ب

الصف الثالث الثانوي

سلسلة المختار

في الرياضيات

التكامل

ا/مختار الدبعي

770 39 34 33

CS CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

تعريف التكامل :-

◆ هو عملية حساب مساحة سطح منتظم أو غير منتظم ومحدد. ويرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س

◆ هو عملية عكسية للاشتقاق ويرمز له بالرمز $\int$ د(س) ء س

أنواع التكامل :-

① التكامل المحدد : وهو التكامل المحصور في فترة [أ ، ب] ويكون له قيمة محددة.

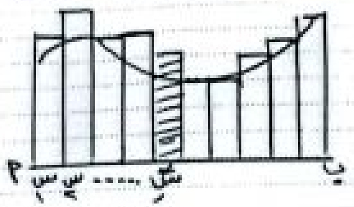
② التكامل الغير محدد وهو التكامل العام غير محصور في فترة وليس له قيمة محددة وإنما نحصل على دالة

التكامل المحدد :

إذا كانت د(س) دالة معرفة ومتصلة على [أ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة ويرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س بحيث أن:

$$\boxed{\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} \Delta س \times د(ش^*_ر)}$$

سوف نستخدم هذا القانون عندما يطلب الحل: باستخدام تعريف التكامل المحدد



مساحة كل مستطيل = القاعدة × الارتفاع

$= \Delta س_ر \times د(ش^*_ر)$

حيث $\Delta س_ر$ قاعدته

، $د(ش^*_ر)$ ارتفاعه

لذلك نجد أن مجموع المساحات (مجموع مساحات المستطيلات) هي :-

$$سط_{أ}^{ب} = \sum_{ر=1}^{ن} \Delta س \times د(ش^*_ر)$$

وكلما زادت عدد الفترات إلى ن إلى ما لا نهاية ∞

$$سط_{أ}^{ب} = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} \Delta س \times د(ش^*_ر)$$

هذه العملية التقريبية لحساب المساحة تسمى بمفهوم ريمان.

خطوات درس : تعريف التكامل المحدد

① $\boxed{\Delta س = \frac{ب - أ}{ن}}$ (القاعدة)

② يتم إيجاد $ش^*_ر$ وهي نقطة ويمكن الحصول عليها من العلاقة الرئيسية :

$$\boxed{ش^*_ر = أ + \Delta س\, ر}$$

③ نوجد (الارتفاع) = $د(ش^*_ر)$ من خلال التعويض بالناتج عن $ش^*_ر$

من يزرع [illegible] يحصد الشكر

④ $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} \Delta س \cdot د(ش^*_ر)$

◆ خواص مجاميع ريمان ◆

① $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$

② $\sum_{ر=1}^{ن} ر^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$

③ $\sum_{ر=1}^{ن} ر^3 = \frac{ن^2(ن+1)^2}{4}$

④ $\sum_{ر=1}^{ن} أ = أ ن$

ملاحظة :

$1^3 + 2^3 = (1+2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$

تمارين :-

1) ح ا و x :

احسب $\int_{0}^{3} (س+2)\, ء س$ باستخدام تعريف التكامل المحدد تكون قيمة $\Delta س = \frac{3}{ن}$ (ح)

الحل: تقسم (0، 3) إلى ن جزء متساوي في الطول:

$\Delta س = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{3 - 0}{ن} = \frac{3}{ن}$

2) ح ا و x : عشر حسب

$\int (س^2 - 3)\, ء س$ تكون $ش^*_ر = \frac{ر}{ن}$ (ح)

الحل : $\Delta س = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{1 - 0}{ن}$

$\Delta س = \frac{1}{ن}$

$ش^*_ر = أ + \Delta س\, ر$

$ش^*_ر = 0 + \frac{1}{ن} ر$

$ش^*_ر = \frac{ر}{ن}$

③ في $\int^{2} س^3\, ء س$ تكون $د(ش^*_ر) =$ ....

[27 $\frac{ر^3}{ن^3}$ ، 9 $\frac{ر^3}{ن}$ ، $\underline{8 \frac{ر^3}{ن^3}}$ ، 9 $ر^3 ن^{-3}$]

الحل :

$\Delta س = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{2 - 0}{ن} = \frac{2}{ن}$

$\therefore \boxed{\Delta س = \frac{2}{ن}} \longrightarrow ①$

$ش^*_ر = أ + \Delta س \cdot ر$

$ش^*_ر = 0 + \frac{2}{ن} \cdot ر$

$\boxed{ش^*_ر = \frac{2ر}{ن}} \longrightarrow ②$

$د(ش^*_ر) = س^3 = \left(\frac{2ر}{ن}\right)^3$

$د(ش^*_ر) = \frac{8ر^3}{ن^3} = 8 ر^3 ن^{-3}$

④ ص أو x :

$\int_{1}^{3} د(س)\, ء س = \lim_{ن \to \infty} [د(ش^*_ر) \times \Delta س_ر]$ (X)

الصح : $\lim_{ن \to \infty} [\sum_{ر=1}^{ن} د(ش^*_ر) \times \Delta س]$

قد النملة ويفعل عمله

٥ س ١) ص ٨ :

وإذا كانت

$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن} \Delta س_ر\, د(س_ر^*)$

فإن نتيجة $س_ر^* = \frac{ب-أ}{ن}\, ر$ (X)

الحل

$\Delta س_ر = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{ب-أ}{ن}$

$س_ر^* = أ + \Delta س_ر .\, ر$

$س_ر^* = أ + \frac{ب-أ}{ن} .\, ر$

---

٦ $\int_{أ}^{2أ} 3س^2\,ءس = \lim_{ن\to\infty}$ ....

$[\frac{أ}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(أ+\frac{أ}{ن}ر)$ ٦ $\frac{أ}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(2أ+\frac{أ}{ن}ر)$

$\frac{3أ^2}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(1+\frac{1}{ن}ر)$ ٦ $\frac{3أ^2}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(2أ+\frac{أ}{ن}ر)$

الحل

$\Delta س_ر = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{2أ-أ}{ن}$

$\Delta س_ر = \frac{أ}{ن}$ ← ①

② $س_ر^* = أ + \Delta س_ر\, ر$

$س_ر^* = أ + \frac{أ}{ن}\, ر$ ← ②

③ $د(س_ر^*) = 3\, س^{*2}$

معرفة → $د(س_ر^*) = 3(أ + \frac{أ}{ن}ر)^2$

$د(س_ر^*) = 3أ^2(1+\frac{1}{ن}ر)^2$

④ $\int_{أ}^{2أ} = \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\Delta س_ر .\, د(س_ر^*)$

$= \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\frac{أ}{ن}\times 3أ^2(1+\frac{1}{ن}ر)^2$

$= \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\frac{3أ^3}{ن}(1+\frac{1}{ن}ر)^2$

$= \lim_{ن\to\infty}\frac{3أ^3}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(1+\frac{ر}{ن})^2$

---

٧ باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب $\int_{-1}^{2}(س+5)\,ءس$

الحل

$\Delta س_ر = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{2-(-1)}{ن}$

$\Delta س_ر = \frac{3}{ن}$ ← (1)

$س_ر^* = أ + \Delta س_ر\, ر$

$س_ر^* = -1 + \frac{3}{ن}\, ر$ ← (2)

$د(س_ر^*) = س_ر^* + 5$

$د(س_ر^*) = -1 + \frac{3}{ن}ر + 5$

$د(س_ر^*) = 4 + \frac{3}{ن}\, ر$ ← ③

$\int_{-1}^{2}(س+5)\,ءس = \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\Delta س_ر .\, د(س_ر^*)$

$= \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\frac{3}{ن}(4+\frac{3}{ن}ر)$ ← ④

اليوم السيئ

يتبعه يوم جميل

$= \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}(\frac{12}{ن} + \frac{9}{ن^2}ر)$

$= \lim_{ن\to\infty}(\frac{12}{ن}\times ن + \frac{9}{ن^2}\cdot\frac{ن(ن+1)}{2})$

$(\frac{12}{\cancel{ن}}\times \cancel{ن} + \frac{9}{ن^2}\times\frac{ن^2}{2})$

$\lim_{ن\to\infty}$ (دائماً ماتكون أعلى معاملات)

$= 12 + \frac{9}{2} = \frac{24+9}{2} = \frac{33}{2}$

---

٨ باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب $\int_{-ل}^{ل} 3\,ءس$

نقسم الفترة إلى ن من

الحل، $\Delta س_ر = \frac{ل-(-ل)}{ن}$

$\Delta س_ر = \frac{2ل}{ن}$ → (1)

$س_ر^* = أ + \Delta س_ر\, ر$

$س_ر^* = -ل + \frac{2ل}{ن}\, ر$ → (2)

$د(س_ر^*) = 3$ → (3)

$\int_{-ل}^{ل} 3\,ءس = \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\Delta س_ر\, د(س_ر^*)$

$= \lim_{ن\to\infty}\frac{2ل}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} 3$

$= \lim_{ن\to\infty}\frac{2ل}{\cancel{ن}}\times 3\times\cancel{ن} = 6ل$

---

٩ باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب $\int_{1}^{3} 2س\,ءس$

نقسم الفترة [١، ٣] إلى ن فترة متساوية

الحل $\Delta س_ر = \frac{3-1}{ن} = \frac{2}{ن}$

$\Delta س_ر = \frac{2}{ن}$

$س_ر^* = أ + \Delta س_ر = 1 + \frac{2}{ن}\, ر$

$س_ر^* = 1 + \frac{2}{ن}\, ر$

$د(س_ر^*) = 2س = 2(1 + \frac{2}{ن}ر)$

$د(س_ر^*) = 2 + \frac{4}{ن}\, ر$

$\int_{1}^{3} 2س\,ءس = \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\Delta س\, د(س_ر^*)$

$= \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}\frac{2}{ن}(2+\frac{4}{ن}ر)$

$= \lim_{ن\to\infty}\sum_{ر=1}^{ن}(\frac{4}{ن} + \frac{8}{ن^2}ر)$

$(\frac{4}{\cancel{ن}}\times\cancel{ن} + \frac{8}{ن^2}\times\frac{ن^2}{2})$

$= 4 + \frac{8}{2}$

$= 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

تمارين

باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب

① $\int_{0}^{1} س^2\,ءس$ الحل $\frac{1}{3}$

② $\int_{0}^{3} (3س+1)\,ءس$ الحل $\frac{33}{2}$

③ $\int_{-1}^{1} (س+1)^2\,ءس$ الحل $\frac{8}{3}$

④ $\int_{1}^{2} ل\,ءس$ الحل ٣ل

قد يختفي الأمل

لكنه لا يموت

ملاحظات واختصارات

١) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} = \frac{ن^{٢}}{٢}$

٢) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن^{٣}}{٣}$

٣) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٣} = \frac{ن^{٤}}{٤}$

٤) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٤} = \frac{ن^{٥}}{٥}$

٥) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} ر^{ك} = \frac{ن^{ك+١}}{ك+١}$

تمرين: $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ = \ldots\ldots$

الحل $ن أ = ٣ \times ٥ = ١٥$

تمرين: $\sum_{ر=١}^{٣} ر^{٢} = \ldots\ldots$

الحل $\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} = \frac{٣(٤)(٧)}{٦} = \frac{\cancel{٦}}{\cancel{٦}} ٢ \times ٧ = ١٤$

طريقة (٢) $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢}$

$١ + ٤ + ٩ = ١٤$

تمرين: $\sum_{ر=١}^{٣} ر^{٣} = \ldots\ldots$

الحل $\frac{ن^{٢}(ن+١)^{٢}}{٤} = \frac{٣^{٢}(٤)^{٢}}{٤}$

$= ٩ \times ٤ = ٣٦$

طريقة (٢) $١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣}$

$١ + ٨ + ٢٧ = ٣٦$

تمرين ١ $\sum_{ر=١}^{٦} ر = \ldots\ldots$

الحل $\frac{ن(ن+١)}{٢} = \frac{٦ \times ٧}{٢}$

$= ٣ \times ٧ = ٢١$

طريقة (٢) $١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦$

$= ٢١$

حل أسئلة 2021

١] $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \frac{ب-أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر})$ (✓)

٢] $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \frac{ب-أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر})\, \Delta س$ (✗)

٣] $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \frac{ب-أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر})$ (✗)

٤] عند حساب $\int_{٠}^{٢ك-١} (س^{٣}+٦)\, ءس$

إذا كان $س^{*}_{ر} = \frac{ب}{ن}$ فإن

قيمة $ك = ٢$ (✗)

الحل

١) $\Delta س = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٢ك-١}{ن}$

٢) $س^{*}_{ر} = أ + (\Delta س) ر$

$س^{*}_{ر} = ٠ + \frac{٢ك-١}{ن} ر$

$س^{*}_{ر} = \frac{٢\times٢-١}{ن} \times ر = \frac{٣ر}{ن}$

٥] عند حساب التكامل $\int_{-١}^{٣} (س^{٢}-١)\, ءس$

باستخدام التعريف

فإن قيمة $\Delta س = \frac{٤}{ن}$ (✓)

٦] إذا كان عدد تجزئة الفترة

[١، ٣] في $\int_{١}^{٣} (س+١)\, ءس$

ستة أجزاء متساوية فإن

$س^{*}_{ر} = ١ + \frac{ر}{٣}$ (✓)

الحل

$ن = ٦$

$\Delta س = \frac{٣-١}{ن} = \frac{٢}{ن}$

$س^{*}_{ر} = أ + (\Delta س) ر$

$س^{*}_{ر} = ١ + \frac{٢}{ن} ر$

$= ١ + \frac{٢}{٦} ر = ١ + \frac{ر}{٣}$

٧] عند حساب $\int_{أ}^{٢-أ} (س^{٢}+٣س)\, ءس$

إذا كانت $\Delta س = \frac{٤}{ن}$ فإن

قيمة $أ = -١$ (✓)

الحل $\Delta س = \frac{٢-أ-أ}{ن} = \frac{٢-٢أ}{ن}$

$= \frac{٢-٢\times-١}{ن} = \frac{٢+٢}{ن} = \frac{٤}{ن}$

٨] في حساب $\int_{٢}^{٥} (٢س+١)\, ءس$

تكون $د(س^{*}_{ر}) = \frac{٣}{ن} ر + ٥$ (✗)

الحل

١) $\Delta س = \frac{٥-٢}{ن} \Leftarrow \Delta س = \frac{٣}{ن}$

٢) $س^{*}_{ر} = ٢ + \frac{٣}{ن} ر$

٣) $د(س^{*}_{ر}) = ٢ س^{*}_{ر} + ١$

$= ٢\left(٢ + \frac{٣}{ن} ر\right) + ١$

$= ٤ + \frac{٦}{ن} ر + ١$

$= \frac{٦}{ن} ر + ٥$

٩] في حساب التكامل $\int_{-١}^{٥} (٢س+١)\, ءس$ يكون

$س^{*}_{ر} = \frac{٦ر}{ن} - ١$ (✓)

الحل $\Delta س = \frac{٥+١}{ن} = \frac{٦}{ن}$

٢) $س^{*}_{ر} = -١ + \frac{٦}{ن} ر$

$س^{*}_{ر} = \frac{٦ر}{ن} - ١$

تدريب $\int_{٠}^{٣} (س^{٢}+س+١)\, ءس = \ldots\ldots$

باستخدام التعريف

١) $\Delta س = \frac{٣}{ن}$ ٢) $س^{*}_{ر} = ٠ + \frac{٣}{ن} ر$

$س^{*}_{ر} = \frac{٣}{ن} ر$

٣) $د(س^{*}_{ر}) = \left(\frac{٣}{ن} ر\right)^{٢} + \frac{٣}{ن} ر + ١$

$د(س^{*}_{ر}) = \frac{٩}{ن^{٢}} ر^{٢} + \frac{٣}{ن} ر + ١$

$\int_{٠}^{٣} (س^{٢}+س+١)\, ءس = \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} \Delta س \cdot د(س^{*}_{ر})$

$= \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٣}{ن}\left(\frac{٩}{ن^{٢}} ر^{٢} + \frac{٣}{ن} ر + ١\right)$

$= \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{٢٧}{ن^{٣}} ر^{٢} + \frac{٩}{ن^{٢}} ر + \frac{٣}{ن}\right)$

$= \frac{٢٧}{ن^{٣}} \times \frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{٩}{ن^{٢}} \times \frac{ن^{٢}}{٢} + ن \times \frac{٣}{ن}$

$= \frac{٢٧}{٣} + \frac{٩}{٢} + ٣ = ٩ + \frac{٩}{٢} + ٣ = \frac{٣٣}{٢}$

(و.هـ.م)

مبرهنة الحدين الأعلى والأدنى

إذا كان ك، ل عددين حقيقيين، ك ≤ د(س) ≤ ل حيث د(س) قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب]

فإن:

ك(ب − أ) ≤ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≤ ل(ب − أ)

حرف (ك) [illegible] رمز التكامل الدالة ≤ حرف (ل)

خطوات الدرس

◆ البناء ، و القيم الصحيحة

◆ تطبيق المبرهنة

تدريب:

① الحد الأعلى لقيمة التكامل $\int_{١}^{٣}$ لو س ءس يساوي ....

[٠ ، ٢ ، [✓ ٢لو٣] ، ٣ لو٣]

الحل

نضع متراجحة ثم نبني

أ ≤ س ≤ ب

١ ≤ س ≤ ٣ (إضافة لو)

لو١ ≤ لو س ≤ لو٣

٠ ≤ لو س ≤ لو٣ ← جاهز للبناء

تطبيق المبرهنة (مبرهنة الحدين)

ك(ب − أ) ≤ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≤ ل(ب − أ)

٠ × (٣ − ١) ≤ $\int_{١}^{٣}$ لو س ءس ≤ (٣ − ١) × لو٣

صفر ≤ $\int_{١}^{٣}$ لو س ءس ≤ ٢لو٣ ← الأعلى

الأدنى

② الحد الأعلى للتكامل $\int_{١}^{٢}$ هـ^٣لو س ءس ....

[٢٦ ، [✓ ٨] ، ١٠ ، ١٨]

الحل

هـ^٣لو س = س^٣ تحويل السؤال

١ ≤ س ≤ ٢ (تكعيب)

١ ≤ س^٣ ≤ ٨ ← ثم البناء

المبرهنة

١ × (٢ − ١) ≤ $\int_{١}^{٢}$ س^٣ ءس ≤ (٢ − ١) × ٨

١ ≤ $\int_{١}^{٢}$ س^٣ ءس ≤ ٨

الحد الأدنى = ١ ، الحد الأعلى = ٨

③ الحد الأدنى للتكامل $\int_{٢}^{٥}$ لو(س − ١) ءس يساوي ....

[[✓ ٠] ، ١ ، ٢لو٢ ، ٦لو٢]

الحل

٢ ≤ س ≤ ٥

٢ − ١ ≤ س − ١ ≤ ٥ − ١

١ ≤ س − ١ ≤ ٤ ← لو١ ≤ لو(س − ١) ≤ لو٤

(٥ − ٢)لو١ ≤ $\int_{٢}^{٥}$ (س − ١) ءس ≤ لو٤(٥ − ٢)

٣ × ٠ ≤ // ≤ ٣لو٤

صفر ≤ // ≤ ٦لو٢

الحد الأدنى = صفر

الحد الأعلى = ٦لو٢

④ إذا كان د(س) ≥ ١/٢

∀ س ∈ [١ ، ٥] فإن

$\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس ....

[[✓ ≥ ٢] ، ≤ ٤ ، ≥ −٢ ، ≤ ٣]

لا تحمل هم الغد فقد لا يأتي الغد

الحل

∵ د(س) ≥ ١/٢ (مبني جاهز)

∴ تطبيق المبرهنة

$\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس ≥ ١/٢(٥ − ١)

$\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس ≥ ١/٢ × ٤

$\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس ≥ ٢

⑤ إذا كانت

٣ ≤ د(س) ≤ ٦

، ١٢ ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ءس ≤ م

فإن قيمة م = ...

[١٢ ، [✓ ٢٤] ، ٢٨ ، ٣٦]

الحل

٣ ≤ د(س) ≤ ٦ (مبني جاهز)

٣(٢ − (−٢)) ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ءس ≤ ٦(٢ − −٢)

٣(٢ + ٢) ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ءس ≤ ٦(٢ + ٢)

١٢ ≤ // ≤ ٢٤

١٢ ≤ // ≤ م بالمقارنة

∴ م = ٢٤

⑥ إذا كان ١ ≤ د(س) ≤ ٢

فالحد الأعلى لـ $\int_{٠}^{هـ}$ لو(د(س)) ءس = ...

[٠ ، لو٢ ، هـ ، هـ لو٢]

الحل

١ ≤ د(س) ≤ ٢ (نكمل البناء)

لو١ ≤ لو د(س) ≤ لو٢

٠ ≤ لو د(س) ≤ لو٢ ← بناء

٠(هـ − ٠) ≤ $\int_{٠}^{هـ}$ لو د(س) ءس ≤ (هـ − ٠)لو٢

٠ ≤ $\int_{٠}^{هـ}$ لو د(س) ءس ≤ هـ لو٢

الحد الأعلى = هـ لو٢

⑦ إذا كان د(س) ≤ (ل + ٢)

$\int_{-١}^{٣}$ د(س) ءس ≤ ٣٢ فإن ل = ...

الحل

د(س) ≤ (ل + ٢) مبني جاهز

المبرهنة

$\int_{-١}^{٣}$ د(س) ءس ≤ (٣ − −١)(ل + ٢)

$\int_{-١}^{٣}$ د(س) ءس ≤ ٤(ل + ٢)

∴ ٤(ل + ٢) = ٣٢ (÷ ٤)

ل + ٢ = ٨

ل = ٨ − ٢ = ٦

⑧ إذا كان

٢ ≤ د(س) ≤ ٢ل

، ٨ ≤ $\int_{-١}^{٣}$ د(س) ءس ≤ ٤٠ فإن

ل = ...

الحل ٢(٣ − −١) ≤ $\int_{-١}^{٣}$ د(س) ءس ≤ ٢ل(٣ − −١)

٢ × ٤ ≤ // ≤ ٢ل × ٤

٨ ≤ // ≤ ٨ل

∴ ٨ل = ٤٠ ⇐ ل = ٥

أساسيات المتراجحة

① تربيع متراجحة

عند تربيع متراجحة توجد ثلاث حالات

امشي شهر ولا تعبر نهر

الحل : $\int_{\text{-١}}^{\text{٢}} (\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥})$ ء س

-١ ≤ س ≤ ٢ (تربيع)

٠ ≤ س² ≤ (أكبر المقياسين)²

٠ ≤ س² ≤ ٤ (×٣)

٠ ≤ ٣س² ≤ ١٢ (+٥)

٥ ≤ ٣س² + ٥ ≤ ١٧

نطبق المبرهنة

فرق ≤ رمز ≤ فرق

٥(٢ - (-١)) ≤ $\int_{\text{-١}}^{\text{٢}} (\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥})$ ء س ≤ ١٧(٢ - (-١))

١٥ ≤ // ≤ ٥١

اكد٢ د ن = ١٥ ، كد٢ عي = ٥١

---

(٢) اوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \frac{\text{س}}{\text{س+٥}}$ ء س

الحل باستخدام النقاط الحرجة

النقاط الحرجة هي {١ ، ٤}

∴ د(١) × الفرق ، د(٤) × الفرق

د(١) = $\frac{\text{١}}{\text{١+٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}$ (أصغر)

د(٤) = $\frac{\text{٤}}{\text{٤+٥}} = \frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ (أكبر)

الحد د ن = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ × الفرق = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ × ٣ = $\frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

الحد ع = $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ × الفرق = $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ × ٣ = $\frac{\text{١٢}}{\text{٩}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

ملاحظة : مشكلة البناء (المشكلتان)

١) تعدد السينات

٢) س² (أسس زوجية)

٣) جا س ، جتا س

---

(٣) إذا كان م $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{٢}}{\text{ظا س+١}}$ ء س > $\frac{\pi \text{ل}}{\text{٨}}$ ل أدنى

∵ س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{\text{٤}}$] فإن قيمة ظا س ∈ [٠ ، ① ، ٣ ، ٤)

الحل

٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{\text{٤}}$ (ظا)

ظا ٠ ≤ ظا س ≤ ظا $\frac{\pi}{\text{٤}}$

٠ ≤ ظا س ≤ ١ (+١)

١ ≤ ظا س + ١ ≤ ٢ (التقليب)

١ ≥ $\frac{\text{١}}{\text{ظا س+١}}$ ≥ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (×٢)

٢ ≥ $\frac{\text{٢}}{\text{ظا س+١}}$ ≥ ١ (المبرهنة)

٢($\frac{\pi}{\text{٤}}$ - ٠) ≥ $\int \frac{\text{٢}}{\text{ظا س+١}}$ ء س ≥ ١($\frac{\pi}{\text{٤}}$ - ٠)

$\frac{\pi}{\text{٢}}$ ≥ $\int \frac{\text{٢}}{\text{ظا س+١}}$ ء س ≥ $\boxed{\frac{\pi}{\text{٤}}}$ الأدنى

الأدنى = الأدنى بالمقارنة

$\frac{\pi \text{ل}}{\text{٨}} = \frac{\pi}{\text{٤}}$ ⟸ $\frac{\text{ل}}{\text{٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$

٤ل = ٨ ⟸ ل = ٢

حالة (١) : ⊕ ≤ س ≤ ⊕

تربيع ≤ س² ≤ تربيع

عند تربيع فترة موجبة لا يحدث تغير في وضع المتراجحة

مثال ١: ٢ ≤ س ≤ ٥

٤ ≤ س² ≤ ٢٥

حالة (٢) : ⊖ ≤ س ≤ ⊖

عند تربيع متراجحة فترتها سالبة تنعكس المتراجحة.

تربيع ≥ س² ≥ تربيع

مثال ١: -٤ ≤ س ≤ -٢

١٦ ≥ س² ≥ ٤

حالة (٣) : ⊖ ≤ س ≤ ⊕

عند تربيع متراجحة سالبة وموجبة

• ٠ ≤ س² ≤ (أكبر مقياس)تربيع

• ٠ ≤ س² ≤ مزاد

• ٠ ≤ س² ≤ أكبر التربيعين

مثال ١: -٥ ≤ س ≤ ٢

٠ ≤ س² ≤ ٢٥

مثال ٢: -٣ ≤ س ≤ ٦

٠ ≤ س² ≤ ٣٦

أسئلة (٢) : متى تنعكس المتراجحة

ج١ في الحالات التالية:

١) تربيع متراجحة ذات فترة سالبة

-٣ ≤ س ≤ -١

٩ ≥ س² ≥ ١ (١)

أو ١ ≤ س² ≤ ٩ (٢)

٢) عند الضرب في عدد سالب أو القسمة على عدد سالب

مثال ١: -٥ ≤ س ≤ -٣ (×-١)

٥ ≥ -س ≥ ٣

مثال ٢:

-٦ ≤ -٢س ≤ -٤ (÷ -٢)

٣ ≥ س ≥ ٢

٣) عند قلب البسط مقام والمقام بسط (المقلوب)

وإشارة الفترة كلها موجبة

أو إشارة المتراجحة كلها سالبة

مثال ١: ٢ ≤ س ≤ ٧

$\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ≥ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ≥ $\frac{\text{١}}{\text{٧}}$

مثال ٢: -٣ ≤ س ≤ ٧

$\frac{\text{-١}}{\text{٣}}$ ≤ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ≤ $\frac{\text{١}}{\text{٧}}$

لم تنعكس المتراجحة ؛ لماذا؟

(٤) الدوال المتناقصة مثل ظتا س

مثال ١: ٣٠ ≤ س ≤ ٦٠ (الدالة ظتا)

ظتا ٣٠ ≥ ظتا س ≥ ظتا ٦٠

$\sqrt{\text{٣}}$ ≥ ظتا س ≥ $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$

تمرين: اوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥})$ ء س دون حساب قيمة التكامل.

لشهيد؟

الي مايعرف الصفر

④ أوجد الحدين الأعلى والأدنى للتكامل $\int_{0}^{لو ٢} \frac{د س}{\sqrt{١ + هـ^{س}}}$

الحل: $د(س) = \frac{١}{\sqrt{١ + هـ^{س}}}$

• $٠ \le س \le لو ٢$ (إضافة هـ)

• $هـ^{٠} \le هـ^{س} \le هـ^{لو ٢}$

$١ \le هـ^{س} \le ٢$ (+١)

$٢ \le هـ^{س} + ١ \le ٣$ ($\sqrt{\ }$)

$\sqrt{٢} \le \sqrt{هـ^{س} + ١} \le \sqrt{٣}$ (مقلوبة)

$\frac{١}{\sqrt{٢}} \ge \frac{١}{\sqrt{١ + هـ^{س}}} \ge \frac{١}{\sqrt{٣}}$

نطبق المبرهنة ١

$\frac{١}{\sqrt{٢}}(لو ٢ - ٠) \ge \int_{٠}^{لو ٢} \frac{١}{\sqrt{١ + هـ^{س}}} د س \ge \frac{١}{\sqrt{٣}}(لو ٢ - ٠)$

$\frac{١}{\sqrt{٢}} لو ٢ \ge \quad // \quad \ge \frac{١}{\sqrt{٣}} لو ٢$

الحد الأدنى $= \frac{١}{\sqrt{٣}} لو ٢$

الحد الأعلى $= \frac{١}{\sqrt{٢}} لو ٢$

ملاحظة مهمة: يمكن الاستفادة من درس القيم القصوى (العظمى والصغرى) في إيجاد حدود بقاء الدالة " أي نوجد القيم الحرجة بدلاً من طريقة البناء" بشرط تحقيقها للفترة $(ص' = ٠)$

مثال: قدر التكامل $\int_{٠}^{٣} (س^{٢} + ٢ س) د س$

الحل: يقصد بقدر التكامل: إيجاد الحد الأعلى والحد الأدنى

$د(س) = س^{٢} + ٢ س$ ، نوجد (ص' = ٠ نقاط حرجة)

$د'(س) = ٢ س + ٢$

$٢ س + ٢ = ٠$

النقطة الحرجة هي $س = -١ \notin [٠ ، ٣]$

لذلك نكتفي بـ: حدود التكامل د(٠) ، د(٣)

$د(٠) = س^{٢} + ٢ س = \boxed{٠} \rightarrow$ صغرى

$د(٣) = س^{٢} + ٢ س = ٩ + ٦ = \boxed{١٥}$ عظمى

الحد الأدنى $= ٠ \times$ الفرق $= ٠ \times ٣ = ٠$

الحد الأعلى $= ١٥ \times$ الفرق

$= ١٥ \times ٣$

$= ٤٥$

الحد الأدنى = ٠ ، الحد الأعلى = ٤٥

② أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل $\int_{-٢}^{٣} \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١} د س$

الحل: يصعب تحديد البينات لذلك يمكن استخدام $(ص' = ٠)$ لإيجاد نقاط حرجة

$ص' = \frac{٢ س (س^{٢} + ١) - (س^{٢} - ١) \times ٢ س}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = ٠$

$٢ س (س^{٢} + ١) - (س^{٢} - ١) \times ٢ س = ٠$

$\cancel{٢ س^{٣}} + ٢ س - \cancel{٢ س^{٣}} + ٢ س = ٠$

$٤ س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in [-٢ ، ٣]$

نوجد د(٠) ، د(٣) ، د(−٢)

$د(٠) = \frac{٠ - ١}{١ + ٠} = \boxed{-١}$ صغرى مطلقة

$د(٣) = \frac{٩ - ١}{١ + ٩} = \frac{٨}{١٠} = \boxed{\frac{٤}{٥}}$ عظمى مطلقة

$د(-٢) = \frac{٤ - ١}{٤ + ١} = \frac{٣}{٥}$

$-١ \le \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١} \le \frac{٤}{٥}$

الحد الأدنى $= -١ \times$ الفرق $= -١ \times ٥$

$= -٥$

الحد الأعلى $= \frac{٤}{٥} \times$ الفرق $= \frac{٤}{٥} \times ٥$

$= ٤$

الحد الأدنى = −٥ ، الحد الأعلى = ٤

③ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}}$ أوجد الحدين الأعلى والأدنى في حساب تكامل الدالة د(س) على الفترة [٢ ، ٥]

الحل: $ص' = ٠$ ، $\int_{٢}^{٥} \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} د س$

$ص' = \frac{١ \times \sqrt{س^{٢} + ٤} - س \times \frac{٢ س}{٢ \sqrt{س^{٢} + ٤}}}{(المقام)^{٢}} = ٠$

$\sqrt{س^{٢} + ٤} - \frac{س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} = ٠$

$\sqrt{س^{٢} + ٤} = \frac{س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} + ٤}}$ (مقص)

$\cancel{س^{٢}} + ٤ = \cancel{س^{٢}}$

$٤ = ٠$ (مرفوض)

لا توجد نقاط حرجة

نكتفي بـ: د(٢) ، د(٥)

$د(٢) = \frac{٢}{\sqrt{٤ + ٤}} = \frac{٢}{\sqrt{٨}} = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢}} = \boxed{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$د(٥) = \frac{٥}{\sqrt{٢٥ + ٤}} = \boxed{\frac{٥}{\sqrt{٢٩}}}$

$\frac{١}{\sqrt{٢}} \le \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} \le \frac{٥}{\sqrt{٢٩}}$

نطبق المبرهنة

$\frac{١}{\sqrt{٢}}(٥ - ٢) \le \int_{٢}^{٥} \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} \le \frac{٥}{\sqrt{٢٩}}(٥ - ٢)$

$\frac{٣}{\sqrt{٢}} \le \int_{٢}^{٥} \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} د س \le \frac{١٥}{\sqrt{٢٩}}$

الحد الأدنى $= \frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ، الحد الأعلى $= \frac{١٥}{\sqrt{٢٩}}$

ملاحظة: من مشاكل البناء

① تعدد البينات

② جاس ، جتاس لا يمكن إدخال زاوية مرتبة تصاعدية.

لذلك نستعين بالرسم البياني بأخذ الفترة التزايدية أو الفترة التناقصية حسب الفترة أو طول

مثال: أوجد الحدين الأعلى والأدنى لحساب التكامل $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٢\pi}{٣}} \frac{د س}{٣ + جتا س}$

الحل: $د(س) = \frac{١}{٣ + جتا س}$

$\frac{\pi}{٢} \le س \le \frac{٢\pi}{٣}$

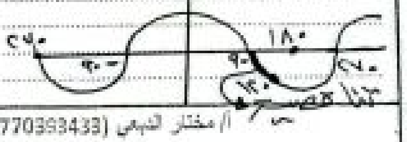
$٩٠ \le س \le ١٢٠$ (جتا)

عند إضافة جاس أو جتا يلزم نشوف الرسم أمرها.

♦ إذا الدالة تزايدية لا توجد ملاحظة

♦ إذا الدالة تناقصية نعكس الترتيب

♦ تزايدية وتناقصية نأخذ إحداها حسب طول فترة كلاً منهما



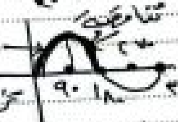
نوجد د(م) ، د(أ) ، والحرجة ثم نختار منها أصغر وأكبر

قزم واقف خير من عملاق راكع

النطفة فوق النطفة سيل والحبة فوق الحبة كيل

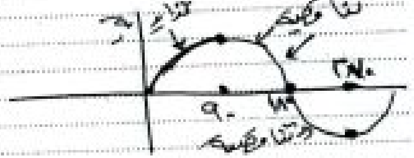
لاحظ من الرسم الدالة تناقصية
في الفترة [٩٠ ، ١٢٠]
لذلك نعكس المتراجحة
٩٠ ≤ س ≤ ١٢٠ (جتا)
جتا٩٠ ≥ جتاس ≥ جتا١٢٠ (الربع الثاني)
٠ ≥ جتاس ≥ −جتا٦٠
٠ ≥ جتاس ≥ −١/٢ (+٣)
٣ ≥ ٣ + جتاس ≥ ٣ − ١/٢
٣ ≥ ٣ + جتاس ≥ ٥/٢ (المقلوب)
١/٣ ≤ ١/(٣ + جتاس) ≤ ٢/٥
المبرهنة
١/٣ (٢π/٣ − π/٢) ≤ ∫ من π/٢ إلى ٢π/٣ ١/(٣ + جتاس) دس ≤ ٢/٥ (٢π/٣ − π/٢)
١/٣ × π/٦ ≤ // ≤ ٢/٥ × π/٦
π/١٨ ≤ // ≤ π/١٥
الحد الأدنى = π/١٨ ، الحد الأعلى = π/١٥

③ أوجد الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ∫ من ٠ إلى π جاس دس
الحل
٠ ≤ س ≤ π (جا)



تزايدية ثم تناقصية
نأخذ الفترة [٠ ، ٩٠] التزايدية
٠ ≤ س ≤ ٩٠ (جا)
جا٠ ≤ جاس ≤ جا٩٠
٠ ≤ جاس ≤ ١
المبرهنة
٠ (π − ٠) ≤ ∫ من ٠ إلى π جاس دس ≤ ١ (π − ٠)
٠ ≤ // ≤ π
الحد الأدنى = ٠ ، الحد الأعلى = π

④ أوجد الحد الأعلى والأدنى في ما يأتي
∫ من ٠ إلى π/٢ (٢ + جا٣س) دس
الحل
٠ ≤ س ≤ π/٢ (×٣)
٠ ≤ ٣س ≤ ٢٧٠ (جا)



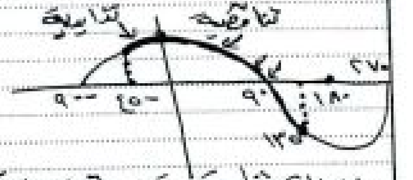
التناقصية من ٩٠ إلى ٢٧٠
نأخذ من فترة التزايد [٠ ، ٩٠]
∴ ٩٠ ≤ ٣س ≤ ٢٧٠ تناقصية
تناقصية نعكس المتراجحة
جا٩٠ ≥ جا٣س ≥ جا٢٧٠
١ ≥ جا٣س ≥ −١
٢ + ١ ≥ ٢ + جا٣س ≥ ٢ − ١
٣ ≥ ٢ + جا٣س ≥ ١ (٦)
٣/٦ ≥ (٢ + جا٣س) ≥ ١/٦
٣/٦ ≥ (٢ + جا٣س) ≥ ١ (المبرهنة)
٣/٦ (π/٢ − ٠) ≥ ∫ من ٠ إلى π/٢ (٢ + جا٣س) ≥ ١ (π/٢ − ٠)
٣π/٢ ≥ // ≥ π/٢ ← الأدنى
الأعلى

(١٣)

يا ذا زاد الغرور نقص السرور

---

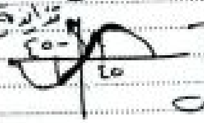
④ أوجد الحدين الأعلى والأدنى في ما يأتي
∫ من ٠ إلى π/٢ جتا(٢س − π/٤) دس
الحل
٠ ≤ س ≤ π/٢ (×٢)
٠ ≤ ٢س ≤ π
٠ ≤ ٢س ≤ ١٨٠ (−٤٥)
−٤٥ ≤ ٢س − ٤٥ ≤ ١٨٠ − ٤٥
−٤٥ ≤ ٢س − π/٤ ≤ ١٣٥



الدالة تناقصية من [٠ ، ١٣٥]
فترة الطول من التزايدية [−٤٥ ، ٠]
∴ ٠ ≤ ٢س − π/٤ ≤ ١٣٥
الدالة التناقصية نعكس المتراجحة
جتا٠ ≥ جتا(٢س − π/٤) ≥ جتا١٣٥
١ ≥ جتا(٢س − π/٤) ≥ −جتا٤٥ (الربع الثاني)
١ ≥ جتا(٢س − π/٤) ≥ −١/√٢
تطبيق المبرهنة
١ (π/٢ − ٠) ≥ ∫ من ٠ إلى π/٢ جتا(٢س − π/٤) ≥ −١/√٢ (π/٢ − ٠)
π/٢ ≥ // ≥ −π/٢√٢ الأدنى
الحد الأدنى : −π/٢√٢ ، الحد الأعلى = π/٢

◆ قوانين:
① جاس جتاس = ١/٢ جا٢س
② جاس + جتاس = √٢ جتا(س − π/٤)
③ جاس − جتاس = √٢ جا(س − π/٤)
④ جتاس − جاس = −√٢ جا(س − π/٤)

مثال: احسب الحد الأعلى والأدنى للتكامل
∫ من ٠ إلى π/٢ (جاس − جتاس) دس
الحل جاس − جتاس = √٢ جا(س − π/٤)
٠ ≤ س ≤ π/٢
٠ − π/٤ ≤ س − π/٤ ≤ π/٢ − π/٤
−π/٤ ≤ س − π/٤ ≤ π/٤



الدالة تزايدية
∴ لا نعكس المتراجحة
جا −π/٤ ≤ جا(س − π/٤) ≤ جاπ/٤
−١/√٢ ≤ جا(س − π/٤) ≤ ١/√٢ (×√٢)
−١ ≤ √٢ جا(س − π/٤) ≤ ١ المبرهنة
−١ (π/٢) ≤ ∫ من ٠ إلى π/٢ √٢ جا(س − π/٤) دس ≤ ١ (π/٢)
−π/٢ ≤ // ≤ π/٢
الأدنى   الأعلى

نشاط: أوجد الحد الأعلى والأدنى
① ∫ من π/٤ إلى π/٢ جاس جتاس دس   (ج) [illegible] ، π/٨
② ∫ من ١ إلى ٣ س^٢/(س^٢ + ٣) دس   (ج) ٠ ، ١٥/٣
③ ∫ من ٢ إلى ٥ س/(١ + س^٢) دس   (ج) ٢/٥ ، ١٥/(٢٦)

(١٤)

كلمة يا ريت ما تعمر بيت

وإعادة حل بعض التمارين السابقة بطريقة أخرى

(١) أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل

$\int_{-1}^{2} (3\text{س}^2 + 5)\,\text{ءس}$

الحل نوجد النقاط الحرجة

$\text{ص}' = 6\text{س} \Leftarrow 6\text{س} = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 0 \in [-1 ، 2]$

∴ النقاط الحرجة [-١ ، ٢ ، ٠}

د(-١) = ٣س^٢ + ٥ = ٣ + ٥ = $\boxed{8}$

د(٢) = ٣ × ٤ + ٥ = $\boxed{17}$ ← عظمى

د(٠) = ٣ × ٠ + ٥ = $\boxed{5}$ ← صغرى

∴ ٥ ≤ ٣س^٢ + ٥ ≤ ١٧

١٧ × ٣ = ٥١

٥ × ٣ = ١٥

$5(2+1) \le \int_{-1}^{2} (3\text{س}^2+5)\,\text{ءس} \le 17 \times 3$

$15 \le \int_{-1}^{2} (3\text{س}^2+5)\,\text{ءس} \le 51$

الحد الأدنى = ١٥ ، الحد الأعلى = ٥١

(٤) أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{4+4\,\text{ظتا}^2\text{س}}}$

الحل

$\frac{1}{\sqrt{4(1+\text{ظتا}^2\text{س})}}$ (٤ مشترك) ([illegible])

$= \frac{1}{\sqrt{4\,\text{قتا}^2\text{س}}} = \frac{1}{2\,\text{قتاس}}$

$= \frac{1}{2}\,\text{جاس}$

$0 \le \text{س} \le \frac{\pi}{3}$ (جتا)

$\text{جتا}0 \ge \text{جتاس} \ge \text{جتا}\frac{\pi}{3}$

$1 \ge \text{جتاس} \ge \frac{1}{2}$ $(\times \frac{1}{2})$

$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}\text{جتاس} \ge \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} - 0) \ge \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\text{جتاس} \ge \frac{1}{4}(\frac{\pi}{3} - 0)$

$\frac{\pi}{6} \ge // \ge \frac{\pi}{12}$

الحد الأدنى = $\frac{\pi}{12}$ ، الحد الأعلى = $\frac{\pi}{6}$

(٣) أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل

$\int_{-2}^{3} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 1}\,\text{ءس}$

الحل نتخلص من الكسر الغير حقيقي بالقسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^2 + 1 & \text{س}^2 - 1 \\ & \underline{\mp \text{س}^2 \mp 1} \\ & -2 \end{array}$$

الناتج ١ ، الباقي -٢

ص = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

$1 + \frac{-2}{\text{س}^2+1}$ (ابدأ)

$-2 \le \text{س} \le 3$ (تربيع)

$0 \le \text{س}^2 \le 9$ (+١)

$1 \le \text{س}^2 + 1 \le 10$ (القلب)

$1 \ge \frac{1}{\text{س}^2+1} \ge \frac{1}{10}$ $\times(-2)$

$-2 \le \frac{-2}{\text{س}^2+1} \le \frac{-2}{10}$

$-2 \le \frac{-2}{\text{س}^2+1} \le \frac{-1}{5}$

$1 - 2 \le 1 + \frac{-2}{\text{س}^2+1} \le 1 - \frac{1}{5}$

$-1 \le 1 + \frac{-2}{\text{س}^2+1} \le \frac{4}{5}$

$-1(3 - -2) \le \int_{-2}^{3} (1 + \frac{-2}{\text{س}^2+1})\,\text{ءس} \le \frac{4}{5}(5)$

$-5 \le // \le 4$

الحد الأدنى = -٥ ، الحد الأعلى = ٤

(٤) أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل

$\int_{0}^{\pi} \text{جاس}\,\text{ءس}$ الحل

ص' = ٠ نوجد النقاط الحرجة

ص' = جتاس ⇐ جتاس = ٠

⇐ س = ٩٠

س = ٩٠ ∈ الفترة

∴ النقاط الحرجة {٠ ، π ، ٩٠}

د(٠) = جا٠ = ٠

د(π) = جا١٨٠ = ٠ ← صغرى

د(٩٠) = جا٩٠ = ١ ← عظمى

∴ ٠ ≤ جاس ≤ ١

$0(\pi - 0) \le \int_{0}^{\pi} \text{جاس}\,\text{ءس} \le 1(\pi - 0)$

$0 \le // \le \pi$

الحد الأدنى = ٠ ، الحد الأعلى = π

(٥) أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + \text{جا}3\text{س}}\,\text{ءس}$

ص' = ٠ نوجد النقاط الحرجة

$\text{ص}' = \frac{3\,\text{جتا}3\text{س}}{2\sqrt{2 + \text{جا}3\text{س}}}$

∴ ٣ جتا٣س = ٠

جتا٣س = ٠

إما ٣س = ٩٠ ⇐ س = ٣٠

أو ٣س = ٢٧٠ ⇐ س = ٩٠

∴ النقاط الحرجة هي {٠ ، ٣٠ ، ٩٠}

$\text{د}(0) = \sqrt{2 + \text{جا}0} = \sqrt{2}$

$\text{د}(30) = \sqrt{2 + \text{جا}90} = \sqrt{3}$ ← عظمى

$\text{د}(90) = \sqrt{2 + \text{جا}270} = \sqrt{1} = 1$ صغرى

$1 \le \sqrt{2 + \text{جا}3\text{س}} \le \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{3}(1) \le \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + \text{جا}3\text{س}}\,\text{ءس} \le \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3}$

$\boxed{\frac{\pi}{3}} \le \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + \text{جا}3\text{س}}\,\text{ءس} \le \boxed{\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}}$

الحد الأدنى ، الحد الأعلى

(٦) أوجد الحد الأعلى والأدنى للتكامل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جاس} - \text{جتاس})\,\text{ءس}$

الحل $\boxed{\text{ص}' = 0} \Leftarrow \text{جتاس} + \text{جاس} = 0$

جاس = − جتاس (÷ جتاس)

$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{-\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$

ظاس = −١ ⇐ س = ١٣٥

س = ١٣٥ ∉ الفترة

∴ النقاط الحرجة هي {٠ ، ٩٠}

د(٠) = جا٠ − جتا٠ = (−١)

د(٩٠) = جا٩٠ − جتا٩٠ = (١)

−١ ≤ جاس − جتاس ≤ ١ ×

$-1(\frac{\pi}{2}) \le \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (جاس − جتاس) دس $\le 1(\frac{\pi}{2})$

$-\frac{\pi}{2} \le$ // $\le \frac{\pi}{2}$

الأدنى — الأعلى

أ/ حصة 2021

١) الحد الأدنى لـ $\int_{2}^{4}$ (س² − ٤س + ٤) دس هو ....

[صفر ، ٢ ، ٤ ، ٨]

الحل — تعديل السؤال

(س − ٢)² مربع كامل

٢ ≤ س ≤ ٤ (−٢)

٠ ≤ س − ٢ ≤ ٢ تربيع

٠ ≤ (س − ٢)² ≤ ٤

٠(٤ − ٢) ≤ $\int_{2}^{4}$ (س − ٢)² دس ≤ ٤(٤ − ٢)

٠ ≤ // ≤ ٨

أدنى ↕ أعلى

٠ // // ٨

٢) إذا كان

−١٦ ≤ $\int_{-ب}^{ب}$ (س² − ٤) دس ≤ .

∀ س ∈ [−ب ، ب] فإن قيمة ب = ... [١ ، ② ، ٣ ، ٤]

الحل ٠ ≤ س ≤ ب (تربيع)

٠ ≤ س² ≤ ب² (−٤)

−٤ ≤ س² − ٤ ≤ ب² − ٤

−٤(ب + ب) ≤ $\int_{-ب}^{ب}$ (س² − ٤) دس ≤ (ب² − ٤)(ب + ب) الأعلى

−٨ب ≤ // ≤ ٢ب(ب² − ٤)

∴ −٨ب = −١٦

∴ ب = ٢ ويمكن حلها بالتجريب

③ إذا كان −٤ ≤ ٢د(س) + ٢ ≤ ٤

∀ س ∈ [−١ ، ٢] فإن مجموع الحدين الأدنى والأعلى لـ $\int_{-1}^{2}$ د(س) دس يساوي ....

[٦ ، ③− ، ١٢ ، −١٢]

الحل بالهدم

−٤ ≤ ٢د(س) + ٢ ≤ ٤

−٤ − ٢ ≤ ٢د(س) ≤ ٤ − ٢

−٦ ≤ ٢د(س) ≤ ٢ (÷٢)

−٣ ≤ د(س) ≤ ١

−٣(٢ − (−١)) ≤ $\int_{-1}^{2}$ د(س) دس ≤ ١(٢ − (−١))

−٩ ≤ // ≤ ٣

الحد الأدنى = −٩

الحد الأعلى = ٣

مجموع الحدين = −٩ + ٣ = −٦

فضاء التكامل $\int_{1}^{2}$ (لوس) دس محصور على ... هو ....

[ج ، لو٢ ، لو٤ ، صفر ، لا شيء]

مبرهنة المقارنة

الجزء الأول :-

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل على [أ ، ب] ، وكانت د(س) ≥ ٠ ∀ س ∈ [أ ، ب] فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) دس ≥ ٠

وبالمثل: إذا كانت د(س) ≤ ٠ فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ≤ ٠

طرق الحل: (خطوات الدرس)

١) طريقة البناء

٢) طريقة التعويض نختار س = جـ ∈ [أ ، ب] ونعوض عنه في الدالة.

٣) اشارة الارباع في النسب المثلثية

مثال :- ٢ ع x

$\int_{3}^{4}$ (س³ − ٨) دس ≥ ٠ (✓)

الحل بالبناء

٣ ≤ س ≤ ٤ (تكعيب)

٢٧ ≤ س³ ≤ ٦٤ (−٨)

٢٧ − ٨ ≤ س³ − ٨ ≤ ٦٤ − ٨

١٩ ≤ س³ − ٨ ≤ ٥٦

فترة موجبة ≥ ٠

∴ س³ − ٨ ≥ ٠

∴ $\int_{3}^{4}$ (س³ − ٨) ≥ ٠

طريقة التعويض: د(٣) = ٣³ − ٨ = ٢٧ − ٨ = ١٩ > ٠

② اثبت ان: $\int_{-2}^{2}$ (س⁴ + ٢س² + ٢) دس > ٠

الحل نختار س = ١ ∈ [−٢ ، ٢] ونعوض في س⁴ + ٢س² + ٢

د(١) = (١)⁴ + ٢(١)² + ٢ = ١ + ٢ + ٢ = ⑤

د(١) = ٥ > ٠

∴ $\int_{-2}^{2}$ (س⁴ + ٢س² + ٢) دس > ٠

③ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$ ظا٢س دس ≥ ٠ (✗)

الحل بالبناء والارباع

$\frac{\pi}{3} \le$ س $\le \frac{\pi}{2}$

٦٠ ≤ س ≤ ٩٠ (×٢)

١٢٠ ≤ ٢س ≤ ١٨٠

الربع الثاني ظا

الظا سالبة في الربع الثاني

∴ ظا٢س ≤ ٠

طريقة ٣: د(٧٠) = ظا١٤٠ = ظا٤٠ − في الربع الثاني القيمة سالبة

ملاحظة: في مبرهنة المقارنة يجوز البناء في حالة تعدد السينات في حالتين: ١) الضرب ٢) القسمة

④ اثبت ان: $\int_{0}^{1} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{2}\text{س}}{\text{س}^2 - 5} \le 0$

الحل نبني البسط وحده والمقام وحده

أولاً: جا $\frac{\pi}{2}$ س

٠ ≤ س ≤ ١ ($\times \frac{\pi}{2}$)

٠ ≤ $\frac{\pi}{2}$ س ≤ $\frac{\pi}{2}$

الربع الأول وقيمها موجبة

جا $\frac{\pi}{2}$ س ≥ ٠ (+)

نبني المقام: س² − ٥

٠ ≤ س ≤ ١ (تربيع)

٠ ≤ س² ≤ ١ (−٥)

−٥ ≤ س² − ٥ ≤ ١ − ٥

−٥ ≤ س² − ٥ ≤ −٤

طلعوا مجاناً يا فتكرناهم رخاص

−٥ ≥ س٢ − ٥ ≥ −٤

لـ فترة سالبة دوما

س٢ − ٥ ≥ ٠ (−)

∴ جا π/٢ س (+) / س٢ − ٥ (−) = − ≥ ٠

∴ جا π/٢ س / س٢ − ٥ ≥ ٠

∴ ∫٠^١ جا π/٢ س / س٢ − ٥ ≥ ٠

طريقة (٢)
د(١) = جا ٩٠ / ١ − ٥ = ١/−٤ ≥ ٠

الجزء الثاني:

إذا كانت ق(س) ، ع(س) دالتين قابلتين للتكامل على الفترة [م ، ب]
وكانت ق(س) ≥ ع(س)
فإن ∫م^ب ق(س) دس ≥ ∫م^ب ع(س) دس

مثال: إذا كانت ق(س) ≥ ع(س)
فإن ∫م^٣ ق(س) دس ≥ ∫م^٣ ع(س) دس

- يمكن المقارنة بين دالتين بأحد الطرق الآتية:-

١) الدالة الأولى − الدالة الثانية (أم البنات)
إذا كانت ق − ع ≥ ٠ فإن ق ≥ ع
وإذا كانت ق − ع ≤ ٠ فإن ق ≤ ع

② نختار رقم ينتمي للفترة [م ، ب] ونعوض عنه في الدالتين ونقارنه

③ نبحث كلا الدالتين لحالها ونقارنها

④ بأرباع النسبة ونقارنه

مثال ١:- أثبت أن:
∫_{-١}^{١} (٢س٢ + ١) دس ≥ ∫_{-١}^{١} (س٢ + ٤) دس

الحل: طريقة: الدالة الأولى − الدالة الثانية
ق − ع
(٢س٢ + ١) − (س٢ + ٤)
٢س٢ + ١ − س٢ − ٤
س٢ − ٣ ← هذا نبحثه
−١ ≥ س ≥ ١ (نربع)
٠ ≥ س٢ ≥ ١ ، ٠ ≥ س٢ ≥ ١ بالتربيع
٠ − ٣ ≥ س٢ − ٣ ≥ ١ − ٣
−٣ ≥ س٢ − ٣ ≥ −٢
لـ فترة سالبة دوما
∴ س٢ − ٣ ≥ ٠
∴ ق ≥ ع
∴ ٢س٢ + ١ ≥ س٢ + ٤
∴ ∫_{-١}^{١} (٢س٢ + ١) دس ≥ ∫_{-١}^{١} (س٢ + ٤) دس

طريقة (٢)
نختار س = ١
ق(١) = ٢ + ١ = ٣
ع(١) = ١ + ٤ = ٥
ق ≥ ع

② وزاري ٢٠١٢:
∫_١^٢ (س٢ + ١) دس ≥ ∫_١^٢ ٢س دس
الحل: بالتعويض: نختار س = ٠
∴ ق(٠) = س٢ + ١ = [١] أكبر
ع(٠) = ٢س = [٠] أصغر
∴ ق > ع
∴ س٢ + ١ ≥ ٢س
∴ ∫_١^٢ س٢ + ١ ≥ ∫_١^٢ ٢س دس

③ (٢٠١٠) ٢ × ١:
∫٠^١ ∛س دس ≥ ∫٠^١ √س دس (×)
الحل
٠ ≥ س ≥ ١
س ≥ ١ (٢ ، ٣)
س٣ ≥ س٢ بأخذ الجذر

طريقة أخرى
نختار س = ١/٦٤
∛س = ∛(١/٦٤) = ١/٤
بينما √س = √(١/٦٤) = ١/٨
١/٤ > ١/٨

قلبه محمد صالح

ولا تنسا برأصلح

س٣ ≥ س٢ (√)
∛(س٣) ≥ ∛(س٢)
√س ≥ ∛س أي ∛ أصغر ≥ كبير
∴ يصبح ∛س ≥ √س
∴ ∫٠^١ ∛س دس ≥ ∫٠^١ √س دس

طريقة أخرى:
ق = ∛س ، ع = √س
∛س ، √س نحولها إلى أسس
س^{١/٣} ، س^{١/٢} نتخلص من مقام الأس في الطرف الأيمن
س٢ ، س٣ نعوض س = ١/٢
ق(١/٢) = س٢ = (١/٢)٢ = ١/٤ كبير
ع(١/٢) = س٣ = (١/٢)٣ = ١/٨ صغير
∴ الأولى ≥ الثانية
∴ ∛س ≥ √س
∴ ∫٠^١ ∛س دس ≥ ∫٠^١ √س دس

④ وزاري ١٣:
∫_{٣π/٤}^{π} جتا ٢س دس ≥ ∫_{٣π/٤}^{π} جا ٢س دس
الحل
نبحث الأولى: جتا ٢س
(×٢)
١٣٥ ≥ س ≥ ١٨٠
٢٧٠ ≥ ٢س ≥ ٣٦٠
لـ الربع الرابع جتا
∴ جتا ٢س ← (+) ← موجب

طريقة (٢) نختار س = ٣π/٤
ق(٣π/٤) = جتا ٢٧٠ = ٠
ع(٣π/٤) = جا ٢٧٠ = −١
∴ ق > ع

نبحث الثانية: جا ٢س
١٣٥ ≥ س ≥ ١٨٠ (×٢)
٢٧٠ ≥ ٢س ≥ ٣٦٠
لـ الربع الرابع جا سالب
∴ جا ٢س ← (−)

جتا ٢س (+) ، جا ٢س (−)
∴ جتا ٢س ≥ جا ٢س
∴ ∫_{٣π/٤}^{π} جتا ٢س دس ≥ ∫_{٣π/٤}^{π} جا ٢س دس

⑤ ٢٠١٤:
∫_{π/٢}^{π} جتا س/٢ دس ≥ ∫_{π/٢}^{π} جا ٢س دس (×)
الحل
نبحث الأولى: جتا س/٢
٩٠ ≥ س ≥ ١٨٠
٤٥ ≥ س/٢ ≥ ٩٠
لـ الربع الأول موجب
∴ جتا س/٢ ≥ ٠
نبحث الثانية: جا ٢س
٩٠ ≥ س ≥ ١٨٠ (×٢)
١٨٠ ≥ ٢س ≥ ٣٦٠
لـ الربع الثالث والرابع سالبة
∴ جا ٢س ≥ ٠ (−)
∴ جتا س/٢ (+) ، جا ٢س (−)
∴ جتا س/٢ > جا ٢س
∴ ∫_{π/٢}^{π} جتا س/٢ دس > ∫_{π/٢}^{π} جا ٢س دس

طريقة (٢)
نختار س = π/٢
ق(٩٠) = جتا ٤٥ = ١/√٢
ع(٩٠) = جا ١٨٠ = ٠
∴ ق > ع

⑥ ٢٠١٢:
∫_{π/٤}^{π/٣} جا س دس ≥ ∫_{π/٤}^{π/٣} جتا س دس (×)
الحل
[π/٤ ، π/٣] في الربع الأول ← جا س (+) ، جتا س (+)

⑦ ٢٠١٣:
∫_{π/٦}^{π/٤} جا س دس ≥ ∫_{π/٦}^{π/٤} جتا س دس (×)
نختار س = ٣٠ ونعوض
ق(٣٠) = جا ٣٠ = ١/٢ صغير والدليل ١/٢ أصغر
ع(٣٠) = جتا ٣٠ = √٣/٢ كبير والدليل √٣/٢ أكبر

⑧ أيهما أكبر $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{جتا}\,س}\;ءس$ أم $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{جا}\,س}\;ءس$

الحل بالعدم

$\sqrt{1+\text{جتا}\,س}$ ، $\sqrt{1+\text{جا}\,س}$

$1+\text{جتا}\,س$ ، $1+\text{جا}\,س$

جتاس ، جاس [illegible]

نختار س = ٠

∴ جتا٠ = ١ ، جا٠ = ٠

∴ جتاس ≥ جاس

∴ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\text{جتا}\,س}\;ءس \ge \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\text{جا}\,س}\;ءس$

2022

① $\int_{0}^{2} س^{2}\;ءس \ge \int_{0}^{2} 4س\;ءس$ (ص)

الحل

نختار س = ٢

د(٢) = س^٢ = ٤ ، ع(٢) = ٤ × ٢ = ٨

∴ د ≤ ع

② $\int_{-1}^{2} هـ^{س}\;ءس >$ صفر (ص)

الحل:

نختار س = −١

∴ $د(-1) = هـ^{-1} = \frac{1}{هـ} > 0$

ملاحظة(١) هـ ≈ ٢٫٧٢

ملاحظة(٢) $هـ^{س} > 0$ (دائماً)

③ $\int_{-1}^{0} س^{2}\;ءس >$ . . . .

④ $\int_{0}^{1} -٢س\;ءس$ ، $\int_{0}^{1} ([illegible])\;ءس$

٦) $\int_{-1}^{0} س^{2}\;ءس$ ، $\int_{-1}^{0} (1-س^{2})\;ءس$

الحل

نختار $\left(س = \frac{-1}{2}\right)$

∴ $د_1\left(\frac{-1}{2}\right) = س^{2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

$د_2\left(\frac{-1}{2}\right) = -٢س = -2 \times \frac{-1}{2} = \boxed{1}$

$د_3\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 - س = 1 - \left(\frac{-1}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{2}} = 1\frac{1}{2}$

$د_4\left(\frac{-1}{2}\right) = س^{3} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3} = \boxed{\frac{-1}{8}}$

$د_5\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 - س^{2} = 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{2} = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$\frac{-1}{8} < \frac{1}{4}$

∴ $\int_{-1}^{0} س^{2}\;ءس > \int_{-1}^{0} س^{3}\;ءس$

تدريب: $\int_{-1}^{3} |س| > 0$ (X)

الحل

د(−٢) = |−٢| = ٢ > ٠

نشاط

١) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}\,س\;ءس \ge \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}\,س\;ءس$ (ص)

② $\int_{2}^{3} \frac{2}{س}\;ءس \ge \int_{2}^{3} \frac{3}{س^{2}}\;ءس$ (ص)

③ $\int_{-3}^{-2} \frac{ءس}{س^{2}+٢س-1} \ge 0$ (X)

④ أيهما أكبر

(أ) $\int_{0}^{1} س\,\text{جتا}^{2}س\;ءس$ أم $\int_{0}^{1} س^{2}\,\text{جا}\,س\;ءس$

(ب) $\int_{0}^{1} س^{2}\;ءس$ أم $\int_{0}^{1} \sqrt{س}\;ءس$

⑤ اذا علم أن ٣ س ≤ د(س) ≤ ٢(س+١) ، اثبت

$٢ \le ٤ + \int_{1}^{3} د(س)\;ءس \le \int (س+1)^{2}\;ءس$

قواعد التكامل الشهيرة

قاعدة ①: $\int 0\;ءس = ث$

حيث ث ثابت التكامل

قاعدة ②: تكامل الدالة الثابتة

$\int جـ\;ءس = جـ\,س + ث$

(نضرب الثابت × س) + ثابت التكامل

$\int_{أ}^{ب} جـ\;ءس = (ب - أ)\,جـ$

نضرب (الفرق) × (الثابت)

مثال: $\int ٦\;ءس = ٦س + ث$

① $\int_{2}^{5} ٦\;ءس = (5-2)\times 6 = 18$

② $\int_{1}^{3} \text{ظا}\frac{\pi}{4}\;ءس$

الحل $\int_{1}^{3} 1\;ءس = (3-1)\times 1 = 2$

③ $\int_{2}^{أ} ٤\;ءس = ٤(أ - ٢)$

$= (أ - ٢)\,٤$

قاعدة ③: تكامل الدالة الأسية (القوى)

$\int س^{ن}\;ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ ، ن ≠ −١

مثال: $\int س^{4}\;ءس = \frac{س^{4+1}}{4+1} + ث$

$= \frac{1}{5}س^{5} + ث$

② $\int س^{-3}\;ءس = \frac{س^{-3+1}}{-3+1} + ث$

$= \frac{س^{-2}}{-2} + ث = \frac{-1}{2}س^{-2} + ث$

③ $\int \sqrt[3]{س^{2}}\;ءس = \ldots\ldots$

$\int س^{\frac{2}{3}}\;ءس = \frac{س^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + ث$

$= \frac{س^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + ث$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{س^{5}} + ث$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{س^{3}} \times \sqrt[3]{س^{2}} + ث$

$= \frac{3}{5}س\sqrt[3]{س^{2}} + ث$

④ $\int_{0}^{1} س^{3}\;ءس = \ldots\ldots$

$= \left.\frac{س^{4}}{4}\right|_{0}^{1} = $ (العالي) − (الواطي)

$= \frac{(1)^{4}}{4} - \frac{(0)^{4}}{4}$

$= \frac{1}{4}$

⑤ $\int_{1}^{3} ٢س\;ءس$

$\left.\frac{٢س^{2}}{2}\right|_{1}^{3} = \left.س^{2}\right|_{1}^{3}$

(العالي) − (الواطي)

$(3)^{2} - (1)^{2}$

$9 - 1 = 8$

◆ ملاحظة مهمة

١ التكامل الغير محدد يلحق بالجواب ثابت التكامل (ث)

٢ التكامل المحدد يلحق الجواب بالتعويض (العالي) − (الواطي)

قاعدة ③: $\int س^{-1}\, ءس$

$\int س^{-1}\, ءس = لو|س| + ث$

$\int ص^{-1}\, ءص = لو|ص| + ث$

$\int_{1}^{هـ} س^{-1}\, ءس = \ldots$

$= لو|س| = لو(هـ) - لو(1)$

$= 1 - 0 = 1$

قاعدة ④: تكامل الاقترانات المزدوجة

يقصد بالمزدوجة س^{ن} (درجة أولى)

$\int (أ س + ب)^{ن}\, ءس = \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + ث$

$ن \neq -1$

نقسم على: الأس الجديد ومعامل س

① $\int (4س+1)^{7}\, ءس = \frac{(4س+1)^{8}}{8\times 4} + ث$

$= \frac{1}{32}(4س+1)^{8} + ث$

② $\int (6-س)^{10}\, ءس = \frac{(6-س)^{11}}{11\times -1} + ث$

$= \frac{-1}{11}(6-س)^{11} + ث$

③ $\int (س+5)^{-1}\, ءس = لو|س+5| + ث$

④ $\int (2س+3)^{-1}\, ءس = \frac{لو|2س+3|}{2} + ث$

⑤ $\int \frac{ءس}{4س+1} = \ldots$

$\int (4س+1)^{-1}\, ءس = \frac{لو|4س+1|}{4} + ث$

⑥ $\int_{0}^{2} (س+4)^{2}\, ءس = \ldots$

الحل $\left[\frac{(س+4)^{3}}{3}\right]_{0}^{2}$

$\left(\frac{(2+4)^{3}}{3}\right) - \left(\frac{(0+4)^{3}}{3}\right)$

$\frac{216}{3} - \frac{64}{3} = \frac{152}{3}$

⑦ $\int (س^{2}+3)^{2}\, ءس = \ldots$

هذا المقدار ليس نموذج $\boxed{س^{ن}}$

∴ نفك الأقواس (مربع كامل)

$\int (س^{4} + 6س^{2} + 9)\, ءس$

كل حد تكامله على حدى

$\frac{س^{5}}{5} + \frac{6س^{3}}{3} + 9س + ث$

$\frac{1}{5}س^{5} + 2س^{3} + 9س + ث$

قاعدة (5) تكامل الدالة الأسية المزدوجة

$\int أ^{س}\, ءس = \frac{أ^{س}}{1 \times لو أ} + ث$

$\frac{نفسه}{مشتقة\ الأس \times لو\ الأساس}$

① $\int 3^{2س}\, ءس = \frac{3^{2س}}{2 \times لو 3} + ث$

② $\int 3^{س} \times 2^{2س}\, ءس = \ldots$

$\int 3^{س} \times 4^{س}\, ءس$ (التعديل)

$\int (3\times 4)^{س}\, ءس$ (أس بالكل)

$\int (12)^{س}\, ءس = \frac{(12)^{س}}{1 \times لو 12} + ث$

③ $\int_{0}^{1} هـ^{س}\, ءس = هـ^{س} = (هـ^{1}) - (هـ^{0})$

$= هـ - 1$

قاعدة (6): $\int لو_{هـ} س\, ءس$

خاص: تكامل (لو$_{هـ}$ س) فقط

$\int لو_{هـ} س\, ءس = س لو_{هـ} س - س + ث$

«اعطه وأخذ»

أعطيه سين وخذ منه سين

① $\int لو س\, ءس = س لو س - س + ث$

$= س(لو س - 1) + ث$

② $\int لو_{هـ} س\, ءس = س لو س - س + ث$

$= س(لو س - 1) + ث$

③ $\int_{1}^{هـ} لو س\, ءس = \ldots$

س لو س − س = (العالي) − (الواطي)

$(هـ لو هـ - هـ) - (1 لو 1 - 1)$

$(هـ \times 1 - هـ) - (1 \times 0 - 1)$

$(هـ - هـ) - (-1)$

صفر $+ 1 = 1$

قاعدة (7): تكامل النسب المثلثية والزوايا مزدوجة

أولاً: $\int جا س\, ءس = -جتا س + ث$

$\int جا م س\, ءس = \frac{-جتا م س}{م} + ث$

تكامل النسبة ونقسم على معامل س

ثانياً: $\int جتا س\, ءس = + جا س + ث$

$\int جتا 2س\, ءس = \frac{جا 2س}{2} + ث$

ثالثاً: $\int ظا س\, ءس = لو|قا س| + ث$

أو: $\int ظا س\, ءس = - لو|جتا س| + ث$ دائماً

$\int ظا س\, ءس = لو|قا| + ث$

رابعاً: $\int ظتا س\, ءس = لو|جا س| + ث$ (1)

أو: $\int ظتا س\, ءس = - لو|قتا س| + ث$ (2)

$\int ظتا س\, ءس = (لو جا)$

$\int ظتا 3س\, ءس = \frac{لو|جا 3س|}{3} + ث$

خامساً: $\int قا س\, ءس$

$= لو|قا س + ظا س| + ث$

$= لو|قا + ظا| + ث$

سادساً: $\int قتا س\, ءس$

$= لو|قتا س - ظتا س| + ث$

$= لو|قتا - ظتا| + ث$

قاعدة (8): تكامل مربعات النسب

$\int ظا^{2} س\, ءس$ ، $\int ظتا^{2} س\, ءس$

، $\int قا س\, ءس$ ، $\int قتا س\, ءس$

، $\int جا^{2} س\, ءس$ ، $\int جتا^{2} س\, ءس$

① $\int ظا^{2} س\, ءس =$ بلا تربيع − سين + ث

$\int ظا^{2} س\, ءس = ظا س - س + ث$

= امسح التربيع − سين

$\int ظا^{2} 7س\, ءس = \frac{ظا 7س}{7} - س + ث$

② $\int ظتا^{2} س\, ءس =$ − بلا تربيع − سين + ث

$\int ظتا^{2} س\, ءس = - ظتا س - س + ث$

$\int ظتا^{2} 6س\, ءس = - \frac{ظتا 6س}{6} - س + ث$

تابع: قواعد التكامل الشهيرة

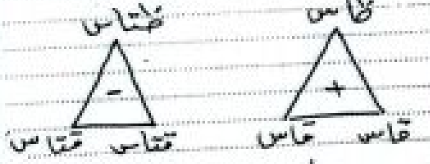
⑫ ∫ قا^2 س ء س = الأس ينزل بواحد

∫ قا^2 س ء س = ظا س + ث

∫ قا^2 ٤ س ء س = $\frac{1}{4}$ ظا ٤ س + ث

⑬ ∫ قتا^2 س ء س = الأس ينزل بواحد

∫ قتا^2 س ء س = − ظتا س + ث



◆ لا ننسى القسمة على معامل س عندما نكامل النسبة.

◆ قانون الدستور

جا^2 س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا ضعف)

جتا^2 س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ضعف)

∫ جا^2 س ء س = ∫ الدستور

∫ جا^2 س ء س = ∫ $\frac{1}{2}$ (١ − جتا ٢ س) ء س

= $\frac{1}{2}$ (س − $\frac{\text{جا ٢ س}}{2}$) + ث

∫ جتا^2 س ء س = ∫ الدستور

∫ جتا^2 ٢ س ء س = ∫ $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ٤ س) ء س

= $\frac{1}{2}$ (س + $\frac{\text{جا ٤ س}}{4}$) + ث

∫ جا^2 $\frac{س}{2}$ ء س = ∫ $\frac{1}{2}$ (١ − جتا س) ء س

= $\frac{1}{2}$ (س − جا س) + ث

قاعدة ⑩

◆ ∫ قا س ظا س ء س = [illegible]

∫ قا س ظا س ء س = قا س + ث

∫ قا ٣ س ظا ٣ س ء س = $\frac{\text{قا ٣ س}}{3}$ + ث

◆ ∫ قتا س ظتا س ء س = [illegible]

∫ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث

قاعدة ⑪ ∫ قا^{ن} س ظا س ء س = $\frac{\text{قا}^{ن}\text{ س}}{ن}$ + ث

∫ قا^5 س ظا س ء س = $\frac{\text{قا}^{5}\text{ س}}{5}$ + ث

◆ ∫ قتا^{ن} س ظتا س ء س = − $\frac{\text{قتا}^{ن}\text{ س}}{ن}$ + ث

∫ قتا^9 س ظتا س ء س = − $\frac{\text{قتا}^{9}\text{ س}}{9}$ + ث

تمارين على قواعد [illegible]

① $\int_{0}^{\pi}$ قا س ظا س ء س = ...

[−١ ، ٠ ، −٢ ، ٢]

الحل: قا س = (قا π) − (قا ٠)

= (−١) − ١ = −٢

② ∫ ظا^2 أ س ء س = ...

[قا^2 أ س + ث ، $\frac{1}{أ}$ ظا أ س − س + ث ، ظا أ س + س + ث ، $\frac{\text{ظا}^2\text{ أ س}}{أ}$ + ث]

③ $\int_{0}^{\text{لو ٣}}$ هـ^{٢س} ء س = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

الحل: $\frac{\text{هـ}^{٢س}}{2}$ = $\frac{\text{هـ}^{٢لو٣}}{2}$ − $\frac{\text{هـ}^{0}}{2}$ = $\frac{9}{2}$ − $\frac{1}{2}$ = ٤

قاعدة ⑨ ∫ (أ س + ب)^{ن} ء س = $\frac{(\text{أ س + ب})^{ن+١}}{ن+١}$ × $\frac{1}{أ}$

١٧٥ ∫ $\sqrt{\text{٣ س + ٥}}$ ء س = [illegible] = $\frac{1}{3}$ × $\frac{2}{3}$ (٣ س + ٥)$^{\frac{3}{2}}$ + ث = $\frac{1}{9}$ (٣ س + ٥)$^{\frac{3}{2}}$ + ث

---

④ ∫ (جا^2 س + جتا^2 س) ء س = ...

[س + ث ، ٢ س + ث ، ٣ س + ث ، س + ث]

الحل = ∫ ١ ء س = س + ث

المتطابقة الذهبية

⑤ $\int_{1}^{5}$ (جا^2 س + جتا^2 س) ء س = ٤ (ب)

الحل $\int_{1}^{5}$ ١ ء س = س $\Big]_{1}^{5}$ = (٥ − ١) = ٤

⑥ ∫ $\frac{\text{جتا}^2\text{ س}}{\text{١ − جا س}}$ ء س = ...

[جتا س + ث ، − جتا س + ث ، س − جتا س + ث]

الحل ∫ $\frac{\text{١ − جا}^2\text{ س}}{\text{١ − جا س}}$ ء س = ∫ $\frac{(\text{١ − جا س})(\text{١ + جا س})}{\text{١ − جا س}}$

= ∫ (١ + جا س) ء س = س − جتا س + ث

⑦ ∫ هـ$^{−٢لو(س+١)}$ ء س = ...

[− (س + ١) + ث ، −٢ (س + ١)$^{-1}$ + ث ، −٢ (س + ١)$^{-2}$ + ث ، − (س + ١)$^{-1}$ + ث]

= ∫ (س + ١)$^{-2}$ ء س = $\frac{(\text{س + ١})^{-2+1}}{-2+1}$ + ث

= $\frac{(\text{س + ١})^{-1}}{-1}$ + ث

= − (س + ١)$^{-1}$ + ث

⑧ ∫ جتا ($\frac{س}{2}$ + ٢) ء س = ...

الحل = $\frac{\text{جا}(\frac{س}{2} + 2)}{\frac{1}{2}}$ + ث

= ٢ جا ($\frac{س}{2}$ + ٢) + ث

◆ قاعدة الفراشة

لو$_{م}$ س × لو$_{س}$ ب = لو$_{م}$ ب

لو$_{2}$ ٦ × لو$_{6}$ ٨ = لو$_{2}$ ٨ = ٣

⑧ ∫ لو$_{2}$ س × لو$_{س}$ ٨ ء س = ...

[س + ٣ ، ٢ س + ٣ ، ٤ س + ث ، ٣ س + ث]

∫ لو$_{2}$ س × لو$_{س}$ ٨ ء س

∫ لو$_{2}$ ٨ ء س

= ∫ ٣ ء س = ٣ س + ث

⑨ ∫ $\frac{\text{لو س}^5}{\text{لو س}}$ ء س = ...

[٥ س + ث ، $\frac{س^5}{5}$ + ث ، $\frac{س^2}{2}$ + ث ، $\frac{س^6}{5}$ + ث]

الحل ∫ $\frac{\text{٥ لو س}}{\text{لو س}}$ ء س = ∫ ٥ ء س

= ٥ س + ث

⑩ ∫ $\frac{\text{س + ٣}}{\sqrt{\text{س + ٣}}}$ ء س = ...

الحل ∫ $\frac{\sqrt{\text{س+٣}}\sqrt{\text{س+٣}}}{\sqrt{\text{س+٣}}}$ ء س

∫ (س + ٣)$^{\frac{1}{2}}$ ء س = $\frac{(\text{س + ٣})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ + ث

= $\frac{2}{3}$ (س + ٣)$^{\frac{3}{2}}$ + ث

⑪ $\int_{2}^{4}$ ك لو$_{5}$ ٢٥ ء س = ٢ ك (✗)

الحل $\int_{2}^{4}$ ك × ٢ ء س = $\int_{2}^{4}$ ٢ ك ء س = ٢ ك س $\Big]_{2}^{4}$

= ٨ ك − ٤ ك = ٤ ك

⑫ $\int_1^2 ٢^{س} \times$ لو٢ ء س = ...

[١ ، ② ، ٣ ، ٤]

الحل $\frac{٢^{س}}{لو٢} \times$ لو٢ = $٢^{س}$

= $(٢^{٢}) - (٢^{١})$

= ٤ − ٢ = ٢

[illegible]

⑬ $\int_1^{هـ}$ ٢ $س^{-١}$ ء س = ٢ (ب)

الحل ٢ $\int_1^{هـ}$ $س^{-١}$ ء س

٢ لو س = (٢ لوهـ) − (٢ لو١)

= (٢ × ١) − (٢ × ٠)

= ٢

⑭ [illegible]

$\int$ (قا² س + قتا س ظتا س) ء س

= ظا س − قتا س + ث (ب)

⑮ [illegible]

$\int_{أ}^{ب}$ ل ء س = ل (أ − ب) (×)

التصحيح: $\int_{أ}^{ب}$ ل ء س = ل (ب − أ)

⑯ [illegible]

$\int$ ($هـ^{س}$ + $س^{هـ}$) ء س = $هـ^{س}$ + $\frac{س^{هـ+١}}{هـ+١}$ + ث

⑰ $\int$ لو $هـ^{جا س − ٤ س}$ ء س = ...

الحل $\int$ (جا س − ٤ س) ء س

= − جتا س − ٤ $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث

= − جتا س − ٢ س² + ث

⑱ $\int$ (√٣س + جا $\frac{π}{٦}$) ء س

$\frac{٢}{٩}$ س √٣س + $\frac{١}{٢}$ س + ث (ج

الحل $\int$ (√٣س + $\frac{١}{٢}$) ء س

= $\frac{(٣س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٣}$ + $\frac{١}{٢}$ س + ث

= $\frac{٢}{٩}$ (√٣س)³ + $\frac{١}{٢}$ س + ث

= $\frac{٢}{٩}$ √٣س √(٣س)² + $\frac{١}{٢}$ س + ث

= $\frac{٢}{٩}$ ٣ س √٣س + $\frac{١}{٢}$ س + ث

⑲ [illegible]

$\int$ جتا س قا س ء س = س + ث (ص)

$\int$ جتا س × $\frac{١}{جتا س}$ ء س = $\int$ ١ ء س = س + ث

(نسبة × مقلوبها = ١)

⑳ $\int_1^4$ [illegible] $هـ^{لو س}$ ء س = $\frac{١٥}{٢}$ (ص)

الحل $\int_1^4$ [illegible] ء س = $\int_1^4$ س ء س

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ = $\frac{(٤)^{٢}}{٢}$ − $\frac{(١)^{٢}}{٢}$ = $\frac{١٦ − ١}{٢}$ = $\frac{١٥}{٢}$

㉑ [illegible]

$\int$ ٢ س ص ء س = س² ص + ث (✓)

الحل ص $\frac{٢ س^{٢}}{٢}$ = ص س² + ث

㉒ $\int$ ظا⁵ س قا² س ء س = $\frac{١}{٦}$ ظا⁶ س + ث (✓)

㉓ [illegible]

$\int_1^4$ د(س) ء س = ٤

فإن $\int_1^4$ (٢ د(س) − ١) ء س = ٥ (ح

$\int_1^4$ (٢ د(س) − ١) ء س

= $\int_1^4$ ٢ د(س) ء س − $\int_1^4$ ١ ء س

= ٢ $\int_1^4$ د(س) ء س − $\int_1^4$ ١ ء س

= ٢ × ٤ − (٤ − ١) × ١

= ٨ − ٣

= ٥

㉔ $\int$ $\frac{١ − جا س}{جتا² س}$ ء س = ...

الحل $\int$ ($\frac{١}{جتا² س}$ − $\frac{جا س}{جتا² س}$) ء س

= $\int$ (قا² س − $\frac{ظا س}{جتا س}$) ء س

= $\int$ قا² س ء س − $\int$ ظا س قا س ء س

= ظا س − قا س + ث

㉕ $\int$ (√س + $\frac{٣^{س}}{٤}$) ء س

الحل $\int$ √س ء س + $\int$ $\frac{٣^{س}}{٤}$ ء س

= $\frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}$ + $\frac{٣^{س}}{٤ لو٣ × ١}$ + ث

= $\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٣^{س}}{٢ لو٣}$ + ث

= $\frac{٢}{٣}$ (√س)³ + $\frac{١}{٢ لو٣}$ × $٣^{س}$ + ث

㉖ $\int$ (جتا⁴ س + جا² س جتا² س) ء س

مشترك

الحل $\int$ جتا² س (جتا² س + جا² س) ء س

[illegible]

= $\int$ جتا² س × ١ ء س

= $\int$ جتا² س ء س = $\int$ الدستور

= $\int$ $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س) ء س

= $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢س) + ث

㉗ $\int$ لو س ء س

الحل = $\int$ $\frac{لو س}{لو ١٠}$ ء س

= $\frac{١}{لو ١٠}$ $\int$ لو س ء س ([illegible])

= $\frac{١}{لو ١٠}$ (س لو س − س) + ث

㉘ $\int$ (قا⁴ س − قا² س ظا² س) ء س

الحل $\int$ قا² س (قا² س − ظا² س) ء س

[illegible] = ١

= $\int$ قا² س × ١ ء س

= $\int$ قا² س ء س = ظا س + ث

㉙ $\int$ $\frac{١ − ٤^{س}}{١ − ٢^{س}}$ ء س (تحليل)

(مربعين)

$\int$ $\frac{\cancel{(١ − ٢^{س})} (١ + ٢^{س})}{\cancel{١ − ٢^{س}}}$ ء س

= $\int$ ($٢^{س}$ + ١) ء س

= $\frac{٢^{س}}{لو٢ × ١}$ + س + ث

㉙ $\int$ س⁵ (١ − $\frac{٣}{س}$)⁵ ء س

الحل $\int$ س⁵ ($\frac{س − ٣}{س}$)⁵ ء س

= $\int$ $\cancel{س^{٥}}$ $\frac{(س − ٣)^{٥}}{\cancel{س^{٥}}}$ ء س

= $\int$ (س − ٣)⁵ ء س = $\frac{(س − ٣)^{٦}}{٦}$ + ث

㉚ $\int_{\frac{١}{٤}}^{\frac{٣}{٤}}$ $\frac{(٦ − ٤ س)}{٣ − ٢ س}$ ء س = ...

٢ مشترك (ح)

$\int_{\frac{١}{٤}}^{\frac{٣}{٤}}$ $\frac{٢ \cancel{(٣ − ٢س)}}{\cancel{(٣ − ٢س)}}$ ء س

= $\int_{\frac{١}{٤}}^{\frac{٣}{٤}}$ ٢ ء س = ٢($\frac{٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$) = ٢ × $\frac{٢}{٤}$ = ١

(٣١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ظا س}{قا س}$ د س = ...

الحل $\int$ ظا س جتا س د س

= $\int \frac{جا س}{جتا س} \times جتا س$ د س

= $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س د س = − جتا س

= (− جتا ٩٠) − (− جتا ٠)

= صفر + ١ = $\boxed{١}$

(٣٢) $\int \frac{س}{س+٧}$ د س

الحل $\int \frac{س+٧−٧}{س+٧}$ د س

= $\int \left(\frac{س+٧}{س+٧} − \frac{٧}{س+٧}\right)$ د س

= $\int$ ١ د س − $\int \frac{٧}{س+٧}$ د س

= $\int$ ١ د س − ٧ $\int \frac{١}{س+٧}$ د س

= س − ٧ لو|س+٧| + ث

(٣٣) $\int \left(\frac{قا س}{جتا س} + \frac{١}{هـ^{س}}\right)$ د س

الحل $\int$ (قا س قا س + هـ$^{−س}$) د س

= $\int$ قا^{٢} س د س + $\int$ هـ$^{−س}$ د س

= ظا س − هـ$^{−س}$ + ث

(٣٤) $\int$ (٥^{س} + هـ^{س} + س^{هـ}) د س = ...

الحل: $\frac{٥^{س}}{لو ٥}$ + هـ^{س} + $\frac{س^{هـ+١}}{هـ+١}$ + ث

(٣٥) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٩ قتا^{٢} س د س = ...

٩ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ قتا^{٢} س د س

= ٩(− ظتا س)

٩[(− ظتا $\frac{\pi}{٢}$) − (− ظتا $\frac{\pi}{٤}$)]

٩[(− × −١) − صفر]

= ٩ × ١ = ٩

(٣٦) $\int$ (١ + ظتا^{٢} $\frac{س}{٢}$) د س = ... ([illegible])

الحل $\int$ قتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ د س

= − $\frac{ظتا \frac{س}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ + ث

= − ٢ ظتا $\frac{س}{٢}$ + ث

(٣٧) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi}$ (١ − جتا ٢س) د س = ... (المعزية)

الحل $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi}$ ٢ جا^{٢} س د س

$\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi}$ ٢ جا س د س

= − ٢ جتا س

= (− ٢ جتا π) − (− ٢ جتا $\frac{\pi}{٣}$)

= − ٢ × −١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$

= ٢ + ١

(٣٨) $\int_{−٢}^{٢} \frac{١}{١٦}$ د س = ... {−٢، ١، ٢، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$}

الحل $\frac{١}{١٦}$ (٢ − (−٢)) = $\frac{٤}{١٦}$ = $\frac{١}{٤}$

(٣٩) $\int_{٢م}^{٦م} \frac{د س}{س}$ = ... [لو ٥، لو ٣٢، لو ٣، لو ٦]

. $\int \frac{١}{س}$ د س = لو س = لو ٦م − لو ٢م

= لو ٦م − لو ٢م (قوانين اللوغ)

= لو $\frac{٦م}{٢م}$ (اصبح الطرح قسمة)

= لو ٣

(٤٠) $\int \frac{هـ^{س+١}}{هـ^{١−س}}$ د س = ...

= $\int \frac{هـ^{س} \times هـ}{هـ^{−س} \times هـ}$ د س = $\int$ هـ^{س} × هـ^{س}

= $\int$ هـ^{٢س} (٢ ثابتة)

= هـ^{٢س} + ث

(٤١) $\int \frac{٢}{١ − جتا ٢س}$ د س = ... (المعزية)

$\int \frac{٢}{٢ جا^{٢} س}$ د س

$\int$ قتا^{٢} س د س = − ظتا س + ث

(٤٢) $\int \left(س − \frac{١}{س}\right)^{٢}$ د س تربيع كامل

الحل $\int$ (س^{٢} − ٢ × س × $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{س^{٢}}$) د س

= $\int$ (س^{٢} − ٢ + س$^{−٢}$) د س

= $\frac{س^{٣}}{٣}$ − ٢س + $\frac{س^{−١}}{−١}$ + ث

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢س − س$^{−١}$ + ث

(٤٣) $\int \frac{(س − س^{٢})^{٢}}{س^{٢}}$ د س = ...

الحل $\int \left(\frac{س − س^{٢}}{س}\right)^{٢}$ د س

= $\int$ (١ − س)^{٢} د س بتربيع بدلي

= $\int$ (س − ١)^{٢} د س = $\frac{(س−١)^{٣}}{٣}$ + ث

قاسيات (55555)

قاسية (١): مهمة جداً

$\int \frac{د'(س)}{د(س)}$ د س = لو|د(س)| + ث

(البسط = مشتقة المقام) يكون لو|المقام|

(مشتقة المقام = البسط) يكون لو|المقام|

① $\int \frac{١}{س}$ د س = لو|س| + ث

② $\int \frac{هـ^{س} + جتا س}{هـ^{س} + جا س}$ د س = لو|هـ^{س} + جا س| + ث

③ $\int \frac{١ + ظتا س}{س + لو|جا س|}$ د س = لو|س + لو|جا س|| + ث

④ $\int \frac{س^{٤} + قتا^{٢} ٥س}{١ − س^{٥} + ظتا ٥س}$ د س

مشتقة المقام = −٥س^{٤} − ٥ قتا^{٢} ٥س

= −٥(س^{٤} + قتا^{٢} ٥س)

$\frac{١}{−٥} \int \frac{−٥(س^{٤} + قتا^{٢} ٥س)}{١ − س^{٥} + ظتا ٥س}$ د س

نضرب ونقسم على −٥ في السؤال

$\frac{١}{−٥}$ لو|١ − س^{٥} + ظتا ٥س| + ث

⑤ $\int \frac{د س}{س لو س^{٣}}$ = ...

= $\int \frac{١}{٣ س لو س}$ د س

= $\frac{١}{٣} \int \frac{\frac{١}{س}}{لو س}$ د س

= $\frac{١}{٣}$ لو|لو س| + ث

(6) $\int \frac{1 + لو س}{س لو س} دس = ...$

$= لو|س لو س| + ث$

$= لو|المقام| + ث$

لأن $(س لو س)' = 1 × لو س + \frac{1}{س} × س$

$= لو س + 1$

---

(7) $\int \frac{س^2}{س^3 + 1} دس = ...$

مشتقة المقام $= 3 س^2$

نضرب ونقسم على ٣ في الأول

$\frac{1}{3}\int \frac{3 س^2}{س^3 + 1} دس$

أو نكتب [illegible] عند كتابة الحل

$\frac{1}{3} لو|س^3 + 1| + ث$

---

(8) $\int \frac{3}{س + 7} دس = ...$

$= 3\int \frac{1}{س + 7} دس$

$= 3 لو|س + 7| + ث$

---

(9) $\int \frac{س - 3}{س^2 - 9} دس$

$= \int \frac{\cancel{(س - 3)}}{\cancel{(س - 3)}(س + 3)} دس$

$= \int \frac{1}{س + 3} دس = لو|س + 3| + ث$

---

(10) $\int_0^2 \frac{1}{س + 1} دس = ...$

أ) ، لو٢) لو٣) لو٤)

الحل $لو|س + 1|$

$= (لو(2 + 1)) - (لو(0 + 1))$

$= لو 3 - لو 1$

$= \underline{لو 3}$

خاصية (٢):

$\int \frac{د'(س)}{\sqrt{د(س)}} دس = 2\sqrt{د(س)} + ث$

مشتقة ما داخل الجذر في البسط والجذر في المقام.

(1) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{س}} دس = ...$

الحل $= 2\sqrt{س}$

$= (2\sqrt{9}) - (2\sqrt{4})$

$= 2 × 3 - 2 × 2$

$= 6 - 4 = 2$

---

(2) $\int \frac{3}{\sqrt{2س + 1}} دس = ...$

$= 3\int \frac{1}{\sqrt{2س + 1}} دس$

مشتقة ما داخل الجذر $= 2$

نضرب ونقسم على ٢

$= \frac{3}{2}\int \frac{2}{\sqrt{2س + 1}} دس$

$= \frac{3}{\cancel{2}} × \cancel{2}\sqrt{2س + 1} + ث$

$= 3\sqrt{2س + 1} + ث$

خاصية (٣):

$\int [د(س)]^ن × د'(س) دس = \frac{[د(س)]^{ن+1}}{ن + 1} + ث$

$\int (الدالة)^ن × (الدالة)' دس = \frac{(الدالة)^{ن+1}}{ن + 1} + ث$

---

(1) $\int جا^7 س جتا س دس = ...$

$\frac{1}{8} جا^8 س + ث$

(2) $\int \frac{لو س}{س} دس = ...$

$\int (لو س) × \frac{1}{س} دس = \frac{(لو س)^2}{2} + ث$

دالة × مشتقتها

---

(3) $\int ظا^4 س قا^2 س دس$

دالة × المشتقة

$= \frac{1}{5} ظا^5 س + ث$

---

(4) $\int جا س جتا^2 س دس$

مشتقة × دالة

مشتقة الجتا = − جا

نضرب في سالب

$-\int -جا س جتا^2 س دس = -\frac{جتا^3 س}{3} + ث$

---

(5) $\int 3 ظتا^2 س قتا^2 س دس = ...$

$3\int ظتا^2 س × قتا^2 س دس$

دالة

مشتقة ظتا ص = − قتا² س

$\therefore 3\int ظتا^2 س × قتا^2 س دس$

$= \cancel{3} × (-\frac{ظتا^3 س}{\cancel{3}}) + ث$

$= - ظتا^3 س + ث$

---

(6) $\int جتا 2س \sqrt{1 - جا 2س} دس = ...$

$\int جتا 2س (1 - جا 2س)^{\frac{1}{2}} دس$

دالة

مشتقة ما داخل القوس = − ٢ جتا ٢س

$-\frac{1}{2}\int -2 جتا 2س × (1 - جا 2س)^{\frac{1}{2}} دس$

$-\frac{1}{2} \frac{(1 - جا 2س)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ث$

$= -\frac{1}{2} × \frac{2}{3} \sqrt{(1 - جا 2س)^3} + ث$

$= -\frac{1}{3} \sqrt{(1 - جا 2س)^3} + ث$

---

(7) $\int_0^1 س(س^2 - 1)^5 دس = ...$

مشتقة ما داخل القوس ٢ س

$\frac{1}{2}\int_0^1 2س (س^2 - 1)^5 دس$

$\frac{1}{2} \frac{(س^2 - 1)^6}{6} = \frac{1}{12}(س^2 - 1)^6$

$[\frac{1}{12}(1 - 1)^6 - \frac{1}{12}(0 - 1)^6]$

$[صفر - \frac{1}{12}] = -\frac{1}{12}$

---

(8) $\int (س^7 - 3س)^5 دس = ...$

$\int [س(س^6 - 3)]^5 دس$ نوزع الأس

$\int س^5 (س^6 - 3)^5 دس$

مشتقة ما داخل القوس ٦ س⁵

نضرب ونقسم على ٦ [illegible]

$\frac{1}{6}\int 6 س^5 × (س^6 - 3)^5 دس$

$\frac{1}{6} \frac{(س^6 - 3)^6}{6} + ث$

$= \frac{1}{36} (س^6 - 3)^6 + ث$

---

(9) $\int و(س)^ن × و'(س) دس = \frac{4}{5}(س + 2)^{\frac{5}{4}} + ث$

فإن ن = ... ، الحل

$\frac{و(س)^{ن+1}}{ن + 1} = \frac{4}{5}(س + 2)^{\frac{5}{4}} + ث$

بالمقارنة بالأس $ن + 1 = \frac{5}{4} - 1 = ن = \frac{1}{4}$

⑩ $\int \frac{جاس}{1 + ظتا^2 س}\,ءس = \ldots$

→ (١ ، ٢ نوع)

الحل: $\int \frac{جاس}{قتا^2 س}\,ءس$

$= \int جاس\, \underbrace{جتا^2 س}_{دالة}\,ءس$

مشتقتها $= -جاس$

$= -\int -جاس\, جتا^2 س\,ءس$

$= -\frac{جتا^3 س}{3} + ث$

⑪ $\int \frac{7قا^2 س + قاس}{ظتاس}\,ءس$

$= \int \frac{7قا^2 س}{ظتاس} + \frac{قاس}{ظتاس}\,ءس$

$= 7\int قا^2 س\, ظاس\,ءس + \int قاس\, ظاس\,ءس$

$= 7\frac{ظا^2 س}{2} + قاس + ث$

$= \frac{7}{2} ظا^2 س + قاس + ث$

■ تكاملية (٤)

$\int هـ^{د(س)} \times د'(س)\,ءس = هـ^{د(س)} + ث$

$\int هـ^{د(س)} \times مشتقة\ الأس = هـ^{الأس} + ث$

① $\int 3س^2\, هـ^{س^3}\,ءس = \ldots$

$= هـ^{س^3} + ث$

⑤ $\int \frac{هـ^{ظاس}}{جتا^2 س}\,ءس = \ldots$

$= \int قا^2 س\, هـ^{ظاس}\,ءس$

$= هـ^{ظاس} + ث$

⑥ $\int هـ^{جاس} \cdot جتاس\,ءس = \ldots$

مشتقة الأس

$= هـ^{جاس} + ث$

⑦ $\int هـ^{ظاس + 2لوقاس}\,ءس = \ldots$

$= \int هـ^{ظاس} \times هـ^{2لوقاس}\,ءس$

$= \int هـ^{ظاس} \times قا^2 س\,ءس$

مشتقة الأس

$= هـ^{ظاس} + ث$

⑧ $\int قاس\, ظاس\, هـ^{1+قا^2 س}\,ءس = \ldots$

مشتقة الأس $= 2قاس\, قاس\, ظاس$

$= 2قاس\, قاس$

$= \frac{1}{2}\int 2قاس\, قاس\, ظاس\, هـ^{1+قا^2 س}\,ءس$

$= \frac{1}{2} هـ^{1+قا^2 س} + ث$

⑨ $\int (س - \frac{1}{س})\, هـ^{س^2 - 2لوس}\,ءس = \ldots$

$\int (س - \frac{1}{س})\, هـ^{س^2 - 2لوس}$

مشتقة الأس $= 2س - \frac{2}{س}$

$= 2(س - \frac{1}{س})$

$= \frac{1}{2}\int 2(س - \frac{1}{س})\, هـ^{س^2 - 2لوس}\,ءس$

$= \frac{1}{2} هـ^{س^2 - 2لوس} + ث$

⑩ $\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\,ءس = \ldots$

مشتقة $\sqrt{س} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$2\int هـ^{\sqrt{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{س}}\,ءس = 2هـ^{\sqrt{س}} + ث$

تعمم $\int أ^{د(س)}\, د'(س)\,ءس = \frac{أ^{د(س)}}{لو_{هـ} أ} + ث$ ← مثال $\int 3^{جاس} \times جتاس\,ءس = \frac{3^{جاس}}{لو_{هـ} 3} + ث$

تكاملية (٥)!

$\int مثلثية \times مشتقة\ الزاوية = \int الدالة$

① $\int 2س\, جاس^2\,ءس = \ldots$

مشتقة $س^2 = 2س$

$= -جتاس^2 + ث$

⑤ $\int \frac{ظتا(لوس)}{س}\,ءس = \ldots$

$\int ظتا(لوس) \times \frac{1}{س}\,ءس$

مشتقة الزاوية $(لوس) = \frac{1}{س}$

$= \int الدالة\,ءس = لو|جا لوس| + ث$

③ $\int قا(جاس)\, ظا(جاس) \times جتاس\,ءس$

مشتقة الزاوية جاس = جتاس

$= قا(جاس) + ث$

④ $\int س^3\, جتاس^4\,ءس = \ldots$

مشتقة الزاوية $4س^3$

$\frac{1}{4}\int 4س^3\, جتاس^4\,ءس$

$\frac{1}{4}\int الدالة$

$\frac{1}{4} \times جاس^4 + ث$

(نشاط)

⑤ $\int س\,(س+1)^5\,ءس = $ [illegible] $(\times)$

② $\int جا2س\,(1 + جاس)\,ءس = \ldots$

الس [illegible] $(1 + جاس)$ + ث

⑭ $\int_{0}^{هـ} \frac{1}{س + هـ}\,ءس = \ldots$ (حل)

[لوهـ ، لو(هـ + 1) ، لو 2هـ ، لو2]

الحل

$لو|س + هـ|$

$= (لو|هـ + هـ|) - (لو|0 + هـ|)$

$= لو 2هـ - لوهـ$ (خواص اللوغاريتم)

$= لو\frac{2هـ}{هـ}$ (جمع = طرح قسمة)

$= لو2$

④ $\int \frac{جا\sqrt{س}}{\sqrt{س}}\,ءس = \ldots$

$= \int جا\sqrt{س} \times \frac{1}{\sqrt{س}}\,ءس$

مشتقة الزاوية $\sqrt{س}$ هي $\frac{1}{2\sqrt{س}}$

$= 2\int جا\sqrt{س} \times \frac{1}{2\sqrt{س}}\,ءس$

$= 2\int الدالة$

$= 2 \times -جتا\sqrt{س} + ث$

$= -2جتا\sqrt{س} + ث$

⑮ $\int_{1}^{هـ} \frac{1}{س}(لوس)^3\,ءس = \ldots$

[$-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$]

⑥ $\int 6س\,(3س^2 + 1)^5\,ءس = \ldots$

$\frac{(3س^2 + 1)^6}{6} + ث$

⑦ $\int \frac{2س}{1 + س^2}\,ءس = \ldots$ الحل $لو|1 + س^2| + ث$

⑧ $\int \frac{هـ^{جاس}}{قاس}\,ءس = \ldots$ الحل $هـ^{جاس} + ث$

⑨ $\int جتا^4 س\, جاس\,ءس = \ldots$ الحل $-\frac{1}{5} جتا^5 س + ث$

نوتات: ملاحظات

نوتة ①: الدالة قابلة للتكامل
تكون الدالة قابلة للتكامل (كمولة)
إذا كانت قابلة للاتصال على [أ، ب]

① الدالة د(س) = س² + ٥س قابلة للتكامل على الفترة [١، ٣] (✓)
لأنها عبارة عن حدود قابلة للاتصال وبالتالي قابلة للتكامل.

② د(س) = $\frac{١}{س - ٥}$ قابلة للتكامل على الفترة [٠، ٦] (✗)
تبرير: س − ٥ = ٠
س = ٥ ∈ [٠، ٦]
غير قابلة للاتصال
∴ غير قابلة للتكامل

③ د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ [illegible]
قابلة للتكامل على الفترة [٤، ٧] (✓)
الحل جذر (√)
س − ٢ ≥ ٠
س ≥ ٢
[٤، ٧] ≥ ٢ قابلة للاتصال ∴ قابلة للتكامل

نوتة ②: $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس = صفر$

① $\int_{١}^{١} جا س\, ءس = ...$ الحل صفر

② ص أم خ
$\int_{٢}^{٢} (س^٣ - ٣)\, ءس = صفر$ (✓)

③ إذا كان $\int_{أ}^{٥} د(س)\, ءس = صفر$
فإن أ = ...
الحل العلوي = السفلي
أ = ٥

④ إذا كان $\int_{٢}^{أ-٣} د(س)\, ءس = صفر$
فإن أ = ... [٠، ٣، ٥، ٩]
الحل العلوي = السفلي
أ − ٣ = ٢ ⟸ أ = ٥

⑤ ص أم خ:
$\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس = ٢أ$ (✗)

⑥ إذا كان $\int_{١}^{٢أ+٥} (٢س^٣ + ٧س^٢ + ٩)\, ءس = ٠$
فإن أ = ...
الحل: العلوي = السفلي
٢أ + ٥ = ١ ⟸ ٢أ = ١ − ٥
⟸ ٢أ = −٤ ⟸ أ = −٢

نوتة ③: $\int ص'\, ءص = ...$
تكامل المشتقة ، مشتقة التكامل
◆ ١) $\int ص'\, ءص = ص + ث$
◆ ٢) $\frac{ء}{ءس} \int د(س)\, ءس = د(س)$
مشتقة التكامل = ما داخل التكامل
◆ ٣) $\frac{ء}{ءس} \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = صفر$
مشتقة التكامل المحدد = صفر

① $\frac{ء}{ءس} \int_{٢}^{أ} د(س)\, ءس = ...$ الحل صفر

② ص أم خ
$\frac{ء}{ءس} \int_{١}^{٥} (س^٢ + ٤)\, ءس = صفر$ (✓)
مشتقة المحدد = صفر

③ $\int د'(س)\, ءس = د(س) + ث$ (✓)

④ $\frac{ء}{ءس} \int جتا س\, ءس = ...$
[− جاس + ث ، جاس + ث ، − جتاس + ث ، جتاس]
بلا ث
الحل $\frac{ء}{ءس} \int (جتا س)\, ءس = جتاس$

④ إذا كانت د(س) = ١٠س لو س
فإن $\int_{١}^{هـ} د'(س)\, ءس = ...$
الحل $\int_{١}^{هـ} د'(س)\, ءس = د(س)$
د'(س) = ١٠ × لوس + ١٠س × $\frac{١}{س}$
د'(س) = ١٠ لوس + ١٠
(١٠ لوهـ + ١٠) − (١٠ لو١ + ١٠)
(١٠ × ١ + ١٠) − (١٠ × ٠ + ١٠)
٢٠ − ١٠ = ١٠

نوتة ④: $\int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس = -\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$
إذا قلبت الفترة نضربها في سالب

① إذا كان: $\int_{١}^{٤} د(س)\, ءس = ٩$
فإن $\int_{٤}^{١} د(س)\, ءس = ...$ الحل −٩

② $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس + \int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس = ...$
الحل $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = صفر$

③ إذا كان
$\int_{٠}^{أ+٥} د(س)\, ءس = -\int_{٢أ}^{٠} د(س)\, ءس$ فإن أ = ...
الحل $\int_{٠}^{أ+٥} د(س)\, ءس = +\int_{٠}^{٢أ} د(س)\, ءس$
∵ العلوي = العلوي ← السفلي = السفلي
أ + ٥ = ٢أ
٥ = ٢أ − أ ⟸ أ = ٥

④ ص أم خ:
إذا كان: $\int_{٢}^{٥} د(س)\, ءس = ٨$
فإن $\int_{٥}^{٢} د(س)\, ءس = \frac{١}{٨}$ (✗)

⑤ إذا كان: $\int_{٢}^{٣} د(س)\, ءس = ٨$
فإن $\int_{٣}^{٢} ٤ د(س)\, ءس = ...$
الحل [٢، [illegible]، −٨]
−٤ × ٨ = −٣٢

⑥ $\int_{٢}^{٣} د(س)\, ءس + \int_{٣}^{٢} د(س)\, ءس = ...$
[صفر، ١، ٢، ٣]

⑦ $\int_{١}^{٣} لو_٣ ٩س\, ءس + \int_{٣}^{١} لو_٣ س\, ءس = ...$
[٢، −٢، ④، −٤]
الحل
$\int_{١}^{٣} لو_٣ ٩س\, ءس - \int_{١}^{٣} لو_٣ س\, ءس$
= $\int_{١}^{٣} (لو_٣ ٩س - لو_٣ س)\, ءس$
(خواص اللوغاريتم)
= $\int_{١}^{٣} لو_٣ \frac{٩س}{س}\, ءس$
= $\int_{١}^{٣} لو_٣ ٩\, ءس = \int_{١}^{٣} ٢\, ءس$ (ثابت)
= (٣ − ١) × ٢
= ٢ × ٢ = ٤

$\int_{أ}^{ب} د'(س)\, ءس = د(ب) - د(أ)$

⑧ إذا كان $\int_{٢}^{٧} د(س)\,ءس = -١٢$

فإن $\int_{٧}^{٢} \frac{١}{٢} د(س)\,ءس = \dots$

الحل $\int_{٧}^{٢} \frac{١}{٢} د(س)\,ءس = \frac{١}{٢} \int_{٧}^{٢} د(س)\,ءس$

$= -\frac{١}{٢} \int_{٢}^{٧} د(س)\,ءس$

$= -\frac{١}{٢} \times -١٢ = ٦$

⑨ إذا كان $\int_{١}^{٣} ٢ د(س)\,ءس = ١٦$

فإن $\int_{٣}^{١} \frac{١}{٢} د(س)\,ءس = \dots$

الحل $\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس = \cancel{١٦}$ (÷٢)

$\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس = ٨$

∴ $\int_{٣}^{١} \frac{١}{٢} د(س)\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \int_{٣}^{١} د(س)\,ءس$

$= -\frac{١}{٢} \int_{١}^{٣} د(س)\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤$

⑩ ص أو × :

$\int_{١}^{٣} جتا ٥س\,ءس + \int_{٣}^{١} جتا ٥س = صفر$ (✓)

⑪ إذا كان $\int_{ب}^{٧} د(س)\,ءس = \int_{٢}^{٣} د(س)\,ءس$

فإن ب = ...

بالتعويض ٣

$د(س)\,ءس = + \int_{٣}^{٢} د(س)\,ءس$

∴ $\boxed{ب = ٣} \Leftarrow ب = ٤$

⑫ $\int_{١}^{٢} لو هـ^{٢س} جاس\,ءس + \int_{٢}^{١} لو جاس\,ءس$

$\int_{١}^{٢} لو هـ^{٢س} جاس\,ءس - \int_{١}^{٢} لو جاس\,ءس$

$\int_{١}^{٢} (لو هـ^{٢س} جاس - لو جاس)\,ءس$

(خواص اللو)

$= \int_{١}^{٢} لو \frac{هـ^{٢س} جاس}{جاس}\,ءس$

$= \int_{١}^{٢} لو هـ^{٢س}\,ءس$

$= \int_{١}^{٢} ٢س\,ءس$

$= \frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} = س^٢$

$= (٢)^٢ - (١)^٢$

$= ٤ - ١ = ٣$

نوتة ١٥:

$\int_{م}^{ب} د(س)\,ءس + \int_{ب}^{ك} د(س)\,ءس = \int_{م}^{ك} د(س)\,ءس$

⑬ ص أو ×

إذا كان $\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس = ٨$ ، $\int_{٣}^{٦} د(س)\,ءس = ١٠$ فإن

$\int_{١}^{٦} د(س)\,ءس = ٢$ (✗)

الحل

$\int_{صغير}^{متوسط} د(س)\,ءس + \int_{متوسط}^{كبير} د(س)\,ءس = \int_{صغير}^{كبير} د(س)\,ءس$

$\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس + \int_{٣}^{٦} د(س)\,ءس = \int_{١}^{٦} د(س)\,ءس$

$٨ + ١٠ = \int_{١}^{٦} د(س)\,ءس$

$١٨ = \int_{١}^{٦} د(س)\,ءس$

∴ $\int_{١}^{٦} د(س)\,ءس = ١٨$

---

② إذا كان

$\int_{١}^{٤} د(س)\,ءس + \int_{أ+١}^{٨} د(س)\,ءس = \int_{١}^{٨} د(س)\,ءس$

فإن قيمة أ = ... [١، ٢، ③، ٤]

الحل

الحد الأعلى في الأول = الحد الأدنى في الثاني

$٤ = أ + ١$

$٤ - ١ = أ \Leftarrow \boxed{أ = ٣}$

③ إذا كان

$\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس = ٩$ ، $\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس = ١٢$

فإن $\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = ٣$ (ص)

الحل

$\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{١}^{٥} د(س)\,ءس$

$٩ + \int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = ١٢$

$\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = ١٢ - ٩ = ٣$

④ إذا كان:

$\int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس = ١٢$ ، $\int_{٤}^{١٠} ٢ق(س) = ٢٢$

فإن $\int_{١}^{١٠} (ق(س) - س)\,ءس = -٤٤$

الحل

$\int_{٤}^{١٠} ٢ق(س)\,ءس = ٢٢$ (÷٢)

$\int_{٤}^{١٠} ق(س)\,ءس = ١١$

$\int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس + \int_{٤}^{١٠} ق(س)\,ءس = \int_{١}^{١٠} ق(س)\,ءس$

$١٢ + ١١ = \int_{١}^{١٠} ق(س)\,ءس$

$\boxed{٢٣ = \int_{١}^{١٠} ق(س)\,ءس}$

$\int_{١}^{١٠} (ق(س) - ٣)\,ءس$

$= \int_{١}^{١٠} ق(س)\,ءس - \int_{١}^{١٠} ٣\,ءس$ ← ثابت

$= ٢٣ - ٣(١٠ - ١)$

$= ٢٣ - ٢٧$

$= -٤$

⑤

$\int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس + \int_{٤}^{٢} د(س)\,ءس = \dots$

$\int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس - \int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس =$

$= \boxed{\int_{-١}^{٢} د(س)\,ءس}$

← توضيح

نوتة مهمة

إذا كان

$\int د(س)\,ءس = ل(س) + ث$

فإن $ل'(س) = د(س)$

أي $د(س) = ل'(س)$

ما داخل التكامل = مشتقة الطرف الأيسر

ما داخل التكامل = (الطرف الأيسر)′

⑥ إذا كان $\int ق'(س)\,ءس = ٢س^٢ - ٢س + ث$

فإن $ق'(٢) = \dots$

الحل $ق'(س) = (٢س^٢ - ٢س + ث)'$

$ق'(س) = ٤س - ٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٤س} - ٢$

$\text{ق}'(٢) = ٤\times٢ - ٢ = \boxed{٦}$

④ إذا كان $\int ٤\,\text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{س}^{٢} + \text{ث}$

فإن د(س) = ...

[٢س ، س ، $\frac{١}{٢}$س ، $\frac{١}{٤}$س]

الحل

(ما داخل التكامل) = (الطرف الأيسر)′

$٤\,\text{د(س)} = (\text{س}^{٢} + \text{ث})'$

$٤\,\text{د(س)} = ٢\text{س}$

$\text{د(س)} = \frac{٢\text{س}}{٤} = \frac{١}{٢}\text{س}$

③ إذا كان

$\int \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{ث}$ فإن د(س) =

[جاس ، −جاس ، جتاس ، −جتاس]

الحل

$\text{د(س)} = (\text{جاس} + \text{ث})'$

د(س) = جتاس

ب) ص × :

④ $\int (٦\text{س}^{٢} + ٦\text{س})\,\text{ءس} = ٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + \text{ث}$ (ص)

الحل: نوزع

$\int (٦\text{س}^{٢} + ٦\text{س})\,\text{ءس} = ٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + \text{ث}$

مشتقة الطرف الأيسر = ما داخل التكامل

$(٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + \text{ث})'$

$= ٦\text{س}^{٢} + ٦\text{س}$ نفس الطرف الأيمن

⑤ أكمل الفراغ

$\int ....\,\text{ءس} = \text{قاس} + \text{ث}$

الحل: هو مشتقة الطرف الأيسر

قاس × ظاس × [illegible]

$(\text{قا}^{٢}\text{س})' = ٢\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} \times ١$

$= ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$

⑥ إذا كان

$\int \text{م(س)}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{لو}(\text{جتاس} + ٢\text{س}) + \text{ث}$

فإن م(٠) = ...

الحل

م(س) = مشتقة الطرف الأيسر

$\text{م(س)} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \times ٢ + \frac{-\text{جاس} + ٢}{\text{جتاس} + ٢\text{س}}$

$\text{م}(٠) = \text{هـ}^{٢\times٠} \times ٢ + \frac{-\text{جا}٠ + ٢}{\text{جتا}٠ + ٢\times٠}$

$\text{م}(٠) = ١ \times ٢ + \frac{٠ + ٢}{١ + ٠}$

$\text{م}(٠) = ٢ + \frac{٢}{١} = ٢ + ٢ = ٤$

تمارين متنوعة

① $\int_{١}^{٥} [\text{د(س)}]^{٣} \cdot \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = ...$

حيث د(٥) = ٢ ، د(١) = ٠

الحل

$\int_{١}^{٥} [\text{د(س)}]^{٣} \cdot \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس}$

دالة × مشتقتها (تكاملات)

$= \frac{[\text{د(س)}]^{٤}}{٤}\Big|_{١}^{٥}$

$= \frac{[\text{د}(٥)]^{٤}}{٤} - \frac{[\text{د}(١)]^{٤}}{٤}$

$= \frac{٢^{٤}}{٤} - \frac{٠^{٤}}{٤} = \frac{٢^{٤}}{٤} = \frac{١٦}{٤} = ٤$

---

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{هـ(س)}) \times \text{هـ}'(\text{س})\,\text{ءس} = ...$

ملاحظة: رمز التكامل يروح مع المشتقة

$= \text{د}(\text{هـ(س)})\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

$= \text{د}(\text{هـ(ب)}) - \text{د}(\text{هـ(أ)})$

③ ب) ص × :

$\int \text{ظاس قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{ث}$ (ص)

الحل: نتكامل الطرف الأيمن

أو نشتق الطرف الأيسر

◆ نشتق الطرف الأيسر

$\frac{١}{٢} \times ٢ \times \text{ظاس} \times \text{قا}^{٢}\text{س}$

$= \text{ظاس} \cdot \text{قا}^{٢}\text{س}$ = الطرف الأيمن

④ $\int_{١}^{٤} \text{هـ}\,\text{ءس} = ...$

الحل: الدالة ثابتة

$(٤ - ١)\,\text{هـ} = ٣\,\text{هـ}$

⑤ $\int \frac{\text{قاس}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$ نعدل السؤال

الحل $\int \text{قاس ظاس}\,\text{ءس}$

$= \text{قاس} + \text{ث}$ (الأساسيات)

⑥ $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} ٢\text{س}\,\text{ءس} = ...$ صفر

لأن الحد الأعلى (أ) = الحد الأدنى (أ)

⑦ $\int \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = ...$

الحل: الرمز يروح مع الرمز

= د(س) + ث

⑧ $\int \text{جاس}\left(\text{ظتاس} + \frac{١}{\text{قاس}}\right)\text{ءس}$

الحل: نعدل السؤال

$\int \text{جاس}\left(\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + \text{جتاس}\right)\text{ءس}$ (نوزع)

$\int (\text{جتاس} + \text{جاس جتاس})\,\text{ءس}$

$\int \text{جتاس}\,\text{ءس} + \int \text{جاس جتاس}\,\text{ءس}$

$\text{جاس} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢} + \text{ث}$ (دالة × مشتقتها)

$= \text{جاس} + \frac{١}{٢}\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{ث}$

⑨ $\int \text{لو}(\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{ءس}$

الحل $\int (\text{لوس}^{٢} + \text{لوهـ}^{-\text{س}})\,\text{ءس}$

$= ٢\int \text{لوس}\,\text{ءس} + \int -\text{س}\,\text{ءس}$

$= ٢(\text{س لوس} - \text{س}) - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث}$

⑩ إذا كان

ق(١) = ٥ ، ق(٠) = ٤

فإن $\int_{٠}^{١} ٣\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = ...$

[−٣ ، ١ ، ٣ ، ٢]

الحل

$= ٣\int_{٠}^{١} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$ (اخرج الثابت)

$= ٣\,\text{ق(س)}\Big|_{٠}^{١}$

$= ٣[\text{ق}(١) - \text{ق}(٠)]$

$= ٣[٥ - ٤]$

$= ٣ \times ١ = ٣$

نشاط

1) $\int (٥^{٣س} + هـ^{س} + جتاس^{هـ})\, ء س = ...$

2) $\int (١ - ظتاس - ظاس)^{٢}\, ء س = ...$

الحل $-ظتاس - ظاس + ث$

3) $\int (٣\, قاس\, جتاس - ٢\, قا^{٢}س)\, ء س = ...$

الحل $٣س - ٢ظاس + ث$

4) $\int \frac{٣س^{٢}}{\sqrt{١+س^{٣}}}\, ء س = ...$

الحل $٣\sqrt{١+س^{٣}} + ث$

5) الدالة قابلة للتكامل في الفترة ...... حيث $د(س) = \frac{١}{س}$

{ $[-١ ، ٢]$ ، $[٠ ، ٣]$ ، $\underline{[٢ ، ٥]}$ }

6) $\int_{٠}^{لو٣} هـ^{٢س}\, ء س = ...$ الحل $\boxed{٤}$

7) $\int_{٠}^{\frac{π}{٤}} ٢\, قا^{٢}س\, ظاس\, ء س = ...$

الحل $\boxed{٣}$

8) $\int_{٠}^{\frac{π}{٢}} جا^{٣}س\, جتاس\, ء س = ...$ الحل $\frac{١}{٤}$

9) $\int_{٠}^{ل} جا\frac{π}{٢}\, ء س = ٣$ ، ل = (٣

10) $\int_{٢}^{٥} لو٣س\, ء س + \int_{٥}^{٢} لوس\, ء س = ...$

الحل $٣\, لو٣$

11) $\int (ظاس - ظتاس)^{٢}\, ء س = ...$

12) $\int \sqrt{جاس(جاس - ٢) + ١}\, ء س$

$= ......$ الحل $-جتاس - س + ث$

13) $\int_{٠}^{π} جتاس\, ء س = ...$ $[π ، ٢π ، \text{⓪}]$

14) $\int \frac{١ + ظاس}{١ + ظتاس}\, ء س = ...$

الحل $-لو|جتاس| + ث$

15) $\int_{٠}^{\frac{π}{٤}} قا^{٢}س\, ء س = ...$ $[-١ ، -٢ ، \text{①} ، ٢]$

15) $\int_{٠}^{π} ٢\, جتا\frac{س}{٢}\, ء س = ...$ الحل ٤

16) $\int لو_{٢}س \times لو_{س}١٦\, ء س = ...$ الحل $٤س + ث$

17) $\int س\, جاس^{٢}\, جتاس^{٢}\, ء س = ...$

الحل $-\frac{١}{٨} جتا٢س^{٢} + ث$

18) $\int د(س) \times د'(س)\, ء س = \frac{٣}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٣}} + ث$

فإن $د(س) = ...$ الحل $\sqrt[٣]{س+١}$

19) $\int س^{٣}\, هـ^{س^{٤}}\, ء س = ...$ الحل $\frac{١}{٤} هـ^{س^{٤}} + ث$

20) $\int \frac{جتا^{٣}س + ١}{١ - جا^{٢}س}\, ء س = ...$ الحل

$جاس + ظاس + ث$

21) $\int_{٠}^{١} (٢س + ٣\sqrt{س})\, ء س = ...$ الحل ٣

22) $\int \frac{١ + ظا^{٢}(لوس)}{س}\, ء س = ...$

الحل $لو|س| + ظا\, لوس + ث$

23) $\int \frac{ء س}{س(٣ + لوس)} = ...$ الحل $لو|٣ + لوس| + ث$

24) $\int_{١}^{١} \sqrt{\frac{٢^{لوس}}{هـ}}\, ء س = ...$ الحل صفر

25) لو $\int_{٢}^{٥} د(س)\, ء س = ٢$

فإن $\int_{٢}^{٥} [٣ - د(س)]\, ء س = ...$ الحل ٧

26) $\int س^{٣}(س^{٤} - ١)^{٢}(س^{٤} + ١)^{٢}\, ء س = ...$

الحل $\frac{١}{٢٤}(س^{٨} - ١)^{٣} + ث$

(أسئلة 2021)

القواعد الشهيرة + المساحات + المتوسطات

1) $\int_{٠}^{\frac{π}{٤}} قا^{٢}س\, ء س = ١$ (ص)

الحل $ظاس = د(\frac{π}{٤}) - د(٠)$

$= ظا٤٥ - ظا٠$

$= ١$

2) $\int_{-\frac{π}{٢}}^{\frac{π}{٢}} جا^{٢}س\, ء س = ...$

$[-\frac{π}{٢} ، -\frac{π}{٤} ، \text{(}\frac{π}{٢}\text{)} ، \frac{π}{٤}]$

الحل

المستمر $\int_{-\frac{π}{٢}}^{\frac{π}{٢}} \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)\, ء س$

$\frac{١}{٢}(س - \frac{جا٢س}{٢}) = د(ب) - د(أ)$

$= \frac{١}{٢}(\frac{π}{٢} - \frac{جا١٨٠}{٢}) - \frac{١}{٢}(٠ - \frac{جا٠}{٢})$

$= \frac{١}{٢}(π) = \frac{π}{٢}$

3) $\int_{١}^{٣} (س - ٢)^{٦}\, ء س = \frac{٢}{٧}$ (ص)

الحل $\frac{(س-٢)^{٧}}{٧} = د(ب) - د(أ)$

$\frac{(٣-٢)^{٧}}{٧} - \frac{(١-٢)^{٧}}{٧}$

$\frac{١}{٧} - \frac{(-١)}{٧} = \frac{١+١}{٧} = \frac{٢}{٧}$

4) $\int_{٢}^{٥} π\, ء س = ...$ $[π ، ٢π ، \underline{٣π} ، ٤π]$

الحل مساحة مستطيل

$(٥ - ٢) \times π = ٣π$

5) $\int \frac{س^{٢} + س}{س^{٢}}\, ء س = ... + ث$

$[س^{٢} + لوس ، ٢س + لوس ، (س + لوس) ، ...]$

الحل

$\int (\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{س}{س^{٢}})\, ء س$ (فرقنا)

$= \int (١ + \frac{١}{س})\, ء س = س + لو|س| + ث$

6) $\int \sqrt{٣س+١}\, ء س = ... + ث$

$[\frac{٢}{٩}(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}} ، -\frac{١}{٣}(٣س+١)^{٥}$

$\frac{٢}{٣}(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}} ، \frac{٢}{٩}(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}} ، \frac{٣}{٢}(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}}]$

الحل

$\int \sqrt{٣س+١}\, ء س = \frac{١}{٣}\cdot\frac{(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\frac{٢}{٣} \cdot \frac{(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} = \frac{٢}{٩}(٣س+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

7) $\int (ظتاس + قتاس)^{٢}\, ء س =$

$٢ظتاس + ٢قتاس - س + ث$ (X)

الحل ٢/ بحل

$\int (ظتا^{٢}س + ٢ظتاس\, قتاس + قتا^{٢}س)\, ء س$

$= \int ظتا^{٢}س\, ء س + ٢\int ظتاس\, قتاس\, ء س + \int قتا^{٢}س\, ء س$

$= -ظتاس - س - ٢قتاس - ظتاس + ث$

$= -٢ظتاس - ٢قتاس - س + ث$

8) $\int \frac{(جتاس + جاس)^{٢}}{١ + جا٢س}\, ء س = ... + ث$

[(س) ، لو|١ + جاس| ، −جتاس ، جاس]

الحل

$\int \frac{جتا^{٢}س + ٢جتاس\, جاس + جا^{٢}س}{١ + جا٢س}\, ء س$ (١ صيغة الضعف) متطابقة

$= \int \frac{١ + جا٢س}{١ + جا٢س}\, ء س$

$= \int ١\, ء س = س + ث$

⑨ ∫ (√س + ١/√س)² ءس = ... + ث

[س²/٢ + لو|س| ، س²/٢ + ٢س + لو|س| + ءس ، س² + لو|س| ، س² + ٢لو|س| + س]

الحل مربع كامل

∫ (س + ٢√س × ١/√س + ١/س) ءس

= ∫ (س + ٢ + ١/س) ءس

= س²/٢ + ٢س + لو|س| + ث

---

⑩ ∫ (١/س² + ٣/س − ٣^س) ءس = ...

−١/س + لو|س|³ − ٣^س/لو٣ + ث (٢)

الحل

∫ س^{−٢} ءس + ٣ ∫ س^{−١} ءس − ∫ ٣^س ءس

س^{−١}/−١ + ٣ لو|س| − ٣^س/لو٣ + ث

−١/س + لو|س|³ − ٣^س/لو٣ + ث

---

⑪ ∫ (١ + ظا²س)/ظاس ءس = ... + ث

قانون

[لو|ظاس| ، لو|ظاس| س ، لو|ظاس| + لو|ظاس|]

الحل

= ∫ قا²س ءس / ظاس

∫ مشتقة المقام / المقام = لو|المقام| + ث

= لو|ظاس| + ث

---

⑫ ∫_١^٤ ٢ [illegible] ءس = ...

[٢ ، ٣ ، ٤ ، ⑥]

الحل ∫_١^٤ ٢ ءس = ٢(٤ − ١) = ٣ × ٢ = ٦

---

⑬ ∫_١^٣ لو(٥ هـ^س) ءس + ∫_١^٣ لو هـ^{−س} ءس = ...

[لو٥ ، ٢لو٥ ، ٣لو٥ ، ٤لو٥]

الحل

∫_١^٣ لو(٥ هـ^س) ءس − ∫_١^٣ لو هـ^س ءس

(خواص اللو)

= ∫_١^٣ لو (٥هـ^س / هـ^س) ءس

= ∫_١^٣ لو٥ ءس ← (دالة ثابتة)

= (٣ − ١) لو٥ = ٢ لو٥

---

⑭ ء/ءس ∫ (جتا²س + جا²س) ءس = ١ (٢)

(الذهبي)

الحل

ء/ءس ∫ ١ ءس = ١

تختصر رمز المشتقة مع رمز التكامل

---

⑮ ∫ ٤س/(س² + ١) ءس = ... + ث

[٤لو|س² + ١| ، ٢لو|س² + ١| ، لو|س² + ١| − لو|س² + ١|²]

الحل

٤ ∫ س/(س² + ١) ءس مشتقة المقام = ٢س

نضرب ونقسم على ٢ بالتناسب

لو|المقام|

٤/٢ × لو|س² + ١| + ث = ٢لو|س² + ١|

---

⑯ ∫_أ^ب د(س) ءس = ش/س ∫_أ^ب د(س) ءس

٤ مبيناً د(س) قابلة للتكامل على [أ، ب] (٤)

الحل . = . (٢)

---

⑰ ∫ [ق(س)]′ ءس = ...

[ق(س) ، ق′(س) + ث ، ق(س) ، ق′(س) + ث]

حلول أخرى

⑱ إذا كان ∫ ق(س)/س ءس = س² + لو|س| + ث فإن ق″(س) = ٤ (٢)

الحل

مشتقة الطرفين = ما داخل التكامل

٢س + ١/س = ق(س)/س (×س)

٢س² + ١ = ق(س)

٤س = ق′(س)

٤ = ق″(س)

---

⑲ الدالة د(س) = ١/(٣س − ٩) قابلة للتكامل على الفترة [−٧، ٥/٢] (٢)

الحل

د(س) = ١/(٣س − ٩) ، أصفار المقام؟

٣س − ٩ = ٠

٣س = ٩ ⟸ س = ٣ ∉ الفترة

س = ٣ ∉ [−٧، ٥/٢] (٢)

---

⑳ إذا كان ∫_٢^٧ د(س) ءس = ٥ ، ∫_٢^٤ د(س) ءس = ٢ فإن ∫_٧^٤ د(س) ءس = ...

[٣ ، ٧ ، −٣ ، ٤]

الحل

∫_٢^٤ د(س) ءس + ∫_٤^٧ د(س) ءس = ∫_٢^٧ الأصل

٢ + ∫_٤^٧ د(س) ءس = ٥

∴ ∫_٤^٧ د(س) ءس = ٥ − ٢ = ٣

∴ ∫_٧^٤ د(س) ءس = −٣

---

(٢١) ∫_هـ^{هـ²} ءس/(س لوس) = ...

[صفر ، ٢ ، لو٢ ، لوهـ]

∫_هـ^{هـ²} (١/س)/لوس ءس = لو|لوس|

= لو|لوهـ²| − لو|لوهـ|

= لو٢ − لو١ = لو٢

---

(٢٢) ∫ هـ^{ظاس}/(١ − جا²س) ءس = ... + ث

[هـ^{ظاس} ، هـ^{ظاس} × قا²س ، هـ^{ظاس}]

الحل ∫ هـ^{ظاس}/جتا²س ءس = ∫ هـ^{ظاس} × قا²س ءس

= هـ^{ظاس}/١ = هـ^{ظاس} + ث

---

(٢٣) ∫ (ظا⁵س + ظا³س) ءس = ... + ث

[ظا²س/٢ ، ظا³س/٣ ، ظا⁴س/٤ ، ظا⁵س/٥]

الحل (مشترك)

∫ ظا³س (ظا²س + ١) ءس ← قاعدة

= ∫ ظا³س قا²س (أس × المشتقة)

= ظا⁴س/٤ + ث

---

(٢٤) ∫ قاس قتاس / لو ظاس ءس = ... + ث

[لو|ظاس| ، لو|لو ظاس| ، لو|ظاس| ، لو|ظاس|]

مشتقة المقام = ١/بسط ∴ لو|المقام|

قا²س/ظاس = قا²س/(قاس جاس) = قاس قتاس

(٢٥) $\int \frac{\text{٢س} - \text{قتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{ظتاس}} \text{ءس} = \text{.........} + \text{ث}$

[س٢ − ظتاس ، س٢ + ظتاس ، لو|س٢ + ظتاس|]

الحل لو|المقام|

(٢٦) $\int_{٠}^{\frac{\text{ط}}{٣}} \text{جتاص}(١ + \text{جاص})^{٥} \text{ءص} = \text{.........}$

[−١/٥ ، −١/٦ ، (صفر) ، ١/٥]

$\int \text{مشتقة} \times (\text{الدالة})^{\text{ن}} \text{ءس} = \frac{(\text{الدالة})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$

$\frac{(١ + \text{جاص})^{٦}}{٦} \Big]$

$\frac{(١ + \text{جاط})^{٦}}{٦} - \frac{(١ + \text{جا٠})^{٦}}{٦}$

$\frac{١}{٦} - \frac{١}{٦} = \text{صفر}$

(٢٧) $\int_{\frac{\text{ط}}{٦}}^{\frac{\text{ط}}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{\sqrt{\text{جاس}}} \text{ءس} = ٤ - ٢(٣)$ (٦٠)

الحل

مشتقة ما داخل الجذر = البسط

الحل ٢ × المقام

$= ٢\sqrt{\text{جاس}} \Big]^{\frac{\text{ط}}{٢}}_{\frac{\text{ط}}{٦}}$

$= ٢\sqrt{\text{جا٩٠}} - ٢\sqrt{\text{جا٣٠}}$

$= ٢\sqrt{١+٢} - ٢\sqrt{٢}$

$= ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢}$

(٢٨) إذا كان $\int_{١}^{٢أ+٢} \text{ءس} = \int_{١}^{٥} \text{ءس}$ فإن أ = ٣ (×)

الحل

٢أ + ٢ = ٥ ← ٢أ = ٣

← أ = ٣/٢

(٢٩) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ظا}\,\text{هـ}^{\text{س}} \text{ءس} = \text{.........} + \text{ث}$

[−لو|جتا هـ^س| ، لو|قتا هـ^س| ، جتا هـ^س]

الحل

∫ مشتقة الزاوية × الدالة = السابق

$= \int \text{ظا}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

$= -\text{لو}|\text{جتا}\,\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{ث}$

(٣٠) $\int [\text{ق(س)} + \text{س}\,\text{قَ(س)}] \text{ءس} = \text{س}\,\text{ق(س)} + \text{ث}$ (✓)

الحل

مشتقة السابق = ما داخل التكامل (مشتقة ضرب)

١ × ق(س) + س قَ(س)

ق(س) + س قَ(س)

(٣١) $\int \frac{٢\,\text{لوس}}{\text{س}} \text{ءس} = (\text{لوس})^{٢} + \text{ث}$ (✓)

الحل $٢ \int \text{لوس} \times \frac{١}{\text{س}} \text{ءس}$

$٢ \times \frac{(\text{لوس})^{٢}}{٢} + \text{ث} = (\text{لوس})^{٢} + \text{ث}$

تكامل دالة × مشتقة

(٣٢) $\int \frac{\text{لوهـ}^{٢}}{(٢\text{س}+١)\,\text{لوهـ}^{٤}} \text{ءس} = \text{.........} + \text{ث}$

الحل $\int \frac{٢\,\text{لوهـ}}{(٢\text{س}+١) \times ٤\,\text{لوهـ}} \text{ءس}$

$\int \frac{٢}{٢\text{س}+١} \text{ءس} = \text{لو}|٢\text{س}+١|$

$= \text{لو}|٢\text{س}+١| + \text{ث}$

(٣٣) $\int \frac{٤ - \text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢ + \text{هـ}^{\text{س}}} \text{ءس} = \text{.........}$ (مربعين)

الحل $\int \frac{(٢ - \text{هـ}^{\text{س}})(٢ + \text{هـ}^{\text{س}})}{٢ + \text{هـ}^{\text{س}}} \text{ءس}$

$= \int (٢ - \text{هـ}^{\text{س}}) \text{ءس} = ٢\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

قاعدة: $\int (\text{ظا}^{\text{ن}+٢}\text{س} + \text{ظا}^{\text{ن}}\text{س}) \text{ءس}$

$= \frac{\text{ظا}^{\text{ن}+١}\text{س}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$

مثال: $\int (\text{ظا}^{٧}\text{س} + \text{ظا}^{٥}\text{س}) \text{ءس} \text{......}$

الحل $\frac{\text{ظا}^{٦}\text{س}}{٦} = \frac{١}{٦} \text{ظا}^{٦}\text{س} + \text{ث}$

(٣٤) إذا كان $\int_{٢}^{٥} [\text{د(س)} + ٢\text{س}] \text{ءس} = ٣٧$

فإن $\int_{٢}^{٥} \text{د(س)} \text{ءس} = \text{......}$

[١٤ ، ١٥ ، (١٦) ، ١٧]

الحل

$\int_{٢}^{٥} \text{د(س)} \text{ءس} + \int_{٢}^{٥} ٢\text{س} \text{ءس} = ٣٧$

$\int_{٢}^{٥} \text{د(س)} \text{ءس} + \Big[\frac{٢\text{س}^{٢}}{٢}\Big] = ٣٧$

$\int_{٢}^{٥} \text{د(س)} \text{ءس} + (٢٥) - (٤) = ٣٧$

$\int_{٢}^{٥} \text{د(س)} \text{ءس} + ٢١ = ٣٧$

$\int_{٢}^{٥} \text{د(س)} \text{ءس} = ٣٧ - ٢١ = ١٦$

(٣٥) إذا كان

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١) \text{ءس} = ١ + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١) \text{ءس}$

فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١) \text{ءس} = \text{......}$

[(١) ، ٢ ، ٣ ، ٤]

الحل

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١)^{٢} \text{ءس} = ١ + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١) \text{ءس}$

$٢\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١) \text{ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١) \text{ءس} = ١$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{لو}(\text{س}+١) \text{ءس} = ١$

(٣٦) إذا كان

$\int_{٢}^{٩} \text{د(س)} \text{ءس} = \int_{٤}^{٩} [\text{د(س)} + ٣] \text{ءس}$

فإن $\int_{٢}^{٤} \text{د(س)} \text{ءس} = \text{......}$

[−١٥ ، −٣ ، ٣ ، (١٥)]

الحل

$\int_{٢}^{٤} \text{د(س)} \text{ءس} + \int_{٤}^{٩} \text{د(س)} \text{ءس} = \int_{٢}^{٩} \text{د(س)} \text{ءس}$

$\int_{٢}^{٤} \text{د(س)} \text{ءس} + \int_{٤}^{٩} \text{د(س)} \text{ءس} = \int_{٤}^{٩} [\text{د(س)} + ٣] \text{ءس}$

$\int_{٢}^{٤} \text{د(س)} \text{ءس} = \cancel{\int_{٤}^{٩} \text{د(س)} \text{ءس}} + \int_{٤}^{٩} ٣ \text{ءس} - \cancel{\int_{٤}^{٩} \text{د(س)} \text{ءس}}$

$\int_{٢}^{٤} \text{د(س)} \text{ءس} = ٣(٩ - ٤)$

$= ٣ \times ٥ = ١٥$

(٣٧) إذا كان هـ(١) = ٣ ، هـ(٢) = ٤ ، د(٣) = ٧ ، د(٤) = −٢

فإن $\int_{١}^{٢} \text{دَ}[\text{هـ(س)}] \times \text{هـَ(س)} \text{ءس}$

[٦ ، −٦ ، ٩ ، (−٩)]

الحل $\int \text{دَ}[\text{هـ(س)}] \times \text{هـَ(س)} \text{ءس} =$

(أخذ أمرين)

$= \text{د}[\text{هـ(س)}]$

$= \text{د}[\text{هـ(٢)}] - \text{د}[\text{هـ(١)}]$

$= \text{د}[٤] - \text{د}[٣]$

$= -٢ - ٧ = -٩$

(٣٨) $\int \text{ظاس}\,\text{لو}|\text{جتاس}| \text{ءس} = \text{.........} + \text{ث}$

$-\frac{١}{٢} (\text{لو}|\text{جتاس}|)^{٢}$

٣٩) $\int_{١}^{٢} س(س^{٢}-١)^{٢}\, دس = ...$

[٣ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ✓ $\frac{٩}{٢}$]

الحل

$\int$ د × مشتقتها ، مشتقة س² − ١ هي ٢س

نقسم الأس ٢

$\frac{(س^{٢}-١)^{٣}}{٢ \times ٣} = \frac{(س^{٢}-١)^{٣}}{٦}$

د(٢) − د(١)

$= \frac{(٤-١)^{٣}}{٦} - \frac{(١-١)^{٣}}{٦} = \frac{٣^{٣}}{٦} = \frac{٢٧}{٦}$

$= \frac{٩}{٢}$

٤٠) إذا كان د(٣) = د(٥) = ٤ فإن $\int_{٣}^{٥} \frac{دَ(س)}{د(س)-٣}\, دس = ...$

[✓ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣]

مشتقة المقام في البسط ∴ لو|المقام|

لو|د(س) − ٣|

= لو|د(٥) − ٣| − لو|د(٣) − ٣|

= لو|٤ − ٣| − لو|٤ − ٣|

= لو١ − لو١ = صفر

٤١) $\int (\frac{جا^{٢}س}{جتا^{٢}س} + ١)\, دس = ... + ث$

الحل $\int (ظا^{٢}س + ١)\, دس$

$= \int (ظا^{٢}س + ١)\, دس$

$= \int قا^{٢}س\, دس = ظاس + ث$

∵ ظَا س = قا²س

٤٤) $\int \frac{دَ(س)}{[د(س)]^{٢}}\, دس = \frac{١}{د(س)} + ث$ (×)

مشتقة المقدار $= \frac{-١ \times دَ(س)}{[د(س)]^{٢}} = \frac{-دَ(س)}{[د(س)]^{٢}}$

٤٢) $\int_{١}^{هـ} \frac{٦(١+لوس)^{٥}}{س}\, دس = ...$

[−٦ ، ٦١ ، ٦٢ ، ✓ ٦٣]

الحل

$٦ \int_{١}^{هـ} (١+لوس)^{٥} \times \frac{١}{س}\, دس$

$\cancel{٦} \times \frac{(١+لوس)^{٦}}{\cancel{٦}} = (١+لوس)^{٦}$

$(١+لوهـ)^{٦} - (١+لو١)^{٦}$

$(١+١)^{٦} - (١+٠)^{٦}$

٦٤ − ١ = ٦٣

٤٣) إذا كان لو أ = ١ ، لو ب = ٣ فإن $\int_{أ}^{أ^{٢}ب} \frac{١}{س}\, دس = ...$

[١ ، ٢ ، ٣ ، ✓ ٤]

الحل = لو|س| = د(أ²ب) − د(أ)

لو أ²ب − لو أ (خواص اللو)

$= لو \frac{أ^{٢}ب}{أ} = لو أب$ ⇐ (خواص اللو)

= لو أ + لو ب

= ١ + ٣ = ٤

٤٥) $\int \frac{قاس\, ظاس}{١+ظا^{٢}س}\, دس = ...$

الحل $\int \frac{قاس\, ظاس}{قا^{٢}س}\, دس = قاس + ث$

٤٦) $\int (س+١)\sqrt{(س+١)}\, دس = ...$

$\int (س+١)(س+١)^{\frac{١}{٢}}\, دس = \int (س+١)^{\frac{٣}{٢}}\, دس$

$= \frac{(س+١)^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + ث = \frac{٢}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

---

* الدرس الرابع *

◆ إيجاد مجهول:

١) ص أو خ:

إذا كانت $\int_{-١}^{أ} ٤\, دس = ٨$ فإن قيمة أ = صفر (×)

الحل تصحيح السؤال

$\int_{-١}^{أ} ٤\, دس$ ⇐ دالة ثابتة

= ٤(أ − (−١))

= ٤(أ + ١) بالمساواة مع ٨

٤(أ + ١) = ٨ (÷ ٤)

أ + ١ = ٢ ⇐ أ = ٢ − ١

⇐ أ = ١

٢) إذا كانت $\int_{أ}^{٢أ} (أ-١)\, دس = ٢$

حيث أ > ٢ فإن قيمة أ = ...

[١ ، −١ ، ✓ ٢ ، −٢]

الحل $\int_{أ}^{٢أ} (أ-١)\, دس = (٢أ - أ)(أ - ١)$

دالة ثابتة

= (أ)(أ − ١)

⇐ أ(أ − ١) = ٢

أ(أ − ١) = ٢ × ١

أ = ٢   الأكبر = الأكبر

طريقة أخرى

أ(أ − ١) = ٢ ونفك

أ² − أ − ٢ = ٠ ⇐ نحلل

(أ − ٢)(أ + ١) = ٠

إما أ = ٢ أو أ = −١ ⇐ مرفوض

٣) إذا كان $\int_{ل}^{٠} ٣س^{٢}\, دس = ٢٧$

فإن قيمة ل =

[٣ ، ✓ −٣ ، $-\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$]

الحل

$\int_{ل}^{٠} ٣س^{٢}\, دس = \cancel{٣}\frac{س^{٣}}{\cancel{٣}}$

= س³ = (٠)³ − (ل)³

= − ل³ بالمساواة

− ل³ = ٢٧ ⇐ ل³ = −٢٧

⇐ ل = −٣

٤) إذا كان $\int_{٣}^{ب} \frac{١}{س}\, دس = لو٣$

فإن ب = ... [−٣ ، ٣ ، ✓ ٩ ، ٦]

الحل $\int_{٣}^{ب} \frac{١}{س}\, دس = لو|س|$

= لوب − لو٣

لوب − لو٣ = لو٣ (بالمساواة)

$لو \frac{ب}{٣} = لو٣$ (خواص اللو)

$\frac{ب}{٣} = ٣$ ⇐ ب = ٩

٥) ص أو خ:

إذا كان $\int_{-١}^{أ} \frac{١}{٢}\, دس = \frac{١}{٢}$

فإن قيمة أ = صفر (✓)

الحل $\int_{-١}^{أ} \frac{١}{٢}\, دس$ (دالة ثابتة)

$\frac{١}{٢}(أ-(-١)) = \frac{١}{٢}(أ+١)$

$\frac{١}{٢}(أ+١)$ نعوض أ = ٠

$\frac{١}{٢}(٠+١) = \frac{١}{٢}$

٢٠٢٢

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل} ٣(س+١)^٢ \, ءس = ٧$ فإن ل = ١ (ص)

الحل

$\int_{٠}^{ل} ٣(س+١)^٢ \, ءس = \frac{٣(س+١)^٣}{٣}$

$= (س+١)^٣ \Big]_{٠}^{ل} = (ل+١)^٣ - (٠+١)^٣$

$= (ل+١)^٣ - ١$

نعوض ل = ١ ⇐ $(١+١)^٣ - ١$

$= ٢^٣ - ١$

$= ٨ - ١ = ٧$

٢٠٢٢

٧) إذا كان $\int_{ل}^{٢} (٢س - ١) \, ءس = -١٠$ فإن قيمة ل الحالية تساوي ٤ (×)

الحل

$\int_{ل}^{٢} (٢س - ١) \, ءس = \frac{٢س^٢}{٢} - س$

$= س^٢ - س$ (العلوي) − (السفلي)

$= (٤ - ٢) - (ل^٢ - ل)$

$= ٢ - ل^٢ + ل$ بالمساواة

$٢ - ل^٢ + ل = -١٠$

$-ل^٢ + ل + ٢ + ١٠ = ٠$

$-ل^٢ + ل + ١٢ = ٠$ (×−)

$ل^٢ - ل - ١٢ = ٠$ (مقص)

$(ل - ٤)(ل + ٣) = ٠$

إما ل = ٤ مرفوض أو ل = −٣

$\therefore \boxed{ل = -٣}$

---

٨) إذا كان $\int_{أ}^{٣أ} ٢أ^٢ \, ءس = ٣٢$ فإن أ = −٢ (×)

الحل $\int_{أ}^{٣أ} ٢أ^٢ \, ءس = ٢أ^٢(٣أ - أ)$ (ثابت)

$= ٢أ^٢ \times ٢أ$ ⇐ نعوض أ = −٢

$= ٢(-٢)^٢ \times ٢(-٢)$

$= ٢ \times ٤ \times -٤ = -٣٢$

الصح −٣٢ وليس ٣٢

---

٩) ٢٠٢٢: إذا كان $\int_{٢}^{جـ} ٣ \, ءس = ٩$ فإن جـ = ٥ (ص)

الحل

$\int_{٢}^{جـ} ٣ \, ءس = ٣(جـ - ٢)$ (ثابت)

نعوض جـ = ٥

$٣(٥ - ٢) = ٣ \times ٣ = ٩$

نشاط

١) إذا كان $\int_{-٢}^{ل} ءس = ١$ فإن ل = ... الحل $\boxed{-١}$

٢) إذا كان $\int_{١}^{٥} \frac{ءس}{٢س - ١} = لو أ$ فإن أ = ... [٩ ، ٣ ، ٨]

٣) إذا كان $\int_{١}^{ب} ٥س^٤ \, ءس = ٣١$ فإن ب = ... الحل $\boxed{٢}$

٤) إذا كان $\int_{أ}^{هـ^٢} \frac{١}{س} \, ءس = ١$ فإن أ = ... الحل $\boxed{هـ}$

٥) إذا كانت $\int_{١}^{أ} لو \frac{هـ^س}{هـ} \, ءس = ٤٠٫٥$ أوجد أ الحل $\boxed{١٠}$

٦) إذا كان $\int_{أ}^{[illegible]} (٢س - ٥) \, ءس = -٢٢$ فأوجد قيمة أ السالبة الحل −٤

٢٠٢١

١) إذا كان $\int س^{-٣} \, ءس = ل س^{-٢} + ث$ فإن ل = $\frac{١}{٣}$ (×)

الحل

مشتقة اليسار = ما داخل التكامل

$-٢ل \, س^{-٣} = س^{-٣}$

$-٢ل = ١ \Leftarrow ل = \frac{١}{-٢}$

$\therefore ل = -\frac{١}{٢}$

---

٢) إذا كان $\int_{أ-ب}^{أ+ب} ٥ \, ءس = ١٠$ فإن قيمة ب = ... [−٢ ، −١ ، صفر ، ①]

الحل

٥ × الفرق

$٥[(أ+ب) - (أ-ب)] = ١٠$

$أ + ب - أ + ب = ٢$

$٢ب = ٢$

$ب = ١$

---

٣) إذا كان $\int_{أ}^{٢أ} ٧أ \, ءس = ٣٧٣$ فإن أ = ... [١ ، ٢ ، ③ ، ٤]

الحل $٧أ(٢أ - أ)$ (واحد ثابت)

$= ٧أ \times أ = أ٧أ$

$أ٧أ = ٣٧٣$ بالمقارنة

$أ = ٣$

---

٤) إذا كان $\int_{أ}^{٦أ} ~~جتا~~ \frac{١}{٢} \, ءس = ٢$ فإن قيمة أ = ٢ (×)

الحل $\int_{أ}^{٦أ} \frac{١}{٢} \, ءس = \frac{١}{٢}(٦أ - أ)$

$\frac{١}{٢}(٥أ) = ٢$

$٥أ = ٤ \Leftarrow أ = \frac{٤}{٥}$

---

٥) قيمة ل الموجبة التي تجعل $\int_{-١}^{ل} (٢س - ١) \, ءس = ١٠$ هي ...... [١ ، ٢ ، ٣ ، ④]

الحل بالتجريب ل = ٤

$\int_{-١}^{٤} (٢س - ١) \, ءس$

$= \frac{٢س^٢}{٢} - س = \boxed{س^٢ - س}_{-١}^{٤}$

$(٤) - (-١)$

$(٤^٢ - ٤) - ((-١)^٢ - (-١))$

$(١٦ - ٤) - (١ + ١)$

$= ١٢ - ٢ = ١٠$

الدرس الحادي عشر :-

مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت الدالة د(س) متصلة على [م ، ب]
فإنه يوجد على الأقل عدد ج ∈ [م ، ب]
بحيث م ≤ ج ≤ ب يحقق العلاقة :

$$\int_{م}^{ب} د(س)\,دس = (ب - م)\, د(ج)$$

١) س ١ م × :
قيمة ج التي تحقق مبرهنة المتوسطة لحساب التكامل $\int_{٠}^{١} ٢س\,دس$ تساوي ١ (×)

الحل : $\int ٢س\,دس = \frac{٢س^٢}{٢}$ (الطرف الأيمن)

$= س^٢ = (١)^٢ - (٠)^٢$

$= \boxed{١}$ (الأيمن)

$(ب - م)\, د(ج)$ (الأيسر)

$(١ - ٠)(٢ج)$

$= \boxed{٢ج}$ (الطرف الأيسر)

بالمساواة

$٢ج = ١ \Leftarrow ج = \frac{١}{٢}$

٢) س ٢ م × :
قيمة ج التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب $\int_{١}^{٤} س\,دس$ تساوي ٢ (×)

الحل
الطرف الأيمن $\int_{١}^{٤} س\,دس = \frac{س^٢}{٢}$

$= \left(\frac{٤}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٢}$

$= \frac{١٦}{٢} - \frac{١}{٢} = \boxed{\frac{١٥}{٢}}$ الأيمن

الطرف الأيسر ...... $(ب - م)\, د(ج)$

$(٤ - ١)(ج) = \boxed{٣ج}$ الأيسر

$٣ج = \frac{١٥}{٢} \Leftarrow ج = \frac{٥}{٢}$

٣) س ٣ أ مثلا : قيمة ج التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل $\int_{٠}^{١} (س + ١)\,دس$ هي $\frac{١}{٢}$ (✓)

الحل
الطرف الأيمن $\int_{٠}^{١} (س + ١)\,دس$

$= \frac{(س+١)^٢}{٢} = \frac{(١+١)^٢}{٢} - \frac{(٠+١)^٢}{٢}$

$= \frac{٤}{٢} - \frac{١}{٢} = \boxed{\frac{٣}{٢}}$ الأيمن

الأيسر $(ب - م)\, د(ج)$

$(١ - ٠)(ج + ١)$

$\boxed{(ج + ١)}$ الأيسر

بالمساواة

$ج + ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ج = \frac{٣}{٢} - ١$

$ج = \frac{٣ - ٢}{٢} = \frac{١}{٢}$

لاحظ [illegible] في حالة سؤال [illegible]

٤) قيمة ج التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل $\int_{١}^{٢} (٢س - ١)\,دس$ تساوي .... $[-\frac{٣}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٤}]$

الحل
الأيمن : $\int_{١}^{٢} (٢س - ١)\,دس = \frac{٢س^٢}{٢} - ١س$

$= س^٢ - س$ (العلي) − الواطي

$= (٤ - ٢) - (١ - ١)$

$= ٢ - ٠ = \boxed{٢}$ الأيمن

الأيسر $(ب - م)\, د(ج) = (٢ - ١)(٢ج - ١)$

$(٢ - ١)(٢ج - ١)$

$= (٢ج - ١) \Leftarrow$ الطرف الأيسر

وبالمساواة

$٢ج - ١ = ٢$

$٢ج = ٢ + ١ \Leftarrow ٢ج = ٣$

$\Leftarrow ج = \frac{٣}{٢}$

أو $ج = \frac{م + ب}{٢} = \frac{٢ + ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

٥) إذا كانت قيمة ج الناتجة من مبرهنة المتوسطة في حساب التكامل $\int_{٢}^{ب} ٢س\,دس$ هي ٣ فإن قيمة ب = ... [٤ ، -٤ ، ٢ ، -٢]

الحل
$ج = \frac{م + ب}{٢}$ لأن س دالة أولى في الحالة ٢س

$∴ ٣ = \frac{٢ + ب}{٢} \Leftarrow ب + ٢ = ٦$

$ب = ٦ - ٢ = ٤$

٦) أوجد قيمة ج التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل حيث $د(س) = هـ^{٢ لو_{هـ} س}$ ، على [٠ ، ٤]

الحل
$\int_{٠}^{٤} هـ^{لو_{هـ} س^٢}\,دس = \int_{٠}^{٤} س^٢\,دس$

$∴ \int_{٠}^{٤} س^٢\,دس$ بعد التحسين

$= \frac{س^٣}{٣}$ الطرف الأيمن

$= \frac{٤^٣}{٣} - \frac{٠^٣}{٣}$

$= \boxed{\frac{٦٤}{٣}} \Leftarrow$ الطرف الأيمن

$(ب - م)\, د(ج) \Leftarrow$ الطرف الأيسر

$(٤ - ٠)(ج^٢) = \boxed{٤ج^٢}$ الطرف الأيسر

بالمساواة $٤ج^٢ = \frac{٦٤}{٣}$

$ج^٢ = \frac{٦٤}{٣ × ٤} \Leftarrow ج^٢ = \frac{١٦}{٣ × ١}$

$∴ ج^٢ = \frac{١٦}{٣} \Leftarrow ج = \mp \frac{٤}{\sqrt{٣}}$

$∴ ج = \frac{٤}{\sqrt{٣}} ∈ [٠ ، ٤]$

٧) أوجد قيمة ج التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب $\int_{٠}^{٤} (\sqrt{س} + ١)\,دس$

الحل
$\int_{٠}^{٤} (س^{\frac{١}{٢}} + ١)\,دس$ (التحسين)

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ١س$

[illegible] $= \frac{٢}{٣}$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} + س$

$= \left(\frac{٢}{٣}\sqrt{٤^٣} + ٤\right) - \left(\frac{٢}{٣}\sqrt{٠^٣} + ٠\right)$

$= \left(\frac{٢}{٣} × ٨ + ٤\right) - (\text{صفر})$

$= \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{١٦ + ١٢}{٣}$

$= \boxed{\frac{٢٨}{٣}}$ (الطرف الأيمن)

$(ب - م)\, د(ج)$ (الطرف الأيسر)

$(٤ - ٠)(\sqrt{ج} + ١)$

$= ٤(\sqrt{ج} + ١) \Rightarrow$ الطرف الأيسر

$\cancel{٤}(\sqrt{ج} + ١) = \frac{٢٨}{٣}$ (÷٤)

$\sqrt{ج} + ١ = \frac{٧}{٣} \Leftarrow \sqrt{ج} = \frac{٧}{٣} - ١$

$\Leftarrow \sqrt{ج} = \frac{٤}{٣} \Leftarrow ج = \frac{١٦}{٩} ∈ [٠ ، ٤]$

CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

(8) أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لـ: $\int_{2}^{6}\frac{\text{دس}}{\sqrt{2\text{س}-3}}$

الحل

$\int_{2}^{6}\frac{1}{\sqrt{2\text{س}-3}}\,\text{دس}$ مشتقة ما داخل الجذر $=\boxed{2}$

نضرب بالعدد ٢

$\therefore \frac{1}{2}\int_{2}^{6}\frac{2}{\sqrt{2\text{س}-3}}\,\text{دس}$ ∴ (قاعدة)

قاعدة: $\int\frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{أس}+\text{ب}}}=\frac{2}{\text{أ}}\sqrt{\text{أس}+\text{ب}}+\text{ث}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2\text{س}-3}\Big]$

$=\sqrt{2\text{س}-3}$

$=\left(\sqrt{2\times 6-3}\right)-\left(\sqrt{2\times 2-3}\right)$

$=\sqrt{9}-\sqrt{1}$

$=3-1=\boxed{2}\Rightarrow$ الأيمن

$(\text{ب}-\text{أ})\,\text{د(جـ)}=(6-2)\times\frac{1}{\sqrt{2\text{جـ}-3}}$

$\frac{4}{\sqrt{2\text{جـ}-3}}\to$ الأيسر

بالمساواة

$\frac{4}{\sqrt{2\text{جـ}-3}}=2$ (ضرب تبادلي)

$\cancel{2}\sqrt{2\text{جـ}-3}=\cancel{4}$ (÷٢)

$\sqrt{2\text{جـ}-3}=2$ (بالتربيع)

$2\text{جـ}-3=4 \Leftarrow 2\text{جـ}=7$

$\Leftarrow \text{جـ}=\frac{7}{2}$ مقبول

(9) أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لـ: $\int_{0}^{\pi}\text{جتا}^2\text{س دس}$

الحل: [illegible] (لقدل)

$\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{س})\,\text{دس}$

$\frac{1}{2}\left(\text{س}+\frac{\text{جا}2\text{س}}{2}\right)$

$\left[\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\text{جا}2\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(0+\frac{\text{جا}0}{2}\right)\right]$

$\frac{1}{2}(\pi+0)-\frac{1}{2}(\text{صفر})$

$=\boxed{\frac{\pi}{2}}$ الطرف الأيمن

$(\text{ب}-\text{أ})\,\text{د(جـ)}$ الطرف الأيسر

$(\pi-0)\times\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{جـ})$

$=\frac{\pi}{2}(1+\text{جتا}2\text{جـ})\to$ الأيسر

بالمساواة

$\cancel{\frac{\pi}{2}}(1+\text{جتا}2\text{جـ})=\cancel{\frac{\pi}{2}}$ $(\div\frac{\pi}{2})$

$1+\text{جتا}2\text{جـ}=1$

$\text{جتا}2\text{جـ}=0$

إما $2\text{جـ}=90$ أو $2\text{جـ}=270$

$\Leftarrow \text{جـ}=45$ أو $\text{جـ}=135$

وكلاهما مقبول

نشاط: أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكاملات الآتية:

(1) $\int_{0}^{2}(\text{س}^2-1)\,\text{دس}$ ، ح/ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(2) $\int_{0}^{2}(4\text{س}-1)\,\text{دس}$ ، ح/ $\frac{3}{2}$

(3) $\int_{0}^{1}(1-\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$ ، ح/ لو(هـ−1)

(4) $\int_{0}^{\pi}(\text{جتاس}-\text{جتا}^2\text{س})\,\text{دس}$ ، ح/ صفر

أسئلة 2021

(1) إذا كان $\int_{-2}^{3}\text{د(س) دس}=-3$ فإن قيمة د(جـ) التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة = 5 (X)

الحل

$\int_{-2}^{3}\text{د(س) دس}=\text{د(جـ)}(\text{ب}-\text{أ})$

$-3=\text{د(جـ)}\times(5)$

$-3=5\,\text{د(جـ)}$

$\text{د(جـ)}=-\frac{3}{5}$

(2) إذا كانت جـ = ٤ هي القيمة الناتجة عن مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب $\int_{\text{أ}}^{3\text{أ}}\frac{\text{دس}}{\text{س}}$ فإن قيمة أ = لو9 (ص)

الحل

$\int_{\text{أ}}^{3\text{أ}}\frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}=\text{د(جـ)}(3\text{أ}-\text{أ})$

$\text{لوس}\Big|_{\text{أ}}^{3\text{أ}}=\text{د(جـ)}(2\text{أ})$

$\text{لو}3\text{أ}-\text{لوأ}=\frac{1}{\text{جـ}}(2\text{أ})$

$\text{لو}\frac{3\text{أ}}{\text{أ}}=\frac{1}{4}(2\,\text{لو}9)$ عوضنا لو9

$\text{لو}3=\frac{1}{2}\,\text{لو}3^2$

$\text{لو}3=\frac{1}{2}\times 2\,\text{لو}3$

$\text{لو}3=\text{لو}3$ (ص)

(3) قيمة جـ التي تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب $\int_{0}^{1}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ هي

[لوهـ ، لو(هـ−1) ، لو(هـ+1) ، −لوهـ]

الحل

$\int_{0}^{1}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}=\text{د(جـ)}(\text{ب}-\text{أ})$

$\text{هـ}^{\text{س}}\Big|_{0}^{1}=\text{هـ}^{\text{جـ}}(1-0)$

$\text{هـ}^{1}-\text{هـ}^{0}=\text{هـ}^{\text{جـ}}$

$\text{هـ}-1=\text{هـ}^{\text{جـ}}$ (لو للطرفين)

$\text{لو(هـ}-1)=\text{لوهـ}^{\text{جـ}}$

$\text{لو(هـ}-1)=\text{جـ}$

(4) إذا كانت د(س) دالة متصلة على [أ، ب] فإنه يوجد على الأقل عدد جـ ∈ [أ، ب] بحيث يكون

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{د(س) دس}=\text{جـ}(\text{ب}-\text{أ})$ (X)

الصح $=\text{د(جـ)}(\text{ب}-\text{أ})$

(5) إذا كان $\int_{0}^{\text{لو}2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}=\text{لو}2\,\text{د(جـ)}$

فإن د(جـ) = ...

[أ) $\frac{1}{\text{لو}2}$ ، لو٢ ، −لو٢ ، $-\frac{1}{\text{لو}2}$]

الحل

$\int_{0}^{\text{لو}2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}=\text{د(جـ)}(\text{ب}-\text{أ})$

$\text{هـ}^{\text{س}}\Big|_{0}^{\text{لو}2}=\text{د(جـ)}(\text{لو}2)$

$(\text{هـ}^{\text{لو}2})-(\text{هـ}^{0})=(\text{لو}2)\,\text{د(جـ)}$

$2-1=(\text{لو}2)\,\text{د(جـ)}$

$\frac{1}{\text{لو}2}=\text{د(جـ)}$

الدرس السادس :-

معادلة المنحنى (الدالة الأصلية)

◆ إيجاد معادلة المنحنى
◆ إيجاد الدالة الأصلية
◆ إيجاد قاعدة الدالة

لنفس الدرس

تقصيد :- إذا كانت $د'(س) = م'(س)$ فإن الفرق بين الدالتين عدد ثابت

مثال : إذا كان $ل'(س) = م'(س)$ فإن

$ل(س) - م(س) = ...$

$\because ل'(س) = م'(س)$ نضيف $\int$ للطرفين

$\int ل'(س) ءس = \int م'(س) ءس$

$ل(س) = م(س) + ث$

$ل(س) - م(س) = ث$

$\therefore$ الحل $\boxed{ث}$

---

(٢) إذا كان $ص' = ٣س^٢$ فأوجد ص

الحل

نضيف $\int$ للطرفين

$\int ص' = \int ٣س^٢$

$ص = \frac{\cancel{٣}س^٣}{\cancel{٣}} + ث$

$\therefore ص = س^٣ + ث$

---

(٣) إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = قتا^٢س ظتا^٢س$ فإن ص = ...

الحل ⟸

$\because \frac{ءص}{ءس} = قتا^٢س ظتا^٢س$

$\therefore ءص = قتا^٢س ظتا^٢س ءس$

نضيف $\int$

$\int ءص = \int قتا^٢س ظتا^٢س ءس$

$ص = -\frac{قتا^٢س}{٢} + ث$

$ص = -\frac{١}{٢} قتا^٢س + ث$

◆ لإيجاد معادلة المنحنى

نتبع الخطوات الآتية

(١) ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس}$

، ميل الناظم $= \frac{-ءس}{ءص}$

◆ المسألة $= \frac{ءص}{ءس}$ (في حالة المماس)

◆ المسألة $= \frac{-ءس}{ءص}$ (في حالة الناظم (العمودي))

(٢) فصل المتغير ص عن المتغير س

(٣) إضافة $\int$ للطرفين

(٤) حساب التكامل

(٥) إيجاد ث (ثابت التكامل)

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة معطى بالعلاقة $\frac{٢س}{ص} = \frac{ءص}{ءس}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١، ١) فإن معادلة المنحنى هي ....

$\boxed{٢س^٢ - ص^٢ = ١}$ ، $س^٢ - ص^٢ = ٠$

، $س^٢ - ٢ص^٢ = ١$ ، $س + ص^٢ = ١$

الحل

$\frac{٢س}{ص} = \frac{ءص}{ءس}$ (ضرب تبادلي)

$ص ءص = ٢س ءس$ (فصلنا)

[illegible]

$\int ص ءص = \int ٢س ءس$ ($\int$)

$\frac{ص^٢}{٢} = ٢\frac{س^٢}{٢} + ث$

$\boxed{\frac{ص^٢}{٢} = س^٢ + ث}$ نعوض (١، ١)

$\frac{١}{٢} = ١ + ث$

$\frac{١}{٢} - ١ = ث \Leftarrow \boxed{ث = -\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$\frac{ص^٢}{٢} = س^٢ - \frac{١}{٢}$ (× ٢)

$ص^٢ = ٢س^٢ - ١$

$١ = ٢س^٢ - ص^٢$

$\boxed{٢س^٢ - ص^٢ = ١}$

---

(٢) ب أ ×١

إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (هـ، ٢) فإن معادلة المنحنى هي $ص = لو|س| + ١$ (✓)

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$ ($\int$)

$\int \frac{ءص}{ءس} = \int \frac{١}{س}$

$\int ص' = \int \frac{١}{س}$

$\boxed{ص = لو|س| + ث}$ (نعوض (هـ، ٢))

$٢ = لو|هـ| + ث$

$٢ = ١ + ث \Leftarrow ٢ - ١ = ث$

$\boxed{١ = ث}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$ص = لو|س| + ١$

ب ٢ م ×١

(٣) أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له يساوي ٦س عندما يمر بالنقطة $(\sqrt{٢}، ٢)$ هي

$ص = ٣س^٢ + ٤$ (× ١)

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س$

$ءص = ٦س ءس$

$\int ءص = \int ٦س ءس$

$ص = ٦\frac{س^٢}{٢} + ث$

$\boxed{ص = ٣س^٢ + ث}$ نعوض $(\sqrt{٢}، ٢)$

$٢ = ٣(\sqrt{٢})^٢ + ث$

$٢ = ٣ × ٢ + ث$

$٢ = ٦ + ث$

$٢ - ٦ = ث$

$\boxed{-٤ = ث}$

$\therefore$ المعادلة هي $ص = ٣س^٢ - ٤$

---

(٤) معادلة المنحنى الذي ميل المماس له $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{١ + جتاص}$ عند أي نقطة على المنحنى ويمر بالنقطة (٠، ٠) هي ....

$\frac{١}{٢}س^٢ + جاص = ص$ ، $\boxed{\frac{١}{٢}س^٢ - جاص = ص}$

، $س^٢ - جتاص = ص$ ، $س^٢ + جتاص = ص$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{١ + جتاص}$ (ضرب تبادلي)

$(١ + جتاص) ءص = س ءس$

$\int (١ + جتاص)\, ءص = \int س\, ءس$

∴ $ص + جاص = \frac{س^٢}{٢} + ث$

عوض (٠، ٠)

$٠ + جا٠ = \frac{٠}{٢} + ث$

$٠ = ث$

∴ معادلة المنحنى هي $ص + جاص = \frac{س^٢}{٢}$

$ص = \frac{س^٢}{٢} - جاص$

⑤ معادلة المنحنى الذي ميل المماس له هو $\frac{ص}{س}$ ويمر بالنقطة (١، ٣) هي ......

[لوص = لو١س ، جا١ص = لو٣س ، لوص = لو٣س]

الحل $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص}{س}$

$س\, ءص = ص\, ءس$ (÷ س ص)

$\frac{ءص}{ص} = \frac{ءس}{س}$

$\int \frac{١}{ص}\, ءص = \int \frac{١}{س}\, ءس$

$لوص = لوس + ث$ عوض (١، ٣)

$لو٣ = لو١ + ث$

$لو٣ = ٠ + ث$

$لو٣ = ث$

∴ معادلة المنحنى هي

$لوص = لوس + لو٣$

$لوص = لو(س × ٣)$

$لوص = لو٣س$ (١-

$ص = ٣س$ (٢-

⑥ أوجد معادلة المنحنى الذي ميل الناظم له يساوي $\frac{٢\sqrt{س}}{ص}$ إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (١، هـ)

الحل:

$\frac{٢\sqrt{س}}{ص} = \frac{-ءس}{ءص}$ (لأنه ناظم)

$٢\sqrt{س}\, ءص = - ص\, ءس$

$\frac{ءص}{ص} = \frac{-ءس}{٢\sqrt{س}}$

$\int \frac{١}{ص}\, ءص = - \int \frac{١}{٢\sqrt{س}}\, ءس$ (خاصية)

$لو|ص| = -٢\sqrt{س} + ث$ نعوض (١، هـ)

$لو هـ = -٢\sqrt{١} + ث$

$١ = -٢ + ث \Leftarrow ١ + ٢ = ث$

$ث = ٣$

∴ معادلة المنحنى هي

$لو|ص| = -٢\sqrt{س} + ٣$ (١-

$لو|ص| + ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$ (٢-

⑦ إذا كان ميل الناظم لمنحنى عند نقطة عليه هو $\frac{-هـ^{ص}}{١ + ظا^٢س}$ أوجد معادلة المنحنى علماً أنه يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$، لو٣)

الحل

$\frac{-هـ^{ص}}{١ + ظا^٢س} = \frac{-ءس}{ءص}$

$\frac{هـ^{ص}}{قا^٢س} = \frac{ءس}{ءص}$

$هـ^{ص}\, ءص = قا^٢س\, ءس$

$\int هـ^{ص}\, ءص = \int قا^٢س\, ءس$

$هـ^{ص} = ظاس + ث$ نعوض

$هـ^{لو٣} = ظا٤٥ + ث$

$٣ = ١ + ث \Leftarrow ث = ٢$

∴ معادلة المنحنى ص: $هـ^{ص} = ظاس + ٢$

⑧ إذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٠، $\frac{١}{٢}$) وميل المماس عند أي نقطة عليه تساوي $(جاس - جتاس)^٢$ فإن ث = ... [٠، ١، ٢، ٣]

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = (جاس - جتاس)^٢$

$\int \frac{ءص}{ءس} = \int (جاس - جتاس)^٢$

$\int ءص = \int (جاس - جتاس)^٢\, ءس$

$ص = \int (جا^٢س - ٢جاس جتاس + جتا^٢س)\, ءس$

[illegible]

$ص = \int (١ - جا٢س)\, ءس$

$ص = س - (\frac{-جتا٢س}{٢}) + ث$

$ص = س + \frac{١}{٢} جتا٢س + ث$ نعوض

$\frac{١}{٢} = ٠ + \frac{١}{٢} جتا٠ + ث$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} × ١ + ث$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + ث \Leftarrow \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = ث$

صفر = ث

⑨ إذا كان ميل المماس لمنحنى هو $هـ^{٢س - ص}$ أوجد معادلة المنحنى علماً أنه يمر بنقطة الأصل.

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = هـ^{٢س} × هـ^{-ص}$

$\frac{ءص}{هـ^{-ص}} = هـ^{٢س}\, ءس$

$\int هـ^{ص}\, ءص = \int هـ^{٢س}\, ءس$

$هـ^{ص} = \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ث$ نعوض

$هـ^{٠} = \frac{١}{٢} هـ^{٠} + ث$

$١ = \frac{١}{٢} + ث \Leftarrow ١ - \frac{١}{٢} = ث$

$ث = \frac{١}{٢}$

∴ المعادلة هي $هـ^{ص} = \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + \frac{١}{٢}$

$٢هـ^{ص} = هـ^{٢س} + ١$

⑩ أوجد معادلة المنحنى إذا كان ميل المماس له هو $\frac{ص}{س}$ لوس علماً وأنه يمر بالنقطة (١، ١)

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص لوس}{س}$ (تبادل)

$\frac{ءص}{ص} = \frac{لوس}{س}\, ءس$

$\int \frac{١}{ص}\, ءس = \int لوس × \frac{١}{س}\, ءس$

لوس والاخر مشتقته

$لو|ص| = \frac{(لوس)^٢}{٢} + ث$ خاصية

$لو١ = \frac{(لو١)^٢}{٢} + ث \Leftarrow ٠ = ث$

∴ معادلة المنحنى هي $لو|ص| = \frac{(لوس)^٢}{٢}$

[11] إذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة عليه هو $\frac{س هـ^{س^2}}{ص}$ أوجد ث علماً أن المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٢)

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س هـ^{س^2}}{ص}$

$\int ص\, ءص = \int س هـ^{س^2} ءس$

$\int ص\, ءص = \frac{1}{2} \int 2س هـ^{س^2} ءس$

مشتقة أساسية (أساسيات)

$\frac{ص^2}{2} = \frac{1}{2} هـ^{س^2} + ث$

نعوض (٠، ٢)

$\frac{4}{2} = \frac{1}{2} \times هـ^{0} + ث$

$\frac{4}{2} = \frac{1}{2} + ث \Leftarrow \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = ث$

$ث = \frac{3}{2}$

نشاط

[1] إذا كان ميل المماس لمنحنى يساوي $\frac{1}{ص هـ^{س}}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا علمت أنه يمر بالنقطة (لو٣، ٢)

الحل $\frac{ص^2}{2} = -هـ^{-س} + \frac{7}{3}$

[2] إذا كان $\frac{ءس}{ءص} = س\, ظاص$ أوجد معادلة المنحنى علماً أنه يمر بالنقطة $(-1، \frac{\pi}{3})$

الحل $س = قاص$

$ث = ٠$

---

[3] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة ما هو $\frac{جاس\, جتاس}{ص}$ أوجد معادلة المنحنى علماً أنه يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}، ٠)$

الحل $2ص^2 = 2جا^2س - 1$

$ث = -\frac{1}{4}$

---

[4] أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢، ٣) وميل المماس له عند أي نقطة عليه معطى بالعلاقة

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{2س + 3}{2ص - 1}$

الحل $ص^2 - ص = س^2 + 3س - 4$

---

[5] إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = جا2س\, جتا^2\frac{ص}{2}$ أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{2}، \frac{\pi}{4})$

الحل $2\,ظا\frac{ص}{2} = -\frac{1}{2} جتا2س + \frac{7}{4}$

---

[6] أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له هو: $\frac{جاس}{جتا3ص}$ علماً أنه يمر بنقطة الأصل

الحل $\frac{1}{3} جا3ص = -جتاس + 1$

---

[7] إذا كان ميل الناظم عند أي نقطة عليه هو ص جاس جتاس فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً أنه يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}، 1)$

الحل $ص^2 = 2\, لوظتاس + 1$

أعمدة 2021

[1] إذا كان $د'(س) = 3س^2 + جتاس$، $د(٠) = ٠$ فإن

$د(س) = س^3 - جاس$ (X)

الحل

تكامل الطرفين

$\int د'(س)\, ءس = \int (3س^2 + جتاس)\, ءس$

$د(س) = س^3 + جاس + ث$

$د(٠) = ٠ + جا٠ + ث$

$٠ = ٠ + ث$

$ث = ٠$

$\therefore د(س) = س^3 + جاس$

---

[2] إذا كان $د'(س) = قا^2س$، $د(-\frac{\pi}{4}) = 2$ فإن

$د(س) = ظاس + 2$ (X)

الحل تكامل الطرفين

$\int د'(س)\, ءس = \int قا^2س\, ءس$

$د(س) = ظاس + ث$

$د(-\frac{\pi}{4}) = ظا -\frac{\pi}{4} + ث$

$2 = -1 + ث$

$ث = 3$

$\therefore د(س) = ظاس + 3$

---

[3] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة معطى بالعلاقة $د'(س) = 3 - \frac{3}{س}$ وكان لمنحنى الدالة قيمة صغرى محلية تساوي ٧ فإن معادلة المنحنى هي

$د(س) = 3س - 3لوس + 4$ (✓)

الحل نضيف ∫ للطرفين

$\int د'(س)\, ءس = \int (3 - \frac{3}{س})\, ءس$

$د(س) = \int \{3 - 3 \times \frac{1}{س}\}\, ءس$

$د(س) = 3س - 3لوس + ث$

$\boxed{ص = 3س - 3لوس + ث}$

نقطة صغرى محلية لنا $ص' = ٠$ عند $ص = 7$

$\therefore 3 - \frac{3}{س} = ٠ \Leftarrow 3 = \frac{3}{س}$

$3س = 3 \Leftarrow س = 1$

$ص = 7$

$\therefore ص = 3س - 3لوس + ث$

$7 = 3(1) - 3لو1 + ث$

$7 = 3 + ث$

$ث = 4$

$\therefore د(س) = 3س - 3لوس + 4$

---

[4] معادلة المنحنى الذي ميل المماس له هو $\sqrt{هـ^{س}}$ ويمر بالنقطة (٠، ١) هو ص = ...

الحل $\frac{ءص}{ءس} = (هـ^{س})^{\frac{1}{2}}$

$\frac{ءص}{ءس} = هـ^{\frac{1}{2}س} \Leftarrow ءص = هـ^{\frac{1}{2}س} ءس$

$\int ءص = \int هـ^{\frac{1}{2}س} ءس$

$ص = \frac{هـ^{\frac{1}{2}س}}{\frac{1}{2}} + ث$

$ص = 2هـ^{\frac{1}{2}س} + ث \Leftarrow 1 = 2هـ^{0} + ث$

$1 - 2 = ث \Leftarrow ث = -1$

$\therefore ص = 2هـ^{\frac{1}{2}س} - 1 \Leftarrow ص = \boxed{2\sqrt{هـ^{س}} - 1}$

CamScanner حة ضوئيا بـ

■ حالات خاصة ■

(الحالة الأولى)

■ ضرب النسب المثلثية بزوايا جاس جتاص

① جاس جتاص = $\frac{1}{2}$[جا(س+ص) + جا(س−ص)]

② جتاس جاص = $\frac{1}{2}$[جا(س+ص) − جا(س−ص)]

③ جتاس جتاص = $\frac{1}{2}$[جتا(س+ص) + جتا(س−ص)]

④ جاس جاص = $-\frac{1}{2}$[جتا(س+ص) − جتا(س−ص)]

أمثلة:

① ∫ جتا٢س جتا٤س ءس = ...

الحل

= ∫ $\frac{1}{2}$[جتا(٢س+٤س) + جتا(٢س−٤س)] ءس

= $\frac{1}{2}$∫[جتا٦س + جتا−٢س] ءس

= $\frac{1}{2}$∫[جتا٦س + جتا٢س] ءس

= $\frac{1}{2}\left[\frac{\text{جا٦س}}{6} + \frac{\text{جا٢س}}{2}\right]$ + ث

ص = $\frac{1}{12}$ جا٦س + $\frac{1}{4}$ جا٢س + ث

⑤ ∫ جا٥س جتاس ءس = ...

= ∫ $\frac{1}{2}$[جا(٥س+س) + جا(٥س−س)] ءس

= $\frac{1}{2}$∫[جا٦س + جا٤س] ءس

= $\frac{1}{2}\left[-\frac{\text{جتا٦س}}{6} - \frac{\text{جتا٤س}}{4}\right]$ + ث

ص = $-\frac{1}{12}$ جتا٦س − $\frac{1}{4}$ جتا٤س + ث

③ ∫ جا٤س جاس ءس = ...

$-\frac{1}{2}$∫[جتا(٤س+س) − جتا(٤س−س)] ءس

$-\frac{1}{2}$∫[جتا٥س − جتا٣س] ءس

$-\frac{1}{2}\left[\frac{\text{جا٥س}}{5} - \frac{\text{جا٣س}}{3}\right]$ + ث

④ $\int_{0}^{\frac{\text{ط}}{3}}$ جتا٣ جاس ءس = ...

الحل

جتا٣ $\int_{0}^{\frac{\text{ط}}{3}}$ جاس ءس

جتا٣ × (−جتاس) $\Big|_{0}^{\frac{\text{ط}}{3}}$

جتا٣[(−جتا٦٠) − (−جتا٠)]

جتا٣[$-\frac{1}{2}$ + ١]

الحالة الثانية

■ ∫ظاس ءس ، ∫ظا^{2}س ءس ، ∫ظا^{ن}س ءس

، ∫ظتاس ءس ، ∫ظتا^{ن}س ءس ......

أمثلة

① ∫ظا^{3}س ءس = ...

الحل : الفكرة تفك القوى

∫ظاس ظا^{2}س ءس (قا تربيع)

∫ظاس(قا^{2}س − ١) ءس

∫(ظاس قا^{2}س − ظاس) ءس

$\frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2}$ + لو|جتاس| + ث

---

② ∫ظا^{4}س ءس = ...

الحل

∫ظا^{2}س ظا^{2}س ءس (نفك)

∫ظا^{2}س(قا^{2}س − ١) ءس بالتوزيع

∫(ظا^{2}س قا^{2}س − ظا^{2}س) ءس

دالة × مشتقة

$\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3}$ − (ظاس − س) + ث

= $\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3}$ − ظاس + س + ث

③ ∫ظتا^{3}س ءس

الحل

∫ظتاس(ظتا^{2}س) ءس

∫ظتاس(قتا^{2}س − ١) ءس

= ∫(ظتاس قتا^{2}س − ظتاس) ءس

= $-\frac{\text{ظتا}^2\text{س}}{2}$ − لو|جاس| + ث

= $-\frac{1}{2}$ ظتا^{2}س − لو|جاس| + ث

(*) قاعدة

∫(ظا$^{ن+2}$س + ظا^{ن}س) ءس

= $\frac{\text{ظا}^{ن+1}\text{س}}{ن+1}$ + ث

مثال : ∫(ظا^{7}س + ظا^{5}س) ءس

= $\frac{\text{ظا}^6\text{س}}{6}$ + ث

الحالة الثالثة : ∫ $\frac{1}{\text{س}^ن + \text{س}}$ ءس

فكرة الحل أخذ س^ن عامل مشترك

أمثلة:

① ∫ $\frac{1}{\text{س}^5 + \text{س}}$ ءس = ...

الحل

∫ $\frac{1}{\text{س}^5(1 + \text{س}^{-4})}$ ءس

= ∫ $\frac{\text{س}^{-5}}{1 + \text{س}^{-4}}$ ءس

مشتقة المقام = −٤س$^{-5}$

$-\frac{1}{4}$ لو|المقام|

= $-\frac{1}{4}$ لو|١ + س$^{-4}$| + ث

② ∫ $\frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{س}^6 + 1)}$ = ...

الحل بالتوزيع

∫ $\frac{1}{\text{س}^7 + \text{س}}$ ءس

∫ $\frac{1}{\text{س}^7(1 + \text{س}^{-6})}$ ءس

= ∫ $\frac{\text{س}^{-7}}{1 + \text{س}^{-6}}$ ءس

مشتقة المقام = −٦س$^{-7}$

∴ $-\frac{1}{6}$ لو|المقام|

= $-\frac{1}{6}$ لو|١ + س$^{-6}$| + ث

③ $\int \frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}^{3}س + \text{جا}\,س}\,ءس = \ldots$

جا س مضاعف

$\int \frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س\,(1+\text{جا}^{2}س)}\,ءس$

$= \int \frac{\text{جا}^{-4}س\,\text{جتا}\,س}{1+\text{جا}^{-2}س}\,ءس$

(مشتقتها)

$= -2\,\text{جا}^{-3}س\,\text{جتا}\,س$

$= \frac{1}{-2}\int \frac{-2\,\text{جا}^{-3}س\,\text{جتا}\,س}{1+\text{جا}^{-2}س}\,ءس$

$= \frac{1}{-2}\,\text{لو}\,|1+\text{جا}^{-2}س| + ث$

ملاحظة: هذا النوع من السؤال وارد

١) نأخذ المضاعف المشترك

٢) نطلع المضاعف بطاقة بإشارة معاكسة

٣) لو المقام ونقسم على أس المقام

نشاط

أوجد التكاملات الآتية:

① $\int \frac{\text{قا}^{2}س}{\text{ظا}^{3}س + \text{ظا}\,س}\,ءس$

ج $= -\frac{1}{2}\,\text{لو}\,|1+\text{ظا}^{-2}س|$

② $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{6س} + هـ^{س}}\,ءس$

ج $= -\frac{1}{5}\,\text{لو}\,|1+هـ^{-5س}| + ث$

الحالة الرابعة: استخدام التحليل

التحليل مع الاختصار

أمثلة

① $\int \frac{س^{2} - 5س + 4}{س - 4}\,ءس = \ldots$

(مختصر)

$= \int \frac{\cancel{(س-4)}(س-1)}{\cancel{س-4}}\,ءس$

$= \int (س-1)\,ءس$

$= \frac{س^{2}}{2} - س + ث$

② $\int \frac{9^{س} - 1}{3^{س} - 1}\,ءس = \ldots$

(مربعين)

$= \int \frac{(3^{س}+1)\cancel{(3^{س}-1)}}{\cancel{3^{س}-1}}\,ءس$

$= \int (3^{س}+1)\,ءس = \frac{3^{س}}{\text{لو}\,3} + س + ث$

③ $\int \frac{هـ^{2س} - س}{هـ^{س} - \sqrt{س}}\,ءس = \ldots$

(مربعين)

$= \int \frac{\cancel{(هـ^{س} - \sqrt{س})}(هـ^{س} + \sqrt{س})}{\cancel{هـ^{س} - \sqrt{س}}}\,ءس$

$= \int هـ^{س}\,ءس + \int س^{\frac{1}{2}}\,ءس$

$= هـ^{س} + \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ث$

$= هـ^{س} + \frac{2}{3}\sqrt{س^{3}} + ث$

④ $\int \frac{هـ^{3س} + 1}{هـ^{س} + 1}\,ءس = \ldots$

(مكعبين)

الحل

$\int \frac{\cancel{(هـ^{س}+1)}(هـ^{2س} - هـ^{س} + 1)}{\cancel{هـ^{س}+1}}\,ءس$

$= \int (هـ^{2س} - هـ^{س} + 1)\,ءس$

$= \frac{هـ^{2س}}{2} - هـ^{س} + س + ث$

نشاط

① $\int \frac{س^{4} - س}{س^{2} - \sqrt{س}}\,ءس = \ldots$

الحل $\frac{1}{3}س^{3} + \frac{2}{3}\sqrt{س^{3}} + ث$

② $\int_{0}^{\text{لو}\,2} \frac{4(هـ^{2س} - 1)}{هـ^{س} + 1}\,ءس = \ldots$

الحل ٤ − ٤ لو٢

الحالة الخامسة: المقياس |س|

أمثلة:

① $\int_{1}^{3} |س - 2|\,ءس = \ldots$

الحل

أصفار المقياس: س − ٢ = ٠

$س = 2 \in [1، 3]$

إذا كان أصفار المقياس ∈ الفترة فهناك تكاملين (مجموع التكاملين)

وإذا كان أصفار المقياس ∉ الفترة نأخذ التكامل بدون

♦ (الفترة > من أصفار المقياس) تكامل الأول

وإذا كان أصفار المقياس > الفترة نأخذ التكامل الثاني.

♦ الفترة < المقياس تكامل الثانية

لابد أن نعرف المقياس

$|س - 2| = \begin{cases} +(س-2) & ، س \geq 2 : \int_{2}^{3} \\ -(س-2) & ، س < 2 : \int_{1}^{2} \end{cases}$

س = ٢ أصفار المقياس ∈ الفترة

∴ يوجد تكاملين $\int_{2}^{3} + \int_{1}^{2}$

$\int_{2}^{3} (س-2)\,ءس + \int_{1}^{2} -(س-2)\,ءس$

أولاً: $\int_{2}^{3} (س-2)\,ءس = \left[\frac{س^{2}}{2} - 2س\right]_{2}^{3}$

$= \left(\frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$

$= \frac{9}{2} - 6 - \frac{4}{2} + 4$

أولاً $\frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

ثانياً: $\int_{1}^{2} -(س-2)\,ءس = \int_{1}^{2} (-س+2)\,ءس$

$= \left[-\frac{س^{2}}{2} + 2س\right]_{1}^{2}$

$= \left(-\frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right)$

$= -\frac{4}{2} + 4 + \frac{1}{2} - 2$

ثانياً $-\frac{3}{2} + 2 = \frac{-3+4}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

∴ تكامل + تكامل $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$

④ أحسب $\int_{1}^{5} |س|\,ءس$

الحل $|س| = \begin{cases} +س & ، س \geq 0 \\ -س & ، س < 0 \end{cases}$

أصفار المقياس س = ٠

$0 < [1، 5]$

أصفار المقياس ∉ الفترة نأخذ التكامل للحالة الأولى فقط الفترة الأكبر

$\int_{2}^{5} س\,ءس = \left.\frac{س^{2}}{2}\right|_{2}^{5}$

$= \left(\frac{25}{2}\right) - \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{21}{2}$

③ احسب $\int_{0}^{1} |2س-3|\,ءس$

الحل

$|2س-3| = \begin{cases} (2س-3) , & س \geq \frac{3}{2} \\ -(2س-3) , & س < \frac{3}{2} \end{cases}$ ∴ $2س-3=0$ ، $2س=3$ ، $س=\frac{3}{2}$

أصفار المطلق س = $\frac{3}{2}$ > الفترة

∴ نأخذ التكامل للحالة الثانية

$\int_{0}^{1} -(2س-3)\,ءس$

$= \int_{0}^{1} (-2س+3)\,ءس$

$= -2\frac{س^{2}}{2} + 3س$

$= -س^{2} + 3س \Big|_{0}^{1}$

$= (-1+3) - (صفر)$

$= \boxed{2}$

الحالة: السادسة

بعض التكاملات فيها أكثر من إجابة صحيحة

مثال:

$\int جاس\,جتاس\,ءس = ...$

$\int جاس\,جتاس\,ءس = \frac{جا^{2}س}{2} + ث$

مشتقة × دالة

حل آخر $\int جاس\,جتاس\,ءس$

مشتقة دالة $(جتاس)' = -جاس$

$-\int (-جاس)\,جتاس\,ءس = -\frac{جتا^{2}س}{2} + ث$

حل آخر $\int جاس\,جتاس\,ءس$ [illegible]

$= \int \frac{1}{2}\,جا2س\,ءس$ [illegible]

$= \frac{1}{2} \times -\frac{جتا2س}{2} + ث$

$= -\frac{1}{4}\,جتا2س + ث$

مثال: $\int قا^{3}س\,ظاس\,ءس = ...$

$\int قا^{2}س \cdot \frac{قاس\,ظاس}{دالة} = \frac{قا^{3}س}{3} + ث$

مشتقة ×

حل آخر $\int قا^{3}س\,ظاس\,ءس$

بالقاعدة المباشرة المشهورة $\int قاس\,ظاس\,ءس$

$\frac{قا^{3}س}{3} + ث$

نشاط

احسب التكاملات الآتية

① $\int_{0}^{5} |2س-3|\,ءس$

② $\int ظا^{5}س\,ءس$

③ $\int قتا^{3}س\,ظتاس\,ءس$

④ $\int جا2س\,جاس\,ءس$

⑤ $\int \frac{ءس}{س^{2}+س}$

الدرس السابع: التكامل بالتعويض

قد يكون التكامل صعب الحساب ([illegible]) أي ليس موجود ضمن القواعد المشهورة (التكاملات المشهورة) وليس موجود ضمن الحالات السابقة وليس موجود ضمن تعديل السؤال

وعندئذ يمكننا الاستعانة بمتغير جديد وليكن ع أو ص أو .....

وهذا ما يسمى التكامل بالتعويض.

◆ من التعويضات التي تستخدم لتبسيط التكامل :-

① نفرض ما داخل القوس = ع

مثل: $\int س^{2}(س^{3}+5)^{6}\,ءس$

نضع $ع = س^{3}+5$

② نفرض ما داخل الجذر = ع

مثل $\int س^{3}\sqrt{س^{2}+1}\,ءس$

نضع $ع = س^{2}+1$

③ نفرض الجذر بما داخله = ع

مثل $\int جا2س\sqrt{1+جتا2س}\,ءس$

نضع $ع = \sqrt{1+جتا2س}$

④ نفرض زاوية الدالة المثلثية الغير [illegible] زاوية الدالة = ع

مثل $\int جا\sqrt{س}\,ءس$

نضع $ع = \sqrt{س}$

⑤ نضع أس هـ الأسية = ع إذا كان أس هـ غير نموذجي

مثل: $\int جتاس\,هـ^{جاس}\,ءس$

نضع ع = جاس

⑥ تكرار الشيء في المسألة = ع

مثال: $\int هـ^{س}\sqrt{هـ^{س}+1}\,ءس$

نضع $ع = هـ^{س}$ (تكررت)

مثال: $\int \frac{لوس}{س(لوس-1)}\,ءس$

نضع ع = لوس

⑦ نفرض جزء من السؤال = ع

مثال: $\int \frac{لوس}{5}\,ءس$

نضع ع = لوس

أو أي متغير غير الذي في السؤال

نضع ص = لوس

ملاحظة: أي مسألة يمكن حلها بالتكامل بالتعويض

ملاحظة أخرى:

أي سؤال ليس ضمن القواعد المشهورة في التكامل نستخدم إما

١) الحالات السابقة

أو ٢) تعديل السؤال

أو ٣) التكامل بالتعويض

أو ٤) التكامل بالتجزئة

أو ٥) تكامل الكسور الجزئية

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

تمرين: احسب التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{جتا}(\text{لوس})}{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل: بالتعويض

1) نضع لوس = ع

2) نشتق $\frac{1}{\text{س}}$ ءس = 1 ءع

$\frac{1}{\text{س}}$ ءس = ءع

3) نوجد ءس   ءس = س ءع

4) نعوض خطوة ②، ③ في المسألة

$\int \frac{\text{جتاع}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{ءع}$

5) نتخلص من المتغير س

$\int$ جتاع ءع

6) الوصول الى قواعد التكامل المشهورة
أو البديل للتكاملات المشهورة
من التعويض من التعديل من التجانس

6) $\int$ جتاع ءع = $\boxed{\text{جاع + ث}}$

7) نعوض عن قيمة ع بالعودة للمتغير الاصلي (س)

جاع + ث = جا(لوس) + ث

② $\int \frac{(10)^{\frac{1}{\text{س}}}}{\text{س}^2}\,\text{ءس}$

الحل نضع ع = $\frac{1}{\text{س}}$ (1)

ءع = $\frac{-1}{\text{س}^2}$ ءس   (2)

$-\text{س}^2$ ءع = ءس   (3)

$\int \frac{(10)^{\text{ع}}}{\cancel{\text{س}^2}} \times -\cancel{\text{س}^2}\,\text{ءع}$ (4)، (5)

= $-\int (10)^{\text{ع}}\,\text{ءع}$ → أسية (6)
قاعدة مشهورة

= $-\frac{10^{\text{ع}}}{\text{لو}10}$ + ث

= $-\frac{(10)^{\frac{1}{\text{س}}}}{\text{لو}10}$ + ث

= $-\frac{1}{\text{لو}10}(10)^{\frac{1}{\text{س}}}$ + ث

③ $\int \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$ = ...

[جتا$\sqrt{\text{س}}$ + ث ، − جتا$\sqrt{\text{س}}$ + ث
، $\boxed{-2\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}} + \text{ث}}$ ، $\frac{1}{2}$ جتا$\sqrt{\text{س}}$ + ث]

الحل
نضع $\sqrt{\text{س}}$ = ع   (نربع لتسهل المشتقة)

س = ع²   (1)

ءس = 2ع ءع   (2)، (3)

$\int \frac{\text{جاع}}{\cancel{\text{ع}}} \times 2\cancel{\text{ع}}\,\text{ءع}$ (4)، (5)

= 2 $\int$ جاع ءع

2 × − جتاع + ث   (6)

= − 2 جتا$\sqrt{\text{س}}$ + ث   (7)

④ $\int \text{س}^3 \sqrt[3]{\text{س}^4 + 2}\,\text{ءس}$ = ...

الحل
نضع س⁴ + 2 = ص

4س³ ءس = ءص

ءس = $\frac{\text{ءص}}{4\text{س}^3}$

$\int \text{س}^3 \sqrt[3]{\text{س}^4 + 2}\,\text{ءس}$

= $\int \cancel{\text{س}^3} \sqrt[3]{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{4\cancel{\text{س}^3}}$

= $\frac{1}{4}\int \sqrt[3]{\text{ص}}\,\text{ءص}$

= $\frac{1}{4}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{ءص}$

= $\frac{1}{4}\,\frac{\text{ص}^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}$ + ث

= $\frac{1}{4} \times \frac{\text{ص}^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$ + ث

= $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\sqrt[3]{\text{ص}^4}$ + ث

= $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(\text{س}^4 + 2)^4}$ + ث

⑤ $\int \frac{\text{لوس}}{\text{س}(\text{لوس} - 1)}\,\text{ءس}$

الحل نضع لوس = ع

$\frac{1}{\text{س}}$ ءس = ءع

ءس = س ءع

$\int \frac{\text{ع}}{\cancel{\text{س}}(\text{ع} - 1)} \times \cancel{\text{س}}\,\text{ءع}$

= $\int \frac{\text{ع}}{\text{ع} - 1}\,\text{ءع}$

= $\int \frac{\text{ع} - 1 + 1}{\text{ع} - 1}\,\text{ءع}$

= $\int \frac{\text{ع} - 1}{\text{ع} - 1}\,\text{ءع} + \int \frac{1}{\text{ع} - 1}\,\text{ءع}$

= $\int 1\,\text{ءع} + \int \frac{1}{\text{ع} - 1}\,\text{ءع}$

= ع + لو|ع − 1| + ث

= لوس + لو|لوس − 1| + ث

⑥ $\int \text{س}(\text{س} + 1)^5\,\text{ءس}$

نضع ع = س + 1

ءع = ءس

ع = س + 1
ع − 1 = س

$\int \text{س}(\text{ع})^5 \times \text{ءع}$ نتخلص من س

= $\int (\text{ع} - 1)\,\text{ع}^5\,\text{ءع}$ (التوزيع)

= $\int (\text{ع}^6 - \text{ع}^5)\,\text{ءع}$

= $\frac{\text{ع}^7}{7} - \frac{\text{ع}^6}{6}$ + ث

= $\frac{1}{7}(\text{س} + 1)^7 - \frac{1}{6}(\text{س} + 1)^6$ + ث

⑦ $\int \text{س}^5 \sqrt{\text{س}^3 - 1}\,\text{ءس}$

الحل: ع = $\sqrt{\text{س}^3 - 1}$ نربع

ع² = س³ − 1   نشتق

$\cancel{2}\text{ع}\,\text{ءع} = \cancel{3}\text{س}^2\,\text{ءس}$

ءس = $\frac{\text{ع}\,\text{ءع}}{\text{س}^2}$

ع² = س³ − 1
ع² + 1 = س³

$\int \text{س}^5 \sqrt{\text{س}^3 - 1}\,\text{ءس}$

= $\int \text{س}^5 \times \text{ع} \times \frac{\text{ع}\,\text{ءع}}{\cancel{\text{س}^2}}$

= $\int \text{س}^3 \times \text{ع}^2\,\text{ءع}$

= $\int (\text{ع}^2 + 1)\,\text{ع}^2\,\text{ءع}$ وزع

= $\int (\text{ع}^4 + \text{ع}^2)\,\text{ءع}$

= $\frac{1}{5}\text{ع}^5 + \frac{1}{3}\text{ع}^3$ + ث

= $\frac{1}{5}(\sqrt{\text{س}^3 - 1})^5 + \frac{1}{3}(\sqrt{\text{س}^3 - 1})^3$ + ث

⑧ وإذا كان د(٠) = ٢ ، د(١) = ٦

فإن قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس $\bar{د}$(جاس) ءس = ...

[−٤ ، ٢ ، ④ ، ٦]

الحل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $\bar{د}$(جاس) × جتاس ءس

المشتقة

∵ $\int \bar{د}(س) = د(س)$

= د(جاس) $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= د(جا $\frac{\pi}{2}$) − د(جا٠)

= د(١) − د(٠)

= ٦ − ٢ = ٤

أغسطس 2021

① $\int$ جتا^{٣}س ءس = ... + ث

[جاس − $\frac{جا^{٣}س}{٣}$ ، جتاس − $\frac{جتا^{٣}س}{٣}$

، جاس − جتاس ، جتاس − $\frac{جتا^{٣}س}{٣}$]

الحل

وإذا كان أس س مرفوعاً

نضع ص = جاس (البسيط أو الدالة المكملة للسؤال)

∴ ص = جاس ١)

ءص = جتاس ءس ٢)

$\frac{ءص}{جتاس}$ = ءس ٣)

$\int$ جتا^{٣}س ءس = $\int$ جتا^{٣}س × $\frac{ءص}{جتاس}$ ٤)

= $\int$ جتا^{٢}س ءص

= $\int$ (١ − جا^{٢}س) ءص ٥)

= $\int$ (١ − ص^{٢}) ءص

= ص − $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ث ٦)

= جاس − $\frac{جا^{٣}س}{٣}$ + ث ٧)

---

② إذا كانت س = ع^{٤}

فإن $\int \frac{ءس}{\sqrt{س} + \sqrt[٤]{س}} = \int \frac{٤ع^{٣}}{ع+١}$ ءع (✓)

الحل

∵ س = ع^{٤} ①

ءس = ٤ع^{٣} ءع ②

∴ ءس = ٤ع^{٣} ءع ③ جاهز

④ $\int \frac{ءس}{\sqrt{س} + \sqrt[٤]{س}} = \int \frac{٤ع^{٣} ءع}{\sqrt{ع^{٤}} + \sqrt[٤]{ع^{٤}}}$

= $\int \frac{٤ع^{٣} ءع}{ع^{٢} + ع}$

= $\int \frac{٤\cancel{ع}^{٣} ءع}{\cancel{ع}(ع+١)} = \int \frac{٤ ع^{٢} ءع}{ع+١}$

---

③ $\int \frac{١}{س − \sqrt{س}}$ ءس = ... + ث

[٢لو|$\sqrt{س}$ − ١| ، ٢لو|س − ١| − س

، ٤لو|$\sqrt{س}$ − ١| ، لو|س − ١| − س]

الحل

نضع ص = $\sqrt{س}$ (التربيع)

ص^{٢} = س (نشتق)

٢ص ءص = ءس (العوض)

$\int \frac{١}{س − \sqrt{س}}$ ءس = $\int \frac{١}{ص^{٢} − ص}$ × ٢ص ءص

= ٢ $\int \frac{ص ءص}{ص(ص − ١)}$

= ٢ $\int \frac{١}{ص − ١}$ ءص = ٢ × لو|ص − ١|

= ٢لو|ص − ١|

= ٢لو|$\sqrt{س}$ − ١|

نشاط:

أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{١ + قا^{٢}(لوس)}{س}$ ءس

الحل

لوس + ظا(لوس) + ث

② $\int$ س^{٢}(س^{٣} + ١)^{٧} ءس

الحل $\frac{١}{٢٤}$(س^{٣} + ١)^{٨} + ث

③ $\int \frac{١}{س^{٣}}(\frac{١}{س^{٢}} − ١)^{٣}$ ءس

الحل = −$\frac{١}{٨}$($\frac{١}{س^{٢}}$ − ١)^{٤} + ث

④ $\int$ هـ^{جاس} . جتاس ءس

الحل

هـ^{جاس} + ث

⑤ $\int \frac{هـ^{ظا\sqrt{س}}}{\sqrt{س}\ جتا^{٢}\sqrt{س}}$ ءس

الحل ٢ هـ$^{ظا\sqrt{س}}$ + ث

⑥ $\int \frac{١}{س^{٢}}(١ − \frac{١}{س})^{٩}$ ءس

الحل $\frac{(١ − \frac{١}{س})^{١٠}}{١٠}$ + ث

التكامل بالتجزئة

يتم استخدام التكامل بالتجزئة عند حساب تكامل حاصل ضرب دالتين أو تجزئة الدالة إلى حاصل ضرب دالتين كما في الحالات الآتية:

① ∫ حدودية × نسبة مثلثية مثل ∫ س جا س ءس

② ∫ حدودية × أسية مثل ∫ (س − ١) هـ^{س} ءس

③ ∫ حدودية × لو س مثل ∫ س^{2} لو س ءس

④ ∫ حدودية × معكوس مثل ∫ س ظا$^{-1}$ (س + ١) ءس

⑤ ∫ قا^{3} س ءس = ∫ قا س . قا^{2} س ءس نجزئها ثم التجزئة

وكذلك ∫ قتا^{3} س ءس

وهذا التكامل يسمى تكامل رجعي (دوري)

⑥ ∫ أسية × نسبة مثلثية مثل ∫ هـ^{س} جا س ءس

وهذا التكامل يسمى تكامل دوري

وهناك حالات أخرى عكسية استخدام طريقة التكامل بالتجزئة أو التكامل بطريقة التعويض أو غير ذلك مثل

① ∫ جتا (لو س) ءس ، ∫ جا (لو س) ءس

② ∫ جا^{3} س ءس ، ∫ جتا^{3} س ءس

③ ∫ حدودية × جذرية مثل ∫ س^{3} $\sqrt{س^{2}+1}$ ءس

④ ∫ حدودية × كسرية مثل ∫ س [illegible]

قانون التجزئة

∫ ف ءق = ف ق − ∫ ق ءف

ف : جزء التفاضل (نضع) ءق : جزء التكامل

ف ← بالاشتقاق ← ءف

ءق ← تكامل ← ق

ف = ءق

ءف = ق

أمثلة:

① ∫ س جا س ءس

ف = س ءق = جا س ءس

ءف = ءس ق = − جتا س

= − س جتا س − ∫ − جتا س ءس

= − س جتا س + جا س + ث

ملاحظة نضع

ف = حدودية ، ءق = البسيطة

ف = حدودية ، ءق = أسية

ف = لو س ، ءق = الحدودية

---

② ∫ $\frac{س}{ظتا^{2} س}$ ءس = ...

الحل ∫ س ظا^{2} س ءس

ف = س ءق = ظا^{2} س ءس

ءف = ءس ق = ظا س − س

= س (ظا س − س) − ∫ (ظا س − س) ءس

= س (ظا س − س) − (− لو|جتا س| − $\frac{س^{2}}{2}$) + ث

③ ∫ $\frac{س}{جتا^{2} س}$ ءس = ...

الحل ∫ س قا^{2} س ءس (التجزئة)

ف = س ءق = قا^{2} س ءس

ءف = ءس ق = ظا س

= س ظا س − ∫ ظا س ءس

= س ظا س − (− لو|جتا س|) + ث

= س ظا س + لو|جتا س| + ث

---

④ ∫ $\frac{2س+1}{هـ^{-س}}$ ءس = ...

= ∫ (٢س + ١) هـ^{س} ءس (تجزئة)

ف = (٢س + ١) ءق = هـ^{س} ءس

ءف = ٢ ءس ق = هـ^{س}

= (٢س + ١) هـ^{س} − ∫ ٢ هـ^{س} ءس

= (٢س + ١) هـ^{س} − ٢ هـ^{س} + ث

---

⑤ ∫ س^{3} لو س ءس = ...

تجزئة

ف = لو س ءق = س^{3} ءس

ءف = $\frac{1}{س}$ ءس ق = $\frac{س^{4}}{4}$

= $\frac{س^{4}}{4}$ لو س − ∫ $\frac{س^{4}}{4}$ × $\frac{1}{س}$ ءس

= $\frac{1}{4}$ س^{4} لو س − $\frac{1}{4}$ ∫ س^{3} ءس

= $\frac{1}{4}$ س^{4} لو س − $\frac{1}{4}$ × $\frac{س^{4}}{4}$ + ث

= $\frac{1}{4}$ س^{4} لو س − $\frac{1}{16}$ س^{4} + ث

⑥ ∫ جا^{3} س ءس = ...

الحل

= ∫ جا^{2} س . جا س ءس

ف = جا^{2} س ءق = جا س ءس

ءف = ٢ جا س جتا س ءس ق = − جتا س

= − جتا س جا^{2} س − ∫ − ٢ جا س جتا^{2} س ءس

= − جتا س جا^{2} س + ∫ ٢ جا س جتا^{2} س ءس

(القاعدة) [illegible]

= − جتا س جا^{2} س − ٢ × $\frac{جتا^{3} س}{3}$ + ث

= − جتا س جا^{2} س − $\frac{2}{3}$ جتا^{3} س + ث

---

⑦ ∫ س^{2} جتا س ءس

الحل تجزئة

ف = س^{2} ءق = جتا س ءس

ءف = ٢س ءس ق = جا س

ل = س^{2} جا س − ∫ ٢ س جا س ءس

تجزئة مرة أخرى

$\boxed{ل = س^{2} جا س − ل_{1}}$ ← ١ حل

ل$_{1}$ = ∫ ٢ س جا س ءس تجزئة

ف = ٢ س ءق = جا س ءس

ءف = ٢ ءس ق = − جتا س

ل$_{1}$ = − ٢ س جتا س − ∫ − ٢ جتا س ءس

ل$_{1}$ = − ٢ س جتا س + ٢ جا س

∴ ل = س^{2} جا س − [− ٢ س جتا س + ٢ جا س]

= س^{2} جا س + ٢ س جتا س − ٢ جا س + ث

⑨ $\int \text{س}(\text{س}+١)^{٥}\,\text{ءس} = ...$

الحل تجزئة

$\text{ف} = \text{س} \qquad \text{ءق} = (\text{س}+١)^{٥}\,\text{ءس}$

$\text{ءف} = \text{ءس} \qquad \text{ق} = \frac{(\text{س}+١)^{٦}}{٦}$

$\text{ل} = \text{س}\frac{(\text{س}+١)^{٦}}{٦} - \int \frac{(\text{س}+١)^{٦}}{٦}\,\text{ءس}$

$\text{ل} = \frac{\text{س}}{٦}(\text{س}+١)^{٦} - \frac{١}{٦}\frac{(\text{س}+١)^{٧}}{٧} + \text{ث}$

$\text{ل} = \frac{\text{س}}{٦}(\text{س}+١)^{٦} - \frac{١}{٤٢}(\text{س}+١)^{٧} + \text{ث}$

ملاحظة: هناك تمارين يكون حلها بالتكامل بالتعويض ثم يكمل حلها بالتكامل بالتجزئة:

أي: تعويض + تجزئة

① $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = ...$

الحل بالتعويض لان الاس غير موجود

$\text{ع} = \sqrt{\text{س}}$ (1)

$\text{ع}^{٢} = \text{س}$

$٢\text{ع}\,\text{ءع} = \text{ءس}$ (2).

$\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{ع}} \times ٢\text{ع}\,\text{ءع}$

$= \int ٢\text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع} \leftarrow$ تجزئة

$\text{ف} = ٢\text{ع} \qquad \text{ءق} = \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع}$

$\text{ءف} = ٢\,\text{ءع} \qquad \text{ق} = \text{هـ}^{\text{ع}}$

$= ٢\text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - \int ٢\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع}$

$= ٢\text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - ٢\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^{٧}\,\text{جتا}\,\text{س}^{٤}\,\text{ءس} = ...$

الحل بالتعويض لانه الزاوية غير موجودة

$\text{ع} = \text{س}^{٤}$ (1)

$\text{ءع} = ٤\text{س}^{٣}\,\text{ءس}$ (2)

$\frac{\text{ءع}}{٤\text{س}^{٣}} = \text{ءس}$ (3)

$= \int \text{س}^{٧}\,\text{جتا}\,\text{ع} \times \frac{\text{ءع}}{٤\cancel{\text{س}^{٣}}}$ (4)

$= \frac{١}{٤}\int \text{س}^{٤}\,\text{جتا}\,\text{ع}\,\text{ءع}$

$= \int \frac{١}{٤}\text{ع}\,\text{جتا}\,\text{ع}\,\text{ءع}$ تجزئة

$\text{ف} = \frac{١}{٤}\text{ع} \qquad \text{ءق} = \text{جتا}\,\text{ع}\,\text{ءع}$

$\text{ءف} = \frac{١}{٤}\text{ءع} \qquad \text{ق} = \text{جا}\,\text{ع}$

$\frac{١}{٤}\text{ع}\,\text{جا}\,\text{ع} - \int \frac{١}{٤}\text{جا}\,\text{ع}\,\text{ءع}$

$\frac{١}{٤}\text{ع}\,\text{جا}\,\text{ع} + \frac{١}{٤}\text{جتا}\,\text{ع} + \text{ث}$

$\frac{١}{٤}\text{س}^{٤}\,\text{جا}\,\text{س}^{٤} + \frac{١}{٤}\text{جتا}\,\text{س}^{٤} + \text{ث}$

نشاط: احسب التكاملات الآتية

1) $\int \text{س}^{٣}\,\text{قتا}^{٢}\,\text{س}^{٤}\,\text{ءس}$ 7) $\int \text{قا}^{٣}\,\text{س}\,\text{ءس}$

2) $\int \text{جا}\,٢\text{س}\,\text{لو}(\text{جا}\,\text{س})\,\text{ءس}$

3) $\int \frac{\text{لو}\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$ 8) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}\,\text{س}\,\text{ءس}$

4) $\int \text{س}^{٢}\,\text{لو}\,٣\text{س}\,\text{ءس}$

5) $\int ٢\text{س}\,\text{قتا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ءس}$

6) $\int ٣\text{س}^{٥}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\,\text{ءس}$

طريقة الشلال

هي إحدى طرق التجزئة

مثال

∫ س جاس ء س = ...

التفاضل	التكامل
س ⊕	جاس
١ ⊖	− جتاس
٠	− جاس

الحل − س جتاس + جاس + ث

مثال

∫ $س^{٢}$ جتاس ء س = ...

التفاضل	التكامل
$س^{٢}$ ⊕	جتاس
٢ س ⊖	جاس
٢ ⊕	− جتاس
٠	− جاس

الحل $س^{٢}$ جاس + ٢ س جتاس − ٢ جاس + ث

ملاحظة: تفاضل الحدودية حتى الصفر

أحتة 2021

(١) $∫_{٠}^{١}$ س $هـ^{س}$ ء س = ...

[① ، −١ ، صفر ، − هـ]

الحل

س ⊕ → $هـ^{س}$

١ ⊖ → $هـ^{س}$

٠ → $هـ^{س}$

س $هـ^{س}$ − $هـ^{س}$ = د( ) − د( )

(١ $هـ^{١}$ − $هـ^{١}$) − (٠ $هـ^{٠}$ − $هـ^{٠}$)

(هـ − هـ) − (٠ − ١)

٠ + ١ = ١

② عدد مرات التجزئة للتكامل

∫ $س^{ن}$ جاس ء س = ... + ث

[ⓝ ، ن+١ ، ن−١ ، ن+٢]

عدد مرات التجزئة في حالة

حدودية × جاس (حسب قوى س) = ن

حدودية × جتاس (حسب قوى س) = ن

حدودية × أسية (حسب قوى س) = ن

③ إذا كان

د(١) = $\bar{د}$(٥) = ٦

، د(٥) = $\bar{د}$(١) = ٢ فإن

$∫_{١}^{٥}$ س $\bar{د}$(س) ء س = ...

[٣٠ ، ٣١ ، ㉜ ، ٣٣]

الحل بالتجزئة

ق = س   ، ء ع = $\bar{د}$(س)

ء ق = ء س   ع = $\bar{د}$(س)

س $\bar{د}$(س) − ∫ $\bar{د}$(س) ء س

(الرمز رمز [illegible])

س $\bar{د}$(س) − د(س)

[٥ $\bar{د}$(٥) − د(٥)] − [١ $\bar{د}$(١) − د(١)]

[٥ × ٦ − ٢] − [٢ − ٦]

[٣٠ − ٢] − [−٤]

٢٨ + ٤ = ٣٢

نشاط

① إذا كان $٢ \le \int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ءس} \le ٦$ فإن

مجموع الحدين الأعلى والأدنى يساوي ......

[١ ، ٢ ، [✓ ٣] ، ٤]

② معادلة المنحنى الذي ميل المماس له يساوي $\frac{\text{٢س+٥}}{\text{٢جاص}}$ ويمر بنقطة الأصل

هي ......

الحل $\text{س}^٢\text{+٥س+٢جتاص=٢}$

③ $\int \frac{٣^{\text{١+ظاس}}}{\text{١-جا}^٢\text{س}}\,\text{ءس} = ...$

الحل $٣^{\text{١+ظاس}} \times \frac{١}{\text{لو٣}} + \text{ث}$

④ $\int \frac{\text{لوس}}{\text{س لو|س|}}\,\text{ءس} = ...$

ى $\frac{١}{٢}$ لو|س| + ث

⑤ الدالة الأصلية للدالة ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$

والتي تمر بالنقطة (٠ ، ٢)

هي $\text{هـ}^{\text{س}}$ (✗)

⑥ $\int \text{س هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{س هـ}^{\text{س}} + ... + \text{ث}$

الحل $-\text{هـ}^{\text{س}}$

⑦ الحد الأعلى للتكامل $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{ءس}$

يساوي ...... [١ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، [✓ $\frac{\pi}{٤}$] ، π]

⑧ إذا كان $\int_{\text{م-١}}^{\text{م}^٢\text{-٣}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

فإن م = ... [١ ، [✓ ٢] ، ٣ ، ٤]

هناك تمارين يمكن حلها بالقسمة المطولة

① $\int \frac{\text{٢س+١}}{\text{س-١}}\,\text{ءس} = ...$

الحل بالقسمة المطولة

٢

س-١) ٢س+١

∓٢س ±٢

٣

الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

$\int \left(٢ + \frac{٣}{\text{س-١}}\right)\text{ءس}$

$= \int ٢\,\text{ءس} + ٣\int \frac{١}{\text{س-١}}\,\text{ءس}$

$\text{٢س} + ٣\,\text{لو|س-١|} + \text{ث}$

---

② $\int \frac{\text{س}^٢}{\text{س+٣}}\,\text{ءس} = ...$

الحل

س-٣

س+٣) $\text{س}^٢$

$\mp\text{س}^٢ \mp \text{٣س}$

-٣س

∓٣س ∓٩

+٩

$\int \left(\text{س} - ٣ + \frac{٩}{\text{س+٣}}\right)\text{ءس}$

$\int (\text{س-٣})\,\text{ءس} + ٩\int \frac{١}{\text{س+٣}}\,\text{ءس}$

$\frac{\text{س}^٢}{٢} - \text{٣س} + ٩\,\text{لو|س+٣|} + \text{ث}$

حة صوبة بـ CamScanner