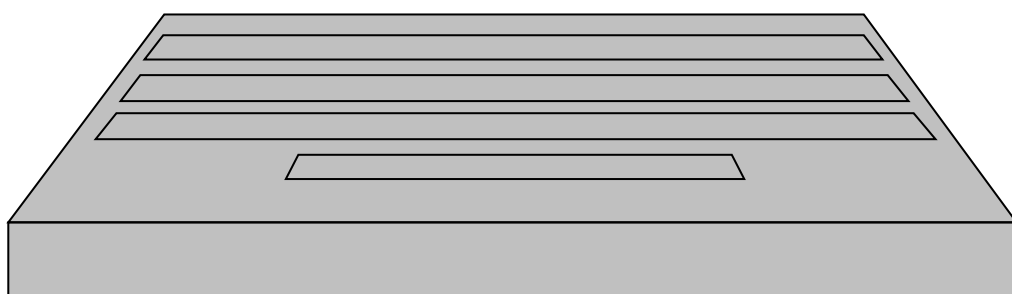


الوحدة الثانية
القطع المكافئ



محتويات الوحدة

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
أهداف الوحدة	
1. تعريف القطع المكافئ	
2. عناصر القطع المكافئ	
3. الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ	
4. إيجاد عناصر القطع المكافئ (من الحالات من "1" إلى "4")	
5. إنسحاب المحاور	
6. معادلات القطع المكافئ بصورة عامة	
7. إيجاد عناصر القطع من المعادلات العامة	
8. الإختلاف المركزي (e) للقطع المكافئ	
9. معادلة المماس والعمودي على المماس للقطع المكافئ	
10. المحل الهندسي	
11. تطبيقات على القطع المكافئ	
الخلاصة	

	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
	إجابات التدريبات
	مسرد المصطلحات
	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس، نقدم اليك الآن عزيزي الدارس، الوحدة الثانية من مقرر 161 رياضيات (1) الهندسة التحليلية وهي بعنوان "القطع المكافئ".

إن القطع المكافئ هو أحد القطوع المخروطية والتي تنتج من خلال تقاطع مخروط مع سطح مستوٍ، وكغيره من القطوع فهو ذا أهمية كبيرة في علم الرياضيات وارتبط أيضاً بعلوم أخرى كعلم الفيزياء حيث استخدم لدراسة حركة المقذوفات وفي المرايا وفي علم الهندسة وغيرها من العلوم.

وسوف نتعرف في هذه الوحدة على تعريف القطع المكافئ وأجزاء القطع مثل الرأس والبقرة ومعادلة المحاور ومعادلة الدليل ورسم منحنى القطع وانسحاب المحاور ومعادلة المماس عند نقطة ومعادلة العمودي عند نقطة وبعض التطبيقات العملية للقطع المكافئ. وأرجو أن تكون وحدة مفيدة لك، وأن تشساهم معنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

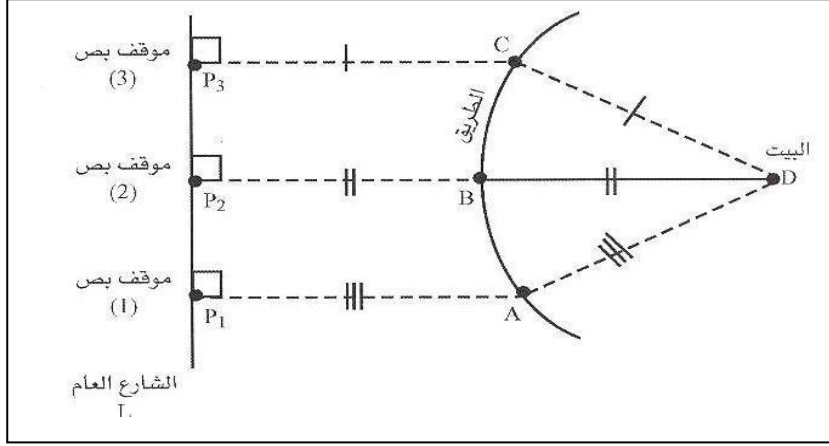


عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- 1- تعرف القطع المكافئ.
- 2- تكتب معادلة القطع المكافئ.
- 3- تجد عناصر القطع المكافئ.
- 4- تجد معادلة قطع مكافئ محوره يوازي أحد المحورين الاحداثيين إذا علمت شروط كافية
- 5- تعرف انسحاب المحاور.
- 6- تعرف الاختلاف المركزي للقطع المكافئ.
- 7- تجد معادلة المماس عند نقطة للقطع المكافئ.
- 8- تجد معادلة العمودي على المماس عند نقطة للقطع المكافئ.
- 9- تستخدم معادلة القطع المكافئ في بعض التطبيقات.

1. تعريف القطع المكافئ

الشكل (1)



سار رجلان "محمد وعبدالله" على أحد الطرق الفرعية في مدينة الخرطوم الموضح في الشكل (1) فنظر محمد إلى عبدالله، وقال له:

لماذا لا تذهب معي إلى البيت.

فأجابه لماذا لا تذهب أنت معي إلى السوق.

واتفق الإثنان على ما يلي:

إن كانت المسافة بين النقطة التي يقفون عندها "A" اقرب إلى البيت "D" فسوف يذهب عبدالله إلى بيت محمد.

أما إذا كانت المسافة بين النقطة التي يقفون عندها "A" والشارع العام "L" اقرب إلى السوق فسوف يذهب محمد إلى السوق مع عبدالله.

وعند حساب المسافة بين "A" والبيت "D" أي: AD ثم حساب المسافة بين "A" وموقف باص (1) الذي يقع على الشارع العام أي: Ap_1 .

وجد أن البعدين متساويان أي أن $AD = Ap_1$ فاتفق الرجلان على السير على الطريق نفسه إلى أن وصلا إلى النقطة B ثم قررا أن يحسبا المسافة مرة أخرى وهي Bp_2 ، BD (حيث P_2 : موقف الباص الثاني والذي يقع على الشارع العام). ثم سار الرجلان على نفس الطريق إلى أن وصلا إلى النقطة C، وقاما بحساب المسافتين: CD ، Cp_3 (حيث p_3 : موقف الباص (3) والذي يقع على الشارع العام)، فوجداها متساويتين أيضاً أي أن $Cp_3 = CD$.

إن مثل هذا الطريق سار عليه الرجلان يسمى قطعاً مكافئاً، أما البيت فيسمى بؤرة القطع المكافئ وأما الشارع العام فيسمى "دليل القطع المكافئ".

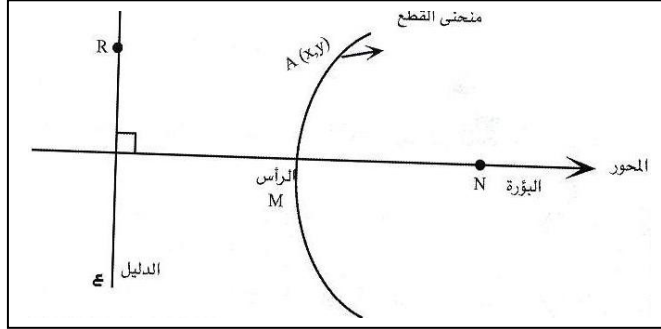
تعريف:

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي لمجموعة النقط $A(x, y)$ والتي بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.

2. عناصر القطع المكافئ

في هذا البند سوف نعرض رسماً توضيحياً للقطع المكافئ يوضح عناصره الأساسية كما في الشكل (2).

الشكل (2)



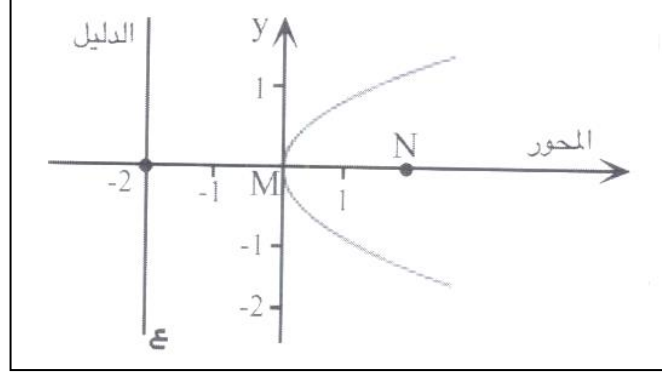
عناصر القطع المكافئ:

1. البؤرة: وهي احداثيات النقطة N والتي تقع على المحور وداخل المنحنى.
2. الرأس: وهي احداثيات النقطة M والتي تقع على المحور وعلى منحنى القطع وفي منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.
3. الدليل: وهو المستقيم E كما في الشكل (2).
4. المحور: وهو المستقيم الذي يكون عموداً على الدليل وتقع عليه البؤرة والرأس ويكون القطع متماثلاً حوله.

مثال (1):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور مستعيناً بالشكل (3).

الشكل (3)



الحل:

إحداثيات الرأس M هي (0,0)

إحداثيات البؤرة N هي (2,0)

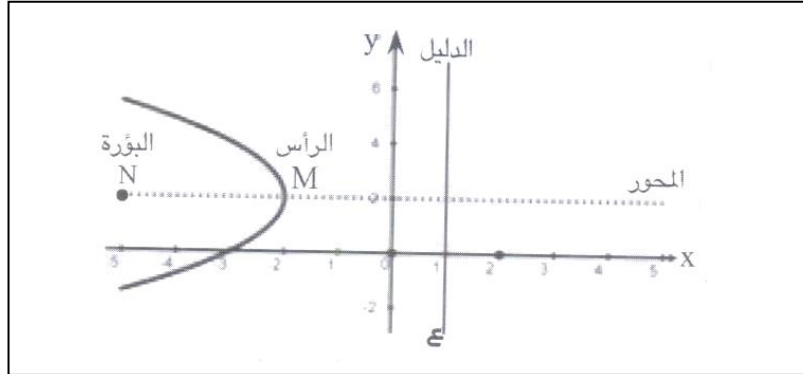
معادلة الدليل $x = -2$

معادلة المحور $y = 0$

مثال (2):

مستعيناً بالشكل (4) أوجد معادلة الدليل والمحور وإحداثيات البؤرة والرأس للقطع المكافئ.

الشكل (4)



الحل:

1. معادلة الدليل $x = 1$

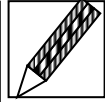
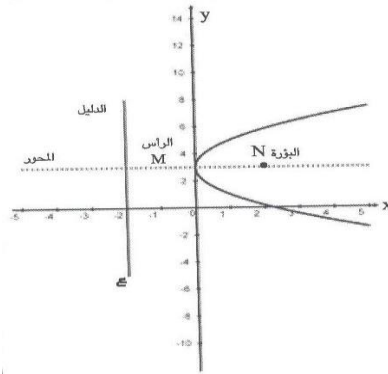
2. معادلة المحور $y = 2$

3. إحداثيات البؤرة $N(-5, 2)$

4. إحداثيات الرأس $M(-2, 2)$

تدريب (1)

اكتب إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة محور التماثل للقطع المرسوم في الشكل (5).

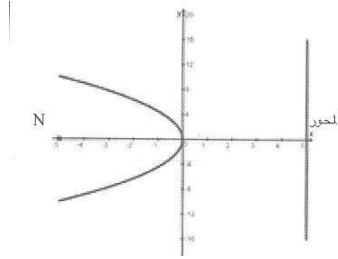




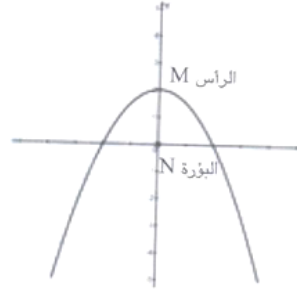
لكل من الأشكال 6، 7، 8

اكتب إحداثيات الرأس واليورة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور.

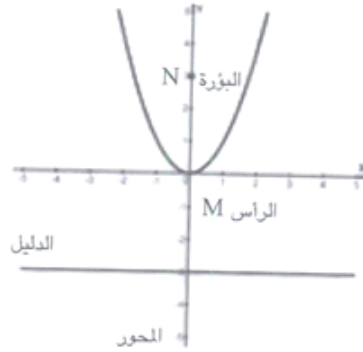
الشكل (6)



الشكل (7)



الشكل (8)

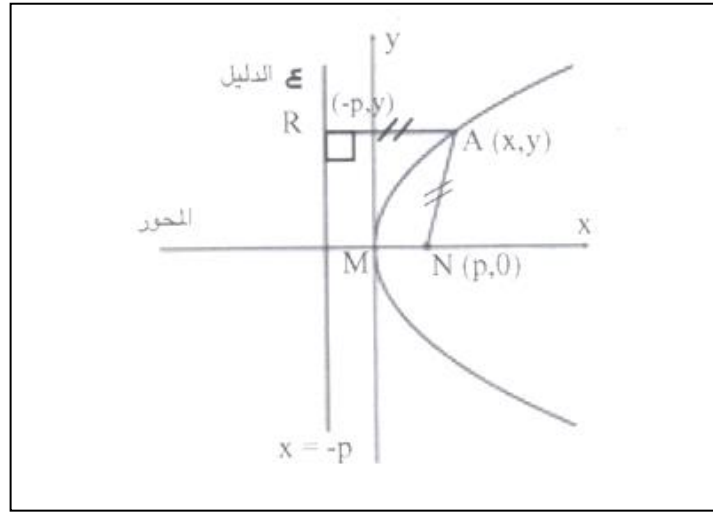


3. الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ

سوف ندرس هنا الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المتماثل حول أحد المحورين الإحداثيين ورأسه نقطة الأصل، ولهذا سوف نقسم الدراسة إلى (4) حالات:
الحالة الأولى:

وفي هذه الحالة سوف نأخذ القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومتماثل حول محور x وبؤرته تقع على محور x الموجب كما في الشكل (9).

الشكل (9)



تكون إحداثيات البؤرة $N(p,0)$ حيث p عدد حقيقي موجب لأنها تقع على المحور x الموجب ومعادلة الدليل $x = -p$ لأن بعد البؤرة عن الرأس يساوي بعد الدليل عن الرأس.

ولتكن النقطة $A(x,y)$ تقع على منحنى القطع والنقطة R تقع على الدليل L ولذلك فإن إحداثيات R هي $(-p, Y)$.

ومن تعريف القطع المكافئ: فإن بعد أي نقطة على المنحنى عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل أي أن: $|AN| = |AR|$

وباستخدام قانون البعد بين نقطتين الذي درسناه في الوحدة الأولى نجد أن:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-o)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2 + y^2}$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \quad \text{وبترييع الطرفين:}$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \quad \text{ونفك الأقواس:}$$

$$x^2 - x^2 + y^2 - 2px - 2px + p^2 - p^2 = 0 \quad \text{وبتجميع الحدود:}$$

$$y^2 - 4px = 0$$

إذن:

$$y^2 = 4px \quad , \quad p \geq 0 \dots (1)$$

ويطلق على العلاقة (1) معادلة القطع المكافئ المتمائل حول محور x وراسه $(0,0)$

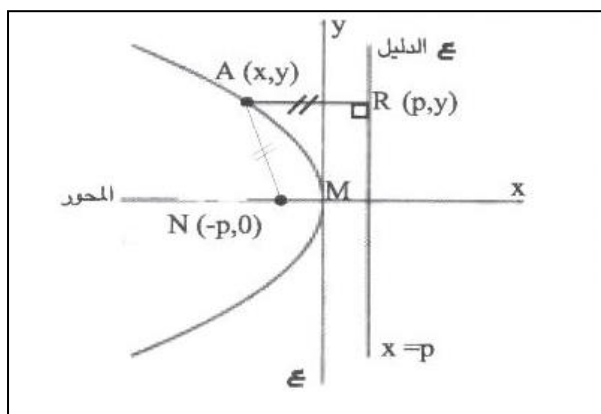
وبؤرته تقع على محور X الموجب.

الحالة الثانية:

وفي هذه الحالة نأخذ القطع المكافئ المتماثل حول محور x ورأسه $(0,0)$ ويؤثرته تقع

على محور x السالب في الشكل (10).

الشكل (10)



بما أن البؤرة تقع على محور x السالب تكون إحداثياتها $N(-p,0)$ حيث p عدد حقيقي موجب ($p \in R^+$) ولذلك فإن معادلة الدليل $X = P$.

ولتكن $A(x, y)$ نقطة تقع على منحنى القطع المكافئ، والنقطة R تقع على الدليل وبالتالي فإن إحداثيات $R(P, Y)$ ومن تعريف القطع المكافئ فإن:

$$|AN| = |AR|$$

$$\text{أي أن: } \sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2}$$

$$\text{أي: } \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = \sqrt{(x-p)^2}$$

$$\text{وبترتيب الطرفين: } (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2$$

$$\text{وبفك الأقواس: } x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2$$

$$\text{وبتجميع الحدود والاختصار } x^2 - x^2 + y^2 + 2px + 2px + p^2 - p^2 = 0$$

$$y^2 + 4px = 0$$

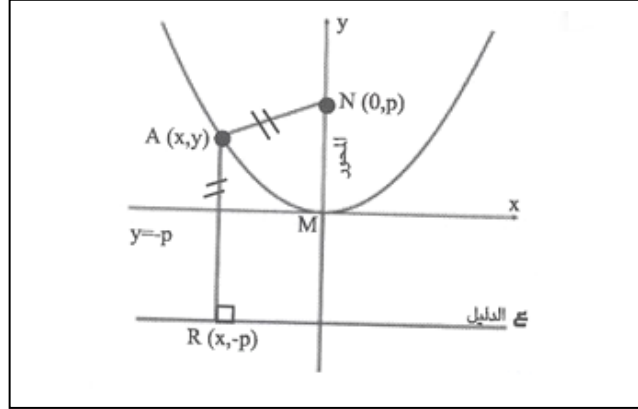
$$y^2 = 4px \text{ و } p > 0 \dots (2)$$

ويطلق على العلاقة (2) بمعادلة القطع المكافئ المتمائل حول محور x ورأسه $(0,0)$ وبؤرته على محور x السالب.

الحالة الثالثة:

أما فغي هذه الحالة فسوف نأخذ القطع المكافئ المتمائل حول محور y ورأسه $(0,0)$ وبؤرته على محور y الموجب كما في الشكل (11).

الشكل (11)



وفي هذه الحالة فإن البؤرة تقع على محور y الموجب إذن إحداثياتها $N(0, p)$ (حيث

$p \in \mathbb{R}^+$) ولذلك فإن معادلة الدليل $Y = -P$.

ولتكن $A(x, y)$ نقطة على منحنى القطع المكافئ ولتكن R نقطة على المستقيم E (الدليل)

فتكون إحداثيات R هي $(x, -p)$.

ومن تعريف القطع المكافئ: $|AN| = |AR|$

$$\text{أي أن: } \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

وبتربيع الطرفين: $x^2(y-p)^2 = (y+p)^2$

وبفك الأقواس والاختصار: $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$

وبتجميع الحدود: $x^2 - 4py = 0$

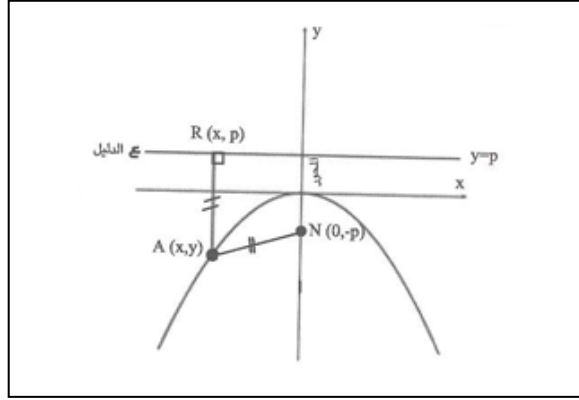
إذن: $x^2 = 4py, p > 0 \dots (3)$

ويطلق على العلاقة (3) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y وبؤرته تقع على محور y الموجب.

الحالة الرابعة:

وهنا نأخذ القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه $(0,0)$ وبؤرته y السالب كما في الشكل (12).

الشكل (12)



وكما نلاحظ في الشكل (12) فإن إحداثيات البؤرة $N(0,-p)$ حيث $(p \in R^+)$ والنقطة $A(x,y)$ تقع على منحنى القطع، والنقطة $R(x,p)$ تقع على المستقيم $y=p$ (الدليل). ومن تعريف القطع المكافئ: $|AN| = |AR|$

$$\text{أي أن: } \sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(y-p)^2}$$

$$\text{وبتربيع الطرفين: } x^2 + (y+p)^2 = (y-p)^2$$

$$\text{وبفك الأقواس والاختصار: } x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2$$

$$\text{وبتجميع الحدود: } x^2 + 2py + 2py = 0$$

$$\text{أي أن: } x^2 = -4py, p > 0 \dots (4)$$

ويطلق على العلاقة (4) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه $(0,0)$ وبؤرته على محور y السالب.

أمثلة متنوعة على الحالات الأربعة:

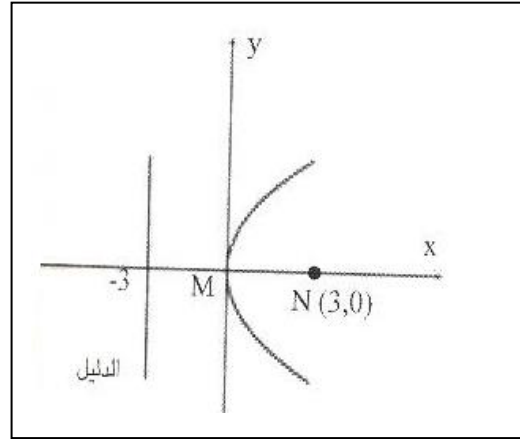
مثال (1):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(3,0)$.

الحل:

نرسم شكلاً توضيحياً (13) وبالنظر إلى الشكل نجد أن:

الشكل (13)



القطع متماثل حول محور x وبؤرته على محور x الموجبة بقيمة $p=3$.

إذن المعادلة حسب الحالة (1): $y^2 = 4px$

وبالتعويض بقيمة $p=3$ نجد أن: $y^2 = 12x$

ملاحظة: اتجاه فتحة القطع باتجاه البؤرة وعكس الدليل.

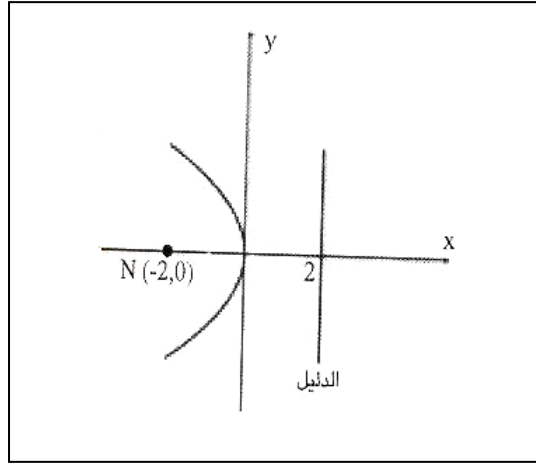
مثال (2):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-2,0)$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل:

نرسم شكلاً توضيحياً (14) لقطع متماثل حول محور x السالب بقيمة $p=2$.

الشكل (14)



إذن المعادلة حسب الحالة (2):

$$y^2 = -4px$$

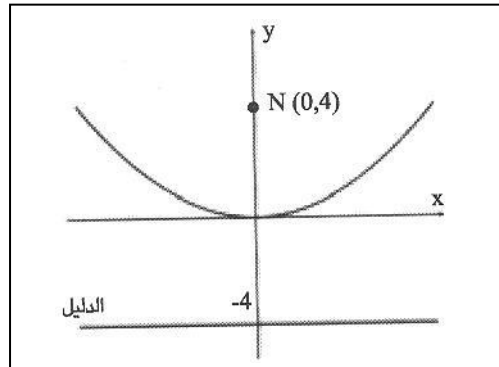
وبالتعويض بقيمة $p=2$ نجد أن: $y^2 = -8x$

مثال (3):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0,0) وبؤرته (0,4).

الحل:

الشكل (15)



نلاحظ كما في الشكل (15) أن القطع متمائل حول محور y وبؤرته تقع على محور y الموجب وقيمة $p=4$ إذن المعادلة حسب الحالة (3):

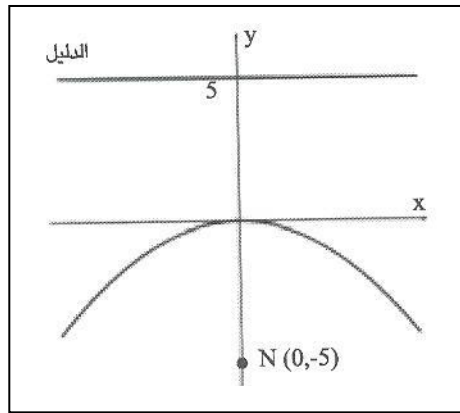
$$x^2 = 4py$$

وبالتعويض بقيمة $p=4$ نجد أن $x^2 = 16y$

مثال (4):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0, -5)$ ورأسه نقطة الأصل.

الشكل (16)



نلاحظ من الشكل (16) أن القطع متمائل حول محور y وبؤرته على محور y السالب، وقيمة $p=5$ إذن المعادلة حسب الحالة (4):

$$x^2 = -4py$$

وبالتعويض بقيمة $p=5$ نجد أن $x^2 = -20y$

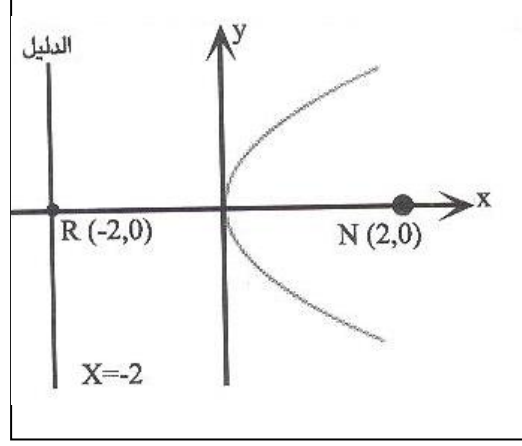
مثال (5):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2,0)$ ومعادلة دليله $x=-2$.

الحل:

نرسم الشكل (17)

الشكل (17)



نحن نعرف أن الرأس هو في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل، إذن احداثيات الرأس M هي: منتصف المسافة بين النقطتين R , N مع ملاحظة أن احداثيات النقطة R هي: (-2,0).

$$\text{إذن احداثيات M: } (0,0) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{2+(-2)}{2} \right)$$

$$\text{وبحساب P } p = 2 - 0 = 2$$

وملاحظة الشكل (17): المعادلة حسب الحالة (1): $y^2 = 4px$

$$\text{وبتعويض قيمة } p=2 \text{ نجد أن } y^2 = 8x$$

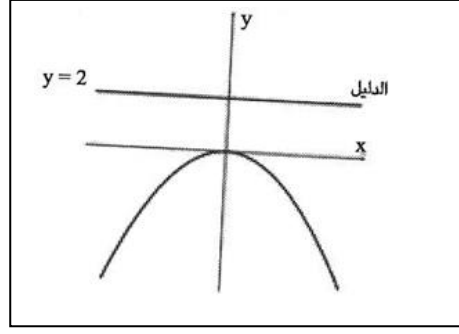
مثال (6):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = 2$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل:

بعد الرأس عن الدليل = بعد الرأس عن البؤرة = $p = 2$ ، لاحظ الشكل (18)

الشكل (18)



إذن حسب الحالة (4) المعادلة هي: $x^2 = -4py$

وبتعويض قيمة $p = 2$ نجد أن: $x^2 = -8y$

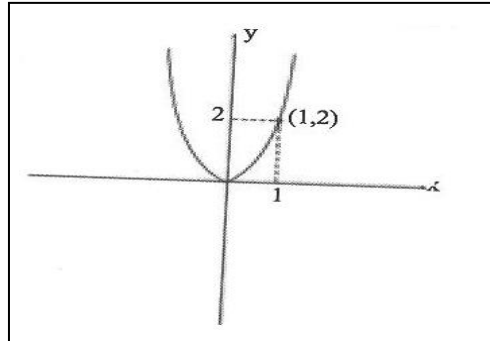
مثال (7):

أوجد معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه نقطة الأصل ويمر بمنحناه بالنقطة (1,2).

الحل:

بما أن رأس القطع نقطة الأصل ومتماثل حول محور y إذن فهو مفتوح للأعلى أو للأسفل وبما أن منحناه يمر بالنقطة (1,2) إذن فهو مفتوح للأعلى كما في الشكل (19).

الشكل (19)



إذن حسب الحالة (3) المعادلة هي: $x^2 = 4py$

وبما أن النقطة (1,2) تقع على منحنى القطع إذن تحقق معادلته.

$$(1)^2 = 4p(2)$$

$$p = 8p$$

$$p = \frac{1}{8}$$

وبتعويض قيمة $p = \frac{1}{8}$ في المعادلة نجد أن:

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y$$

$$x^2 = \frac{1}{2}y$$

مثال (8):

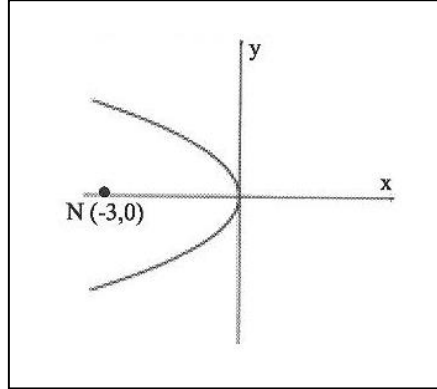
أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه بقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة:

$$(x+3)^2 + y^2 = 16$$

الحل:

مركز الدائرة $(-3, 0) =$ البؤرة وبملاحظة الشكل (20) نجد $p = 3$

الشكل (20)

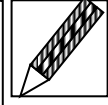


إذن حسب الحالة (2) فإن المعادلة $y^2 = -4px$

وبتعويض قيمة $p = 3$ نجد أن: $y^2 = -12x$

تدريب (2)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه مركز الدائرة: $x^2 = 3 - y^2$ ودليله المستقيم $y + 3 = 0$



مثال (9):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته نقطة تقاطع المستقيم:

$$\frac{y}{4} - \frac{x}{2} = 1 \text{ مع محور } x.$$

الحل:

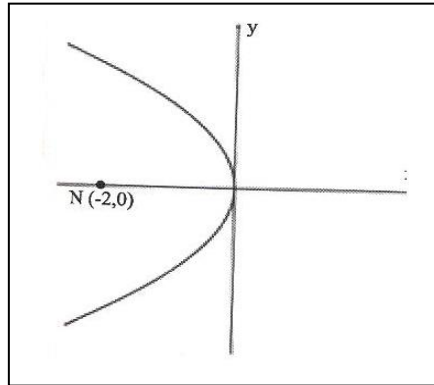
لإيجاد البؤرة نكتب معادلة المستقيم على الصورة: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \text{ فينتج أن:}$$

إذن مقطع هذا المستقيم من محور $x = -2$

إذن البؤرة $(-2, 0)$ إذن $p = 2$ انظر الشكل (21)

الشكل (21)



المعادلة حسب الحالة (2): $y^2 = -4px$

وبتعويض $p = 2$ نجد أن: $y^2 = -8x$

أسئلة تقويم ذاتي



1. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(5,0)$.
2. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-3,0)$ ورأسه نقطة الأصل.
3. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0,2)$.
4. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0,-4)$ ورأسه نقطة الأصل.
5. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(4,0)$ ومعادلة دليله $x+4=0$.
6. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y-3=0$ ورأسه نقطة الأصل.
7. اوجد معادلة القطع المكافئ المتمائل حول محور y ورأسه نقطة الأصل ويمر منحناه بالنقطة $(2,3)$.
8. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة: $(x+2)^2 = 2 - y^2$.
9. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه مركز الدائرة $x^2 + y^2 = 8$ ودليله $y-2=0$.
10. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته هي نقطة تقاطع المستقيم $\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1$ مع محور y .

4. إيجاد القطع المكافئ (من الحالات 1-4)

لقد عرفنا في بند (2) عناصر القطع المكافئ وهي البؤرة والرأس ومعادلة الدليل ومعادلة المحور وسوف نتعلم في هذا البند كيف نجد هذه العناصر بقطع مكافئ معادلته على إحدى الحالات الأربع التي درسناها في بند (3) والمثلة التالية توضح ذلك. ولكن قبل الأمثلة هناك ملاحظات هامة يجب معرفتها:

1. إذا كان التربيع للمتغير y يكون القطع متماثل حول محور x ويكون لدينا حالتان:

(A) إذا كانت إشارة معامل x موجبة، يكون القطع مفتوحاً لليمين.

(B) إذا كانت إشارة معامل x سالبة، يكون القطع مفتوحاً لليسار.

2. إذا كان التربيع للمتغير x ، يكون القطع متماثلاً حول محور y ويكون لدينا حالتان:

(A) إذا كانت إشارة معامل y موجبة، يكون القطع مفتوحاً للأعلى.

(B) إذا كان إشارة معامل y سالبة، يكون القطع مفتوحاً للأسفل.

مثال (1):

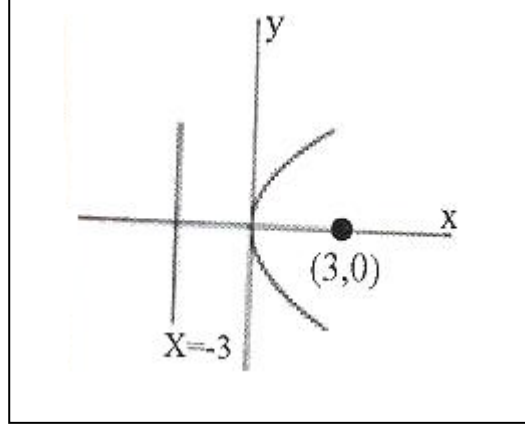
أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $y^2 = 12x$.
الحل:

إحداثيات الرأس $(0,0)$

وبمقارنة المعادلة $y^2 = 12x$ بالمعادلة القياسية $y^2 = 4px$ نجد أن: $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

وبما أن إشارة التربيع للمتغير y إذاً القطع متماثل حول محور x وبما أن إشارة معامل x موجبة إذن القطع مفتوح لليمين انظر الشكل (22).

الشكل (22)



إذن احداثيات البؤرة $(p,0) = (3,0)$

ومعادلة الدليل $x = -p$

وبما أن القطع متماثل حول محور x إذن معادلة المحور $y = 0$.

مثال (2):

اوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ الذي معادلته:

$$y^2 = -8x$$

الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$ وبمقارنة المعادلة $y^2 = -4px$ بالمعادلة $y^2 = -8x$ نجد أن:

$$-4p = -8 \Rightarrow p = 2$$

وبما أن إشارة التربيع y إذن القطع متماثل حول محور x .

وبما أن إشارة معامل x سالبة إذن القطع مفتوح لليسار.

إذن احداثيات البؤرة $(-p,0) = (-2,0)$

ومعادلة الدليل $x = 2 \Leftarrow x = p$

وبما أن القطع متماثل حول محور x إذن معادلة المحور $y = 0$

مثال (3):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع $x^2 = 16y$.

الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$

التربيع للحد x إذن القطع متماثل حول محور y

واشارة معامل y موجبة إذن القطع مفتوح للأعلى.

وبمقارنة المعادلة $x^2 = 16y$ بالمعادلة القياسية $x^2 = 4py$

نجد أن: $4p = 16 \Rightarrow p = 4$

إذن احداثيات البؤرة $(0, p) = (0, 4)$

ومعادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -4$

وبما أن القطع متماثل حول محور y إذن معادلة المحور $x = 0$

مثال (4):

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع المكافئ: $x^2 = -20y$

الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$

وبما أن التربيع للحد x ، إذنالقطع متماثل حول محور y .

وبما أن اشارة معامل y سالبة إذن القطع مفتوح للأسفل.

وبمقارنة المعادلة $x^2 = -20y$ بالمعادلة القياسية $x^2 = -4py$

نجد أن: $-4p = -20 \Rightarrow p = 5$.

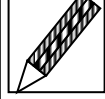
إذن احداثيات البؤرة $(0, -p) = (0, -5)$.

ومعادلة الدليل $y = p \Rightarrow y = 5$.

وبما أن القطع متمائل حول محور y إذن معادلة المحور $x=0$.

تدريب (3)

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور والدليل للقطع $y^2 = 8x$



أسئلة تقويم ذاتي

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل وارسم القطع المكافئ الذي معادلته:

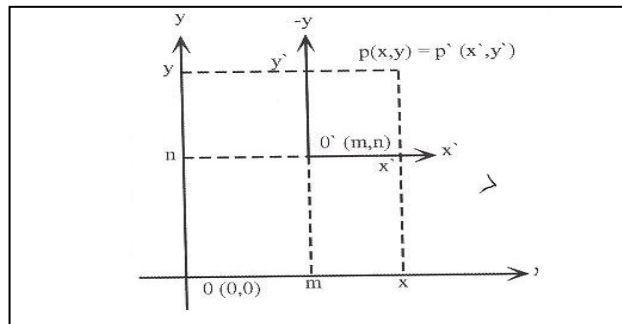
$x^2 = 8y$ (3)	$y^2 = -12x$ (2)	$y^2 = 20x$ (1)
$x^2 = -12y$ (6)	$y^2 = 16x$ (5)	$x^2 = -16y$ (4)
$x^2 = -8y$ (9)	$y^2 = -8x$ (8)	$x^2 = \frac{4}{3}y$ (7)



5. انسحاب المحاور

افرض أن لدينا المستوى الديكارتي xy ونقطة الأصل $O(0,0)$.
واردنا سحب هذا المستوى إلى مستوى آخر $x'y'$ نقطة الأصل له $O'(m,n)$ كما هو موضح في الشكل (23).

الشكل (23)



فإذا كانت النقطة $p(x, y)$ في المستوى $x'y'$ و اردنا سحب هذه النقطة إلى المستوى xy ولتكن احداثياتها بعد الانسحاب $p'(x', y')$ فما العلاقة بين احداثيات النقطة p واحداثيات النقطة p .
واضح من الشكل (23) أن:

$$\begin{aligned} x &= x - m \\ y &= y - m \end{aligned}$$

وتسمى العلاقة (*) علاقة انسحاب المحاور
مثال (1):

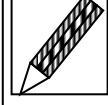
إذا كانت النقطة $p(7, 4)$ في المستوى xy فما هي احداثيات p في المستوى $x'y'$ الذي نقطة الأصل له $(3, -5)$.
الحل:

نعمد على علاقة الانسحاب: $x' = x - m = 7 - 3 = 4$
 $y' = y - n = 4 - (-5) = 9$
إذن النقطة p بعد الانسحاب تصبح $p'(4, 9)$
مثال (2):

xy نظام احداثيات المستوى الديكارتي، اجري له انسحاب للنظام xy الذي مركزه $(2, 3)$ فما احداثيات النقطة $p(5, 10)$ في النظام xy الجديد.
الحل:

نطبق على علاقة الانسحاب: $x' = x - m = 5 - 2 = 3$
 $y' = y - n = 10 - 3 = 7$
إذن: $p'(x', y') = p'(3, 7)$

تدريب (4)



إذا كان مركز النظام الجديد $x'y'$ هو $(12,8)$ أوجد احداثيات النقطة p' إذا كانت احداثيات النقطة p في النظام القديم xy هي $(4,-4)$.

أسئلة تقويم ذاتي



1. افرض أن نقطة الاصل لنظام الاحداثيات الجديد $x'y'$ هي $(4,-5)$ ، للنظام القديم xy ما هما الاحداثيان الجديدان للنقطة p التي احداثياتها $(6,1)$ ؟
2. إذا كانت $p_2(5,4)$ ، $p_1(15,25)$ نقطتان في المستوى xy أوجد احداثيات p'_1, p'_2 للنظام $x'y'$ الذي مركزه $(7,2)$ ؟

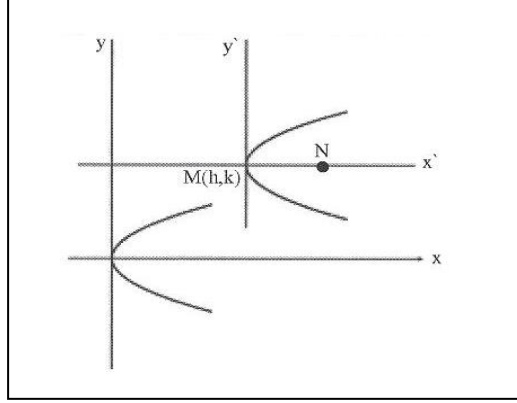
6. معادلات القطع المكافئ بصورة عامة

في هذا البند سوف نتعرف على معادلات القطع المكافئ بصورة عامة أي عندما يكون رأس القطع $M(h,k)$ وحوره يوازي محور x أو y . وهنا يوجد أربع حالات ايضاً.

الحالة الخامسة:

إذا كان القطع المكافئ متماثلاً حول محور يوازي محور x ورأسه $M(h,k)$ ومفتوح لليمين كما في الشكل (24).

الشكل (24)



واضح من الشكل (24) أن الحالة (1) للقطع المكافئ والذي معادلته $y^2 = 4px$ والتي درسناها في البند (4) قد اجري لها انسحاب للمحاور $x'y'$ الجديان وبمركز جديد هو (h, k) والذي يمثل رأس القطع المكافئ الجديد والذي معادلته $y'^2 = 4px'$ بالنسبة للمحاور $x'y'$

وباستخدام علاقة انسحاب المحاور:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن: (5).... $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

وتسمى العلاقة (5) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي محور x ومفتوح لليمين.

ملاحظات:

1. معادلة المحور $y = k$.
2. البؤرة $(h + p, k)$.
3. معادلة الدليل $x = h - p$.

مثال (1):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (2,3) وبؤرته (5,3).

الحل:

نحن نعرف أن محور التماثل يمر بالبؤرة والرأس إذن القطع متماثل حول مستقيم يوازي محور X .

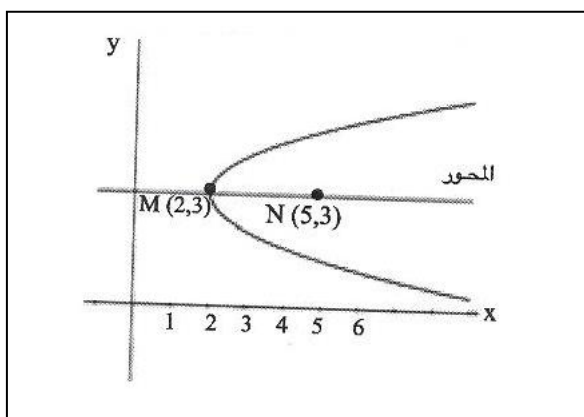
وبما أن اتجاه فتحة القطع هي باتجاه البؤرة إذن فالقطع مفتوح لليمين.

إذن معادلته حسب الحالة (5): $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

وبحساب قيمة p: $p = 5 - 2 = 3$

والتعويض في المعادلة (5) ينتج أن: $(y - 3)^2 = 12(x - 2)$ أنظر الشكل (25).

الشكل (25)



تدريب (5)

أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه (2,4) وبؤرته (2,4)؟

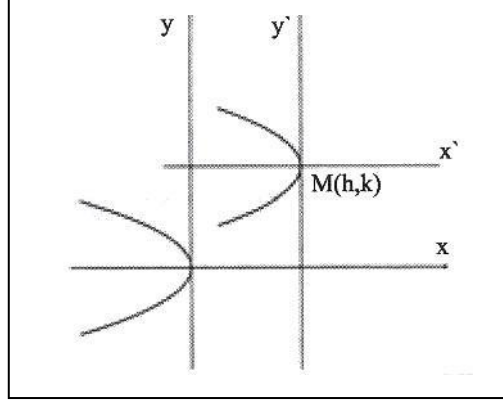


الحالة السادسة:

إذا كان القطع المكافئ متماثلاً حول محور يوازي محور X ورأسه $M(h,k)$ ومفتوحاً

لليسار كما في الشكل (26).

الشكل (26)



واضح من الشكل (26) أن الحالة (2) للقطع المكافئ والذي معادلته $y^2 = -4px$ والتي درسناها في البند (4) قد اجري لها انسحابا للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو $M(h,k)$ والذي يمثل رأس القطع المكافئ الجديد والذي معادلته $y'^2 = -4px$. بالنسبة للمحاور $x'y'$.

وباستخدام علاقة انسحاب المحاور:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(y - k)^2 = -4(x - h).....(6)$$

وتسمى العلاقة (6) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي x ومفتوح لليسار.

ملاحظات:

1. معادلة المحور: $y = k$

2. إحداثيات البؤرة: $(h - p, k)$

3. معادلة الدليل: $x = h + p$

مثال (2):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (3,2) وبؤرته (1,2).

الحل:

بما أن البؤرة والرأس واقعتان على محور يوازي x إذن القطع متمائل حول محور يوازي محور x ومفتوح لليسار (باتجاه البؤرة).

إذن المعادلة حسب الحالة (6): $(y - k)^2 = -4p(x - h)$

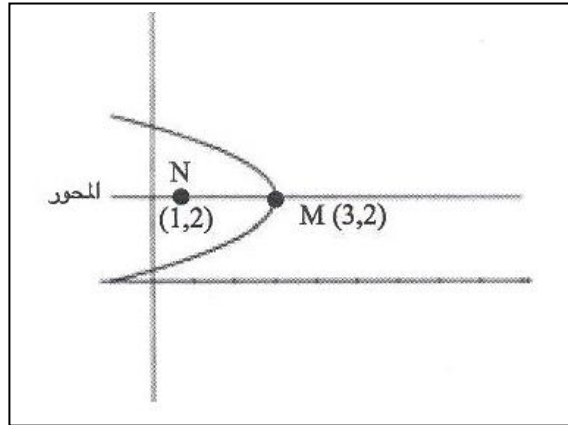
وبحساب قيمة p : $p = 3 - 1 = 2$

والتعويض بقيمة p ، وإحداثيات الرأس نجد أن:

$$(y - 2)^2 = -8(x - 3)$$

انظر الشكل (27).

الشكل (27)



تدريب (6)

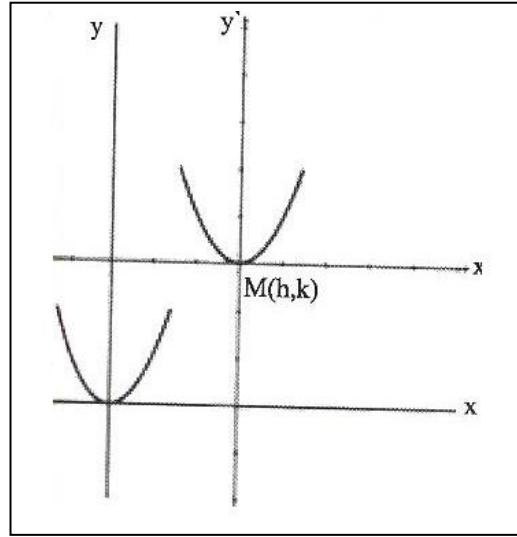
أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-1,2)$ وبؤرته $(-3,2)$.



الحالة السابعة:

إذا كان القطع المكافئ متماثل حول محور يوازي محور y ورأسه $M(h,k)$ ومفتوح للأعلى كما في الشكل (28).

الشكل (28)



واضح من الشكل (28) أن الحالة (3) للقطع المكافئ والذي معادلته $x^2 = 4py$ والتي درسناها في البند (4) قد أجرى لها انسحاب للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو $M(h,k)$ والذي يمثل رأس القطع المكافئ الجديد والذي معادلته $x'^2 = 4py'$ بالنسبة للمحاور $x'y'$ وباستخدام علاقة انسحاب المحاور التي درسناها في بند (5).

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \dots (7)$$

وتسمى العلاقة (7) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي محور y ومفتوح للأعلى:

ملاحظات:

1. معادلة المحور $x = h$.

2. معادلة الدليل $y = k - p$.

3. إحداثيات البؤرة $(h, k + p)$.

مثال (3):

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(3, 2)$ وبؤرته $(3, 5)$

الحل:

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور y إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور y ، والقطع مفتوح للأعلى (باتجاه البؤرة).

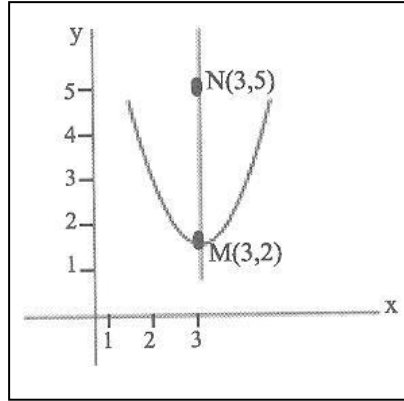
إذن المعادلة حسب الحالة (7): $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

وبحساب p : $p = 5 - 2 = 3$

والتعويض بإحداثيات الرأس $(3, 2)$ نجد أن:

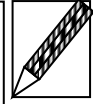
$(x - 3)^2 = 12(y - 2)$ انظر الشكل (29).

الشكل (29)



تدريب (7)

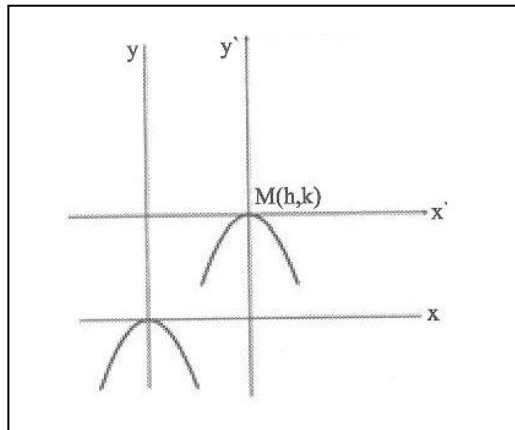
أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه $(-3,2)$ وبؤرته $(-3,5)$



الحالة الثامنة:

إذا كان القطع متمائل حول محور يوازي محور y ورأسه $M(h,k)$ ومفتوح للأسفل. كما في الشكل (30).

الشكل (30)



واضح من الشكل (30) أن الحالة (4) للقطع المكافئ والذي معادلته $x^2 = -4py$ والتي درسناها في البند (4) قد اجري لها انسحاب للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو $M(h, k)$ والذي يمثل رأس المقطع المكافئ الجديد والذي معادلته: $x'^2 = -4py$.

وبالنسبة للمحاور $x'y'$ وباستخدام علاقة انسحاب المحاور:

$$x' = x - h$$

$$y = y - k$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \dots (8)$$

وتسمى العلاقة (8) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي محور y ومفتوح للأسفل:

ملاحظات:

$$1. \text{ معادلة المحور } x = h.$$

$$2. \text{ معادلة الدليل } y = k + p.$$

$$3. \text{ احداثيات البؤرة } (h, k - p)$$

مثال (4):

جد معادلة قطع مكافئ رأسه (3,5) وبؤرته (3,2).

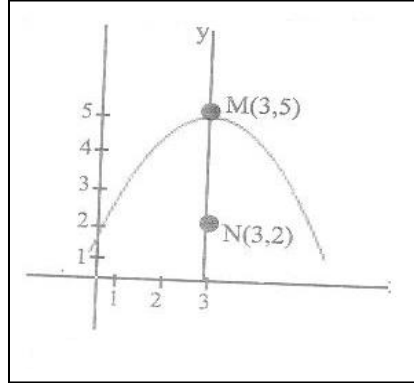
الحل:

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور y إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور y ، والقطع مفتوح للأسفل (باتجاه البؤرة)، إذن المعادلة حسب الحالة (8):

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \text{ وبحساب } p: p = 5 - 2 = 3$$

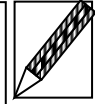
والتعويض في المعادلة نجد أن: $(x-3)^2 = -12(y-5)$
انظر الشكل (31).

الشكل (31)



تدريب (8)

جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(-1,-1)$ ورأسه $(-1,1)$



أمثلة متنوعة:

مثال (1):

اوجد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(4,0)$ ومعادلة دليله $y = -4$.

الحل:

انظر الشكل (32) احداثيات رأس القطع هي M وهي منتصف القطعة المستقيمة NR

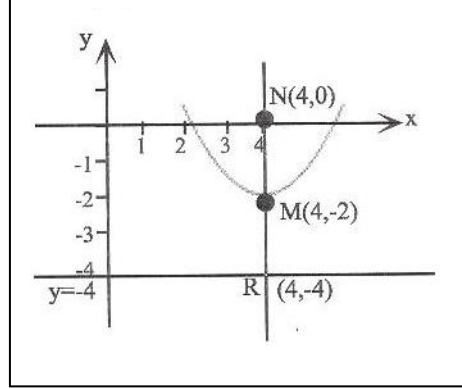
$$(4,-2) = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{0+(-4)}{2} \right) = \text{إذن احداثيات الرأس}$$

$$\text{وبحساب } P: P = 0 - (-2) = 2$$

وبملاحظة أن المسألة تنطبق على الحالة (7) إذن المعادلة: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

وبتعويض قيمة p واحداثيات الرأس نجد أن: $(x-4)^2 = 8(y+2)$.

الشكل (32)

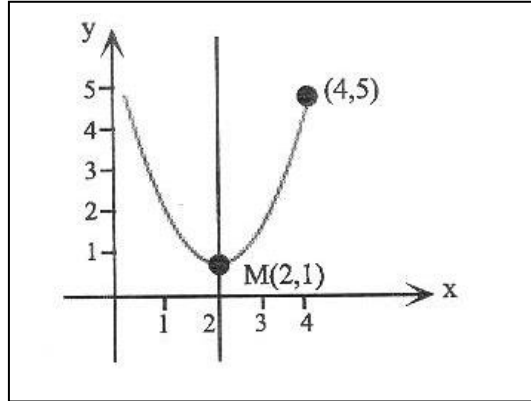


مثال (2):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (2,1) ويمر منحناه بالنقطة (5,4) ومحوره يوازي محور y ثم ارسم منحناه؟
الحل:

بما أن محور القطع يوازي محور y إذن هو متماثل حول مستقيم يوازي محور y ، ويكون أما مفتوح للأعلى أو للأسفل وبما أن منحناه يمر في النقطة (4,5)، إذن هو مفتوح للأعلى، انظر الشكل (33).

الشكل (33)



إذن معادلته حسب الحالة (7): $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
 وبتعويض احداثيات الرأس نجد أن: $(x - 2)^2 = 4p(y - 1)$
 وبما أن النقطة (4,5) تقع على منحنى القطع إذن تحقق المعادلة:

$$(4 - 2)^2 = 4p(5 - 1)$$

$$4 = 16p$$

$$p = \frac{1}{4}$$

وبتعويض قيمة p في المعادلة نحصل على:

$$(x - 2)^2 = (y - 1)$$

ملحظة هامة:

1. معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور y قد تكتب على الصورة:

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0 \quad , \quad a, b, c \in R$$

2. معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور x قد تكتب على الصورة:

$$x = ay^2 + by + c \quad , \quad a \neq 0 \quad , \quad a, b, c \in R$$

مثال (3):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور y ويمر بمنحناه بالنقاط (2,3) و (-1,6) و (1,0).

الحل:

معادلة القطع كما ورد في الملاحظات أعلاه هي:

$$y = ax^2 + bx + c$$

وبما أن النقاط الثلاث تقع على منحنى القطع إذن تحقق معادلته.

$$(2,3) \Rightarrow 3 = 4a + 2b + c \dots\dots\dots(1)$$

$$(-1,6) \Rightarrow 6 = a - b + c \dots\dots\dots(2)$$

$$(1,0) \Rightarrow 0 = a + b + c \dots\dots\dots(3)$$

وبجمع المعادلتين (3) , (2) نحصل على:

$$6 = 2a + 2c \dots\dots\dots(4)$$

بضرب المعادلة (2) بـ 2 نحصل على:

$$12 = 2a - 2b + 2c \dots (5)$$

بجمع المعادلتين (5) , (1) نحصل على:

$$15 = 6a + 3c \dots (6)$$

بضرب المعادلة (4) بـ -3 نجد أن:

$$-18 = -6a - 6c \dots (7)$$

بجمع المعادلتين (7) و (6) نحصل على:

$$-3 = -3c \Rightarrow c = 1$$

نعوض قيمة c في المعادلة (4): $6 = 2a + 2 \Rightarrow 4 = 2a$

$$a = 2$$

نعوض قيمة a, c في المعادلة (1) لنحصل على: $3 = 8 + 2b + 1 \Rightarrow -6 = 2b$

$$b = -3$$

وبتعويض قيم b, c في معادلة القطع نجد أن: $y = 2x^2 - 3x + 1$

أسئلة تقويم ذاتي



1. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (2, -2) وبؤرته (4, -2).
2. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0, -2) وبؤرته (-3, -2).
3. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (6, 1) وبؤرته (6, 5).
4. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (6, 1) وبؤرته (6, -4).
5. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محوره $y = 0$ ويمر بالنقطتين (3, 2) و (2, -3).

7. إيجاد عناصر القطع المكافئ من المعادلات العامة

في هذا البند سنجد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته على إحدى

الحالات (5)، (6)، (7)، (8)، والعناصر هي:

1. إحداثيات البؤرة.

2. إحداثيات الرأس.

3. معادلة المحور.

4. معادلة الدليل.

مع الأخذ بنظر الاعتبار الملاحظات التالية:

1- إذا كان التربيع للمقدار الذي يحوي على المتغير y فإن القطع متماثل حول

محور يوازي محور x وهنا تظهر حالتان:

(A) إذا كانت إشارة معامل x موجبة فالقطع مفتوح لليمين.

(B) إذا كانت إشارة معامل x سالبة فالقطع مفتوح لليسار.

2- إذا كان التربيع للمقدار الذي يحتوي على المتغير x فإن القطع متماثل حول

محور يوازي محور y وهنا تظهر حالتان أيضاً:

(A) إذا كانت إشارة معامل Y موجبة فالقطع مفتوح للأعلى.

(B) إذا كانت إشارة معامل Y سالبة فالقطع مفتوح للأسفل.

مثال (1):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل وارسم منحنى القطع

المكافئ الذي معادلته: $(Y - 3)^2 = 12(X - 2)$.

الحل:

إحداثيات الرأس $M(2,3)$ ، بما أن التربيع للمقدار الذي يحتوي على المتغير y إذن

القطع متماثل حول محور يوازي محور x .

وبما أن معامل x موجب إذن القطع مفتوح لليمين وبحساب قيمة p : $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

إذن إحداثيات البؤرة $(5,3)=(h+p,k)$

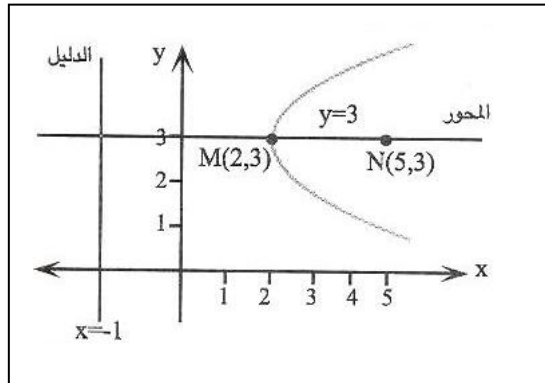
معادلة المحور: $y=k \Rightarrow y=3$

معادلة الدليل: $x=h-p=2-3$

$$x=-1$$

ورسمه القطع كما في الشكل (34)

الشكل (34)



مثال (2):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل وارسم منحنى القطع المكافئ

الذي معادلته: $(y-2)^2 = -8(x-3)$

الحل:

رأس القطع $M(h,k)=M(3,2)$ وبما أن التربيع للمقدار الذي يحتوي على المتغير Y إذن

القطع متماثل حول محور يوازي x .

وبما أن إشارة معامل x سالبة إذن القطع مفتوح لليسار.

وبحساب قيمة p : $-4p = -8 \Rightarrow p = 2$

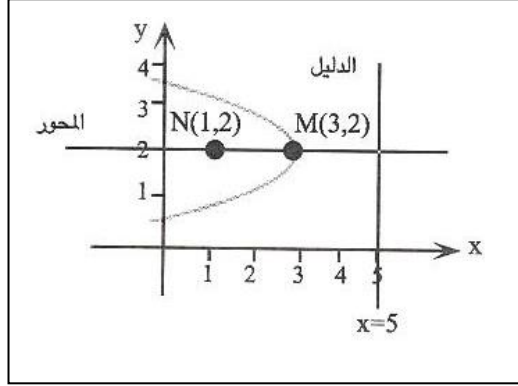
معادلة المحور: $y=k \Rightarrow y=2$

إحداثيات البؤرة: $(h-p,k)=(3-2,2)=(1,2)$

معادلة الدليل: $x=h+p \Rightarrow x=3+2 \Rightarrow x=5$

ورسمة القطع كما في الشكل (35).

الشكل (35)



مثال (3):

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور وارسم منحنى القطع المكافئ

الذي معادلته: $(x - 3)^2 = 12(y - 2)$

الحل:

احداثيات الرأس: $M(h, k) = M(3, 2)$

بما أن التربيع للمقدار الذي يحتوى على الحد x إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور y وبما أن إشارة معامل y موجبة إذن القطع مفتوح للأعلى.

وبحساب قيمة p : $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

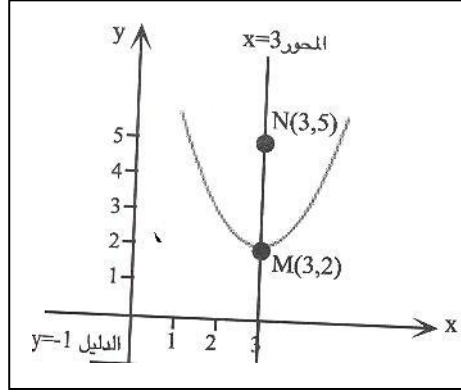
معادلة المحور: $x = h \Rightarrow x = 3$

معادلة الدليل: $y = k - p \Rightarrow y = 2 - 3 \Rightarrow y = -1$

احداثيات البؤرة: $(h, k + p) \Rightarrow (3, 2 + 3) = (3, 5)$

ورسمة القطع المكافئ في الشكل (36).

الشكل (36)



مثال (4):

أوجد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته: $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

الحل:

هذه المعادلة تربيعية في x وخطية في y لذلك نقوم بإكمال المربع في x على النحو التالي:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 = -8y - 9 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = -8y - 8 \Rightarrow$$

$$(x - 1)^2 = -8(y + 1)$$

وبما أن التربيع للمتغير x إذاً القطع متمائل حول محور يوازي محور y .

وبما أن إشارة معامل y سالبة إذاً القطع مفتوح للأسفل ورأس القطع $M(h, k) = M(1, -1)$

معادلة المحور: $x = h \Rightarrow x = 1$

وبحساب قيمة P : $-4p = -8 \Rightarrow p = 2$

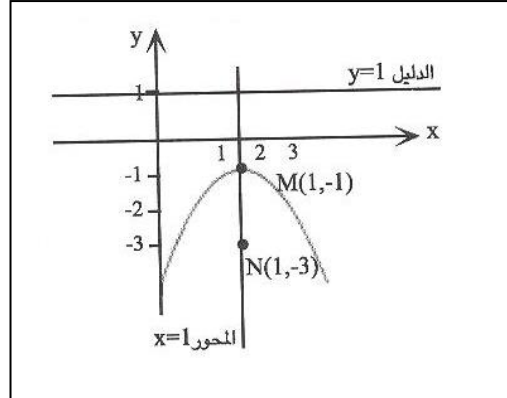
معادلة الدليل: $y = k + p \Rightarrow y = -1 + 2$

$$y = 1$$

احداثيات البؤرة: $(h, k - p) = (1, -1 - 2) = (1, -3)$

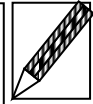
ورسمة القطع كما في الشكل (37).

الشكل (37)



تدريب (9)

بين أن منحنى $y = 6x^2 - 12x + 8$ هو قطع مكافئ.



أسئلة تقويم ذاتي

أوجد إحداثيات الرأس والبيّرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور وارسم منحنى القطع المكافئ الذي معادلته:



(1) $(y - 4)^2 = 16(x + 2)$

(2) $(y - 2)^2 = -8(x + 1)$

(3) $(x + 3)^2 = 12(y - 2)$

(4) $(x + 1)^2 = -8(y - 1)$

(5) $(y + 2)^2 = -12x$

(6) $(x - 6)^2 = 16(y - 1)$

8. الاختلاف المركزي (e) للقطع المكافئ

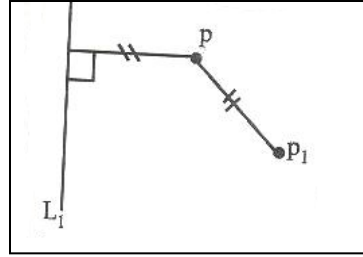
الاختلاف المركزي (e) هو خاصية هندسية للقطع المكافئ والنظرية التالية

توضح ذلك.

نظرية:

إذا كان L_1 مستقيماً وكانت P_1 نقطة خارج المستقيم وكان (e) عدداً حقيقياً موجباً؛ فإن المحل الهندسي للنقطة p في هذا المستوى والتي تحقق المعادلة: (المسافة بين P_1P) = (المسافة بين P والخط L_1 مضروباً في (e)) هو معادلة قطع مخروطي، ويكون هذا القطع: قطعاً مكافئاً إذا كانت $e=1$

الشكل (38)



البرهان:

النقطة p تحقق المعادلة $PP_1 = ePL_1$

وبقسمة الطرفين على PL_1 ينتج أن: $\frac{PP_1}{PL_1} = e$

إذن $e=1$

مثال (1):

احسب الاختلاف المركزي (e) للقطع الذي معادلته $x^2 = 3y$

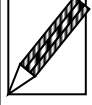
الحل:

بما أن المعادلة تمثل معادلة قطع مكافئ إذن:

$$e=1$$

تدريب (10)

احسب الاختلاف المركزي (e) للقطع الذي معادلته: $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

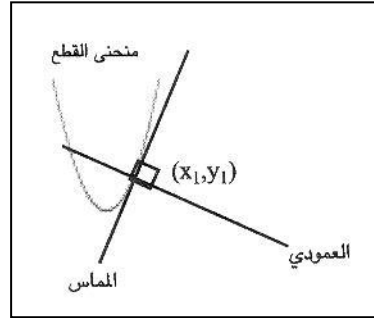


9. معادلة المماس والعمودي على المماس للقطع المكافئ

في هذا البند سوف ندرس معادلة المماس للقطع المكافئ الذي معادلته:

$y^2 = 4px$ عند نقطة تماس المماس مع منحنى القطع وهي (x_1, y_1) كما في الشكل (39).

الشكل (39)



ومعادلة العمودي على المماس عند نفس النقطة (x_1, y_1) .

نظرية:

إن معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته: $y^2 = 4px$ عند النقطة (x_1, y_1)

هي $y_1 y = 2p(x + x_1)$.

مثال (1):

جد معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 16x$ ، أوجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1,4).

الحل:

بما أن النقطة (1,4) تحقق معادلة القطع المكافئ إذن فهي تقع على منحناه. وتكون معادلة

$$\text{المماس } y_1 y = 2p(x + x_1)$$

$$\text{وبحساب قيمة } p: 4p = 16 \Rightarrow p = 4$$

وتعويض قيمة p وإحداثيات النقطة (1,4) في معادلة المماس، نحصل على معادلة

$$\text{المماس: } 4y = 8(x + 1)$$

$$\text{وبالتبسيط: } y = 2x + 2$$

ولايجاد معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1,4) وبمعرفتنا بميل المماس وهو (2)

$$\text{نطبق على العلاقة } m_1 m_2 = -1$$

حيث : (m_1) ميل المماس.

(m_2) ميل العمودي على المماس.

$$\text{إذن: } m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{-1}{2}$$

إذن معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 4 = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

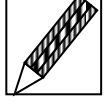
$$y - 4 = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{9}{2}$$

تدريب (11)

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ عند النقطة (2,4).



10. المحل الهندسي

لقد عرفنا المحل الهندسي في الوحدة الأولى، والقطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة يكون بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم. واليك عزيزي الدارس الأمثلة التالية:

مثال (1):

اوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة $N(x,y)$ التي بعدها عن المستقيم $y = -2$ يساوي بعدها عن النقطة (0,4).

الحل:

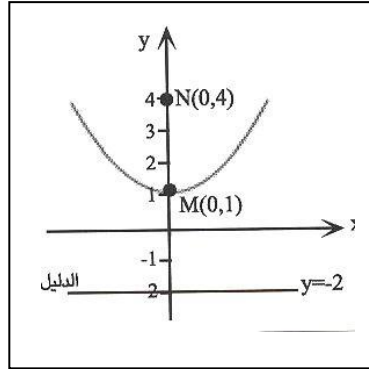
إن هذا المال ينطبق تماماً على تعريف القطع المكافئ الذي بؤرته $N(0,4)$ ودليله $y = -2$.

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{4+(-2)}{2} \right) = (0,1)$$

إذن المعادلة هي: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

وبالتعويض بقيمة $p = 3$ واحداثيات الرأس (0,1) نجد أن: $x^2 = 12(y-1)$ أنظر الشكل (40).

الشكل (40)



مثال (2):

النقطة $w(x, y)$ تتحرك في المستوى بحيث أن: $y = t^2 + 7$ ، $x = 2t + 3$
اكتب المعادلة بدلالة x, y وما نوع القطع.

الحل:

من المعادلة: $x = 2t + 3 \Rightarrow$

$$t = \frac{x-3}{2}$$

وبتعويض قيمة t في المعادلة: $y = t^2 + 7$ نجد أن:

$$y = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 7 \Rightarrow$$

$$y - 7 = \frac{(x-3)^2}{4} \text{ وبالضرب التبادلي}$$

$$(x-3)^2 = 4(y-7)$$

وهذه قطع مكافئ.

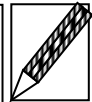
تدريب (12)

النقطة $w(x, y)$ تتحرك بحيث أن:

$$x = \sin t - \cos t$$

$$y = \sin 2t$$

اكتب معادلة المنحنى وما نوعه.



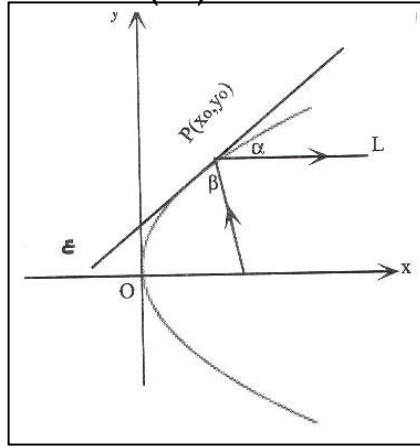
11. تطبيقات على القطع المكافئ

في هذا البند سوف نتعرف على بعض تطبيقات القطع المكافئ:

- 1- تستعمل أشكال القطع المكافئ في عواكس الضوء وموجات الراديو. فالامواج التي مصدرها البؤرة تنعكس على سطح القطع المكافئ موازية لمحوره.

فإذا كان المستقيم ε مماساً للقطع المكافئ عند $p(x_0, y_0)$ انظر الشكل (41).

الشكل (41)



PL موازي للمحور x فإن الزاوية B (زاوية السقوط) تساوي الزاوية α (زاوية الانعكاس).

وكذلك أي شعاع قادم ساقط على القطع المكافئ موازي للمحور ينعكس في البؤرة.

ولهذا تجد هوائيات البث والاستقبال الراديو ذات مقاطع تشبه القطع المكافئ.

- 2- خط سير مقذوفة تسير بتأثير الجاذبية الأرضية فقط هو قطع مكافئ. سواء أكانت المقذوفة، قذيفة مدفع أو صاروخ أو كرة جولف.

3- شكل الكيبل المعلق يكون قطعاً مكافئاً، إذا كان وزن الكيبل صغيراً مقارنة مع الأوزون التي يحملها، وإذا كانت موزعة توزيعاً منتظماً على طول الكيبل. والجسور التي تحملها الكيبلات بهذه الطريقة تسمى جسور تعليق، وكثرة من الجسور الضخمة هي جسور تعليق. ومن أشهرها في الولايات المتحدة الأمريكية جسر البوابة الذهبية.

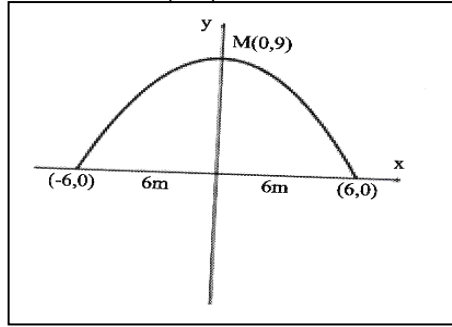
مثال (1):

طول قاعدة قوس بشكل قطع مكافئ 12 متراً ورأس القوس يرتفع بمقدار 9 أمتار فوق سطح الأرض، أكتب المعادلة الممثلة لهذا القوس علماً بأنه متمثل حول محور y .

الحل:

نرسم المسألة كما في الشكل (42)

الشكل (42)



إذن المعادلة هي: $(x - h)^2 = -4p(y - k)$

وبتعويض إحداثيات الرأس $M(0,9)$ في المعادلة نجد أن:

$$x^2 = -4p(y - 9)$$

وبما أن النقطة $(6,0)$ تقع على المنحنى إذن فهي تحقق معادلته:

$$36 = -4p(0 - 9) \Rightarrow 36 = 36p \Rightarrow p = 1$$

وبتعويض قيمة $p = 1$ في المعادلة نحصل على:

$$x^2 = -4(y - 9)$$

مثال (2):

قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة:

$$d(t) = 20t - 5t^2$$

حيث (t) الزمن بالثواني، (d) المسافة بالامتر. احسب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

الحل:

إن المقذوفات تأخذ منحنى قطع مكافئ، حيث أن الاحداثي y للرأس يمثل أقصى ارتفاع كما في الشكل (43).

لذلك نكتب المعادلة $d = 20t - 5t^2$ على شكل معادلة قطع مكافئ وكما يلي:

$$-5t^2 + 20t = d$$

$$t^2 - 4t = \frac{d}{-5} \quad \text{نجد ن } (-5)$$

$$t^2 - 4t + 4 = \frac{-1}{5}d + 4 \quad \text{وبإكمال المربع}$$

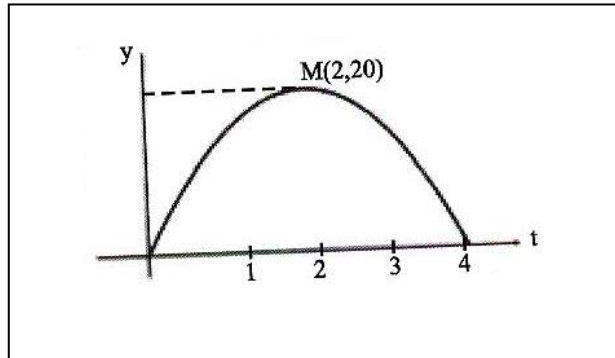
$$(t - 2)^2 = \frac{-1}{5}(d - 20)$$

إذن احداثيات الرأس $M(t, d) = M(2, 20)$ أي عند $t = 2$ (ثانية) يكون أقصى ارتفاع

$d = 20$ متراً والشكل (44) يوضح ذلك.

وبعبارة أوضح أقصى ارتفاع هو (20) متراً عندما يكون الزمن (2) ثانية.

الشكل (44)



الخلاصة

عزيزي الدارس، لقد تم في هذه الوحدة بحث الأمور التالية:

1. تعريف القطع المكافئ: وهو المحل الهندسي لمجموعة النقط $A(x, y)$ التي بعدها عن نقطة الأصل ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.
2. اشتقاق معادلات القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ومحوره إما محور x أو محور y وهي: $x^2 = 4py$ و $x^2 = -4py$ و $y^2 = 4px$ و $y^2 = -4px$.
3. اشتقاق معادلات القطع المكافئ الذي رأسه $M(h, k)$ ومحوره يوازي محور x أو محور y وهي: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ و $(y - k)^2 = -4p(y - k)$ و $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ و $(x - h)^2 = -4p(x - k)$.
4. إيجاد العناصر الأساسية من المعادلات المختلفة وهي البؤرة والرأس ومعادلة المحور ومعادلة الدليل.
5. اشتقاق علاقة التحويلات الهندسية (انسحاب المحاور) وهي:

$$x' = x - m$$

$$y' = y - n$$

6. إيجاد الاختلاف المركزي للقطع المكافئ ويساوي (1).
7. إيجاد معادلة المماس لقطع مكافئ وهي: $y_1 y = 2p(x + x_1)$.
8. حل مسائل عملية تحتوي على معادلة القطع المكافئ.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، سنتناول في الوحدة التالية موضوع القطع الناقص، وهو النوع الثاني من القطوع المخروطية التي سنستعرضها في هذا المقرر، نبدأ بتعريفه ومعرفة عناصره ومعالادته بالطريقة نفسها التي استعرضنا فيها القطع المكافئ. نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك.

اجابات التدريبات

تدريب (1):

احداثيات الرأس $M(0,3)$ ، احداثيات البؤرة $N(2,3)$ معادلة الدليل $x = -2$ ، معادلة المحور $y = 3$.

تدريب (2)

الرأس $M(0,0)$ ، $p = 3$

المعادلة حسب الحالة (3): $x^2 = 4py$

وبتعويض قيمة $p = 3$ نجد أن: $x^2 = 12y$

تدريب (3):

احداثيات الرأس $(0,0)$

وبما أن التربيع للحد y إذن القطع متماثل حول محور x .

وبما أن اشارة معامل x موجبة إذن القطع مفتوح لليمين وبمقارنة المعادلة $y^2 = 8x$

بالمعادلة $y^2 = 4px$ نجد أن $p = 2 \Leftarrow 4p = 8$

البؤرة $(2,0) = (p,0)$

معادلة الدليل $x = -2 \Leftarrow x = -p$

وبما أن القطع متماثل حول محور x إذن معادلة المحور $y = 0$.

تدريب (4)

$$x' = x - m = 4 - 12 = -8$$

$$y' = y - n = -4 - (-8) = 4$$

$$p'(x', y') = (-8, 4)$$

تدريب (5)

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور x إذن القطع متماثل حول مستقيم يوازي

محور x ، ومفتوح لليمين (باتجاه البؤرة) إذن معادلته حسب الحالة (5).

$$(y - 4)^2 = 16(x + 2)$$

تدريب (6):

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور x إذن القطع متمائل حول محور يوازي محور x ومفتوح لليسار (باتجاه البؤرة).

$$\text{إذن معادلته حسب الحالة (6): } (y - k)^2 = -4p(x - h)$$

$$\text{وبحساب } p: p = -1 + 3 = 2$$

$$\text{والتعويض: } (y - 2)^2 = -8(x + 1)$$

تدريب (7):

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور y إذن القطع متمائل حول مستقيم يوازي محور y ومفتوح للأعلى (باتجاه البؤرة) إذن المعادلة حسب الحالة (7):

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$\text{وبحساب } p: p = 5 - 3 = 2$$

$$\text{والتعويض: } (x + 3)^2 = 12(y - 2)$$

تدريب (8):

حسب الحالة (8) المعادلة هي:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

$$\text{وبحساب } p: p = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{والتعويض: } (x + 1)^2 = -8(y - 1)$$

تدريب (9):

$$\frac{6x^2}{6} - \frac{12}{6}x = \frac{y}{6} - \frac{8}{6}$$

$$x^2 - 2x = \frac{y}{6} - \frac{8}{6}$$

$$(x - 1)^2 = \frac{y}{6} - \frac{8}{6} + \frac{6}{6}$$

$$(x-1)^2 = \frac{y}{6} - \frac{2}{6}$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{6}(y-2)$$

تدريب (10):

$e=1$ لأنها معادلة قطع مكافئ

تدريب (11):

$$4p = 8$$

$$p = 2 \quad \text{و} \quad (2,4)$$

معادلة المماس: $y_1 y = 2p(x + x_1)$

وبالتعويض: $4y = 4(x + 2)$

$$4y = 4x + 8$$

$$y = x + 2$$

$$-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{\text{ميل المماس}} = \text{ميل العمودي}$$

معادلة العمودي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = -(x - 2)$$

$$y - 4 = -x + 2$$

$$y = -x + 6$$

تدريب (12):

$$x^2 = (\sin t - \cos t)^2$$

$$= \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t$$

$$= 1 \sin 2t$$

$$x^2 = 1 - y$$

$$x^2 = -y + 1$$

$x^2 = -(y-1)$ ونوع القطع مكافئ.

مسرد المصطلحات

- **مستقيم عمودي على منحنى عند نقطة: Normal Line to a curve at apoint:**
هو مستقيم يعامد المماس عند تلك النقطة وميله يساوي سالب مقلوب ميل المماس.
- **مقعراً للأعلى: Concave up ward :**
يكون $F(x)$ مقعراً للأعلى في الفترة $[a, b]$ إذا وقع منحنى F فوق جميع مماساته في هذه الفترة.
- **مقعراً للأسفل:**
يكون $F(x)$ مقعراً للأسفل في الفترة $[a, b]$ إذا وقع منحنى F تحت جميع مماساته في هذه الفترة.
- **القطع المخروطية Conic Sections**
هي منحنيات مستوية تنتج من تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم في أوضاع مختلفة.
- **القطع المكافئ Parabola :**
هو المحل الهندسي للنقطة (x, y) التي بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.
- **المحور الحقيقي Real axis**
هو المحور الأفقي في المستوى الذي تمثل عليه الأعداد الحقيقية.

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية:

- 1- عوض عدنان؛ وعزام، مفيد؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، أحمد، الهندسة الإحداثية. عمان: جامعة القدس المفتوحة، ط2، 2003.
- 2- نصير، عبدالمجيد؛ والناشف، بسام، الحسبان: التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية. عمان: دار البشير، 1989م.
- 3- سمور، خالد، الرياضيات والهندسة التحليلية. عمان: دار الفكر، ط1، 1999م.

المراجع الأجنبية

- Silverman R.A, Calculus with Analytic Geometry. New Jersey: Prentice- Hall, 1985.
- Swokowski, E.W., calculus with Analytic Geomtry. Prindle, Weberand Schmidt, 3rd ed. 1984.
- Salas S.|. , calculus; one and Several Variables. Wiley, 1980.

