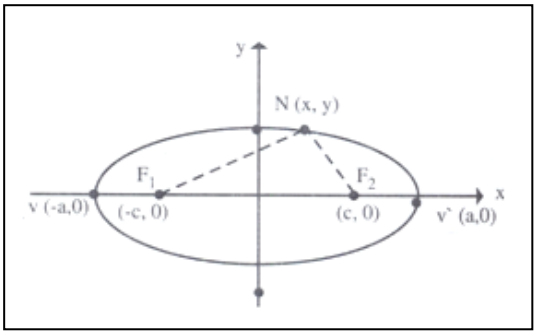
2. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل

في هذا البند سوف نشتق المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور x أو على محور y.

أولاً: القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور x.

لنأخذ القطع الناقص كما في الشكل (5):

الشكل (5)



نطبق تعريف القطع الناقص وهو:

$$F_1N + F_2N = 2A$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-y)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

وبفك الأقواس والاختصار:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

وبقسمة جميع الحدود على 4 نحصل على:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2\right]$$

$$a^2\left[\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)\right]+a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

وبفك الاقواس والاختصار:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx-c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

وبما أن $(a\succ c)$ من تعريف القطع الناقص. وأن كلاً من العددين c,a موجب فإن المتباينة $(a\succ c)$ لا تتغير بتربيع رفيها أي $\left(a^2\succ c^2\right)$ أي $\left(a^2-c^2\succ 0\right)$.

والأن نفرض أن: $b^2=a^2-c^2$

لتحصل على:

$$x^2b^w + a^2y^2 = a^2b^2$$

وبقسمة جميع الحدود على a^2b^2 نجد أن:

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

أي أن:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{..... (1)}$$

حيث b, a عددان موجبان

ويطلق على العلاقة (1) الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور x حيث:

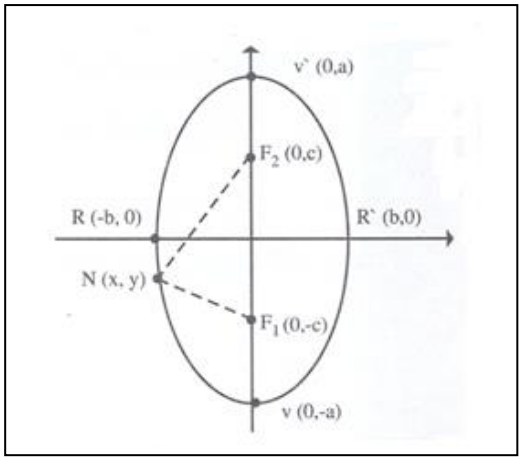
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

ثانياً: وبنفس الأسلوب السابق نحصل على العلاقة:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{..... (2)}$$

ويطلق على العلاقة (2) الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محورة y كما في الشكل (6) حيث إحداثيات البؤرتين $F_2(0,c), F_1(0,-c)$.

الشكل (6)



ملاحظات هامة:

1) a^2 دائماً الأكبر والمتغير الموجود في البسط الذي مقامه a^2 يكون دائماً هو المحور الأكبر أو يكون المحور الأكبر يوازيه.

2) من معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ لاحظ أنه كانت $a=b$ فإن معادلة القطع الناقص تصبح على الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

أي أن: $x^2+y^2=a^2$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a أي أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص حيث $a=b$.

3) قيمة c تكون دائماً $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

مثال (2):

جد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص ثم ارسم منحناه إذا كان مركزه نقطة الأصل وطول المحور الأكبر (8) وطول المحور الأصغر (6).

الحل:

(يوجد حلان):

أولاً: إذا كان محوره الأكبر بنطبق على محور x فإن معادلته.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

طول المحور الأكبر (8) أي أن:

$$2a=8\Rightarrow a=4$$

طول المحور (6) أي أن:

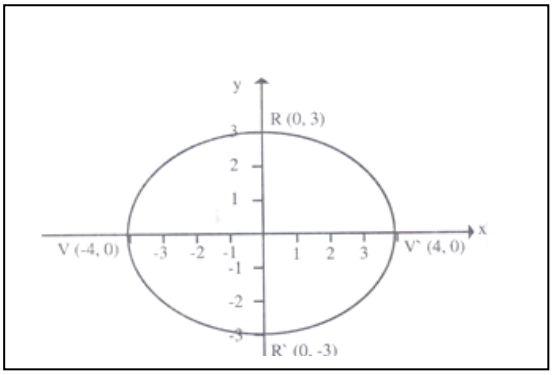
$$2a=6\Rightarrow a=3$$

إذن المعادلة هي:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

أنظر الشكل (7):

الشكل (7)



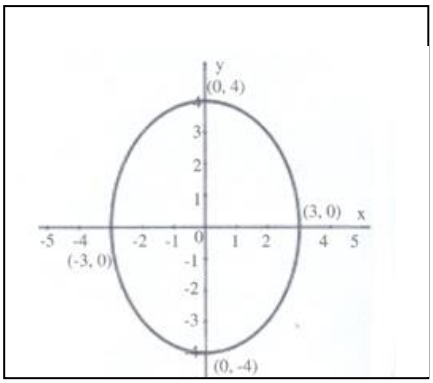
ثانياً: إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور y فإن معادلته:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

أنظر الشكل (8):

الشكل (8)



مثال (3):

جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 1,0)$ وطول محوره الأكبر (4).

الحل:

بما أن البؤرتين على محور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x ، إذن معادلته:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

طول محوره الأكبر (4):

$$2a=4\Rightarrow a=2$$

البعد بين البؤرتين (2):

$$2c=2\Rightarrow c=1$$

ومن العلاقة:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

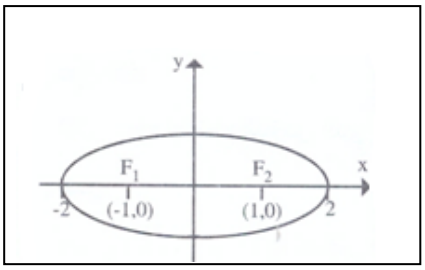
$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=4-1=3\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

وبتعويض قيم b,a في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

انظر الشكل (9):

الشكل (9)



مثال (4):

أوجد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 2,0)$ ويتقاطع مع محور x عند $x=\pm 4$.

الحل:

بما أن البؤرتين تقعان على محور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x وبما أنه يتقاطع مع محور x عند $x=\pm 4$ إذن احداثيات الرأسين $V(4,0)$, $V(-4,0)$.

إذن المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

طول المحور الأكبر يساوي المسافة بين الرأسين VV' ويساوي $VV'=4-(-4)=8$

$$2a=8 \text{ إذن}$$

$$a=4$$

المسافة بين البؤرتين F_1F_2 يساوي:

$$F_1F_2=2-(-2)=4$$

إذن: $2C=4\Rightarrow C=2$

ومن العلاقة $c=\sqrt{a^2-b^2}$

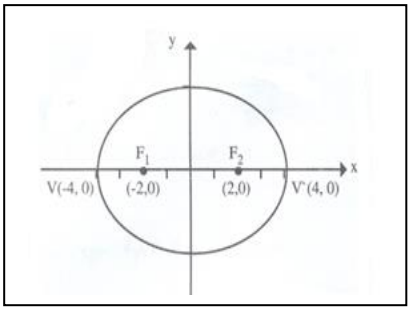
$$c^2=a^2-b^2\Rightarrow 4=16-b^2\Rightarrow b^2=16-4=12\Rightarrow b=\sqrt{12}$$

وبتعويض قيم b,a في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

أنظر الشكل (10):

الشكل (10)



مثال (5):

اكتب معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(\pm 4,0)$ ويمر منحناه بلنقطة (2,3).

الحل:

بما رأساه على محور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x إذن معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ولكن بعد الرأس (4,0) عن المركز نقطة الأصل يساوي:

$$4-0=4$$

إذن: $a=4$

وبتعويض قيمة a في المعادلة نجد أن: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$

وبما أن منحنى القطع يمر بالنقطة (2,3) إذن فهي تحقق معادلته:

$$\frac{4}{16}+\frac{9}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{9}{b^2}=1$$

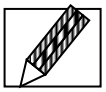
وبالضرب التبادل $\Rightarrow\frac{9}{b^2}=1-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{9}{b^2}=\frac{3}{4}$

$$3b^2=36\Rightarrow b^2=12$$

وبتعويض قيمة b^2 في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

تدريب (2)



قطع ناقص بؤرتاه $F_1(-4,0)$ ، $F_2(4,0)$ والنقطة $N(x,y)$ واقعة عليه بحيث أن محيط المثلث NF_1F_2 يساوي (24) وحدة أوجد معادلة هذا القطع.

مثال (6):

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(0,-2)$ ، $F_2(0,2)$ ونهايتا محوره الأكبر $V(0,-4)$ ، $V'(0,4)$.

الحل:

واضع من الشكل (11) أن: $c=2$ ، $a=4$ وأن المحور الأكبر ينطبق على محور y

إذن معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

ومن العلاقة:

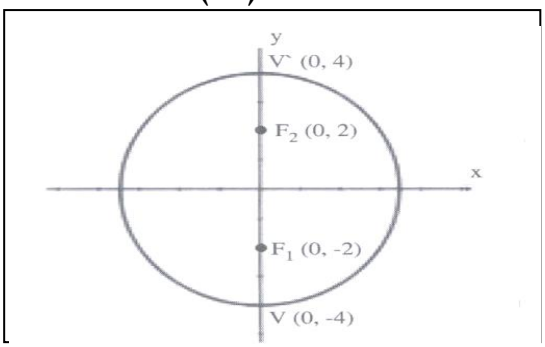
$$c^2=a^2-b^2$$

$$b^2=a^2-c^2=16-4=12$$

وبتعويض قيم b^2, a^2 في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$$

الشكل (11)



أسئلة تقويم ذاتي

1. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الأصغر (4) وحدات ومحوره الأكبر يقع على محور y والمسافة بين بؤرتيه $\left(2\sqrt{5}\right)$ وحدة.
2. جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(0,\pm 3)$ وطول محوره الأكبر (10) وحدات.
3. جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(0,\pm 5)$ ويتقاطع مع محور y عند $y=\pm 8$.
4. احسب الاختلاف المركزي للقطع الناقص: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$.

3. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$

لقد درسنا في البند (2) المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، وكان هناك حالتين:

1) محوره الأول ينطبق على محور x ومعادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2) محوره الأكبر ينطبق على محور y ومعادلته:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

وسوف نستخدم في هذا البند انسحاب المحاور للحصول على المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ لنفرض أن المحاور الجديدة $x'y'$ مركزها $M(h,k)$.

من علاقة الانسحاب:

$$x'=x+m$$

$$y'=y-m$$

نجد أن:

$$x'=x-h$$

$$y'=y-k$$

وبما أن معادلة القطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور x بالنسبة للمحاور $x'y'$ هي:

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

وبتعويض قيمة : $x'=x-h$

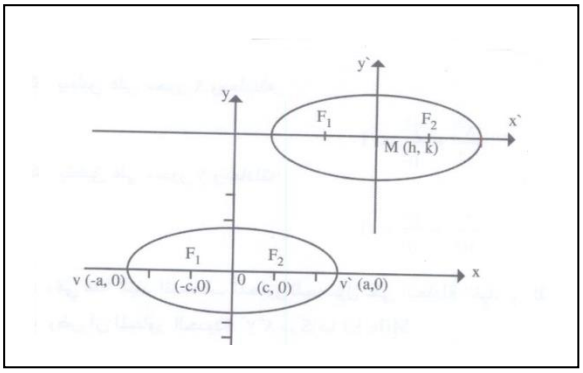
$$y' = y - k$$

في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.....(1)$$

وتسمى العلاقة (1) معادلة قطع ناقص مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور x انظر الشكل (12).

الشكل (12)



ملاحظة هامة:

1. محوره الأكبر يوازي محور x وطوله (2a) ومعادلته $y = k$.
2. محوره الأصغر يوازي محور y وطوله (2b) ومعادلته $x = h$.
3. بؤرتاه تقعان على المحور الموازي x وهما النقطتان $F_1(-c+h,k), F_2(c+h,k)$
4. رأساه النقطتان:

$$V(-a+h,k), V'(a+h,k)$$

بما ان معادلة القطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور y بالنسبة للمحاور الجديدة $x'y'$ هي:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$

$$x'=x-h$$

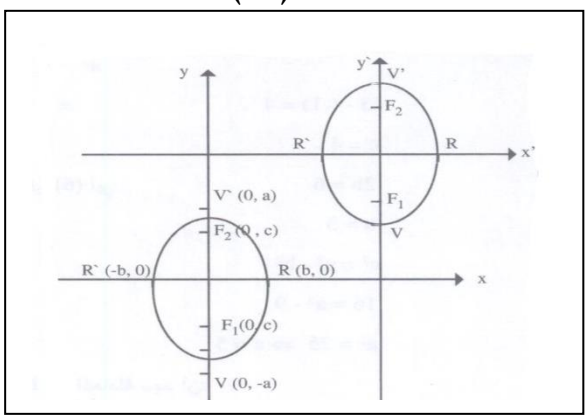
$$y'=y-k$$

في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.....(2)$$

وتسمى العلاقة (2) معادلة قطع ناقص مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور y انظر الشكل (13).

الشكل (13)



ملاحظة هامة:

1. محورهالأكبر يوازي محور y وطوله (2a) ومعادلته $x=h$.

2. محوره الأصغر يوازي محور x وطوله (2b) ومعادلته $y = k$.

3. بؤرتاه تقعان على المحور الموازي لمحور y وهي النقطتان

$F_1(h,-c+k), F_2(h,c+k)$

.

4. رأساه

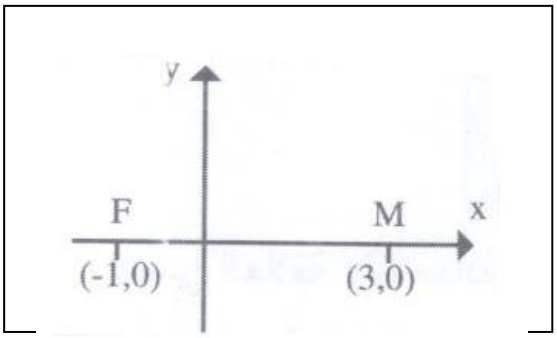
$$V(h,-a+k), V'(h,a+k)$$

مثال (7):

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(3,0)$ وإحدى بؤرتيه $(-1,0)$ وطول محوره الأصغر يساوي (6).

الحل:

انظر الشكل (14):



بما أن الؤرة والمركز على المحور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x ومركزه $M(3,0)$ إذن معادلته:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

بعد المركز عن البؤرة $3-(-1)=4$

إذن $c=4$

طول المحور $2b=6$

$$b=3$$

ومن العلاقة: $c^2=a^2-b^2$

$$16=a^2-9$$

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

وبتعويض قيم a,b في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$$

مثال (8):

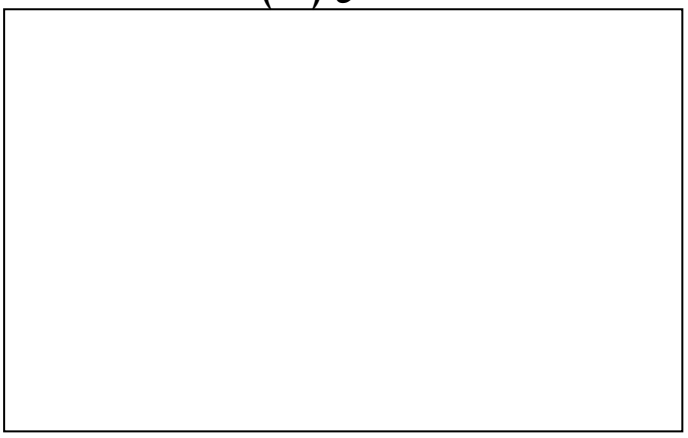
جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(13,-2),(3,-2)$ وبؤرتاه $(4,-2),(12,-2)$

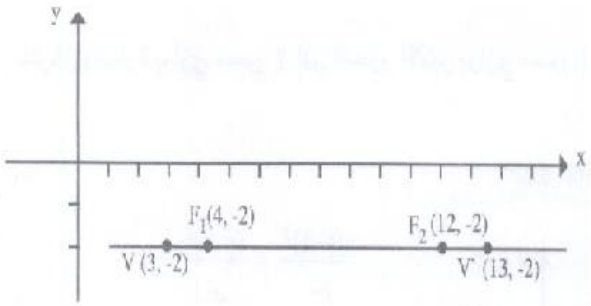
الحل:

نلاحظ من الشكل (15) أن محور القطع الناقص الأكبر يوازي محور x غذن معادلته

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الشكل (15)





وبما أن المركز يقع في منتصف المسافة بين الرأسين إذن إحداثيات المركز

$$\left(\frac{13+3}{2}.\frac{-2+(2)}{2}\right)=1 \qquad (8,-2)$$

إذن:

$$a=13-8=5$$
$$c=12-8=4$$

ومن العلاقة:

$$c^2=a^2-b^2$$

$$16=25-b^2 \Rightarrow b^2=9$$

وبتعويض إحداثيات المركز وقيم b,a في المعادلة نجد:

$$\frac{(x-8)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

تدريب (3)

جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأكبر (10) وحدات ونهايتا المحور الأصغر $(3,4),(3,2)$

.

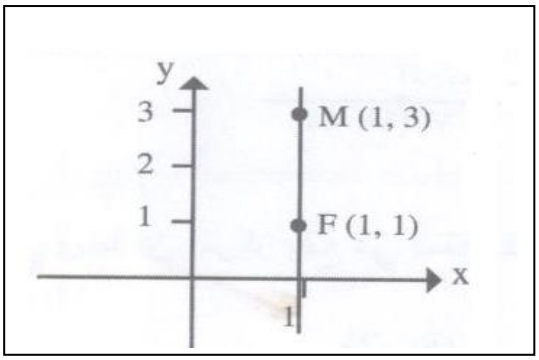
مثال (9):

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (1,3) وإحدى بؤرتيه (1,1) وطول المحور الأكبر (10).

الحل:

بما أن المستقيم المار بالمركز والبؤرة يوازي محور Y إذن المحور الأكبر يوازي محور Y انظر الشكل (16).

الشكل (16)



إذن المعادلة:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

والمسافة بين المركز والبؤرة هي (2) وتساوي:

$$C=3-1-2$$

وطول المحور الأكبر (10) إذن:

$$2a=10\Rightarrow a=5$$

ومن العلاقة:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$4 = 25 - b^2$$
$$b^2 = 21$$

وبتعويض إحداثيات المركز وقيم b,a في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-1)^2}{21} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

أسئلة تقويم ذاتي

1. جد معادلة قطع ناقص مركزه (2,2) وإحدى بؤرتيه(-1,2) وطول محوره الأكبر $2\sqrt{10}$.
2. جد معادلة قطع ناقص مركزه (3,2) وبؤرتاه النقطتين (1,3)، (5,2) وطول محوره الأكبر يساوي ستة أمثال البعد البؤري.

4. إيجاد عناصر القطع الناقص

في هذا البند سوف نجد عناصر القطع الناقص إذا اعطينا معادلته. والعناصر هي:

1. أحداثيات البؤرتين.
2. أحداثيات الرأسين.
3. طول المحور الأكبر.
4. طول المحور الأصغر.
5. معادلة المحور الأكبر.
6. معادلة المحور الأصغر.
7. الاختلاف المركزي.

8. رسم المنحنى.

والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال (1):

أوجد أحداثيات البؤرتين والرأسين وطولي المحورين الأكبر والأصغرومعادلتهما والاخلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

الحل:

أحداثيات المركز

$$M(h,k)=M(2,1)$$

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير y ، إذن المحور الأكبر يوازي محور y ، إذن أحداثيات الرأسين :

$$V(h,-a+k)=V(2,-5+1)=V(2,-4)$$
$$V'(h,a+k)=V'(2,5+1)=V(2,6)$$

وطول المحور الأكبر

$$2a=2(5)=10\Leftarrow$$

ومعادلته

$$x=h\Rightarrow x=2$$

$$b^2=9\Rightarrow b=3$$

وطول المحور الأصغر $2b=2(3)=6\Leftarrow$

ومعادلته $y=k\Rightarrow y=1$

مثال (2)

أوجد عناصر القطع الناقص وارسم منحناه إذا علمت أن معادلته:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

الحل:

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير x إذن القطع متماثل حول محور x .

إذن إحداثيات الرأسين:

$$v'(-a,0)=(-5,0)$$

$$v(a,0)=(5,0)$$

$$b^2=16\Rightarrow b=4$$

ومن العلاقة

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=25-16$$

$$c^2=9$$

$$c=3$$

إذن احداثيات البؤرتين:

$$F_1(-c,o)=(-3,o)$$

$$F_2(c,o)=(3,o)$$

طول المحور الأكبر $2a=2\times5=10$ $\Leftarrow$

ومعادلته: $y=0$

طول المحور الأصغر $2b = 2 \times 4 = 8 \Leftarrow$

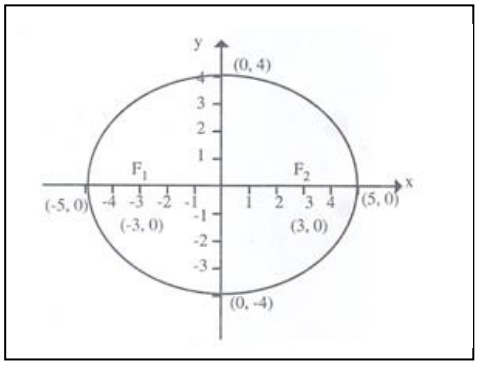
ومعادلته: $x = 0$

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \prec 1 \Leftarrow$$

ورسمة القطع هي الشكل (17):

الشكل (17)



مثال (3):

جد عناصر القطع: $3x^2 + 2y^2 = 6$

الحل:

نجعل المعادلة على الصورة القياسية بالقسمة على (6) ينتج:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

احداثيات الرأس $M(0,0)$

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

بما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير y إذن المحور الأكبر ينطبق على المحور x.

احداثيات الرأسين $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

طول المحور الأكبر $2a = 2\sqrt{3}$

ومعادلته $x = 0$

طول المحور الأصغر $\Leftarrow$ $2b = 2\sqrt{2}$

ومعادلته $y = 0$

ومن العلاقة $c^2 = a^2 - b^2$

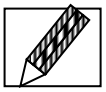
$$c^2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow c = 1$$

إذن احداثيات البؤرتين $(0,1),(0,-1)$

الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

تدريب (4)



أوجد خصائص القطع الناقص $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

5. معادلة المماس والعمودي على المماس

إن معالدلة المماس للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1, y_1) تعطى كما يلي:

$$\frac{x^2 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

وأن ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x_1, y_1) هو:

$$\frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

مثال (1):

جد معادلة المماس للقطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

عند النقطة $(5,0)$

الحل:

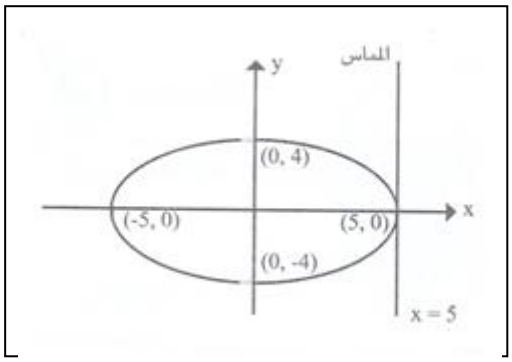
معادلة المماس هي:

$$\frac{5x}{25} + \frac{(0)y}{16} = 1$$

$$\frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$$

أنظر الشكل (18):

الشكل (18)



نرى في الشكل منحنى القطع والمماس له عند النقطة $(5,0)$ ونلاحظ أن معادلة المماس $x=5$.

مثال (2):

أوجد معادلة المماس للقطع: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ عند النقطة $\left(\sqrt{5},\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

الحل:

معادلة المماس: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}x}{25}+\frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{16}=1$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}\sqrt{5}.5}+\frac{8y}{16\sqrt{5}}=1$$

$$\frac{x}{5\sqrt{5}}+\frac{y}{2\sqrt{5}}=1$$

$$\frac{y}{2\sqrt{5}}=1-\frac{x}{5\sqrt{5}}$$

بالضرب في $2\sqrt{5}$

معادلة المماس: $y=2\sqrt{5-\frac{2}{5}x}$

تدريب (5)

أوجد معادلة العمودي على المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ عند النقطة $\left(\frac{\sqrt{75}}{2},2\right)$

أسئلة تقويم ذاتي

(1) أوجد خصائص القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}=1$$

(2) أوجد خصائص القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$$

(3) جد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(-2,1)$ لمنحنى القطع الناقص: $x^2+4y^2=8$

الخلاصة

عزيزي الدارس لقد تناولنا في هذه الوحدة مجموعة من المفاهيم سنختصرها فيما يلي:

1- تعريف القطع الناقص: وهو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية $N(x,y)$ بحيث يكون مجموع بعدي $N(x,y)$ عن نقطتين ثابتتين F_1,F_2 (تسميان البؤرتين) يساوي مقدار ثابت.

2- الاختلاف المركزي: وهو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز (e) حيث $e=\frac{c}{a}$، والاختلاف المركزي دائماً أقل من واحد بالنسبة للقطع الناقص.

3- المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وهي:

a) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور x : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

b) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور y: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

4- المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ وهي:

a) محوره الأكبر يوازي محور x: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

b) محوره الأكبر يوازي محور y: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

5- إيجاد عناصر القطع الناقص إذا عرفنا معادلته، أو بعض المعلومات عنه.

6- معادلة المماس للقطع الناقص: محوره الأكبر يوازي محور x: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

وهي: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، في الوحدة التالية نتناول قطعاً مخروطياً أخر وهو القطع الزائد، ونستكمل فيه جزءاً مهماً من القطوع المخروطية، نبدأ الوحدة بتعريفه ثم نتعمق في دراسة عناصره ومعادلته، مع تعزيز ذلك بالعديد من الأمثلة والتدريبات.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك.

إجابات التدريبات

تدريب (1):

طول المحور الأكبر $VV' = 2a = ax5 = 10 \Leftarrow$

طول المحور الأصغر $RR' = 2b = 2x2 = 4 \Leftarrow$

البعد البؤري $F_1F_1 = 2c = 2x4 = 8 \Leftarrow$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Leftarrow$

تدريب (2):

لاحظ أن محور القطع الأكبر ينطبق على محور x إذن معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وكما نلاحظ في الشكل (19) فإن: $F_1F_2 = 8, c = 4$

محيط المثلث NF_1F_2 = $F_1F_2 + NF_1 + NF_2$

$$8 + NF_1 + NF_2 = 24$$

$$NF_1 + NF_2 = 24 - 8 = 16$$

ومن تعريف القطع الناقص: $NF_1 + NF_2 = 2a$

$$2a = 16$$

$$a = 8$$

لكن:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48$$

إذن المعادلة: $\frac{x^2}{64}=\frac{y^2}{48}=1$

تدريب (3):

احداثيات المركز $\left(\left(\frac{3+3}{2}\right),\left(\frac{-4+2}{2}\right)\right)$

$$=(3,-1)$$

$$2a=10\Rightarrow a=5$$

$$2b=6\Rightarrow b=3$$

المعادلة: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

تدريب (4):

نكمل المربع في x وفي y

$$(x^2+6x)+(4y^2-8y)=-9$$

$$(x^2+6x)+(4(y^2-2y))=-9$$

$$(x^2+6x+9)+4(y^2-2y+1)=-9+9+4$$

$$(x+3)^2+4(y-1)^2=4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

احداثيات الرأس $M(-3,1)$

بما أن البسط a^2 يحتوي على x إذن المحور الأكبر يوازي محور x

طول المحور الأكبر: $2a=4$

$b^2=1\Rightarrow b=1$ الأصغر

طول المحور الأصغر: $2b=2$

إحداثيات الرأسين: $(-5,1),(-1,1)$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

احداثيات البؤرتين: $\left(-3-\sqrt{3},1\right),\left(-3+\sqrt{3},1\right)$

معادلة المحور الأكبر: $y = k \Rightarrow y = 1$

معادلة المحور الأصغر: $x = h \Rightarrow x = -3$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تدريب (5):

ميل المماس: $\frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$

$$\Rightarrow \frac{(-16)\left(\frac{\sqrt{75}}{2}\right)}{(25)(2)} = \frac{(-8)\left(\sqrt{75}\right)}{(2)(25)}$$

$$= \frac{(-4)\sqrt{25}\sqrt{3}}{\sqrt{25}\sqrt{25}} = \frac{-4\sqrt{3}}{5}$$

ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{5}{4\sqrt{3}} = \frac{-1}{\frac{-4\sqrt{3}}{5}}$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث m ميل المماس

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4\sqrt{3}}\left(x - \frac{\sqrt{75}}{2}\right)$$

$$y-2=\frac{5}{4\sqrt{3}}\left(x-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow y-2=\frac{5}{4\sqrt{3}}x-\frac{25}{8}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5}{4\sqrt{3}}x-\frac{25}{8}+2$$

مسرد المصطلحات

- **القطع الناقص The Ellipse:**

هو المحل الهندسي للنقطة (x, y) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي كمية ثابتة أو هو القطع الذي اختلافه المركزي أصغر من واحد صحيح.

- **ميل المنحنى عند نقطة (x_1, y_1) Slope of a curve ate a point:**

هو ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x_1, y_1) وهو نفسه المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ عند النقطة $(x_1, f(x)_1)$.

- **مستقيم عامودي على منحنى عند نقطة Normal Line to acurve at appoint:**

هو مستقيم يعامد المماس عند تلك النقطة وميله سالب مقلوب ميل المماس.