	المتتاليـــــات العددية	سلسلة 1

تمرين 1 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$ ، احسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كم يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$ ، احسب u_3

تمرين 3 : نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ و $v_n = 3 \times 2^n + 1$

1) احسب الحدود الأربعة الأولى لكل من (u_n) و (v_n) ، ماذا تلاحظ ؟

2) برهن بالترجع أن : $\forall n \in IN \quad u_n = 3 \times 2^n + 1$

تمرين 4 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3

2) بين بالترجع أن $\forall n \in IN \quad u_n > 2$

3) بين أن (u_n) تزايدية

تمرين 5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \end{cases}$

1) بين بالترجع أن (u_n) مصغورة بـ 2

2) بين ان (u_n) تناقصية

تمرين 6 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$

1) أ) تحقق أن : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$

ب) بين بالترجع أن (u_n) مصغورة بـ 3

2) أ) تحقق أن : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$

ج) استنتج ان (u_n) تزايدية

تمرين 7 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$

1) بين بالترجع أن (u_n) مكبورة بـ 4

2) استنتج ان (u_n) تزايدية

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+1$; $u_0=2$

$$\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+1\end{cases}$$

$u_1=\frac{2}{5}u_0+1$ $u_1=\frac{4}{5}+1=\frac{9}{5}$	$u_2=\frac{2}{5}u_1+1$ $u_2=\frac{18}{25}+1=\frac{43}{25}$	$u_3=\frac{2}{5}u_2+1$ $u_3=\frac{86}{125}+1=\frac{211}{125}$	

تمرين 2 : $u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$; $u_0=1$

$$\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}\end{cases}$$

$u_1=1+\frac{1}{u_0}$ $u_1=1+1=2$	$u_2=1+\frac{1}{u_1}$ $u_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$u_3=1+\frac{1}{u_2}$ $u_3=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$	

لاحظ أن حساب u_3 يرجع إلى حساب u_2 و u_1 و u_0 بالضرورة ، ولذلك تسمى مثل هذه المتتاليات بالترجعية.

تمرين 3 : $u_0=4$; $u_{n+1}=2u_n-1$ و $v_n=3\times2^n+1$

1	$u_0=4$	$u_1=2u_0-1$ $u_1=8-1=7$	$u_2=2u_1-1$ $u_2=14-1=13$	$u_3=2u_2-1$ $u_3=26-1=25$
	$v_0=3\times2^0+1$ $v_0=3+1=4$	$v_1=3\times2^1+1$ $v_0=6+1=7$	$v_2=3\times2^2+1$ $v_2=12+1=13$	$v_3=3\times2^3+1$ $v_3=24+1=25$
2	لنبين بالترجع أن : $\forall n\in IN$ $u_n=3\times2^n+1$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=4$ و $3\times2^0+1=3+1=4$ منه : $u_0=3\times2^0+1$ نفترض أن : $u_n=3\times2^n+1$ و نبين أن : $u_{n+1}=3\times2^{n+1}+1$ لدينا : $u_{n+1}=2u_n-1=2\left(3\times2^n+1\right)-1=2\times3\times2^n+2-1=3\times2^{n+1}+1$				

لاحظ أن نتيجة السؤال الأخير تعني أننا نستطيع إيجاد تعبير مباشر لبعض المتتاليات الترجعية، مما يسمح بحساب حدودها دون ضرورة حساب الحدود التي تسبقها .

تمرين 4 : $u_{n+1}=3u_n-4$; $u_0=5$

1	$u_1=3u_0-4$ $u_1=15-4=11$	$u_2=3u_1-4$ $u_2=33-4=29$	$u_3=3u_2-4$ $u_3=87-4=83$
2	لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN$ $u_n>2$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=5$ منه : $u_0>2$ نفترض أن : $u_n>2$ و نبين أن : $u_{n+1}>2$ لدينا : $u_n>2\Rightarrow3u_n>6\Rightarrow3u_n-4>6-4\Rightarrow u_{n+1}>2$		
3	لدينا : $u_{n+1}-u_n=3u_n-4-u_n=2u_n-4=2\left(u_n-2\right)>0$ $\forall n\in IN$ ، إذن (u_n) تزايدية		

لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتابة المتتالية وهذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.

تمرين 5 : $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)$; $u_0=3$

1	لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN$ $u_n\geq2$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=3$ منه : $u_0\geq2$ نفترض أن : $u_n\geq2$ و نبين أن : $u_{n+1}\geq2$

www.mathonec.com

	لدينا : $u_{n+1}-2=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)-2=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}-4\right)=\frac{1}{2}\frac{u_n^2+4-4u_n}{u_n}=\frac{(u_n-2)^2}{2u_n}\geq 0$ منه : $u_{n+1}\geq 2$ بالتالي : $u_n\geq 2$ $\forall n\in IN$ أي أن u_n مصغورة بـ 2
2	لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)-u_n=\frac{u_n^2+4}{2u_n}-u_n=\frac{u_n^2+4-2u_n^2}{2u_n}=\frac{4-u_n^2}{2u_n}=\frac{(2+u_n)(2-u_n)}{2u_n}$ وبما أن $u_n\geq 2$ (حسب السؤال السابق) فإن $2-u_n\leq 0$ و $2+u_n>0$ و $2u_n>0$ ومنه : $u_{n+1}-u_n\leq 0$ وبالتالي : (u_n) تناقصية
	لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.

تمرين 6 : $u_0=4$; $u_{n+1}=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}$

1 أ)	لدينا $u_{n+1}-3=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}-3=\frac{2u_n^2-3-3(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3-3u_n-6}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3u_n-9}{u_n+2}$ $\forall n\in IN$ وبما أن : $(u_n-3)(2u_n+3)=2u_n^2+3u_n-6u_n-9=2u_n^2-3u_n-9$ $\forall n\in IN$ فإن : $\boxed{u_{n+1}-3=\frac{(u_n-3)(2u_n+3)}{u_n+2}\quad \forall n\in IN}$
1 ب)	لنبين بالترجع أن $u_n\geq 3$ $\forall n\in IN$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=4$ منه : $u_0\geq 3$ نفترض أن : $u_n\geq 3$ و نبين أن : $u_{n+1}\geq 3$ وبما أن $u_n\geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n-3\geq 0$ و $2u_n+3>0$ و $u_n+2>0$ إذن حسب السؤال السابق $u_{n+1}-3\geq 0$ ومنه : $u_{n+1}\geq 3$
2 أ)	لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n^2-3-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+2}$ $\forall n\in IN$ وبما أن : $(u_n-3)(u_n+1)=u_n^2+u_n-3u_n-3=u_n^2-2u_n-3$ $\forall n\in IN$ فإن : $\boxed{u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+2}\quad \forall n\in IN}$
2 ب)	بما أن $u_n\geq 3$ فإن : $u_n-3\geq 0$ و $u_n+1>0$ و $u_n+2>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$ وبالتالي : (u_n) تزايدية
	لاحظ أن تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 4

تمرين 7 : $u_0=1$; $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+8}$

1	لنبين بالترجع أن $u_n\leq 4$ $\forall n\in IN$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=1$ منه : $u_0\leq 4$ نفترض أن : $u_n\leq 4$ و نبين أن : $u_{n+1}\leq 4$ لدينا : $u_n\leq 4\Rightarrow 2u_n\leq 8\Rightarrow 2u_n+8\leq 16\Rightarrow 2u_n+8\leq\sqrt{16}\Rightarrow u_{n+1}\leq 4$
	يمكن أيضا استعمال تقنية الفرق، لكن يجب استعمال المرافق، كما يلي: $u_{n+1}-4=\sqrt{2u_n+8}-4=\frac{2u_n+8-16}{\sqrt{2u_n+8}+4}=\frac{2(u_n-4)}{\sqrt{2u_n+8}+4}\leq 0$
2	لدينا : $u_{n+1}^2-u_n^2=2u_n+8-u_n^2$ لنعمل الحدودية : $p(x)=-x^2+2x+8$ محددتها هي : $\Delta=4+32=36$ منه : $x_1=\frac{-2+6}{-2}=-2$ و $x_2=\frac{-2-6}{-2}=4$

www.mathonec.com

إذن : $p(x)=-(x+2)(x-4)$ ، إذن: $u_{n+1}^2-u_n^2=-(u_n+2)(u_n-4)$

بما أن : $0\le u_n\le 4$ $\forall n\in IN$ فإن : $-(u_n+2)(u_n-4)=(u_n+2)(4-u_n)\ge 0$

إذن : $u_{n+1}^2\ge u_n^2$ منه : $u_{n+1}\ge u_n$ بالتالي : u_n متتالية تزايدية.

تذكير : لتعميل الحدودية : $p(x)=ax^2+bx+c$ نحدد جذريها (إن وجدا حيث يجب أن نجد: $\Delta=b^2-4ac\ge 0$)

: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، فيكون التعميل هو : $p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

www.mathonec.com

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية	سلسلة 2

تمرين 1 : ادرس رتابة المتتاليات التالية :

$\forall n\in IN\ u_n=\dfrac{2n}{n+1}$ ، $\forall n\in IN^*\ v_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ ، $\forall n\in IN\ w_n=\dfrac{n+1}{3^n}$

$\forall n\in IN^*\ w_n=n^3-n$ ، $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=u_n^2-u_n+1\end{cases}$

تمرين 2 : لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=2$ و أساسها $r=3$

1) احسب u_7 و u_{11}

2) احسب : $S=u_0+u_1+...+u_{99}$

تمرين 3 : لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-1$.

1) احسب r أساس المتتالية علما أن $u_{10}=59$

2) احسب : $S=u_3+u_4+...+u_{22}$

تمرين 4 : لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r

1) احسب r و u_0 علما أن : $u_3=12$ و $u_{17}=82$

2) احسب : $S=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n

تمرين 5 : لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=3$ و أساسها $r=2$

1) احسب u_3 و u_6

2) احسب : $S=u_0+u_1+...+u_5$

تمرين 6 : لتكن (u_n) هندسية أساسها $r=\dfrac{1}{2}$.

1) احسب u_0 علما أن $u_3=\dfrac{5}{8}$

2) احسب : $S=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة n

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : ادرس رتابة المتتاليات التالية :

$\forall n\in IN\ u_n=\dfrac{2n}{n+1}$ ، لدينا لكل $n\in IN$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)}{n+2}-\frac{2n}{n+1}=2\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)=2\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=2\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$=2\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$$

إذن (u_n) تزايدية

$\forall n\in IN^*\ v_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ ، لدينا لكل $n\in IN^*$

$$v_{n+1}-v_n=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}>0$$

إذن (v_n) تزايدية

$\forall n\in IN\ w_n=\dfrac{n+1}{3^n}$ ، لدينا لكل $n\in IN$

$$w_{n+1}-w_n=\frac{n+2}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}=\frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}}=\frac{n+2-3n-3}{3^{n+1}}=\frac{-2n-1}{3^{n+1}}<0$$

إذن (w_n) تناقصية

$\forall n\in IN^*\ w_n=n^3-n$ ، لدينا لكل $n\in IN^*$

$$w_{n+1}-w_n=(n+1)^3-(n+1)-(n^3-n)=n^3+3n^2+3n+1-n-1-n^3+n=3n^2+3n>0$$

إذن (w_n) تزايدية

$\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=u_n^2-u_n+1\end{cases}$ ، لدينا لكل $n\in IN$ ، $u_{n+1}-u_n=u_n^2-u_n+1-u_n=u_n^2-2u_n+1=(u_n-1)^2\geq 0$

إذن (u_n) تزايدية

تمرين 2 : (u_n) متتالية حسابية ، $u_0=2$ ، $r=3$

1 لدينا : $\boxed{u_7=u_0+7r=2+21=23}$ و $\boxed{u_{11}=u_0+11r=2+33=35}$

2 $\boxed{S=u_0+u_1+...+u_{99}=\frac{u_0+u_{99}}{2}\times 100=100\times\frac{2+u_0+99r}{2}=50(2+2+297)=50\times 301=15050}$

100 تمثل عدد الحدود $(99-0+1=100)$

تمرين 3 : (u_n) متتالية حسابية ، $u_0=-1$.

1 نعلم أن : $u_{10}=u_0+10r$ منه : $u_{10}-u_0=10r$ منه : $\boxed{r=\frac{u_{10}-u_0}{10}=\frac{59-(-1)}{10}=\frac{60}{10}=6}$

2 $\boxed{S=u_3+u_4+...+u_{22}=\frac{u_3+u_{22}}{2}\times 20=20\times\frac{u_0+3r+u_0+22r}{2}=10(-1+18-1+132)=10\times 148=1480}$

تمرين 4 : (u_n) متتالية حسابية ، u_0 ، r

1 نعلم أن : $u_3=u_0+3r$ منه : $u_0+3r=12$ ، ونعلم أن : $u_{17}=u_0+17r$ منه : $u_0+17r=82$
نحصل على النظمة :

www.mathonec.com

$$\begin{cases} u_0+3r=12 \\ u_0+17r=82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=12-3r \\ 12-3r+17r=82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=12-3r \\ 14r=82-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=12-3\times 5 \\ r=\dfrac{70}{14}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=-3 \\ r=5 \end{cases}$$

2 $$S=u_0+u_4+\ldots+u_n=\frac{u_0+u_n}{2}\times(n+1)=(n+1)\times\frac{u_0+u_0+rn}{2}=(n+1)\times\frac{-3-3+5n}{2}=\frac{(n+1)(5n-6)}{2}$$

$n+1$ تمثل عدد الحدود $(n-0+1=n+1)$

تمرين 5 : (u_n) متتالية هندسية ، $u_0=3$ ، $r=2$

1 لدينا : $u_3=u_0\times r^3=3\times 2^3=3\times 8=24$ و $u_6=u_0\times r^6=3\times 2^6=3\times 64=192$

2 $$S=u_0+u_1+\ldots+u_5=u_0\times\frac{1-r^6}{1-r}=3\times\frac{1-2^6}{1-2}=3\times\frac{1-64}{-1}=3\times 63=189$$

u_0 تمثل أول حدود المجموع S و 6 تمثل عدد الحدود $(5-0+1=6)$

تمرين 6 : (u_n) هندسية ، $r=\frac{1}{2}$.

1 لدينا : $u_3=u_0\times r^3$ منه $$u_0=\frac{u_3}{r^3}=\frac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}}=5$$

2 $$S=u_1+u_2+\ldots+u_n=u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}=\left(u_0\times r^1\right)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=5\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

u_1 تمثل أول حدود المجموع S و n عدد الحدود $(n-1+1=n)$

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية	سلسلة 3

تمرين 1 : نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ و $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول

2) احسب v_n بدلالة n

3) استنتج حساب u_n بدلالة n

4) احسب مجموع الحدود السبعة الأولى للمتتالية (v_n)

تمرين 2 : نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 1 \quad n \geq 0 \end{cases}$ و $v_n = u_n - \dfrac{5}{3}$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول

2) احسب v_n و u_n بدلالة n

3) احسب : $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ بدلالة n

تمرين 3 : نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ و $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) احسب u_2 و u_3 و v_0 و v_1

2) بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام

3) بين أن : $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = u_n - u_0$

4) استنتج الحد العام للمتتالية (u_n)

تمرين 4 : نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2 و v_1 و v_2

2) نعتبر المتتالية : $w_n = u_n - v_n$

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها

ب) أوجد الحد العام للمتتالية (w_n)

3) نعتبر المتتالية : $t_n = 3u_n + 2v_n$

أ) بين أن (t_n) متتالية ثابتة.

ب) أوجد الحد العام للمتتالية (t_n)

4) استنتج مما سبق تعبير كل من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $u_0=-1$; $u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$ ، $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

1

لدينا :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\dfrac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$=\frac{6-u_n}{9-18+3u_n}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n}{3(-3+u_n)}-\frac{3}{3(u_n-3)}=\frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)}=\frac{3-u_n}{3(u_n-3)}=\frac{1}{3}$$

بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{u_0-3}=\dfrac{1}{-4}=\dfrac{-1}{4}$

2

$$v_n=v_0+r\,n=\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}n=\frac{4n-3}{12}$$

3

لدينا: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$ منه : $u_n-3=\dfrac{1}{v_n}$ منه :

$$u_n=\frac{1}{v_n}+3=\frac{12}{4n-3}+3=\frac{12+12n-9}{4n-3}=\frac{12n+3}{4n-3}$$

4

$$S=v_0+v_2+\ldots+v_6=\frac{v_0+v_6}{2}\times 7=\frac{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{4\times 6-3}{12}}{2}\times 7=\frac{\dfrac{-3+24-3}{12}}{2}\times 7=\frac{18}{24}\times 7=\frac{3}{4}\times 7=\frac{21}{4}$$

تمرين 2 : $u_0=2$; $u_{n+1}=\dfrac{2}{5}u_n+1$ و $v_n=u_n-\dfrac{5}{3}$

1

لدينا :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n+1-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}u_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\left(v_n+\frac{5}{3}\right)-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}v_n+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=u_0-\dfrac{5}{3}=2-\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{3}$

2

$v_n=v_0\times q^n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ ، ولدينا : $v_n=u_n-\dfrac{5}{3}$ منه :

$$u_n=v_n+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{5}{3}$$

3

$$S=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}=v_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1-\dfrac{2}{5}}=\frac{1}{3}\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{\dfrac{3}{5}}=\frac{5}{9}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

تمرين 3 : $u_0=1, u_1=4$; $u_{n+2}=\dfrac{3}{2}u_{n+1}-\dfrac{1}{2}u_n$ ، $v_n=u_{n+1}-u_n$

1

$u_2=\dfrac{3}{2}u_1-\dfrac{1}{2}u_0$ $u_2=\dfrac{12}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$	$u_3=\dfrac{3}{2}u_2-\dfrac{1}{2}u_1$ $u_3=\dfrac{33}{4}-\dfrac{4}{2}=\dfrac{25}{4}$	$v_0=u_1-u_0$ $v_0=4-1=3$	$v_1=u_2-u_1$ $v_1=\dfrac{11}{2}-4=\dfrac{3}{2}$

2

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n-u_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=3$

www.mathonec.com

3	لدينا $v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\ldots+(u_n-u_{n-1})=-u_0+u_n=u_n-u_0$
4	لدينا حسب السؤال السابق : $u_n-u_0=v_0+v_1+\ldots+v_{u-1}=v_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=3\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ إذن : $\boxed{u_n=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+u_0=6-\frac{6}{2^n}+1=7-\frac{6}{2^n}}$
	يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 و مقارنتها بنتائج السؤال الأول

تمرين 4 : $u_0=1$, $v_0=7$; $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$; $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$

1	$u_1=\frac{2u_0+v_0}{3}$ $u_1=\frac{2+7}{3}=3$	$v_1=\frac{u_0+v_0}{2}$ $v_1=\frac{1+7}{2}=4$	$u_2=\frac{2u_1+v_1}{3}$ $u_2=\frac{6+4}{3}=\frac{10}{3}$	$v_2=\frac{u_1+v_1}{2}$ $v_2=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$
2	$w_n=u_n-v_n$			
	أ) لدينا : $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{4u_n+2v_n-3u_n-3v_n}{6}=\frac{u_n-v_n}{6}=\frac{w_n}{6}$ إذن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$ و حدها الأول $w_0=1-7=-6$			
	ب) $w_n=w_0\,q^n=-6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{-1}{6^{n-1}}$			
3	$t_n=3u_n+2v_n$			
	أ) لدينا : $t_{n+1}=3u_{n+1}+2v_{n+1}=2u_n+v_n+u_n+v_n=3u_n+2v_n=t_n$ ، بالتالي : $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة			
	ب) بما أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة: $\forall n\in IN\quad t_n=t_0=3u_0+2v_0=3+14=17$			
4	لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases}u_n-v_n=w_n\\3u_n+2v_n=t_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2u_n-2v_n=2w_n\\3u_n-3v_n=3w_n\\3u_n+2v_n=t_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5u_n=2w_n+t_n\\5v_n=t_n-3w_n\end{cases}$ بالتالي: $\boxed{\forall n\in IN\quad\begin{cases}u_n=\frac{2w_n+t_n}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{-2}{6^{n-1}}+17\right)\\v_n=\frac{t_n-3w_n}{5}=\frac{1}{5}\left(17+\frac{3}{6^{n-1}}\right)\end{cases}}$			
	يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض الصيغ المحصل عليها (يمكنك أيضا حساب بعض القيم الخاصة للتحقق من صحة النتائج مثل u_0 و v_0)			

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية	سلسلة 4

تمرين 1 : نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$

نعتبر المتتاليتين : $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = 3u_n + 10\, v_n$

1) بين أن (w_n) متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام.

2) بين أن (t_n) متتالية ثابتة ثم أوجد حدها العام.

3) استنتج مما سبق تعبير كل من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

تمرين 2 : لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r

1) احسب r و u_0 علما أن : $u_3 + u_4 + u_5 = -9$ و $u_6 = -7$

2) احسب : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$

تمرين 3 : لتكن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 3$ و أساسها $r = 2$

3) احسب : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ بدلالة n

4) نعتبر المتتالية : $w_n = v_n^2$

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية.

ب) استنتج حساب المجموع $T_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_{n-1}^2$ بدلالة n .

تمرين 4 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3n+1} \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2

2) بين أن $\forall n \in IN \quad u_n > 0$

3) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

4) أ) بين أن : $\forall n \in IN^* \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{1}{4}$

ب) استنتج أن $\forall n \in IN^* \quad u_n \le 8\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

تمرين 5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

1) بين أن $\forall n \in IN \quad |u_n| < \dfrac{1}{2}$

2) أدرس رتابة (u_n)

3) بين أن: $\forall n \in IN \quad u_n + \dfrac{1}{2} = \left(u_0 + \dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$

www.mathonec.com

	المتتاليـــــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 4

تمرين 1 : $u_0=1$, $v_0=2$; $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$; $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ ، $w_n=v_n-u_n$ و $t_n=3u_n+10\,v_n$

1

لدينا :

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}-\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15}=\frac{2v_n-2u_n}{15}=\frac{2(v_n-u_n)}{15}=\frac{2}{15}w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\dfrac{2}{5}}$ وحدها الأول $\boxed{w_0=v_0-u_0=2-1=1}$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad w_n=w_0\times q^n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1}=3u_{n+1}+10v_{n+1}=u_n+2v_n+2(u_n+4v_n)=u_n+2v_n+2u_n+8v_n=3u_n+10v_n=t_n$

إذن (w_n) متتالية تابثة، منه : $\boxed{\forall n\in IN \quad t_n=t_0=3u_0+10v_0=3+20=23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases}v_n-u_n=w_n\\3u_n+10v_n=t_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\3u_n+10(w_n+u_n)=t_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\3u_n+10w_n+10u_n=t_n\end{cases}$

منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\13u_n=t_n-10w_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+\dfrac{t_n-10w_n}{13}\\u_n=\dfrac{t_n-10w_n}{13}\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=\dfrac{t_n+3w_n}{13}=\dfrac{23+3\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13}\\u_n=\dfrac{t_n-10w_n}{13}=\dfrac{23-10\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13}\end{cases}$

لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل نظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين u_n و v_n واعتبار w_n و t_n معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.

تمرين 2 : (u_n) متتالية حسابية ، u_0

1

نعلم أن : $u_3+u_4+u_5=u_0+3r+u_0+4r+u_0+5r=3u_0+12r$ و $u_6=u_0+6r$

لدينا : $u_3+u_4+u_5=-9$ و $u_6=-7$

إذن نحصل على النظمة : $\begin{cases}u_0+6r=-7\\3u_0+12r=-9\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\3(-7-6r)+12r=-9\end{cases}$

منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\-21-18r+12r=-9\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\-6r=-9+21=12\end{cases}$ منه : $\boxed{\begin{cases}u_0=-7+12=5\\r=\dfrac{12}{-6}=-2\end{cases}}$

2

$$\boxed{\begin{aligned}&S=u_0+u_1+\ldots+u_{100}=\frac{u_0+u_{100}}{2}\times 101=101\frac{5+u_0+100r}{2}=101\frac{5+5-200}{2}=101\times\frac{-190}{2}\\&S=101\times(-95)=-9595\end{aligned}}$$

تمرين 3 : (v_n) متتالية هندسية ، $v_0=3$ ، $r=2$

www.mathonec.com

1

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 3\frac{1-2^n}{-1} = 3\left(2^n - 1\right)$$

2

$w_n = v_n^2$

أ)

لدينا متتالية هندسية أساسها $r = 2$ منه : $v_{n+1} = 2v_n$

إذن : $\left(w_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q = 4$ منه : $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = \left(2v_n\right)^2 = 4v_n^2 = 4w_n$

ب)

$$T_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_{n-1}^2 = w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1} = w_0 \frac{1-q^n}{1-q} = v_0^2 \frac{1-4^n}{1-4} = 9\frac{1-4^n}{-3} = 9\frac{4^n - 1}{3} = 3\left(4^n - 1\right)$$

تمرين 4 : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3n+1}$; $u_0 = 2$

1

$u_1 = \dfrac{u_0}{0+1} = 2$

$u_2 = \dfrac{u_1}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 2 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$

لدينا : $n \geq 0$ منه : $3n+1 \geq 1 > 0$ ، إذن $\dfrac{u_n}{3n+1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

بالتالي : $\forall n \in IN \quad u_n > 0$

3

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n\left(\dfrac{1}{3n+1} - 1\right) = u_n \dfrac{1-3n-1}{3n+1} = -\dfrac{3nu_n}{3n+1} \leq 0$

بالتالي $\left(u_n\right)$ متتالية تناقصية.

4

أ)

لدينا $\dfrac{1}{4} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3n+1} = \dfrac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \dfrac{3n-3}{4(3n+1)} = \dfrac{3(n-1)}{4(3n+1)}$

إذن لكل $n \in IN^*$ لدينا $\dfrac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0$ و منه $\forall n \in IN^* \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{4}$

ب)

لدينا حسب السؤال السابق : $\dfrac{u_2}{u_1} \leq \dfrac{1}{4}$ و $\dfrac{u_3}{u_2} \leq \dfrac{1}{4}$ و ... و $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{1}{4}$

و بضرب هذه المتفاوتات (ذات الأطراف الموجبة) طرفا بطرف نجد أن : $\dfrac{u_2}{u_1} \times \dfrac{u_3}{u_2} \times \ldots \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

أي : $\dfrac{u_n}{u_1} \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} u_0$ منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \times 2$ منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times 4 \times 2$

بالتالي : $\forall n \in IN^* \quad u_n \leq 8\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

تمرين 5 : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \dfrac{1}{4}$; $u_0 = 0$

1

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $|u_0| = 0$ منه $|u_0| < \dfrac{1}{2}$

نفترض أن $|u_n| < \dfrac{1}{2}$ ونبين أن $|u_{n+1}| < \dfrac{1}{2}$

www.mathonec.com

لدينا : $u_{n+1}=u_n^2+u_n-\frac{1}{4}=u_n^2+u_n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$|u_n|<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2}<u_n<\frac{1}{2} \Rightarrow 0<u_n+\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 0<\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$

$|u_n|<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2}<\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2}<u_{n+1}<\frac{-1}{4}<\frac{1}{2} \Rightarrow |u_{n+1}|<\frac{1}{2}$

بالتالي : $\forall n\in IN \quad |u_n|<\frac{1}{2}$

2

لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n^2+u_n-\frac{1}{4}-u_n=u_n^2-\frac{1}{4}$ وبما أن $|u_n|<\frac{1}{2}$ فإن $u_n^2<\frac{1}{4}$ أي : $u_n^2-\frac{1}{4}<0$

بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.

3

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^0}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^1=u_0+\frac{1}{2}$

نفترض أن $u_n+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ونبين أن: $u_{n+1}+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

$u_{n+1}+\frac{1}{2}=u_n^2+u_n-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=u_n^2+u_n+\frac{1}{4}=\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$

لدينا :

$u_{n+1}+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n\times 2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

بالتالي : $\forall n\in IN \quad u_n+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

www.mathonec.com