الصف الثالث الثانوي

سلسلة المختار

في الرياضيات

التفاضل

ا/مختار الدبعي

770 39 34 33

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمهيد: اللوغاريتم (لو)

- $\log_{ب} ص$ ، $س، ص > 0$ ، $ب \neq 1$
هو عدد مرات $س$ التي تضرب في $ص$

- $\log_2 8 = 3$ لأن $8 = 2 \times 2 \times 2$
- $\log_4 64 = 3$ لأن $64 = 4 \times 4 \times 4$
- $\log_5 125 = 3$ لأن $125 = 5 \times 5 \times 5$
- $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$ لأن $(25)^{\frac{3}{2}} = 125$
- $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ لأن $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$
- $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ لأن $9^{\frac{1}{2}} = 3$
- $\log_2 8 = \log_4 64$
- $\log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$
- $\log_5 16 = \log_{25} 16^2 = 2 \log_5 4$
- $\log_7 7 = 1$ ، $\log_p p = 1$
- $\log_3 27 = 3$ لأن $27 = 3 \times 3 \times 3$
- $\log_{ب} 1 = 0$

خواص اللوغاريتم

1 خاصية (الضرب)
يتولد اللوغاريتم على الضرب جمع
$\log_{ب}(س \times ص) = \log_{ب} س + \log_{ب} ص$
حيث لوغاريتم = حيثين لوغاريتم ما بينهما
حيثين لوغاريتم = حيث لوغاريتم ضرب

$\log_2(7 \times 2) = \log_2 7 + \log_2 7$
$\log_3 + \log_3 5 = \log_3(5 \times 3)$
$\log_7 + \log_3 = \log_{10}$ (×)
$\log_7 + \log_3 = \log_{21}$ (ص)
$\log_{ب}[س(س+ص)] = \log_{ب} س + \log_{ب}(س+ص)$

2 خاصية القسمة
يتوزع اللوغاريتم على القسمة طرح
$\log_{ب} \frac{س}{ص} = \log_{ب} س - \log_{ب} ص$
حيث قسمة حيثين طرح حيث قسمة
حيثين طرح حيث قسمة

$\log_9 - \log_3 = \log_{\frac{9}{3}}$
$\log_6 - \log_2 = \log_4$ (×)
$\log_6 - \log_2 = \log_3$ (ص)
$\log_{\frac{س}{س+1}} = \log_{س} - \log_{س+1}$
$\log_{\frac{1}{2}} = \log_1 - \log_2 = -\log_2$
$\log_{\frac{1}{3}} = \log_1 - \log_3 = -\log_3$ (ص)

3 خاصية (الأكل) جاية بعده واو يأكل نفسه
$\log_{ب} ب = س$ ، $\log_{ب} 1 = 0$
$\log_{م} م^{س} = س$ (يأكل نفسه)
$\log_{م} س$ (ماني أكل)
$\log_{م} س$ (ماني أكل) $\log_{م} 1$ ، $\log_{م} م$ ، $\log_{م} م^{2}$

4 خاصية القفز (النط)
- $\log_{م} س^{ن} = ن \log_{م} س$
- $\log_{س} س^{3} = 3 \log_{س} س$
- $5 \log_{س} س = \log_{س} س^{5}$
- $(\log_{م} س)$ ماني قفز
- $2 \log_{س} س$ ، $\log_{س} س^{2}$
$هـ = هـ = س$
(قفز وأكل)

5 خاصية (الحفظ)
$\log_{س^{ن}} س = \frac{1}{ن} \log_{س} س$
$\log_{\frac{1}{س}} س = \frac{1}{2} \log_{س} س$
$\log_{(س)} س = \frac{1}{2} \log_{س} س$

6 خاصية التوزيع الى قسمة
$\log_{م} س = \log_{م} ص$ ، $\log_{م} ص = \frac{\log_{م} س}{\log_{م} ص}$
$\log_2 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 2} = \frac{3 \log_2 2}{\log_2 2} = 3$

7 خاصية التبديل (تبديل)
$\log_{ص} س = ص$ لو ساوى قفز
$\log_{س} ص = \log_{ص} س$ ← التبديل
$\log_{5} ص = ص$

8 خاصية الفراشة
الجناح المتشابه يحذف
والجناح المختلف يبقى
(وسيبقى نبقى قلبي يمنيا)

$\log_{ب} س \times \log_{س} ص = \log_{ب} ص$

$\log_{س} 16 \times \log_{2} س = \log_{2} 16 = 4$

$\log_{12} 256 \times \log_{س} 12 = \log_{س} 256$
$س = 2$
$2^{8} = 16 \times 16 = 256$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المشتقة

تعريف المشتقة: هي ميل المماس

رموز المشتقة:

1) $ص'$ ، $د'(س)$

2) $\frac{ء ص}{ء س}$ ، $\frac{ء (د(س))}{ء س}$

3) ميل المماس $(م)$

قواعد الاشتقاق

1) مشتقة الدالة الثابتة

(الثانية من س) = صفر

أمثلة:

1) $د(س) = 9 \Leftarrow د'(س) =$ صفر

2) $د(س) = \frac{5}{7} \Leftarrow د'(س) =$ صفر

3) $د(س) = \sqrt{7} \Leftarrow د'(س) =$ صفر

4) $د(س) = \log 7 \Leftarrow د'(س) =$ صفر

5) $د(س) = جا 30 \Leftarrow د'(س) =$ صفر

6) $د(س) = ط \Leftarrow د'(س) =$ صفر

7) $د(س) = [قا(جتا ط)]^{هـ} \Leftarrow د'(س) =$ صفر

2) قاعدة (2): مشتقة الدالة الخطية

(المعامل س) = معامل س

أمثلة:

1) $د(س) = 8س \Leftarrow د'(س) = 8$

2) $د(س) = ط س \Leftarrow د'(س) = ط$

3) $د(س) = \frac{3}{7} س \Leftarrow د'(س) = \frac{3}{7}$

قاعدة (3): مشتقة الدالة العددية

مشتقة القوى $ص = س^{ن}$ حيث ن ← ثابت، س ← متغير

$د(س) = س^{ن} \Leftarrow د'(س) = ن س^{ن-1}$

يتزل أس س وينقص منه واحد

(نزله وأوصله)

أمثلة:

1) $ص = س^{6} \Leftarrow ص' = 6س^{5}$

2) $ص = س^{-4} \Leftarrow ص' = -4 س^{-5}$

3) $ص = س^{5} \Leftarrow ص' = 5 س^{4}$

تعميم:

$ص = ك س^{ن} \Leftarrow ص' = ك ن س^{ن-1}$

* $ص = 5 س^{3} \Leftarrow ص' = 15 س^{2}$

* $ص = 2 س^{-7} \Leftarrow ص' = -14 س^{-8}$

قاعدة (4): مشتقة الإقواس

مشتقة × مقواس = كما هي × كما هي

أمثلة:

1) $ص = (ك س + د)^{ن}$

$ص' = ن (ك س + د)^{ن-1} \times (ك)$

$ص' = ك ن (ك س + د)^{ن-1}$

المشتقة لعوس بقوسين !!

قاعدة الصلع يصاقبين

العثرة التي تستقطك أحياناً تنعشك أزماناً

5) $ص = (4س + 2)^{9}$

$ص' = 9 (4س + 2)^{8} (4)$

$ص' = 36 (4س + 2)^{8}$

3) $ص = 2 (3س^{2} - 5س + 1)^{7}$

$ص' = 14 (3س^{2} - 5س + 1)^{6} (6س - 5)$

4) $ص = \frac{3}{(6س + 2)^{5}}$

تحسين

$= 3 (6س + 2)^{-5}$

$ص' = -15 (6س + 2)^{-6} (6)$

$ص' = -90 (6س + 2)^{-6}$

قاعدة (5): مشتقة الجذور (أو س)

مشتقة الجذر: إما أو

قاعدة — عدل المقامات

أولاً: القاعدة

$ص = \sqrt[ن]{د(س)}$

$ص' = \frac{د'(س)}{ن \sqrt[ن]{[د(س)]^{ن-1}}}$

ملحظات:

1) مشتقة ما داخل الجذر (بسطاً)

2) نسخ ولصق للجذر (مقاماً)

3) ولد الجذر ينزل وينقص

أمثلة:

1) $ص = \sqrt{س} \Leftarrow ص' = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

2) $ص = \sqrt[5]{س^{2}}$

$ص' = \frac{2}{5 \sqrt[5]{(س^{2})^{4}}}$

3) $ص = \sqrt{7س}$

$ص' = \frac{1}{2\sqrt{7س}}$

حالة خاصة بالجذر التربيعي

مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة ما داخل الجذر / ضعف الجذر

أمثلة:

1) $ص = \sqrt{6س + 1} \Leftarrow ص' = \frac{6}{2\sqrt{6س + 1}}$

$\Leftarrow ص' = \frac{3}{\sqrt{6س + 1}}$ (مشتقة ما داخل الجذر / ضعف الجذر)

2) $ص = س^{3} + 4س^{2} + 2$

$ص' = \frac{5س^{4} + 12س^{2}}{2\sqrt{س^{5} + 4س^{3} + 2}}$

طريقة (1) عدل المقامات

نحول الجذر الى قوى

ثم نشتق بالقاعدة السابقة

أمثلة:

1) $ص = \sqrt[3]{س^{2}}$ (المتعدلي)

$ص = س^{\frac{2}{3}} \Leftarrow ص' = \frac{1}{3} س^{-\frac{1}{3}}$

أحسن صنيعاً تملك تجد عملك يسير نحو غايتك

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦) $ص = (٢س+١)^{\frac{٧}{٢}}$ (بدون لوغاريتم)

$ص = (٢س+١)^{\frac{١}{٢}}$

$ص' = \frac{١}{٢}(٢س+١)^{-\frac{١}{٢}}$

$ص'' = \frac{١}{٢}(٢س+١)^{-\frac{٣}{٢}}$

٣) $ص = (٢س+١)^{\frac{٧}{٢}}$

المقلوب $ص = (٢س+١)^{\frac{٢}{٧}}$

$ص' = \frac{٢}{٧}(٢)(٢س+١)^{-\frac{٥}{٧}}$ (×٧)

$ص' = ٧(٢)(٢س+١)^{\frac{٢}{٧}}$

قاعدة (٦): مشتقة الدالة الأسية

س ← متغير

أ ← ثابت

★ $ص = أ^{س}$ ⇐ $ص' = أ^{س} \times$ لو أ

★ $ص = أ^{ع}$ ⇐ $ص' = أ^{ع} \times ع'$

ص' = الدالة نفسها × مشتقة الأس × لو(الأساس)

أمثلة:

١) $ص = ٩^{س}$ ⇐ $ص' = ٩^{س} \times$ لو ٩

٢) $ص = ٥^{٣س+٢}$ ⇐ $ص' = ٥^{٣س+٢} \times ٣ \times$ لو ٥

٣) $ص = ب^{س^{٣}}$ ⇐ $ص' = ب^{س^{٣}} \times ٣س^{٢} \times$ لو ب

٤) $ص = ٧$ ⇐ $ص' = ٠$

٥) $ص = ص$ ⇐ $ص' = ١$

قاعدة (٧): مشتقة لو الدالة اللوغاريتمية

★ $ص = لو_{أ} س$

$ص' = \frac{\text{مشتقة ما بعد لو}}{\text{ما بعد لو}} = \frac{\text{مشتقة المحتوى}}{\text{المحتوى}}$

$ص' = \frac{١}{\text{المحتوى}}$ ← مشتقة المحتوى

س ← المحتوى

أمثلة: ★ $ص = لو_{م} \text{المحتوى}$ ⇐ $ص' = \frac{\text{مشتقة المحتوى}}{\text{المحتوى} \times لو م}$

١) $ص = لو(٣س)$

$ص' = \frac{٣}{٣س}$ ← اشتقاق بطة

$ص' = \frac{١}{س}$ ← اختصار مقاماً

ملاحظة وقاعدة: $(لو س)' = (لو_{م} س)'$

٢) $ص = لو(٥س^{٢} - ٦س + ١)$

$ص' = \frac{١٠س - ٦}{٥س^{٢} - ٦س + ١}$

٣) $ص = لو_{٣} س$ اوجد $ص'$

الحل $ص = \frac{لو س}{لو ٣}$

$ص' = \frac{١}{لو ٣} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س(لو ٣)}$

٤) $ص = لو_{هـ} \frac{س+٢}{س}$ اوجد $ص'$

الحل $ص = س + ٢$

$ص' = ١$

٥) $ص = ٠$ ⇐ $ص' =$ صفر (لماذا؟)

٥) أ ≠ ١:

إذا كانت $ص = لو_{أ} ع$

فإن $ص' = \frac{ع'}{ع \times لو أ}$ (أ)

التوضيح:-

$ص = \frac{١}{لو أ} لو ع$ (المبدأ)

$ص' = \frac{١}{لو أ} \times \frac{ع'}{ع} = \frac{ع'}{ع لو أ}$

٦) $ص = لو_{٥} س$ اوجد $ص'$

الحل $ص = \frac{لو س}{لو ٥}$

$ص = لو س$

$ص' = \frac{١}{لو ٥} لو س$

$ص' = \frac{\text{مشتقة المحتوى}}{\text{المحتوى} \times لو \text{الأساس}}$

$ص' = \frac{١}{س لو ٥}$

$ص' = \frac{١}{لو ٥} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س(لو ٥)}$

٧) $ص = لو(٣س^{٢} هـ^{س})$ اوجد $ص'$

الحل $ص = لو ٣ + لو س^{٢} + لو هـ^{س}$ (خاصية القوة)

$ص = لو ٣ + ٢ لو س + س$

$ص' = ٢ \times \frac{١}{س} + ١$

$ص' = \frac{٢}{س} + ١$ ⇐ $ص' = \frac{٢ + س}{س}$

٨) $ص = هـ^{لو س}$ أوجد $ص'$

الحل $لو ص = لو هـ^{لو س}$

$لو ص = لو س \times لو هـ$

$لو ص = لو س$

$ص = س$ ⇐ $ص' = ١$

⇐ $ص' = -١ \times ٢^{-٢}$ ⇐ $ص' = \frac{-١}{٤}$

٩) $ص = ٥ + ٣ لو س$ أوجد $ص'$

الحل: جمع الأسس ضربها

$ص = ٥ \times ٣^{لو س}$

$ص = ٥ \times س^{لو ٣}$

$ص = ٥ \times س^{لو ٣}$

$ص = ٣ \times س^{لو ٣}$

$ص' = ٣ \times ٣^{لو س}$

$ص' = ٣ \times ٣ \times س^{لو ٣}$

$ص' = ٣ \times ٣ \times س^{لو ٣}$

قاعدة (٨): مشتقة النسب المثلثية

١) $ص = جا س$ ⇐ $ص' = جتا س$

٢) $ص = جتا س$ ⇐ $ص' = -جا س$

★ $ص = جا ٣٠$

$ص' =$ صفر (لماذا؟)

قوانين مهمة:-

١) $٢ جا س جتا س = جا(٢س)$ (الضعف) قانون الضعف (إكسيرس)

٢) $جا س جتا ص \pm جتا س جا ص = جا(س \pm ص)$

$جتا س جتا ص \mp جا س جا ص = جتا(س \pm ص)$

قانون أربعة تشلو اجمل

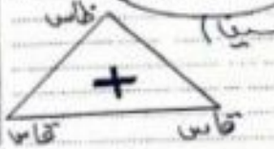
٣) $جتا^{٢} س + جا^{٢} س = ١$ (الذهبي)

٤) $قا^{٢} س - ظا^{٢} س = ١$ (الفضي)

٥) $متا^{٢} س - ظتا^{٢} س = ١$ (البرونزي)

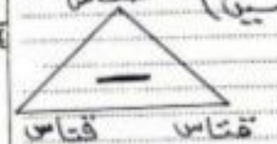
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٣) مشتقة (ظاس ، قاس)
(الأس برأسين)



ص = ظاس ⇐ ص' = قاس
ص = قاس ⇐ ص' = قاس ظاس

(٤) مشتقة (ظتاس ، قتاس)
(الأس برأسين)



ص = ظتاس ⇐ ص' = − قتاس
ص = قتاس ⇐ ص' = − قتاس ظتاس

*** للظا والظتا مشتقات عديدة

ملاحظة: إذا ص = ظاس

ص' = قاس ظا(ظاس) = $\frac{1}{\text{جتاس}}$

(٥) ص = ظتاس

ص' = − قتا²س = − (ظتاس + ١) = $\frac{-١}{\text{جاس}}$

قاعدة ٩ مشتقة المنسب بشكل عام

ص = جا^م س

ص' = (م) (جاس) (جتاس)

الأول يشارك في المشتقة

(٦) ص = س قاس

ص' = ٢س قاس + س² × قاس ظاس × ١

ص' = ٢س قاس + س² قاس ظاس

(٧) ص = جا^ن س جتا^م س (ضربية)

ص' = جتا^ن س × ن جا^(ن−١) س × جتاس
+ جا^ن س × − جا^م س × م جا^(م−١) س

= جتا^(ن+١) س جا^(ن−١) س − جا^(م+١) س جتا^(م−١) س

مشتقة ضرب الثلاث دوال

ص' = مشتقة الأولى × الثانية × الثالثة
+ الأولى × مشتقة الثانية × الثالثة
+ الأولى × الثانية × مشتقة الثالثة

مثال: ص = س² لوس جاس

ص' = ٥ س⁴ لوس جاس + س⁵ × $\frac{1}{\text{س}}$ جاس
+ س⁵ لوس × جتاس

ص' = ٥ س⁴ لوس جاس + س⁴ جاس + س⁵ لوس جتاس

قاعدة ١١ مشتقة قسمة دالتين
(الدالة كسرية)

ص' = $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

(٨) ص' = $\frac{\text{حراسة} \times \text{نوم} - \text{نوم} \times \text{حراسة}}{(\text{المقام})^2}$

(٢) ص = $\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$

ص' = $\frac{\text{د'(س) هـ(س)} - \text{د(س) هـ'(س)}}{(\text{هـ(س)})^2}$

مثال ١١: ص = $\frac{٥}{\text{س}}$ ، ص' = ...

ص' = $\frac{\text{صفر} \times \text{س} - ٥ \times ١}{\text{س}^2}$

ص' = $\frac{-٥}{\text{س}^2}$ = − ٥ س^(−٢)

(٩) ص = $\frac{٣\text{س}}{\text{س}^2 + ٥}$ ، ص' = ...

ص' = $\frac{٣(\text{س}^2+٥) - ٣\text{س} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^2+٥)^2}$

البسط بحسن

ص' = $\frac{٣\text{س}^2 + ١٥ - ٦\text{س}^2}{(\text{س}^2+٥)^2}$

ص' = $\frac{١٥ - ٣\text{س}^2}{(\text{س}^2+٥)^2}$

(١٠) ص = $\frac{\text{س}}{\text{لوس}}$

ص' = $\frac{١ \times \text{لوس} - \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لوس})^2}$

ص' = $\frac{\text{لوس} - ١}{(\text{لوس})^2}$

ملاحظة: إذا كانت ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}^{\text{ن}}}$ ← عدد ثابت

ص' = $\frac{-\text{م}}{\text{س}^{\text{ن}+١}}$ ← تغير اشارة البسط
س^(ن+١) ← سريع المقام

مثلاً: ص = $\frac{١}{\text{س}}$ ⇐ ص' = $\frac{-١}{\text{س}^2}$

مثال: ص = $\frac{-٥}{\text{س}^٣}$ ⇐ ص' = $\frac{٩}{\text{س}^٤}$

أ/ مختار النبهي (770393433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[6] إذا كانت ص = (جاس)^س
فإن ص' = ...

ص = لو جاس + س لو جاس ، ص = (لو جاس + س ظتاس)
ص = لو جاس + س لو جاس ، لو جاس + س ظتاس
الحل
ص = (جاس)^س (لوطرفين)
لو ص = لو (جاس)^س (لقوى)
لو ص = س لو (جاس) (خبرية)
ص'/ص = ١ × لو (جاس) + س × جتاس/جاس
ص'/ص = لو جاس + س ظتاس
ص' = ص [لو جاس + س ظتاس]

[7] إذا كانت د(س) = س^س
فإن د'(π/٢) = لو π/٢

(X)
الحل
ص = س^س
لو ص = س لو س
لو ص = جتاس لوس (نشتق)
ص'/ص = -جاس × لوس + جتاس × ١/س
ص' = ص [-جاس × لوس + جتاس/س]
د'(س) = س^جتاس [-جاس × لوس + جتاس/س]

د'(π/٢) = (π/٢)^جتا π/٢ [جا π/٢ × لو π/٢ + جتا π/٢ / π/٢]
= (π/٢) [-١ × لو π/٢ + ٠/π/٢]
= ١ [- لو π/٢ + ٠]
= - لو π/٢
ملاحظة: جتا π/٢ = ٠
جا π/٢ = ١
عدد ± ٠ = ٠

[8] ص = (س^٢ + ١)^٣س اوجد ص'
الحل
لو ص = لو (س^٢ + ١)^٣س
لو ص = ٣س × لو (س^٢ + ١)
ص'/ص = ٣ × لو (س^٢ + ١) + ٣س × ٢س/(س^٢ + ١)
ص' = ص [٣ لو (س^٢ + ١) + ٦س^٢/(س^٢ + ١)]
ص' = (س^٢ + ١)^٣س [٣ لو (س^٢ + ١) + ٦س^٢/(س^٢ + ١)]

[9] تدريب
إذا كانت د(س) = س^جاس
فإن د'(π) = لو π ( )

قاعدة (١٤) ص = س^ن س = متغير ، ن = متغير
نريد اشتقاقها ثلاث طرق

[1] شائعة: بإضافة لو للطرفين
[2] مبتكرة: بإضافة لو لطرف واحد
[3] حديثة: المشتقة كمية × المشتقة كأسية

أولاً: الطريقة الشائعة (لو للطرفين)
مثال: إذا كانت ص = س^س اوجد ص'/ص
الحل
لو ص = لو س^س بإضافة لو للطرفين
لو ص = س لو س (خاصية اللفت)
ص'/ص = ١ × لو س + س × ١/س
ص'/ص = لو س + ١
ص' = ص [لو س + ١]
ص' = س^س [لو س + ١]

[2] ص = (جاس)^س ، ص'/ص = ...
لو ص = لو (جاس)^س
لو ص = س لو (جاس) (ضرب والتي)
ص'/ص = ١ × لو (جاس) + س × جتاس/جاس
ص' = ص [لو (جاس) + س ظتاس]
ص' = (جاس)^س [لو جاس + س ظتاس]

[3] ص = (لوس)^س ، ص'/ص = ...
لو ص = لو (لوس)^س
لو ص = س لو (لوس)
لو ص = س لو (لوس)
ص'/ص = ١/س لو (لوس) + س × ١/(س لوس)
ص' = ص [لو (لوس)/س + ١/لوس]
ص' = (لوس)^س [لو (لوس)/س + ١/لوس]

[4] إذا كانت د(س) = (س^٢ + ١)^س اوجد د'(٢)
الحل
لو ص = لو (س^٢ + ١)^س
لو ص = س لو (س^٢ + ١)
ص'/ص = ١ × لو (س^٢ + ١) + س × ٢س/(س^٢ + ١)
ص' = ص [لو (س^٢ + ١) + ٢س^٢/(س^٢ + ١)]
ص' = (س^٢ + ١)^س [لو (س^٢ + ١) + ٢س^٢/(س^٢ + ١)]
د'(٢) = (٥)^٢ [لو ٥ + ٨/٥]

[5] ص = س^ص اوجد ص'/ص
الحل
لو ص = لو س^ص
لو ص = ص لو س
ص'/ص = ص/س + لو س × ص'/ص
ص'/ص - لو س × ص'/ص = ص/س
ص'/ص (١ - لو س) = ص/س
ص'/ص = ص/س (١ - لو س)
ص' = ص^٢/س (١ - لو س)

(٩)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريبات على قواعد الاشتقاق

(1) إذا كانت $ص = هـ^{جاس}$ فإن $\frac{ص}{س} = جتاس$

التوضيح: $ص = هـ^{جاس} \Leftarrow \frac{ص}{س} = هـ^{جاس} \times جتاس$

$\Leftarrow ص = جاس \Leftarrow \frac{ص}{س} = جتاس$

(2) إذا كانت $ص = هـ^{ظاس}$ فإن $\frac{ص}{س} = قاس^2 هـ^{ظاس}$

التوضيح: $ص = هـ^{ظاس} \Leftarrow \frac{ص}{س} = هـ^{ظاس} \times قاس^2$

(3) إذا كانت $ص = هـ^{-ظاس}$ فإن $\frac{ص}{س} = -قاس^2 هـ^{-ظاس}$

التوضيح: $ص = هـ^{-ظاس} \Leftarrow \frac{ص}{س} = هـ^{-ظاس} \times -قاس^2$

(4) إذا كانت $ص = هـ^{جتاس}$ فإن $\frac{ص}{س} = -جاس \, هـ^{جتاس}$

التوضيح: $ص = هـ^{جتاس} \Leftarrow \frac{ص}{س} = هـ^{جتاس} \times -جاس$

(5) إذا كانت $ص = هـ^{-جتاس}$ فإن $\frac{ص}{س} = جاس \, هـ^{-جتاس}$

التوضيح: $ص = هـ^{-جتاس} \Leftarrow \frac{ص}{س} = هـ^{-جتاس} \times جاس$

(6) إذا كانت $ص = لو(ظاس)$ فإن $\frac{ص}{س} = ظاس$ (ك)

التوضيح: $ص = \frac{قاس^2}{ظاس} = ظاس$

(7) إذا كانت $ص = لو(جتاس)$ فإن $\frac{ص}{س} = -ظاس$ (ك)

التوضيح: $ص = \frac{-جاس}{جتاس} = -ظاس$

• أكمل الفراغات الآتية:-

(1) إذا كانت $ص = لو(س^2+3)$ فإن $\frac{ص}{س} = \frac{2س}{س^2+3}$

الحل: $ص = لو(س^2+3)$

$ص = \frac{1}{2} لو(س^2+3)$

$\frac{ص}{س} = \frac{1}{2} \times \frac{2س}{س^2+3} = \frac{س}{س^2+3}$

(2) إذا كانت $ص = هـ^{-3س}$ فإن $\frac{ص}{س} = -3هـ^{-3س}$

الحل: $ص = هـ^{-3س} \Leftarrow \frac{ص}{س} = -3هـ^{-3س}$

(3) إذا كانت $ص = هـ^{جاس}$ فإن $د(ص) = جتاس \, هـ^{جاس}$

الحل: $\frac{ص}{س} = هـ^{جاس} \times جتاس$

$د(ص) = هـ^{0} \times جا0 = 1 \times 1 = 1$

(4) إذا كانت $ص = لو(ظاس)$ فإن $د(ص) = \frac{1}{جتاس قاس}$

التوضيح: $د(ص) = \frac{1}{ظاس} \times قاس^2 = \frac{جتاس}{جاس} \times \frac{1}{جتاس^2} = \frac{1}{جتاس قاس}$

(5) إذا كانت $ص = جاس$ فإن $\frac{ص}{س} = جتاس$ (ك)

التوضيح: $\frac{ص}{س} = جاس \times جتاس \times 1$

$\frac{ص}{س} = جا2س$

((قانون الضعف))

(1) إذا كانت $ص = س^2 - 4هـ^{س}$

فإن $\frac{ص}{س} = ...$

الحل: $\frac{ص}{س} = 2س - 4هـ^{س}$

$\frac{ص}{س} = 2 - 4هـ^{س}$

$0 = 2 - 4هـ^{س}$

$4هـ^{س} = 2 \Leftarrow هـ^{س} = \frac{2}{4}$

$هـ^{س} = \frac{1}{2}$ ، لو (الطرفين)

$لو هـ^{س} = لو\frac{1}{2}$

$س = لو1 - لو2$

$س = -لو2$

ملاحظة: $هـ^{لو س} = س$ لكل $س$

(2) إذا كانت $ص = هـ^{-لو س}$ فإن $\frac{ص}{س} = ...$

الحل: $ص = هـ^{-لو س}$

$ص = هـ^{لو س^{-1}}$

$ص = س^{-1}$

$\frac{ص}{س} = -1س^{-2} = -\frac{1}{س^2}$

(3) إذا كانت $ص = \frac{1+جتا^2 س}{1-جا^2 س}$

فإن $\frac{ص}{س} = ...$

الحل: $ص = \frac{1+جتا^2 س}{جتا^2 س}$

$ص = \frac{1}{جتا^2 س} + \frac{جتا^2 س}{جتا^2 س}$

$ص = قا^2 س + 1$

$\frac{ص}{س} = 2قا^2 س \times قاس ظاس \times 2 = 4قا^2 س ظاس$

$\frac{ص}{س} = 6 قا^2 س ظاس$

(4) إذا كانت $ص = \frac{3}{(1+جتا6س)^2}$

فإن $\frac{ص}{س} = ...$

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{-جا6س \times 6}{3(1+جتا6س)^4}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-2جا6س}{(1+جتا6س)^4}$

• أوجد $\frac{ص}{س}$ للدوال الآتية:

(1) $ص = هـ^{3س} - 2س^3 هـ^{س} + هـ^{3}$

$\frac{ص}{س} = 3هـ^{3س} - 2 \times 3س^2 هـ^{س} + صفر$

$\frac{ص}{س} = 3هـ^{3س} - 6س^2 هـ^{س}$

(2) $ص = جا(ظاس)$

الحل: $\frac{ص}{س} = $ كتلة $\times$ كتلة

$\frac{ص}{س} = جتا(ظاس) \times قاس^2 \times 1$

(3) $ص = \frac{1+جتا^2 س}{1-جا^2 س}$

الحل: $ص = \frac{1+جتا^2 س}{جتا^2 س}$

$ص = \frac{1}{جتا^2 س} + \frac{جتا^2 س}{جتا^2 س}$

$ص = قا^2 س + 1$

$\frac{ص}{س} = 2قا^2 س \times قاس ظاس \times 2$

$\frac{ص}{س} = 4قا^2 س ظاس$

(4) $ص = س^3 ظا^2(لو س)$ مع ذكر التبرير

الحل: $\frac{ص}{س} = 3س^2 ظا^2(لو س) + س^3 \times 2ظا(لو س) قا^2(لو س) \times \frac{1}{س}$

$\frac{ص}{س} = 3س^2 ظا^2(لو س) + 2س^2 ظا(لو س) قا^2(لو س)$

(5) $ص = (5جتا6س + 9)^{\frac{1}{2}}$ الحل بصيغة أخرى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ص = لو جاس ← (القفز)

الحل ص = ٢ لوجاس

ص' = ٢ × جتاس / جاس = ٢ ظتاس

ص = لو(جتاس) / لو٩

الحل ص' = لو(جتاس) / ٩ × جاس / جتاس × لو٩

ص' = − لو(جتاس) / ٩ × ظاس × لو٢

ص' = − ظاس × لوجتاس / ٩ × ٢ لو٢

إذا كانت ق(س) = جاس / (جاس + جتاس)

ق'(س) = جتاس / (جاس + جتاس)٢

فبرهن أن: ق(س) + ق'(س) = صفر

الحل

ق(س) + ق'(س) = جاس / (جاس + جتاس) + جتاس / (جاس + جتاس)٢

= (جاس + جتاس) / (جاس + جتاس)٢

= ١ / (جاس + جتاس)

∴ ق(س) + ق'(س) = صفر

ملاحظة: (ق(س) + ق'(س))' = ق'(س) + ق''(س)

ملاحظة: تكون الدالة د(س) دالة ثابتة إذا كانت د'(س) = صفر

نماذج اختبارات وزارية

[2016] إذا كانت ص = هـ^(س لوس) فبرهن أن ص' = ص(١ + لوس) ... (خاصية)

الحل: ص = هـ^(س لوس)

ص = هـ^س × هـ^لوس

ص = س هـ^س

ص' = ١ × هـ^س + س × هـ^س ∴ هـ^س عامل مشترك

ص' = هـ^س (١ + س)

إذا كانت د(س) = لو(س + ل)

د'(٤) = ١ فإن ل = ...

الحل: ص = لو(س + ل)

ص' = ١ / (س + ل) = ٢س / (س٢ + ل)

د'(٤) = ٤ × ٢ / (١٦ + ل) = ٨ / (١٦ + ل)

٨ / (١٦ + ل) = ١ ⇐ ١٦ + ل = ٨

ل = ٨ − ١٦ = −٨

إذا كانت د(س) = ب ظاس

، د'(π/٤) = ٦ فإن ب = ...

الحل: د'(س) = ب قا٢س

د'(π/٤) = ب قا٢(π/٤) = ب(√٢)٢

= ٢ب

٢ب = ٦ ⇐ ب = ٣

إذا كانت د(س) = بس لوس فإن د'(هـ) = ...

الحل: د'(هـ) = هـ × ١/هـ + ب لوهـ = ١ + ب

١ + ب = ٦ هـ

ب = ٦ هـ − ١

إذا كانت د(س) = قاس فإن د'(π/٤) = ...

الحل: ص = ٢ قاس × قاس ظاس × ١

ص = ٢ قا٢س ظاس

د'(π/٤) = ٢ قا٢(π/٤) ظا(π/٤)

= ٢ × (√٢)٢ × ١ = ٢ × ٢ = ٤

تمرين: أوجد ص'' حيث ص = ٥س٣ + ٣س٢ + س

ص' = ٥ × ٣س٢ لو٥ + ٣ × ٢س هـ^٣س + هـ^س

ص'' = ٥ × ٣ × ٢ لو٥ + ٣ × ٢ هـ^٣س + ٢ هـ^س

تمرين: ضع علامة (√) أو (×)

١) الدالة د(س) = جاس + جتاس دالة ثابتة

التوضيح ص = جاس + جتاس = ١

ص' = صفر ⇐ (ص = ١)

∴ الدالة ثابتة ∴ ص' = صفر

٢) الدالة د(س) = ١٢ جاس + ٦ جتا٢س دالة ثابتة

التوضيح (مشتقة الدالة الثابتة = صفر)

د'(س) = ١٢ × ٢ جاس جتاس − ٦ جا٢س × ٢

= ١٢ جا٢س − ١٢ جا٢س = صفر

∴ الدالة ثابتة

٣) إذا كانت د(س) = هـ^٣س − لو(٣س + ٣)

فإن د'(٠) = ٢

التوضيح: د'(س) = ٣ هـ^٣س − ٣ / (٣س + ٣)

د'(٠) = ٣ هـ^٠ − ٣/٣ = ٣ × ١ − ١ = ٢

[2017] تمرين: إذا كانت د(س) = هـ^جاس + لو(١ − جتاس)

فإن د'(π/٤) = ... {−٢، ٢، ٤، ٦}

الحل: د(س) = هـ^جاس + لوجاس

د'(س) = جتاس هـ^جاس + جتاس / جاس

د'(س) = صفر + ٢ × جتاس / جاس

د'(س) = ٢ ظتاس

د'(π/٤) = ٢ ظتا(π/٤) = ٢ × ١ = ٢

إذا كانت ص = ٩^(١/س) فإن ص' = ...

الحل: ص = ٩^(س^−١)

∴ ص' = ٩^(س^−١) × −١/س٢ × لو٩

إذا كانت د(س) = ٣ س٢ + ل(س)

، وكان د'(١) = −٢

فإن ميل المماس لـ د(س) عند س = ١ هو ..

الحل: د(س) = ٣ س٢ + ل(س)

د'(س) = ٦ س + ل'(س)

د'(١) = ٦ × ١ + ل'(١)

−٢ = ٦ + ل'(١)

ل'(١) = −٢ − ٦ = −٨

إذا كانت ص = س^−س

فإن ص' = ...

التوضيح: ص = −هـ^−س

ص' = −(−هـ^−س) = هـ^−س = ص

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ (ب) أوجد (س): إذا كانت د(س) = (ظاس)³ فإن د'(π/4) = ٨ (ب)

التوضيح:

ص = ٢(١ + ظاس) × قا²س

د'(π/4) = ٢(١ + ظا٤٥) × قا²٤٥

= ٢(١ + ١) × ٢

= ٢ × ٢ × ٢ = ٨

⑤ إذا كان ص = جا²س جتاس - جتا²س جاس

فإن صَ = ...

الحل: قانون رابعة شلوا جمل

جاس جتا س = جتاس جاس = جا(س - س)

∴ ص = جا(٢س - س)

ص = جاس

صَ = جتاس × ٢

صَ = ٢ جتاس

⑥ إذا كانت ص = سَ

فإن صَ = ... (ب)

التوضيح: ص = ٣س

صَ = ٦س

صَ = ٦ = ٣

⑦ إذا كانت د(س) = جا(π/٣)^س فإن د'(١) = ...

الحل: د'(س) = جتا(π/٣)^س × ln(π/٣) × (π/٣)

د'(١) = جتا(π/٣) × ln(π/٣) × π/٣

= ١/٢ × ln(π/٣) × π/٣

= π/٦ ln(π/٣)

⑧ إذا كانت د(س) = هـ^س جتاس

فإن ميل المماس عند النقطة (٠،٠) يساوي ..... (٣،٢،١،٠)

الحل: د'(س) = هـ^س جتاس + هـ^س × -جاس

مشتقة أولى × ثانية + ثانية × مشتقة أولى

د'(٠) = هـ^٠ جتا٠ + هـ^٠ × -جا٠

= ١ × ١ + ١ × صفر = ١

= ١

⑨ (ب) أوجد (س): إذا كانت د(س) = جاس جتا²س

فإن د'(س) = ٢ جتا٤س (ب)

التوضيح: جاس جتاس = ½ جا٢س (متعة)

قانون الضعف (قانون الكريمي)

∴ د(س) = جاس جتا²س

د(س) = ½ جا٢س × ½ جا٢س

د(س) = ¼ جا²٢س

د'(س) = ¼ × جتا٤س × ٤

د'(س) = ٢ جتا٤س

⑩ إذا كانت د(س) = ٢ جتاس - ٥ س + ١

فإن د'(-π) + ٥ د'(٣π/٢) = ...

جتا(-π) + ٥ جتا٣π

جتا١٨٠ + ٥ جتا٢٧٠

-١ + ٥ × ٠

-١ + ٠ = -١

⑪ إذا كانت د(س) = جتاس

فإن د'(-π) + ٥ د'(٣π/٢) = ...

جتا(-π) + ٥ جتا٣π

جتا١٨٠ + ٥ جتا٢٧٠

-١ + ٥ × ٠

-١ + ٠ = -١

⑫ إذا كانت د(س) = ظاس فإن د'(π) + ٦ د'(π/٣) = ...

الحل: د'(س) = قا²س × ٢

د'(س) = ٢ قا²س

د'(س) = ٤ قا³س × قاس ظاس × ٢

د'(س) = ٨ قا³س ظاس

∴ د'(π) + ٦ د'(π/٣)

= ٨ قا³π ظاπ + ٦ قا³π/٣ ظاπ/٣

= ٨ × (-١)³ × صفر + ٦ × ٢² × صفر = صفر

⑬ إذا كانت د(س) = ٢ هـ^س + ٣ قاس

فإن د'(٠) = ٤ (صفر)

الحل: د'(س) = ٢ هـ^س + ٣ قاس ظاس

د'(صفر) = ٢ هـ^٠ + ٣ قا٠ ظا٠

= ٢ × ١ + ٣ × ١ × صفر

= ٢

∴ ٢ = ٤ ⟸ ٢ = ٤ ⟸ ٢ = ٤

⑭ إذا كانت د(س) = جتاس فإن د'(-π) + ٥ د'(٣π/٢) = ...

جتا(-π) + ٥ جتا٣π

جتا١٨٠ + ٥ جتا٢٧٠

-١ + ٥ × ٠

-١ + ٠ = -١

⑮ إذا كانت د(س) = ظاس فإن د'(π) + ٦ د'(π/٣) = ...

الحل: د'(س) = قا²س × ٢

د'(س) = ٢ قا²س

د'(س) = ٤ قا³س × قاس ظاس × ٢

د'(س) = ٨ قا³س ظاس

∴ د'(π) + ٦ د'(π/٣)

= ٨ قا³π ظاπ + ٦ قا³π/٣ ظاπ/٣

= ٨ × (-١)³ × صفر + ٦ × ٢² × صفر = صفر

⑯ إذا كانت د(س) = ½ س^٤ فإن د'(٢) = ...

الحل: د(س) = ½ س^٤ ⟸ د'(س) = ٢ س³

∴ د'(س) = ½ × ٤ × س³ = ٢ س³

د'(س) = ٢ س³

∴ د'(٢) = ٢ × ٢³ = ٢ × ٨ = ١٦

⑰ إذا كانت د(س) = P هـ^س + قاس

ح د'(صفر) = ٤ فإن قيمة P = ...

الحل: د'(س) = P هـ^س + قاس ظاس

د'(صفر) = P هـ^٠ + قا٠ ظا٠

= P × ١ + ١ × ٠ × ٠

= P

∴ P = ٤ ⟸ P = ٤ ⟸ ٢P = ٨

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1) س = 1 ، x :

إذا كانت ص = (1 + ظاس) جتاس

فإن ص' = صفر (س)

ص = (1 + ظاس) جتاس (تفاضل الجذء الأول)

ص = جاس + جتاس

ص = ظاس × جتاس وبالتعويض

ص = 1 شيء × متعاوبها = 1

ص' = صفر

2) س = 1 ، ص = 1

إذا كانت ص = جاس فإن ص' = جتاس (س)

∴ ص = جاس ⇒ ص' = جاس جتاس (تفاضل)

⇒ ص' = جا2س

ص' = جا(2 × π/4) = جا90 = 1

3) س = 1 ، x = 1 ، إذا كانت

ص = لوس فإن ص' = 1/(س لو3) (س)

الحل ص = لوس / لو3 ⇒ ص = 1/لو3 لوس

ص' = 1/لو3 × 1/س = 1/س لو3

4) إذا كانت ص = س^س فإن ص' =

1) (1 − لوس) ص^س 2) (1 + 1/س) ص^س

3) (1 + لوس) ص^س 4) (1 − 1/س) ص^س

الحل لو ص = لو س^س (لو للطرفين)

لو ص = س لوس

ص/ص = لوس + س × 1/س

ص' = ص[لوس + 1]

ص' = (1 + لوس) ص^س

5) إذا كانت ص = هـ^(−3س) فإن ص' (س) =

[3س^2 ، −3س^2 ، −3س^4 ، −3س^4]

الحل ص = س^−3 ⇒ ص' = −3س^−4

6) إذا كانت

ص = (1 + جاس)^2 فإن ص'(π/4) =

[صفر ، 1/2 ، 1 ، 2]

الحل ص' = 2(1 + جاس)(جتاس)

ص' = 2(1 + جا90)(جتا90)

ص'(π/4) = 2(1 + 1)(صفر)

= صفر

7) إذا كانت ص = (س + 5)/(س + 3) فإن ص'(2) =

الحل ص' = (س + 3)(1) − (س + 5)(1) / (س + 3)^2

= 2/(5 + 3)^2 = 2/9

8) إذا كانت ص = س^3 + لوس

فإن ص'(س) = 1/3 س^−2/3 + 1/س (س)

الحل: ص = س^1/3 + لوس ⇒ ص' = 1/3 س^−2/3 + 1/س

9) إذا كانت ص = (جاس + جتاس)^هـ

فإن ص'(س) = هـ^جاس (جاس − جتاس)

(X)

الحل ص = هـ^جاس × هـ^جتاس

ص' = هـ^جاس × جتاس (ضرب دالتين)

ص' = هـ^جاس × جتاس × جاس + هـ^جتاس × −جاس

ص' = هـ^جاس جتاس^2 − هـ^جتاس جاس

ص' = هـ^جاس (جتاس^2 − جاس)

10) إذا كانت ص = ظاس + قاس

فإن ص' = ...

(ص' = قاس ، ص' = قاس ، ص' = قاس)

الحل

ص' = قا^2س + قاس ظاس (مشترك)

ص' = قاس (قاس + ظاس)

ص' = قاس × ص

ص' = ص قاس

11) إذا كانت ص = ظاس ظتاس فإن ص'(π/4) =

....

[1 ، 1/2 ، صفر ، −1]

الحل ص = ظاس ظتاس (شيء × متعاوبها = 1)

∴ ص = 1

⇒ ص' = صفر

12) إذا كانت د(س) = د(س)/س

فإن د'(2) = ؟ (X)

الحل د'(س) = (س د'(س) − د(س)) / س^2

د'(س) = (د'(س) × س − د(س)) / س^2

د'(س) = د(س) − د(س) / س^2 = صفر

13) إذا كانت د(س) = لو(هـ^س ظاس)

فإن د'(π/4) = ...[1/2 ، −1/2 ، −3 ، 3]

الحل ص = لوهـ + لو ظاس

ص = س + لو قاس

ص' = 1 + قا^2س / ظاس

د'(π/4) = 1 + قا^2(π/4) / ظا(π/4)

= 1 + 2/1 = 1 + 2 = 3

14) إذا كانت د(س) = |قاس + 1|

فإن د'(0) = ...[3 ، 2 ، 1 ، صفر]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ه) إذا كانت د(س) = س هـ(س)
و هـ(٢) = ٣ ، هـ(٤) = ١
فإن د(٤) = ...
[-٥ ، ١/٢ ، ٤ ، ٧]

الحل
د(س) = س هـ(س)
د'(س) = هـ(س) + س هـ'(س)
د'(٤) = هـ(٤) + ٤ هـ'(٤)
د'(٤) = ٣ + ٤ × ١/٤
د'(٤) = ٣ + ١ = ٤

١٦) إذا كانت
د(س) = ٥ جا ٣س
و د(س) = P هـ(س)
فإن قيمة P = ... [-٩ ، ٩ ، ٥ ، ٩]

الحل
هـ(س) = ٥ جا ٣س
د'(س) = ٥ × ٣ جتا ٣س
د'(س) = ٥ × ٣ × -٣ جا ٣س
هـ(س) = -٤٥ جا ٣س

-٤٥ جا ٣س = P هـ(س)
-٤٥ جا ٣س = P × ٥ جا ٣س
-٤٥ = P ٥ ⇐ P = -٩

١٧) إذا كانت د(س) = |٥س - ٤|
فإن د'(٢) = ٢ (X)

الحل نعيد تعريف المقياس

د(س) = { ٥س - (٤) ، س ≥ ٤/٥
{ ٥س - (-٤) ، س < ٤/٥

د'(س) = { ٥ ، س > ٤/٥
{ -٥ ، س < ٤/٥

∵ ٢ > ٤/٥ ∴ نأخذ
د'(س) = ٥ منفذا
د'(٢) = ٥ ≠ ٢

١٨) إذا كانت د(س) = P س^ن
د'(٣) = ٤٠ فإن P = ... (٢)

الحل
د'(س) = ن P س^(ن-١)
د''(س) = ن(ن-١) P س^(ن-٢) بالمقارنة
ن(ن-١) P س^(ن-٢) = ٤٠ س^٣
٢ - ن = ٣ ⇐ ن = -١ ، المعامل = المعامل
ن(ن-١) P = ٤٠
-١(-١-١) P = ٤٠
٢ P = ٤٠
P = ٢٠ ⇐ P = ٢

∴ ن + P = -١ + ٢٠ = ١٩

١٩) إذا كانت د(س) = هـ^(٢س)
و د'(٠) = ٢ فإن ل = ... (٤)

الحل
∵ د(س) = هـ^(٢س)
فإن د'(س) = هـ^(٢س) × ل
د'(٠) = هـ^(٢×٠) × ل
ف × ل = ٢
١ × ل = ٢ ⇐ ل = ٤

٢٠) إذا كانت د(س) = س جتا(لوس)
فإن د'(١) = ١ (٤)

(ضرب والتبديل)
الحل
د'(س) = جتا(لوس) + س × -جا(لوس) × ١/س
د'(س) = جتا(لوس) - جا(لوس)
د'(١) = جتا(لو١) - جا(لو١)
د'(١) = جتا٠ - جا٠
د'(١) = ١ - ٠ = ١

٢١) إذا كانت د(س) = جا(ظاس)
فإن د'(π) = ... [صفر ، ١ ، -١ ، ٥]

الحل
د'(س) = جتا(ظاس) × قا^٢س
د'(π) = جتا(ظاπ) × قا^٢π
د'(π) = جتا٠ × (١)^٢
د'(π) = ١ × ١ = ١

تشابه :
١) إذا كان س ~ ص : إذا كانت
ص = د(س + ت) فإن
ص' = د'(س + ت) (X)

٢) إذا كانت ص = ظتاس
فإن ص' = ٣ ظتاس (X)

٣) إذا كانت د(س) = ٢ لو ظاس
فإن د'(س) = ٢ قاس قتاس (X)

٤) إذا كانت د(س) = جتا٤س
فإن د'(π/٤) = -١٦ (X)

٥) إذا كانت د(س) = ٣ جاس + س
فإن د'(π/٢) = ٥ (X)

٦) إذا كانت ص = (س)^(جاس)
فإن ص' = ... (X)

٧) إذا كانت د(س) = P ظاس
و د'(٠) = ٢ فإن P = ٢ (X)

٨) إذا كانت د(س) = (٢ - جاس)^٢
فإن د'(٠) = -٤ (X)

٩) إذا كانت د(س) = جتاس فإن
د'(π/٣) = ... [-√٣/٢ ، -١/٢ ، ١/٢ ، √٣/٢]

١٠) إذا كانت ص = هـ^(ظاس)
فإن ص' = قاس هـ^(ظاس) (X)

١١) إذا كانت ص = ٢ س^٣
أوجد ص'

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدالة الضمنية عكس الدالة الصريحة

مع أمثلة الدالة الصريحة

ص = س³ + ٤

ص = س / (٥ + س)

أي ص = د(س)

ص = ... ب دلالة س

أمثلة على الدالة الضمنية

ص³ = س + ١

ص = ٩ س + ص²

(س + ص) = ص² − جتا س

عند إشتقاق الدالة الضمنية توجد ثلاث طرق للإشتقاق هما:

طريقة (١) : تحويل الدالة الى دالة صريحة

مثال: ص² = س + ٤ اوجد dص/dس

الحل: ص = (س + ٤)^½

ص = ½ (س + ٤)^(−½) × ١

مثال ٢: ص³ + س² = ٢ اوجد dص/dس

الحل: ص³ = ٢ − س²

ص = (٢ − س²)^⅓

ص = ⅓ (٢ − س²)^(−⅔) × (−٢س)

ص = −٢س / ٣(٢ − س²)^⅔

طريقة (٢) إستخدام قانون الاشتقاق الضمني

وصيغة القانون بعد جعل المعادلة صفرية كالآتي:

ص = − [المشتقة على اعتبار ص ثابت] / [المشتقة على اعتبار س ثابت]

مثال ١ اذا كانت

ص² − س² = ٤ فإن ص = ...

[ص/س ، −س/ص ، ص/س]

الحل: ص² − س² − ٤ = ٠

ص = − [٠ − ٢س − ٠] / [٢ص − ٠ − ٠]

ص = − [−٢س] / ٢ص = س/ص

اذا كانت س = جتا ص فإن ص = ...

الحل: س − جتا ص = ٠

ص = − [١ − ٠] / [٠ − (−جا ص)] = −١ / جا ص

= − قتا ص

اذا كانت س = جا ص فإن ص = ...

عندما ص = ط/٢ [−جتا ط/٢ = ٠]

الحل: س − جا ص = ٠

ص = − [١ − ٠] / [٠ − جتا ص] = −١ / −جتا ص

∴ ص = قا ص ∴ ص = قا ط/٢ = ٢

ميل المماس للمنحنى س³ + ص³ = ٢ عند النقطة (١،١) يساوي .....

الحل: س³ + ص³ − ٢ = ٠

ص = − [٣س² + ٣ص² ص − ٠] / [٠ + ٣ص² − ٠]

ص = −٣س² / ٣ص² = −س²/ص²

ص = −(١)² / (١)² = −١/١ = −١

∴ ميل المماس = −١

∴ ميل العامودي = −١ / ميل المماس

∴ ميل العامودي = − (مقلوب ميل المماس)

ميل العامودي = +١

٤ س ص³ − س² ص + س³ − ٥ س = ٠ فأوجد ص ؟!

الحل: ص = − [٤ص³ − ٢س ص + ٣س² − ٥] / [١٢ س ص² − س²]

ص = −٤ص³ + ٢س ص − ٣س² + ٥ / ١٢ س ص² − س²

طريقة (٣) خطوات الاشتقاق الضمني

١ عندما نشتق ص نضربها في ص

٢ نجعل ص في طرف

مثال ١: س = ظا ص اوجد dص/dس

الحل: ١ = قا²ص × ص

ص = ١ / قا²ص = ص = جتا²ص

مثال ٢: ص² + ٤ ص = ٨ − ٣ س فإن ص (١،١) = ...

الحل: ٢ص ص + ٤ص = −٣

ص (٢ص + ٤) = −٣ (ص على المقدار)

ص = −٣ / (٢ص + ٤) نعوض (١،١)

ص = −٣ / (٢×١ + ٤) = −٣/٦ = −½

اذا كانت جا ص = س² لوجتا ص

اوجد dص/dس

الحل: جتا ص × ص = ٢س لوجتا ص + س² × (−جا ص × ص / جتا ص)

جتا ص × ص = ٢س لوجتا ص − س² ظا ص × ص

جتا ص × ص + س² ظا ص × ص = ٢س لوجتا ص

ص (جتا ص + س² ظا ص) = ٢س لوجتا ص

ص = ٢س لوجتا ص / (جتا ص + س² ظا ص)

اذا كانت س^ص = ص^س اوجد dص/dس

الحل: نضيف (لو) لطرفيه ← لو س^ص = لو ص^س

ص لو س = س لو ص (نشتق)

ص / س + لو س × dص/dس = س/ص + لو ص × dص/dس

ص لو س − س × dص/dس = لو ص − ص/س × dص/dس

حة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$ص^{ص} لو س - س^{ص} \times \frac{ص}{ص} = لو ص - \frac{ص}{س}$

(بالضرب $\times$ س ص)

$س ص ص^{ص} لو س - س ص^{ص} ص = س ص لو ص - ص ص$

$ص(س ص لو س - س ص) = س ص لو ص - ص$

$ص = \frac{س ص لو ص - ص}{س ص لو س - س ص}$

$ص = ٢ \times ١$

إذا كانت $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ٢$

فإن $ص = ١$ (ر)

الحل: بالضرب في $س ص$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢ س ص$ (نشتق بالنسبة لـ س)

$٢س + ٢ص ص = ٢ص + ٢س ص$

$ص ص - ٢س ص = ٢ص - ٢س$

$ص(٢ص - ٢س) = (٢ص - ٢س)$

$ص = ١$

---

٣) بالخط المماس

ميل المماس للمنحنى $ص^{٢} - ص = ٠$

عند النقطة $(١، ٠)$ هو ...

الحل: $٢ص ص = ص$ (نشتق)

$٢ص ص = ص$ (نعوض $(١، ٠)$)

$٢ \times ٠ ص = ص$

$ص = ٠$ ← ميل المماس $= \frac{١}{٠}$

---

٤) $ص = ١ \times ١$

إذا كان $ص = جاس$

فإن $ص = جتاس$ (ر)

---

٩) إذا كان $ص^{٢} + س^{٢} - ٣س ص = ١$

فإن $ص$ يقبل قيمة عظمى عند النقطة $(١، ١)$ = ...

$[-\frac{١}{٣}$ ، صغرى ، $١، ١ \neq ٠]$

التوضيح: نشتق

$٢ص ص + ٢س - ٣س ص - ٣ص = ٠$

$٢ص ص - ٣س ص = ٣ص - ٢س$

$ص(٢ص - ٣س) = ٣ص - ٢س$

$ص = \frac{٣ص - ٢س}{٢ص - ٣س}$

نعوض $س = ١$ ، $ص = ١$

$ص(١) = \frac{٣(١) - ٢(١)}{٢(١) - ٣(١)}$

$٢ص - ٣ص = ٣ - ٢$

$-ص = ١$ ← $ص = -١$

نشاط على الطالبات التأكد

١) ميل المماس لمنحنى الدالة $س ص^{٢} = ٣$

عند النقطة $(٣، \frac{١}{٣})$ يساوي ....

$[\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، -٣ ، $-٦]$

---

٢) إذا كان $س^{٢} - ص^{٢} = ٠$

فإن $\frac{ص}{س} =$ .... للتأكد $\frac{س}{ص}$

---

٥) إذا كان $\frac{ص}{س} = ٧$ فإن

$ص ص =$ .... للتأكد صفر

---

٦) ٢×١

إذا كان $(ص + ٣س)^{٢} = ص$

فإن $ص ص =$ صفر (ر)

---

٧) ٢×١

ميل المماس للمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٢$

عند النقطة $(١، ١)$ يساوي -١ (X)

التأكد من $ص = -١$

ميل المماس $= +١$

---

١٠) إذا كان $هـ^{س} + هـ^{ص} = ١٠$

فإن $\frac{ص}{س} =$ .... $-هـ^{س}$ ، $-هـ^{ص}$

التوضيح: نشتق

$هـ^{س} + هـ^{ص} \times ص ص = ٠$

$هـ^{ص} ص = -هـ^{س}$ ← $ص = -\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}}$

$ص = -هـ^{س - ص}$

---

١١) الحل بالخواص

إذا كان $ص = هـ$ جاس فإن

$ص ص =$ .....

الحل: نشتق جاس

$\frac{ص ص}{ص} = هـ$ جتاس $\times ص$

$ص ص = ص هـ$ جتاس

تابع/ النشاط

٣) ميل المماس للمنحنى

$ص^{٢} + ك = ٢$ عند النقطة $(١، ٠)$

هو ..... للتأكد $\frac{١}{٠}$

مختار الذبحي (770393433)

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أولاً: تركيب دالتين $(د \circ هـ)(س)$

مثال: $د(س) = س^3$ ، $قـ(س) = جاس$

أوجد $(د \circ قـ)(س)$ ، $(قـ \circ د)(س)$

$(د \circ قـ)(س) = د(قـ(س))$

$= د(جاس)$

$= جاس^3$

ثانياً: $(هـ \circ د)(س)$

$= قـ(د(س))$

$= قـ(س^3)$

$= جاس^3$

مثال: $د(س) = س^3 + 2س + 1$

$هـ(س) = لوس$ أوجد:

أ $(د \circ هـ)(س)$ ، ب $(هـ \circ د)(س)$

أ $(د \circ هـ)(س) = د(هـ(س))$

$= د(لوس)$

$= (لوس)^3 + 2(لوس) + 1$

ب $(هـ \circ د)(س) = هـ(د(س))$

$= هـ(س^3 + 2س + 1)$

$= لو(س^3 + 2س + 1)$

مثال: $د(س) = لوس$ أوجد $(د \circ د)(س)$

الحل: $(د \circ د)(س) = د(د(س))$

$= د(لوس)$

$= لو(لوس)$

مثال: إذا كان $د(س) = س^2$ فأثبت أن $(د \circ هـ)(س) = 4(جاس)^2$

$(د \circ هـ)(س) = د(هـ(س))$

$= د(جاس)$

$= (جاس)^2$

$= جاس^2$

ثانياً: مشتقة تركيب دالتين

$(د \circ هـ)'$

قانون مشتقة تركيب دالتين

$(د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

مثال: إذا كانت $د(س) = س^3$ ، $هـ(س) = جاس$

أوجد $(د \circ هـ)'(س)$

الحل: $(د \circ هـ)'(س)$

$= د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= 3(جاس)^2 \times جتاس$

$= 3جا^2س \times جتاس$

$= 3جا^2س جتاس$

إذا كانت $د(س) = هـ^{س^2}$ ، $ر(س) = لوس$

فإن $(د \circ ر)'(س) = ؟$

الحل $د'(ر(س)) \times ر'(س)$

$هـ^{س^2} \times \frac{1}{س}$

$هـ^{لوس^2} \times \frac{1}{س}$

$س^2 \times \frac{1}{س} = 2س$

$(د \circ ث)'(س) = هـ^{س^2} \times \frac{1}{س}$

$= هـ^{لوس} \times \frac{1}{س}$

$= س \times \frac{1}{س} = 1$

$\therefore (د \circ ث)'(س) = 1$

$\therefore (د \circ ت)'(س) =$ صفر

إذا كانت $د(س) = ظاس$ ، $هـ(س) = \frac{س}{4}$

فإن $(هـ \circ د)'(\frac{\pi}{4}) = ؟$

الحل $هـ'(د(س)) \times د'(س)$

$= 2 \times قا^2س$

$= 2 \times قا^2\frac{\pi}{4} = 2 \times 2^2 = 8$

إذا كانت $د(س) = 3س$

، $قـ(س) = س^2 + 1$

فإن $(د \circ قـ)'(-2) = ؟$

الحل $د'(قـ) \times قـ'$

$3 \times 2س$

$6س = 6 \times -2 = -12$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

إذا كانت $د(س) = س^2$ ، $هـ(س) = جتاس$

فإن $(د \circ هـ)'(س) = ؟$

$[جاس، -جاس، جتاس، -جتاس]$

الحل: $(د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= 2س \times -جاس$

$= 2جتاس \times -جاس$

$= -2جتاس جاس$

تمارين الكتاب المدرسي

$= -جا2س$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

إذا كانت $د(س) = هـ^{س^2}$ ، $ر(س) = لوس$

فإن $(د \circ ر)'(س) = ؟$

$[-2هـ^{لوس^2}، 2س هـ^{لوس^2}، 2هـ^{لوس^2}، 2س هـ^{س^2}]$

إذا كانت $د(س) = لوس$

فإن $(د \circ د)'(س) = ؟$

الحل $د'(د(س)) \times د'(س)$

$\frac{1}{لوس} \times \frac{1}{س}$

$\frac{1}{د(س)} \times \frac{1}{س}$

$\frac{1}{س لوس} = \frac{1}{س} \times \frac{1}{لوس}$

إذا كانت $د(س) = س^2$ ، $قـ(س) = \frac{س+1}{س^2+1}$

فإن $(د \circ قـ)'(س) = ؟$

الحل $د'(قـ(س)) \times قـ'(س)$

$2س \times \frac{1}{(س^2+1)^2}$

$2قـ(س) \times \frac{(س^2+1) - 2س^2}{(س^2+1)^2}$

$2س \times \frac{1}{(س^2+1)^2} \times \frac{1-س^2}{(س^2+1)^2}$

$= \frac{2(1-س^2)}{(س^2+1)^3}$

حة طوبيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٩) إذا كانت ص = ظا س
د(س) = $\frac{1}{1+س^2}$ ، ق(س) = ظا س
فإن ق(س) = ظا س ، د(س) = $\frac{1}{1+س^2}$ (أ)
الحل: د(س) × ق(س)
$\frac{1}{1+س^2}$ × ظا س
$\frac{1}{1+ظا^2 س}$ × ظا س
$\frac{1}{قا^2 س}$ × ظا س = 1
ظا²س + 1 = قا²س (تذكر قانون المحلل المثلثي)

نشاط: على الطالب إكمال الخطوات
١) إذا كانت د(س) = س − ٥
، هـ(س) = ق(س) فإن
[د ○ هـ]'(٤) = ... (أكمل)

٢) إذا كانت د(س) = ب^{هـ(س)}
، ر(س) = لوس فإن (د○ر)(س) يساوي ... (أكمل ب)

٣) إذا كان د(س) = ٥^س
، هـ(س) = س² − ٣ فإن
[د ○ هـ]'(٢) = ... [٢٠١٥، ٢٠١٦، ٢٠١٧]

٤) إذا كانت د(س) = هـ^{س}
، ق(س) = لوس فإن
(د ○ هـ)(س) = (هـ ○ د)(س) (أكمل)

٥) إذا كانت د(س) = س² + ١
ق(س) = جتا س فإن
(د ○ هـ)'($\frac{\pi}{4}$) = ...
[−١ ، ٠ ، ١ ، ٢]

٦) إذا كانت ق(س) = جا س
، د(س) = س² + ١ فإن
(د ○ ق)'($\frac{\pi}{4}$) = ...
[−٢ ، −١ ، صفر ، ١]

٧) إذا كانت د(س) = $\frac{1}{1-س}$ ، هـ(س) = جا س
فإن (د ○ هـ)(س) = ...
(د ○ هـ)'(س)
= د'(هـ) × ق'(س)
= $\frac{1}{(1-هـ)^2}$ × جتا س
= $\frac{1}{(1-جا س)^2}$ × جتا س
= $\frac{1}{جتا^2 س}$ × جتا س (قانون 1 − جا²س = جتا²س)
= $\frac{1}{جتا س}$ × جتا س = 1

الاشتقاق بالتسلسل

قاعدة التسلسل
$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

وبالمثل
$\frac{د ص}{د ع} = \frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ع}$

وبالمثل
$\frac{د ع}{د ص} = \frac{د ع}{د س} \times \frac{د س}{د ص}$

مثال: إذا كانت ص = لوع ، ع = (٣ − ٢س)⁴
أوجد $\frac{د ص}{د س}$
الحل: باستخدام قاعدة التسلسل
$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ كتابة القاعدة
$\frac{د ص}{د س} = $ مرتبة ص بالنسبة لـ ع × مرتبة ع بالنسبة لـ س
$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{ع} \times 4(3-2س)^3 \times -2$
مشتقة الأولى × مشتقة الثانية
نعوض عن قيمة ع
$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{(3-2س)^4} \times -8(3-2س)^3$
$\frac{د ص}{د س} = \frac{-8}{(3-2س)}$

طريقة أخرى لحل هذا السؤال
ص = لوع ، ع = (٣ − ٢س)⁴
ص = ٤ لو(٣ − ٢س) (التعويض قبل الاشتقاق)
ص = ٤ لو(٣ − ٢س) ← القفز
$\frac{د ص}{د س} = 4 \times \frac{-2}{3-2س} = \frac{-8}{3-2س}$

طريقة (١): اشتقاق ثم تعويض
طريقة (٢): تعويض ثم اشتقاق

[١] إذا كانت ص = ع³ ، ع = س³
أوجد $\frac{د ص}{د س}$
الحل ص = ع³ ، ع = س³
① $\frac{د ص}{د ع} = 3ع^2$
② $\frac{د ع}{د س} = 3س^2$
③ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ (طريقة)
④ $\frac{د ص}{د س} = 3(س^3)^2 \times 3س^2$
$\frac{د ص}{د س} = 3س^6 \times 3س^2 = 9س^8$
الطريقة (الأخرى):
ص = ع³ ، ع = س³
ص = (س³)³
ص = س⁹ ∴ $\frac{د ص}{د س} = 9س^8$

[٢] إذا كانت ص = لوقاع ، $\frac{د ص}{د س} = 3$ فإن $\frac{د ص}{د ظاع}$ = ...
الحل $\frac{د ص}{د ظاع} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ظاع}$
$= \frac{ظاع \times ظاع}{قاع \times قاع} \times 3$
$= ظا^2 ع \times 3 = 3ظا^2 ع$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(4) إذا كانت ص = جاع

ع = $س^{3}$ + $س^{3}$ او جد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل

∴ ص = جاع

∴ ص = جا($ص^{3}$ + $س^{3}$)

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = جتا($ص^{3}$ + $س^{3}$) × ($ص^{3}$ × 3 + 3$س^{2}$)

كنسبية — كتامرية

5) إذا كانت ص = $ع^{3}$ − 2س + 3

ع = $ص^{2}$ + 6ص − 1

او جد $\frac{ع ص}{ع س}$ عند س = 1

الحل

∴ س = 1 ⇐ ص = $(1)^{2}$ − 2(1) + 3

ص = 1 − 2 + 3

ص = 2

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ص}$ × $\frac{ع ص}{ع س}$ (مقلوب)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = (2ص + 6)(2س − 2)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = (2×2 + 6)(2×1 − 2)

= 10 × صفر = صفر

واذا لم تكن الدالة حركة ؟!

1) نحولها الى حركة

2) نفك ما تحوي التسلسل إلى قسمة

3) ونستعين بخطوات الضمنية

6) إذا كانت س = 2ع + 3

ص = $ع^{2}$ − 1 فإن $\frac{ع ص}{ع س}$

عند ع = 3 تساوي ....

الحل: ∴ ع = 3 ⇐ س = 2×3 + 3

س = 9

ص = ع − 1 ⇐ ص = 9 − 1 ⇐ ص = 8

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ × $\frac{ع ص}{ع س}$

(مقلوب) (مقلوب) (ليس مقلوب)

نحول × الى ÷ مع الشقلبة

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ ÷ $\frac{ع س}{ع ع}$

(مقلوب) (مقلوب)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = 2ع ÷ 2

$\frac{ع ص}{ع س}$ = 2ع × $\frac{1}{2}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ع = 3

7) إذا كانت ص = جاع ، س = لوع

او جد $\frac{ع ص}{ع س}$ باضافة (الدالة غير)

الحل: لازم ص و ع موحدتان

∴ ص = جاع ، ع = $هـ^{س}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ × $\frac{ع ع}{ع س}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = جتاع × $هـ^{س}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = جتا$هـ^{س}$ × $هـ^{س}$

= $هـ^{س}$ جتا$هـ^{س}$

8) إذا كانت ص = $\frac{ع + 1}{ع}$ ، س = $\frac{ع}{ع + 1}$

او جد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل: نلاحظ ان س مقلوب ص

∴ ص = $\frac{1}{س}$ ⇐ ص = $س^{-1}$

9) إذا كانت ص = (ع − 1) ، ع = $س^{3}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $3(ع - 1)^{2}$ × 2ع = 6ع$(ع - 1)^{2}$

او جد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ × $\frac{ع ع}{ع س}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{1}{(ع - 1)^{2}}$ × 6ع

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{1}{(س^{3} - 1)^{2}}$ × 6$س^{3}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{6س^{3}}{(س^{3} - 1)^{2}}$

10) إذا كانت ص = ظتاع

ع = 3س + 1

فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ عندما ع = $\frac{\pi}{4}$

تساوي ... [−1، 1]

الحل

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ × $\frac{ع ع}{ع س}$

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ ÷ $\frac{ع س}{ع ع}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $قتا^{2}$ع ÷ 3

= $قتا^{2}\frac{\pi}{4}$ ÷ 3

= 2 ÷ 3 = $\frac{2}{3}$

حيثما $قتا^{2}\frac{\pi}{4}$ = 2 و $قتا^{2}\frac{\pi}{4}$ = 2

11) إذا كانت ص = د(ع)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $3(ع - 1)^{2}$ ، ع = $جا^{3}$س + 1

او جد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ × $\frac{ع ع}{ع س}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $3(ع - 1)^{2}$ × $3جا^{2}$س جتاس

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $3(جا^{3}س + 1 - 1)^{2}$ × $3جا^{2}$س جتاس

= جاس × 2 $جا^{2}$س جتاس

= 2 $جا^{3}$س جتاس

12) إذا كانت ص = (5س − 2)(2$س^{2}$ + 3)

ع = $س^{3}$ − 6س + 1

فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ − $\frac{ع ص}{ع ع}$ = 18 (ع)

الحل ∴ ص = (5س − 2)(2$س^{2}$ + 3)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = 5(2$س^{2}$ + 3) + (5س − 2)4س

$\frac{ع ص}{ع س}$ = 10$س^{2}$ + 15 + 10$س^{2}$ − 4س

$\frac{ع ص}{ع س}$ = 20$س^{2}$ − 4س + 11

$\frac{ع ص}{ع ع}$ = 0

∴ ع = $س^{3}$ − 6س + 1

∴ $\frac{ع ع}{ع س}$ = 3$س^{2}$ − 6

∴ $\frac{ع ص}{ع ع}$ = 2

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ − $\frac{ع ص}{ع ع}$ = 20 − 2 = 18

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٣) إذا كان $ص = \log_{ع} ظتاس$

فإن $\frac{د ص}{د س} = -قتاس$ (X)

التوضيح

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= \frac{1}{ع} \times -قتاس ظتاس$

$= \frac{1}{\ln ظتاس} \times -ظتاس ظتاس$

$= -ظتاس$

١٤) إذا كانت $ص = ع \log_{ع} ، ع = هـ^{س}$ فإن

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}(س-1)$ (✓)

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= [\frac{1}{\ln ع} + \log_{ع}] \times هـ^{س}$

$= [\frac{1}{\ln هـ^{س}} + س] \times هـ^{س}$

$= [\frac{1}{س} + س] هـ^{س}$

$= [\frac{1+س^2}{س}] هـ^{س}$

١٥) إذا كان

$ص = \log_{ع} ، ع = \frac{1}{س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= \frac{1}{ع \ln ع} \times -\frac{1}{س^2}$

$= \frac{1}{\frac{1}{س} \ln \frac{1}{س}} \times -\frac{1}{س^2}$

$= \frac{1}{-\ln س} \times -\frac{1}{س^2}$

$= \frac{1}{س^2 \ln س}$

١٦) إذا كان $ص = ع^{2}$ فتاع

$ع = س^{2} + 1$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل:

$ص = \log_{ع}$ فتاع $، ع = س^{2}+1$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= \frac{-\text{جتاع}}{\text{جتاع}} \times 2س$

$= -ظتاع \times 2س$

$= -ظتا(س^{2}+1) \times 2س$

$= -2س ظتا(س^{2}+1)$

١٧) إذا كانت

$ص = (ع^{2}-4ع) جاع ، ع = جتاس$

$\frac{د ص}{د س} = 12$ ، عندما $س = \frac{\pi}{3}$

أوجد قيمة $ع$

الحل:

$ع = جتا٧٠$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$-12 = (ع^{2}-4ع) جتاع \times -جاس$

$-12 = (ع^{2}-4ع) جتا٧٠ \times -جا٧٠ \times 1 \times -(-1)$

$-12 = (ع^{2}-4ع)$

$ع^{2}-4ع+12 = 0$

$(ع-6)(ع-2) = 0$

إما $ع = 6$ ، $ع = 2$

ملاحظة مهمة: بالمثل

إذا كانت $ص^{3} = س+1$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ← ليست مباشرة

طريقة (1) نوجد $\frac{د ص}{د س}$ ثم نقلب المعادلة

$\therefore ص^{3} = س+1$

$\therefore 3ص^{2} \frac{د ص}{د س} = 1$ ، $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{3ص^{2}}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{3ص^{2}}$ ← $\frac{د س}{د ص} = 3ص^{2}$

طريقة (2) نعطي (الشرطة س)

$ص^{3} = س+1$

$3ص^{2} = س^{3}$

$3ص^{2} \frac{د ص}{د س} = 3س^{2}$

٤) إذا كانت $ص^{5} = 6س^{3}+11$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ← ليست مباشرة

الحل: $\therefore 5ص^{4} = 6 \times 3س^{2} + 11$

$\therefore 10ص = 18س^{2}$ ÷ ع

$\frac{10ص}{د ص} = \frac{18س^{2}}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{5ص}{9س^{2}}$

نشاط

١) إذا كانت $ص = (4+3س)^{2}$

$ع = 1+س^{2}$

فإن $\frac{د ص}{د ع}$ عندما $ع = 2$ يساوي

الحل $\frac{1}{4}$

٢) إذا كانت $ص = ع+1$

$ع = س^{2}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل: $\frac{1}{2س}$ أو $\frac{1}{2\sqrt{ع}}$

٣) إذا كانت

$ص = (2س-3)(2س+5)$ فإن $\frac{د ص}{د س} = \ldots\ldots$

الحل

٤) إذا كان $ص = \text{جاع}$

$ع = \log س$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

٥) إذا كانت $ص = p ظا ع$

$ع = س$ ، $\frac{د ص}{د س} = 12$

عندما $س = 0$ ، $p = \ldots\ldots$ فأوجد

٦) إذا كانت $ص = هـ^{ع}$ ، $ع = \log جاس$

فإن $\frac{د ص}{د س} = \ldots$ [جاس ، جتاس ، جاس]

٧) إذا كان $ص = p ع + 5$

$ع = |س|$ ، $\frac{د ص}{د س} = 1$ عندما $ع = 2$

فإن $p = \ldots$ [-1 ، 2 ، 7]

٨) $ص = \text{ظاع}$ ، $ع = س^{3}+5$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

٩) $ص = هـ^{ع}$ ، $ع = \text{جتاع}$

$س = هـ^{ع}$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$

١٠) لو $ص = 2ع$ ، $ع = 1 - \log س$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$

حة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين

(ب) أ ، (ج) أ

[1] إذا كانت $ص^3 + 16 = 4س^2$

فإن ميل المماس عند النقطة (1، 2) يساوي 1 (X)

الحل

نشتق $3ص^2 ص' = 4س$

نعوض $ص = 2$

$3(2)^2 ص' = 4س$

$3 \times 4 ص' = 4س \Leftarrow 2ص = 4س$

$\therefore ص = 2 \Rightarrow$ ميل المماس $= 2$

[2] إذا كان ميل المماس للمنحنى $ص = ا + هـ^{س}$ يساوي 1 فإن نقطة التماس $(ا، ب)$ (ج)

الحل: $ص = ا + هـ^{س}$ (نشتق)

$ص' = هـ^{س} \times س'$ $(س' = 1)$

$1 = هـ^{س} \times 1 \Leftarrow 1 = هـ^{س}$

$1 = هـ^{س}$ (لو للطرفين)

$لو 1 = لو هـ^{س} \Leftarrow (لو هـ = 1)$ نفرض

$س = ا + هـ^{ص} \Leftarrow س = ا + هـ^{0}$

$س = ا + 1$

$س = 2$

نقطة التماس $(2، ب)$

إذا كانت $\frac{ع ص}{ع س} = جتا س$ ، $ع = س - \frac{\pi}{2}$

فإن: $\frac{ع ص}{ع ع}$ (عندما $ع = 0$) $= -1$ (ب)

الحل

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ع} \times \frac{ع ع}{ع س}$

$جتا س = \frac{ع ص}{ع ع} \times 1$

$جتا س = \frac{ع ص}{ع ع}$

$ع = س - \frac{\pi}{2}$

$0 = س - \frac{\pi}{2}$

$س = \frac{\pi}{2}$

$جتا \frac{\pi}{2} = \frac{ع ص}{ع ع}$

$0 = \frac{ع ص}{ع ع}$

[9] إذا كانت $د(س) = 3جا س$

، $د(س) = ق(س)$ جتا $(ق(س))$ فإن $د(0) =$ ..... [صفر، 2، 4، 6]

الحل

$د(س) = 3جتا س$ جتا س

$د(س) = 3جتا^2 س$ جتا س

$د(0) = 3جتا^2(0)$ جتا $(0) \times 2 \times 0$

$= 0$ صفر

[10] إذا كانت $د(س) = ق(س)$ جتا $(ق(س))$ ، $د(0) = 8$

، $د(ق(2)) = 4$ ، فإن $ق(2) =$ ..... [صفر، $\frac{1}{4}$، 2، 32]

الحل

$د(0) = ق(ق(2))$ جتا $(ق(ق(2))) \times ق(2)$

$8 = 4 \times ق(2)$

$2 = ق(2)$

[11] إذا كانت $س^2 + ص^2 = 3 - 2س ص$

فإن $ص' =$ ..... [1، س، ص]

الحل

$س^2 + ص^2 + 2س ص - 3 = 0$

$ص' = \frac{-[2س + 2ص]}{2ص + 2س} = -1$

[11] ص = جتا س

$جا^2 س - جتا ص - س = \frac{1}{2}$ عند النقطة $(\frac{1}{2}، \frac{\pi}{2})$ يساوي ...

$[-\frac{1}{2}، \frac{1}{2}، 1، \frac{3\pi}{2}]$

الحل

$جا^2 س - جتا ص - س - \frac{1}{2} = 0$

$ص' = \frac{-[جتا^2 س \times 3 - 1]}{-(-جا ص)}$

$ص' = \frac{-[3جتا^2 س - 1]}{جا ص}$

$ص' = \frac{-[3جتا^2 \frac{\pi}{2} - 1]}{جا \frac{\pi}{2}}$

$ص' = \frac{-[3 \times 0 - 1]}{1} = -(-1)$

$= 1$

[12] إذا كانت $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = 2$ فإن $ص' =$ ..... [س، -س، 1، صفر]

الحل بالقرب في $س$

$\frac{س}{ص} \times \frac{س ص' - ص}{س^2} + \frac{ص}{س} \times ص' = 2$

$س^2 + ص^2 = 2س ص$

$س^2 - 2س ص + ص^2 = 0$

$(س - ص)^2 = 0$

$س - ص = 0$

$س = ص$

$1 = ص'$

[13] ج أو (ب)

يمكن إيجاد مشتقات الدالة

$د(س) = (س^2 + 1)^9$ باستخدام قاعدة التسلسل (ب)

الحل

$ص = (س^2 + 1)^9$ حول الدالة إلى دالتين

$ص = ع^9$ ، $ع = س^2 + 1$ نفرض

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ع} \times \frac{ع ع}{ع س}$

$= 9ع^8 \times 2س$

$= 18(س^2 + 1)^8 س$

"نشاط"

أوجد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة التسلسل

[1] $ص = هـ^{ظاس}$

[2] $ص = |س + 3|$

[3] $ص = جا[جا(جاس)]$

[4] $ص = جتا^3(لوس)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمهيد:

① $\frac{\text{عدد}}{\infty} = \text{صفر}$ ، $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \infty$

② $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد} \neq \text{صفر}} = \text{صفر}$

③ $\left(\frac{\text{كسر}}{\text{كسر}}\right)^{\infty} = \text{صفر}$ (البسط < المقام) الأس ∞

★ $\left(\frac{\text{كسر}}{\text{كسر}}\right)^{\infty} = \infty$ (البسط > المقام) الأس ∞

◆ $\left(\frac{\text{كسر}}{\text{كسر}}\right)^{-\infty} = \infty$

◆ $\left(\frac{\text{كسر}}{\text{كسر}}\right)^{\infty} = \text{صفر}$

◆ $(\text{كسر})^{\infty} = \text{صفر}$

◆ $(\text{كسر})^{-\infty} = \infty$

◆ $\infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = \text{صفر}$

① عدد × غير معرفة = غير معرفة

" ليس له معنى " غير معرف

② $\infty + \infty = \infty$

★ $\infty^{\infty} = \infty$

★ $\infty - \infty =$ غير معرف

★ $\infty \times \infty = \infty$

◆ $\infty + \infty = \infty$

◆ $\infty \times \infty = \infty$

◆ حالات عدم التعيين:

1) $\frac{\infty}{\infty}$ 2) $\infty \times 0$

3) $\infty - \infty$ 4) 0^{0}

5) ∞^{0} 6) 1^{∞}

7) 0^{∞}

الكميات الغير معينة تعبر غير معينة لانه قيمتها لاتكون محددة بل تعتمد على الدالة المراد ايجاد نهايتها

أساسيات النهايات

① نهـا $\frac{د(س)}{هـ(س)}$ = ... (الى ما تنقل)

س → ∞

∞ عندما درجة البسط > درجة المقام

صفر عندما درجة البسط < درجة المقام

معامل أكبر أس ، عندما درجة البسط = درجة المقام

معامل أكبر أس

أمثلة:

1) نهـا $\frac{س^{3} + 5س}{2س^{3} + 3س + 1}$ = ∞

س → ∞

2) نهـا $\frac{س + 7}{س^{2} + 5}$ = صفر

س → ∞

3) نهـا $\frac{س + 7}{3 - 3س^{2}} = \frac{1}{-3}$

س → ∞

4) نهـا $س^{2} + 3س + 1$ = ∞

س → ∞

5) نهـا $\frac{2}{س + 1}$ = صفر

س → ∞

نهايات دالة نحوها س → ∞ نحكم حلها بالنقل

أساسية (1): طرق التحليل

- مشترك - عقص - مرابعين - مكعبين

أمثلة:

① $س^{2} + س جاس$ ← (عامل مشترك)

$= س(س + جاس)$

② $س - 3$ ← (فرق مربعين)

$= (\sqrt{س} - \sqrt{3})(\sqrt{س} + \sqrt{3})$

③ $س^{3} - 8$ ← (مكعبين)

$(س - 2)(س^{2} + 2س + 4)$

★ $س^{3} + 125$ ← (مكعبين)

$(س + 5)(س^{2} - 5س + 25)$

★ $س - 1$ ← (مكعبين)

$(\sqrt{س} - 1)(\sqrt{س}^{2} + \sqrt{س} + 1)$

④ $س^{2} + 13س - 30$ ← (عقص بسيط)

$(س + 15)(س - 2)$

$15 \quad س$

$س \quad -2$

★ $2س^{2} - 7س + 3$ ← (عقص غير بسيط)

$(2س - 1)(س - 3)$

$-1 \quad -2س$

$-3 \quad س$

أساسية (2): الضرب في المرافق

يستخدم عادة اذا رأيت جذر كـ بيعيق نص قسمة

★ $\sqrt{س} - 5$ مرافقه $\sqrt{س} + 5$

★ $2 - \sqrt{س}$ مرافقه $2 + \sqrt{س}$

★ $\sqrt{س} - \sqrt{7}$ مرافقه $\sqrt{س} + \sqrt{7}$

مثال: نهـا $\frac{س - 9}{\sqrt{س} - 3} = \frac{0}{0}$

س → 9

الحل نهـا $\frac{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)}{(\sqrt{س} - 3)}$ ← يترافقوا

س → 9 ← مربعين

نهـا $(\sqrt{س} + 3) = 3 + 3 = 6$

س → 9

أساسية (3): المتتابعات المثلثية

1) القانون المذهبي (الأم)

★ $جا^{2}س + جتا^{2}س = 1$

★ $جا^{2}س = 1 - جتا^{2}س$

★ $جتا^{2}س = 1 - جا^{2}س$

2) القانون القطبي

★ $قا^{2}س - ظا^{2}س = 1$

★ $ظا^{2}س + 1 = قا^{2}س$

★ $قا^{2}س - 1 = ظا^{2}س$

3) القانون البروتري

★ $قتا^{2}س - ظتا^{2}س = 1$

★ $ظتا^{2}س + 1 = قتا^{2}س$

★ $قتا^{2}س - 1 = ظتا^{2}س$

4) التعريف

★ $ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$ ، $قاس = \frac{1}{جتاس}$

★ $ظتاس = \frac{جتاس}{جاس}$ ، $ظتاس = \frac{1}{ظاس}$

★ $قاس = \frac{1}{جتاس}$ ، $قتاس = \frac{1}{جاس}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٥) قانون الضعف (قانون الكوسي)

وهو من أهم القوانين التي نستخدمها في حل أسئلة الاختبارات الخ

جا٢س = ٢جاس جتاس

جا(زاوية) = ٢جا(نصفها) جتا(نصفها)

★ جاس = ٢ جا(س/٢) جتا(س/٢)

كذلك:

جتا٢س =
- جتا²س − جا²س (١)
- ٢جتا²س − ١ (٢)
- ١ − ٢جا²س (٣)

جتا(زاوية) = جتا²(نصفها) − جا²(نصفها)

(٦) قانون العفريت: عفريتوووو

★ ١ − جتا(زاوية) = ٢جا²(نصفها)

★ ١ − جتا٢س = ٢جا²س

★ ١ − جتاس = ٢جا²(س/٢)

جتا٢س − ١ = −٢جا²س

لهما نفس الإشارة 1

− جتا٦س + ١ = ٢جا²٣س

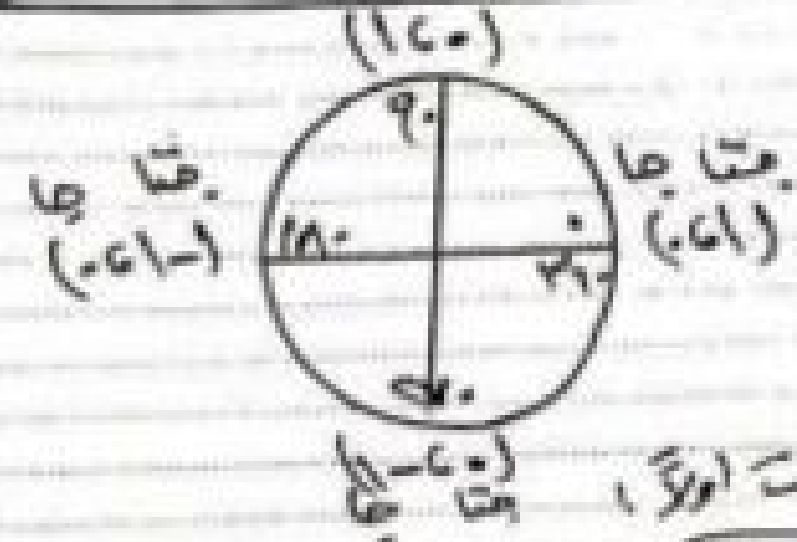
لهما نفس الإشارة الواحد

◆ ١ + جتا(زاوية) = ٢جتا²(نصفها)

◆ ١ + جتا٢س = ٢جتا²س

قيم النسب المثلثية

	٣٠	٤٥	٦٠
جاس	١/٢	١/√٢	√٣/٢
جتاس	√٣/٢	١/√٢	١/٢



الإشارات أرباع:

	٣٠	٤٥	٦٠
ظاس	١/√٣	١	√٣
ظتاس	√٣	١	١/√٣

ظاس: ٠ ، ∞ ، ٠ ، ∞ ، ٠ (عند ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠)

ظتاس: ∞ ، ٠ ، ∞ ، ٠ ، ∞ (عند ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠)

◆ ملاحظة: الزوايا الأساسية للزوايا المقورية

◆ تمارين على النهايات

(١) $\underset{س \to \infty}{نها}$ (س+١) جتا(١/(س+١)) = ...

= (∞+١) جتا(١/(١+∞))

= ∞ جتا(١/∞) = ∞ جتا٠

= ∞ × ١ = ∞

(٢) $\underset{س \to ٠}{نها}$ (٢جاس − ١)/(٤جتا²س − ١) = ...

= (٢جا٠ − ١)/(٤جتا²٠ − ١) = (٢×٠ − ١)/(٤×١ − ١) = −١/٣

(٣) (✓) أم (×):

$\underset{س \to ١}{نها}$ س³ لوس = ٠ (✓)

= ١ × لو١ = ١ × ٠ = صفر

(٤) (✓) أم (×):

$\underset{س \to ٠}{نها}$ (١ − قا²س) ظا٣س = ١ (×)

الحل: (١ − قا٠) ظا٠

(١−١) × ٠ = ٠ × ٠ = ٠

(٥) (✓) أم (×):

$\underset{س \to \infty}{نها}$ جتا(١/س)/س = ١ (×)

= جتا(١/∞)/∞ = جتا٠/∞ = ١/∞ = صفر

(٦) (✓) أم (×):

$\underset{س \to ٠}{نها}$ س قا٣٣س = ٣٣ (×)

= ٠ × قا٠

= ٠ × ١ = ٠

◆ إزالة عدم التعيين

◆ توجد عدة طرق لإزالة (عدم التعيين) منها:

(١) الطريقة المحدودة

◆ نستخدم إذا رأيت

(١) جا∞ ، (٢) جتا∞

∵ −١ ≤ جاس ≤ ١ ، −١ ≤ جتاس ≤ ١

∴ جا∞ = محدودة

جتا∞ = محدودة

◆ فكرة الحل بهذه الطريقة نبحث عن الصفر وبالشكل الآتي:

صفر × محدودة = صفر

عدد غير الصفر × محدودة = لا تصلح

أمثلة:

١) (✓) أم (×):

$\underset{س \to ٠}{نها}$ س جتا(π/س) = صفر (✓)

الحل:

٠ × جتا(π/٠) = ٠ × جتا∞

= صفر × محدودة

= صفر

٢) $\underset{س \to \infty}{نها}$ (س+١)/(س² قتاس) = ...

الحل: $\underset{س \to \infty}{نها}$ (س+١) جاس / س²

= (∞ جا∞)/∞ ← محدودة

نبحث عن الصفر

$\underset{س \to \infty}{نها}$ (س+١)/س² × جاس (بالإزاحة)

صفر × محدودة = صفر

٣) $\underset{س \to \infty}{نها}$ (لوهـ / هـ) جتاس = ...

الحل: $\underset{س \to \infty}{نها}$ (١/س) جتاس

= (١/∞) جتا∞

= صفر × محدودة = صفر

٤) $\underset{س \to ٠}{نها}$ س / قتا(ظتا٢س) = ...

لكن: $\underset{س \to ٠}{نها}$ س جا(ظتا٢س)

= ٠ جا(ظتا٠)

= ٠ × جا∞

= صفر × محدودة = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ب) $\lim_{س\to\infty} \frac{س}{\text{مقتاس}} = \dots$

[صفر، ١، ٢٢، ٣-]

ج) $\lim_{س\to\infty} س \text{ جا} \frac{\pi}{س}$

$= \text{صفر} \times \text{جا}\infty = \text{صفر}$

د) $\lim_{س\to\infty} (١ - \text{جتاس}) \text{ جا}\left(\frac{١}{س^{٢}-١}\right) = \dots$

$(١ - \text{جتام}) \text{ جا}\left(\frac{١}{\infty}\right)$

$(١-١) \text{ جا}\left(\frac{١}{\infty}\right)$

$\text{صفر} \times \text{جا}\infty = \text{صفر}$

هـ) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جا}٤س}{٢س} = ؟ \quad (\times)$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جا}٤س}{٤س} = ١$

$\lim_{س\to\infty} \frac{٤س}{٢س} = ٢$

$٢ \times ١ = ٢$

و) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جا}(٦س+١)}{٣+٣س^{٢}+٢} \times \text{جاس}$

المقاومات $\leftarrow \frac{٦}{٢} \times \text{جا}\infty$

(٣ × محدودة) ∈ المجال

محدود × محدود ليس له حل

ز) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{١٣} = \dots$

ح) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جاس}}{\text{مقتاس}} = \dots$

[صفر، ١، ٢٢، ٣-]

ط) $\lim_{س\to\infty} س \text{ جا} \frac{\pi}{س}$

$= \text{صفر} \times \text{جا}\infty = \text{صفر}$

ي) $\lim_{س\to\infty} (١ - \text{جتاس}) \text{ جا}\left(\frac{١}{س^{٢}-١}\right) = \dots$

$(١ - \text{جتام}) \text{ جا}\left(\frac{١}{\infty}\right)$

$(١-١) \text{ جا}\left(\frac{١}{\infty}\right)$

$\text{صفر} \times \text{جا}\infty = \text{صفر}$

ك) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جا}٤س}{٢س} = ؟ \quad (\times)$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جا}٤س}{٤س} = ٢$

$٢ \times ١ = ٢$

ل) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جا}(٦س+١)}{٣+٣س^{٢}+٢} \times \text{جاس}$

المقاومات $\leftarrow \frac{٦}{٢} \times \text{جا}\infty$

(٣ × محدودة) ∈ المجال

محدود × محدود ليس له حل

م) $\lim_{س\to\infty} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{١٣} = \dots$

طريقة (٢): طريقة لوبيتال

قاعدة لوبيتال

إذا كانت نها $\frac{د(س)}{هـ(س)}$ صفر/صفر أو $\frac{\infty}{\infty}$

ملاحظة غير مهمة على صيغة

$\lim_{س\to م} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \lim_{س\to م} \frac{د'(س)}{هـ'(س)}$

قاعدة لوبيتال تستعمل الاشتقاق بعدف إيجاد النهايات لصيغة ! ÷ أو $\frac{\infty}{\infty}$ أو صفر/صفر

أمثلة:

١) نها $\frac{\text{ظا}٣س}{س}$ $س \to ١$ = ----

[$-\frac{١}{\pi}$، ٣-، ٢٢] ∈ (٣٣)

الحل ÷ (٥٠ ت) لوبيتال

$\lim_{س\to١} \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

$\lim_{س\to١} \frac{٣ \times \text{قا}^{٢}٣س}{١}$ (الزاوية بالتقدير الدائري)

$= ٣ \text{ قا}^{٢}(١ \times ٣)$

$= ٣ \text{ قا}^{٢}\pi$

$= ١ \times ٣$

$= ٣$

جتاπ = ١-

جاπ = ٠

ظاπ = ٠

٢) إذا كانت $\lim_{س\to٣} \frac{\text{جا}٣س}{س-٣}$ = ل

فإن ل = ----

[٣، ٢٢، ١، ٧-] ∈ (٣٣)

الحل $\lim_{س\to٣} \frac{\text{جا}٣س}{س-٣} = \frac{\text{جا}٣\pi}{٣-٣} = \div$

(٥٠ ت) نستخدم لوبيتال

$\lim_{س\to٣} \frac{٣ \text{ جتا}٣س}{١}$

$= ٣ \text{ جتا}٣\pi$

$= ٣ \text{ جتا}٥٤٠$

$= ٣ \text{ جتا}١٨٠$

$= ٣ \times -١$

$= -٣$

٥٤٠ | ٣٦٠ | ١٨٠

٣) $\lim_{س\to٠} \frac{١ + \text{جتا}(٢٢ - ٢س)}{س^{٢}} = ؟ \quad (\times)$

الحل $\lim_{س\to٠} \frac{١ + \text{جتا}٢٢}{٠} = \frac{١+١}{٠} = \div$

عدم تعيين (٥٠ ت)

$\lim_{س\to٠} \frac{٠ - (-٢) \text{ جا}(٢٢ - ٢س)}{٢س}$

$\lim_{س\to٠} \frac{+٢ \text{ جا}(٢٢ - ٢س)}{٢س}$

$\lim_{س\to٠} \frac{\text{جا}(٢٢ - ٢س)}{س} = \div$ (ح، ت)

نستخدم لوبيتال ثاني مرة إلى أن يتم إزالة حالة عدم التعيين

$\lim_{س\to٠} \frac{-٢ \text{ جتا}(٢٢ - ٢س)}{١}$

$= -٢ \text{ جتا}(٢٢)$

$= -٢ \times ١ = -٢$ (٢٤)

ة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا ٣س}{قا س} = \cdots\cdots$

$(\frac{1}{2})^{٢}(٣)^{٢}(-١)$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا ٣س}{قا س} = \frac{\infty}{\infty}$ (ح.ت)

نجد المشتقة الى الحقيقة ÷

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا س}{ظتا ٣س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{-جا س}{-٣ قتا^{٢} ٣س}$ (مشتقة كل منهما)

$= \frac{١}{٣(-١)^{٢}} = \frac{١}{٣}$

٥) نهـا $\lim_{س \to ٠} \frac{٢-٢جتا س}{س^{٢}} = \cdots$

$(-١)(\frac{١}{٢})(٢)$

الى $\lim_{س \to ٠} \frac{٢-٢}{٠}$ ÷ (ح.ت)

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٠-٢جا س}{٢س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢جا س}{٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س}$ ①

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا س}{١} = جتا ٠ = ١$ ①

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س + جتا س - ١}{س^{٢} - ٣س} = \cdots\cdots$

الى $\frac{٠+١-١}{٠-٠}$ ÷ (ح.ت)

$\lim_{س \to ٠} \frac{جتا س - جا س}{٤س - ٣}$ (لوبيتال)

$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا س - جتا س}{٤}$

$= \frac{-٠-١}{٤} = -\frac{١}{٤}$

٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - جتا ٦س - جتا ٤س}{س^{٢}} = \cdots$

$= \frac{٢-١-١}{٠}$ ÷ (ح.ت)

(لوبيتال)

$\lim_{س \to ٠} \frac{-٠-٦جا ٦س+٤جا ٤س}{٢س}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{٦جا ٦س + ٢جا ٤س}{٢س}$ ÷ (ح.ت) (لوبيتال مرة ثانية)

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٦\times٦جتا ٦س + ٢\times٤جتا ٤س}{٢}$

$= \frac{٣٦جتا٠ + ٤جتا٠}{٢}$

$= \frac{٣٦\times١ + ٤\times١}{٢} = \frac{٤٠}{٢}$

$= ٢٠$

٨) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا س - ٢جا س}{\pi - س} = \cdots\cdots$

$= \frac{جا\pi - ٢جا\pi}{\pi - \pi}$ ÷ (ح.ت)

$\lim_{س \to \pi} \frac{٢جتا ٢س - ٢جتا س}{١}$ (لوبيتال)

$= ٢جتا ٢\pi - ٢جتا\pi$

$= ٢\times١ - ٢(-١)$

$= ٢ + ٢ = ٤$

٩) نهـا $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{ظتا ٣س}{س - \frac{\pi}{٩}} = \cdots\cdots$

الى $\frac{ظتا\frac{\pi}{٣}}{\frac{\pi}{٩} - \frac{\pi}{٩}}$ ÷ (ح.ت)

نستخدم قاعدة لوبيتال

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{-٣قتا^{٢} ٣س}{١}$ (نعوض)

$= -٣(-٢)^{٢} = -١٢$

١٠) نهـا $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٣س} = \cdots\cdots$

الى $\frac{ظا٠}{٣٠}$ ÷ (ح.ت)

$= \frac{ظا ١٨٠}{٠}$ ÷ (ح.ت)

نستخدم قاعدة لوبيتال

$\lim_{س \to ٠} \frac{\pi قا^{٢} ٣س}{١}$

$= \pi قا^{٢}٠$

$= \pi قا٠ قا٠$

$= \pi \times ١ \times ١ = \pi$

١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٣ - ٢جا س}{\frac{\pi}{٢} - جتا س} = \cdots\cdots$

$= \frac{٣-٢}{\frac{\pi}{٢}-٠}$ ÷ (ح.ت)

نستخدم قاعدة لوبيتال

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{-٢جتا س}{-(-جا س)}$ (نعوض)

$= \frac{-٢\times٠}{جا٠} = \frac{٠}{١} = ٠$

١٢) $\lim_{س \to ٩} \frac{ظا س - ظا ٩}{س - ٩} = \cdots\cdots$

الى $\frac{ظا٩ - ظا٩}{٩-٩}$ ÷ (ح.ت)

نستخدم قاعدة لوبيتال

$\lim_{س \to ٩} \frac{قا^{٢} س - ٠}{١ - ٠}$

$= قا^{٢}٩$

$= (-١)^{٢} = ١$

١٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا س - جتا س}{\pi - ٤س} = \frac{٠}{٠}$

$= \frac{جا\frac{\pi}{٤} - جتا\frac{\pi}{٤}}{\pi - \pi}$ ÷ (ح.ت)

نستخدم قاعدة لوبيتال

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا س + جا س}{-٤}$

$= \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}}{-٤} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٢}}}{-٤} = \frac{\sqrt{٢}}{-٤}$

$= -\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ج) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2جتاس}{جاس - \frac{\pi}{2}}$ = ...

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2جتا^2 س}{جا(س - \frac{\pi}{2})} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2جتا^2 س}{جا.}$

$= \frac{\cdot}{\cdot}$

نستفيد من لوبيتال

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \times -جاس}{جتا(س - \frac{\pi}{2})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2جاس}{جتا(س - \frac{\pi}{2})}$

$= 2 \times \frac{جا\frac{\pi}{2}}{جتا.} = \frac{2}{1} = 2$

د) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{جاس - \sqrt{3} جتاس}{س - \frac{\pi}{3}}$ = ...

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{جتاس + \sqrt{3} جاس}{1}$

$= جتا\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} جا\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

هـ) $\lim_{س \to 1} \frac{ظاس - ظا\frac{\pi}{4}}{س - 1}$ = ...

س) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظاس - ظا\frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$ = ...

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{قا^2 س - 0}{1 - 0}$

$= قا^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$

ز) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جا(جتاس)}{س - \frac{\pi}{4}}$ = ...

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا(جتاس) \times -جاس}{1}$ (نعوض)

$= جتا(جتا\frac{\pi}{4}) \times -جا\frac{\pi}{4}$

$= جتا(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\frac{1}{2}$

ح) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جاس}{(س - \frac{\pi}{2})^2}$ = ...

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{-جتاس}{2(س - \frac{\pi}{2})}$ $= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{+جاس}{2 \times 2}$ جاهزة

$= \frac{1}{4}$

ط) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} ظاس - قاس$ = ...

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{ظاس - قاس}{1 - 1}$ $= \frac{\cdot}{\cdot}$

لوبيتال

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{قا^2 س - قاس ظاس}{1}$

$= قا^2 \frac{\pi}{4} - قا\frac{\pi}{4} ظا\frac{\pi}{4}$

$= (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \times 1$

$= 2 - \sqrt{2}$

ي) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(جتاس)}{س^2 - \frac{\pi^2}{4}}$ = ...

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا(جتاس) \times -جاس}{2س}$ (نعوض)

$= \frac{جتا(جتا\frac{\pi}{2}) \times -جا\frac{\pi}{2}}{2 \times \frac{\pi}{2}}$

$= \frac{جتا(0) \times -1}{\pi} = \frac{1 \times -1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$

ك) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جاس}{(2س - \pi)^2}$ = ...

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{-جتاس}{2(2س - \pi) \times 2}$ $= \frac{\cdot}{\cdot}$ (لوبيتال)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{+جاس}{2 \times 2 \times 2}$ جاهزة

$= \frac{1}{8}$

طريقة (٣): طريقة الصفرية

- الزاوية الصفرية
- سحب الزاوية.

نستخدم إذا رأيت

أ) جا. ب) ظا.

فكرة الحل

استخدام القاعدة الآتية:

نهـا $\frac{جاس}{س} = 1$ ، نهـا $\frac{ظاس}{س} = 1$

نهـا $\frac{جاس}{ب} = \frac{س}{ب}$

نهـا جتاس = 1

- نقول كلما فيه جاس ، ظاس ضع زاوية الصفرية أسفل بين أو أعلى منّ أصبر واحد

- نهـا $\frac{جاس}{س} = 1$

أمثلة

أ) نهـا $س ظا\frac{\pi}{س}$ = ...

$س \to \infty$

الحل $\infty \times ظا\frac{\pi}{\infty} \to$ صفرية

$\infty \times ظا. = \infty \times . = (ع . ت)$

∴ نقسم ونضرب في الزاوية

أو نسحب الزاوية

نهـا $س ظا\frac{\pi}{س}$

$س \to \infty$

$= \frac{ظا\frac{\pi}{س}}{\frac{1}{س}} \times \frac{\frac{\pi}{س}}{\frac{\pi}{س}}$

$= \pi \times س = 5$

ب) $\frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{1}$

نهـا $\frac{جا3س}{ظا5س} = \frac{3}{5}$ (ك)

$س \to .$

الحل: $\frac{جا.}{ظا.} \to$ صفرية / صفرية

نسحب الزاوية

$= نهـا \frac{جا3س}{ظا5س} = نهـا \frac{3س}{5س} = \frac{3}{5}$

$س \to .$ $س \to .$

ج) نهـا $\frac{س}{س - جاس}$ = ...

$س \to .$

$= نهـا \frac{س}{س - جاس} \times \frac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}}$

$س \to .$

$= نهـا \frac{1}{1 - \frac{جاس}{س}} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{.}$

$س \to .$

صفرية

د) نهـا $\frac{س}{س - 2جاس}$

$س \to .$

$= نهـا \frac{س}{س - 2جاس} \times \frac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}}$

$س \to .$

$= نهـا \frac{1}{1 - \frac{2جاس}{س}} = \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$

$س \to .$

هـ) نهـا $س ظا\frac{1}{س}$ = ...

$س \to \infty$

الحل $\infty \times ظا\frac{1}{\infty} \to$ صفرية

$\infty \times ظا. = \infty \times . = (ع . ت)$

∴ نقسم ونضرب في الزاوية

أو نسحب الزاوية

نهـا $س ظا\frac{1}{س} = نهـا \frac{ظا\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}} \times \frac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}}$

$س \to \infty$ $س \to \infty$

$= نهـا \frac{ظا\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}} \times نهـا \frac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}}$

$س \to \infty$ $س \to \infty$

$= 1 \times 1 = 1$

ة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥) (ح ∘ د)(٠)

نها_{س→١} (ظا(س-١))/(س-١) = ح(٢)

البرهان:

نها_{س→١} ظا(س-١)/(س-١)

بوضع ص = س-١ ⇒ ص → ٠ عندما س → ١

= نها_{ص→٠} ظا ص/ص = ١ (نهاية مثلثية)

= نها_{س→١} س-١ = ١-١ = ٠

= نها_{س→١} س+١ = ١+١ = ٢

٦) إذا كانت نها_{س→٠} جا ٣س/س = ٢

فإن قيمة ب = ... {٢، ٣، ٦، ٧}

البرهان:

نها_{س→٠} جا ٣س/س

بوضع ٣س = ب ⇒ س = ب/٣

= نها_{ب→٠} جا ب/(ب/٣) = نها_{ب→٠} ٣ جا ب/ب

= ٣ × ١ = ٣

ب = ٢ × ٣ = ٦

٧) نها_{س→٠} جا ٣س/(س^٢ - س) = ٣ (ح)

البرهان:

نها_{س→٠} جا ٣س/(س^٢ - س)

= نها_{س→٠} جا ٣س/(س(س-١))

= نها_{س→٠} جا ٣س/س × ١/(س-١)

= ٣ × ١/(٠-١) = -٣

٨) نها_{س→١} ظا(س-١)/(١-س^٢)

= نها_{س→١} ظا(س-١)/((١-س)(١+س))

= نها_{س→١} ظا(س-١)/(-(س-١)(س+١))

= نها_{س→١} -١/(س+١) = -١/(١+١) = -١/٢

٩) نها_{س→٣} (س-٣) جا(π/٦ (س-٣))

= نها_{س→٣} (س-٣) × π/٦ × جا(π/٦ (س-٣))/(π/٦ (س-٣))

= نها_{س→٣} π/٦ (س-٣) × جا(π/٦ (س-٣))/(π/٦ (س-٣))

= π/٦ × ١ = π/٦

١٠) (ح ∘ د)(٠)

ح(س) = ظا ٢س/س

نها_{س→٠} ظا ٢س/س = ٢ (ح)

نها_{س→٠} ظا ٢س/س

= نها_{س→٠} ظا ٢س/٢س × ٢

= ١ × ٢ = ٢

١١) نها_{س→٠} ٥س - ظا ٢س جا ٣س / جا ٣س = ...

= نها_{س→٠} ٥س/جا ٣س - ظا ٢س جا ٣س/جا ٣س

= نها_{س→٠} ٥س/جا ٣س - ظا ٢س

= نها_{س→٠} ٥س/جا ٣س - جا ٢س/جتا ٢س

= نها_{س→٠} ٥س/جا ٣س - جا ٢س/س × ١/جتا ٢س

= ٥/٣ - ٢/١ × ١/١ = ٥/٣ - ٢ = -١/٣

١٢) إذا كانت نها_{س→٠} (جتا ٣س - جتا ٥س)/(جتا ٢س - جتا ٤س) = ٥

فإن نها_{س→٠} د(س) = ...

نها_{س→٠} (جتا ٣س - جتا ٥س)/(جتا ٢س - جتا ٤س) = ٥

نها_{س→٠} (جتا ٣س - جتا ٥س)/(جتا ٢س - جتا ٤س) × (جتا ٣س + جتا ٥س)/(جتا ٣س + جتا ٥س)

= نها_{س→٠} (جتا^٢ ٣س - جتا^٢ ٥س)/(جتا ٢س - جتا ٤س) × ١/(جتا ٣س + جتا ٥س)

= نها_{س→٠} (جا^٢ ٥س - جا^٢ ٣س)/(جتا ٢س - جتا ٤س) × ١/(جتا ٣س + جتا ٥س)

= نها_{س→٠} (جا ٥س - جا ٣س)(جا ٥س + جا ٣س)/(جتا ٢س - جتا ٤س) × ١/(جتا ٣س + جتا ٥س)

= نها_{س→٠} (٢ جا ٤س جتا س)(٢ جا ٤س جتا س)/(٢ جا ٣س جا س) × ١/(٢ جتا ٤س جتا س)

= نها_{س→٠} ٤ جا ٤س جتا ٤س/(٣ جا ٣س) = ٤/٣

١٣) إذا كانت نها_{س→٠} (د(س) - جا ٣س قتا ٥س) = ٥

فإن نها_{س→٠} د(س) = ...

نها_{س→٠} د(س) = ٥ + جا ٣س قتا ٥س

= ٥ + جا ٣س/جا ٥س

نها_{س→٠} ٥ + ٣س/س (بسبب زوايا)

= ٥ + ٣ = ٨

∴ نها_{س→٠} د(س) = ٨

١٤) إذا كانت

نها_{س→ب} (س-ب) ظا(س-ب)/(س^٢ - ٢ب س + ب^٢) = ٤

فإن قيمة ب = ...

البرهان:

نها_{س→ب} (س-ب) ظا(س-ب)/((س-ب)(س-ب))

نها_{س→ب} ظا(س-ب)/(س-ب)

بوضع ص = س-ب ⇒ ص → ٠ عندما س → ب

= نها_{ص→٠} ظا ص/ص = ١

∴ ب = ٤

١٥) نها_{س→٠} ٤^س ظا ٤^س = ...

نها_{س→٠} ٤^س ظا ٤^س

= نها_{س→٠} ٤^س × ٤^{١-س}/٤^{١-س}

= نها_{س→٠} ٤^{س+١-س}/٤^{١-س}

= نها_{س→٠} ٤/٤^{١-س} = ٤/٤^{١-٠} = ٤/٤ = ١

حة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أ/ مختار الذبحي (770393433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

رابعاً طريقة الإسناد = المحورية

نستخدم إذا كانت الزاوية محورية ($\pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm2\pi, \ldots$ أو $\pm90°, \pm180°, \pm270°, \pm360°, \ldots$)

خطوة الحل: نحول الزاوية المحورية الى زاوية حِفرية باستخدام القانون الآتي:

(± زاوية بعد التحويل = ± زاوية قبل التحويل)

إشارة معاكسة للتحويل

ملاحظة: عند استخدام هذا القانون يجب مراعاة الآتي:

1) إشارة الربع

2) تغير النسبة في حالة الزاوية $90°, 270°$

1) جاس ⟷ جتاس

2) ظاس ⟷ ظتاس

(حفظ النسبة) (تغير النسبة)

دائرة الربع — دائرة الأرباع

مثال: $\lim_{س\to1} \frac{س^2-1}{جا\pi س} = \ldots\ldots$

الحل: $\lim_{س\to1} \frac{(س-1)(س+1)}{جا(\pi-\pi س)}$ حِفرية

$= \lim_{س\to1} \frac{(س-1)(س+1)}{(\pi-\pi س)}$ مشتركة

$= \lim_{س\to1} \frac{(س-1)(س+1)}{\pi(1-س)}$

$= \lim_{س\to1} \frac{-(1-س)(س+1)}{\pi(1-س)} = \frac{-(1+1)}{\pi} = \frac{-2}{\pi}$

يمكن التأكد من كل طريقة لو سمحت في حالة $\frac{0}{0}$ (ع. ت) مشتقة البسط ثم المقام

هـ) $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-س)$ ظاس تغير النسبة

الحل: $(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})$ ظا$\frac{\pi}{2}$ محورية

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-س)$ ظتا$(\frac{\pi}{2}-س)$ + تغير النسبة (بعد = قبل)

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-س)\frac{جتا(\frac{\pi}{2}-س)}{جا(\frac{\pi}{2}-س)}$ حِفرية

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-س)\times\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-س)} = 1$

و) $\lim_{س\to1} (س-1)$ ظتا$\pi س$

الحل: $\lim_{س\to1} \frac{س-1}{ظا\pi س}$ محورية

$= \lim_{س\to1} \frac{س-1}{ظا(\pi-\pi س)}$ حِفرية

$= \lim_{س\to1} \frac{س-1}{-ظا(\pi-\pi س)}$ مشتركة

$= \lim_{س\to1} \frac{1}{-ظا\pi} = \frac{1}{\pi}$

ز) $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جا2س}{س+\frac{\pi}{2}}$

الحل: $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جا2س}{س+\frac{\pi}{2}}$ حِفرية

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جا(\pi+2س)}{س+\frac{\pi}{2}}$ مشتركة

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{-جا(\pi+2س)}{(س+\frac{\pi}{2})}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2(س+\frac{\pi}{2})}{(س+\frac{\pi}{2})} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{4}{\pi}$

ح) $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{س جتا\frac{\pi}{2}}{جا\frac{\pi}{2}س} = \ldots\ldots$

الحل: $= \frac{2}{\pi}$ جتا$\frac{\pi}{2}$ → إسناد (حقيقي)

$\frac{\pi}{2}$ جا$\frac{\pi}{2}$ → إسناد (قوس)

ط) $\lim_{س\to2} س$ جا$(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{س})$ + بعد المقام

$جا(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{س})$ − بعد المقام

$= \lim_{س\to2} \frac{س(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{س})}{-جا(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{س})}$ (سحب ثوابت) وضرب المقامات

$= \lim_{س\to2} \frac{س(\frac{س\pi-2\pi}{2س})}{-(\frac{س\pi-2\pi}{س\pi})}$

$= \lim_{س\to2} \frac{س}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

ي) $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} ظا2س \times (\frac{\pi}{4}-س)$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{ظا(\frac{\pi}{2}-2س)}{\frac{\pi}{4}-س}$ حِفرية

الحل: $\frac{ظا(\frac{\pi}{2}-2س)}{\frac{\pi}{4}-س}$ حِفرية

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{ظتا2س}{\frac{\pi}{4}-س}$ (تحويل)

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{جتا2س}{جا2س}}{\frac{\pi}{4}-س}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{جا(\frac{\pi}{2}-2س)}{(\frac{\pi}{4}-س)}$ (تحويل)

$= \frac{-(\frac{\pi}{4}-س)}{(\frac{\pi}{4}-س)} = -1$

ك) $\lim_{س\to\pi} \frac{جاس}{س+\pi}$

الحل: $س = \pi$

$\pi = \pi$

نوع الاستناد: النسبة (بعد = قبل)

$= \lim_{س\to\pi} \frac{-جا(\pi+س)}{س(س+\pi)}$ مشتركة

$= \lim_{س\to\pi} \frac{-(\pi+س)}{س(س+\pi)}$

$= \lim_{س\to\pi} \frac{-1}{س} = \frac{-1}{\pi}$

طريقة (5): مجموع وفرق النسب

نستخدم إذا رأيت

1) نسبة ± نسبة

2) عدد مشهور ± نسبة

مثل: ♦ جاس + جا3س

♦ $\frac{1}{2}$ + جتاس

♦ $\frac{\pi}{4}$ + جاس عادي

$\frac{\pi}{4}$ + جاس = 2 (جا$\frac{\pi}{4}$ + جاس)

هذه الطريقة تختصر لك حفظ القوانين المزعجة.

1) جاس + جاص = 2 جا$\frac{س+ص}{2}$ جتا$\frac{س-ص}{2}$

2) جاس − جاص = 2 جتا$\frac{س+ص}{2}$ جا$\frac{س-ص}{2}$

3) جتاس + جتاص = 2 جتا$\frac{س+ص}{2}$ جتا$\frac{س-ص}{2}$

4) جتاس − جتاص = −2 جا$\frac{س+ص}{2}$ جا$\frac{س-ص}{2}$

5) ظاس ± ظاص = ظا(س ± ص) (1 ∓ ظاس ظاص)

جاس − جتاس = $\sqrt{2}$ جا(س − $\frac{\pi}{4}$)

أ/ مختار الذبعي (770393433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\text{نها}_{س\to 0}\frac{س}{\text{جتا}٥س - \text{جتا}س} = \ldots\ldots$$

الحل:

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{س}{-٢\text{جا}\left(\frac{٥س+س}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٥س-س}{٢}\right)}$$

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{س}{-٢\text{جا}٣س\,\text{جا}٢س}$$

بسبب رمادي

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{س}{-٢\times ٣س\times ٢س}$$

$$= \frac{١}{-١٢} = -\frac{١}{١٢}$$

$$\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جتا}٢س - س\,\text{جتا}٤س}{س^{٣}} = \ldots$$

الحل: لاحظ أن أخذه عامل مشترك

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جتا}٢س - \text{جتا}٤س}{س^{٣}}$$

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{-٢\text{جا}(٣س)\text{جا}(-س)}{س^{٣}}$$

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{-٢\times ٣س\times \text{جا}٣س\times \text{جا}س}{س^{٣}}$$

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{-٢\times ٣\times \text{جا}٣س}{س}\times\frac{\text{جا}س}{س} = -٦+$$

$$\text{نها}_{س\to 0}\frac{ظاس - ٢س}{س - ٢س} = \ldots\ldots$$

الحل:

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{\frac{ظاس}{س} - ٢}{١ - \frac{٢س}{س}}$$

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{ظاس - ٢}{١ - ٢}$$

$$= \text{نها}_{س\to 0}\frac{ظاس(١+ظاس ظا٢س) - ٢}{-١}$$

$$= ١+ظا٦٠\,ظا٦٠ = ١+٣\times ٣ = ٤$$

استنتج: أجب لنهايات التالية:

١) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{س + \text{جاس}}{س + \text{جتاس}}$

٢) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٣}}(س - \frac{\pi}{٣})\,\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - س)$

٣) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}}\frac{ظاس - ١}{٤س - \pi}$

٤) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٢}}(١-س)\,ظا(\frac{\pi}{٢}س)$

٥) $\text{نها}_{س\to ١}(١-س)\,ظا(\frac{\pi}{٢}س)$

٦) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{س + \text{جتا}٣س}{١ - \text{جا}٣س}$

٧) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{٢\text{جاس} - ١}{\text{جتا}س - ٣}$

٨) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٣}}(٣س - ١)\,\text{جا}(\frac{\pi}{٣}س)$

٩) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{ظا٦س}{\text{لو}(١+٥س)}$

١٠) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جا}(٣س)\,\text{جتا}(٣س)}{س(١-س)}$

١١) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{س - \text{جتا}س}{\text{جاس}}$

١٢) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\frac{٢ - ٢\text{جاس} - ١}{س}$

١) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{١ - ظاس}$ = $-\frac{١}{٢}$

٢) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}}\frac{١ - \text{جتاس}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

٣) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جاس} - ظا٣س}{س}$ = -٣

٤) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{جاس} + س^{٢}ظا(\frac{١}{س})}{س - ١}$ = ٣

٥) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{\text{لو}(٣+\text{جتاس})}{س^{٢}}$ = صفر

٦) $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٢}}\frac{س - \frac{\pi}{٢}}{\text{جا}٣س}$ = $\frac{١}{٣}$

٧) $\text{نها}_{س\to ٠}\frac{ظا(س-٢)}{س^{٢}-س-٢}$ = $\frac{١}{٣}$

٨) $\text{نها}_{س\to 0}\frac{ظتاس - \text{لو}(١+س)}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

ملحوظة مهمة

اشتمل على مجهولة غير معرفة

١) $\frac{٠}{صفر}$ ، $P\in ح$

٢) (عدد سالب) ، ٣) لو(صفر)

٤) لو(عدد سالب)

النهاية اليمنى واليسرى للدالة

توجد النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند النقطة (P) فيما إذا اختلفت

الدالة واحدة قاعدتها عند تلك النقطة.

رمز أشهر الكلمات التي تدرس النهاية اليمنى واليسرى مايلي:

١) دالة المقياس عند صفر المقياس

٢) دالة الصحيح [س]

٣) الدالة المعرفة بقاعدتين حول (س=P)

٤) $\text{نها}_{س\to P}$ (دا(س) = ٠) ← (ع م)

٥) $\text{نها}_{س\to P}\frac{\text{ق}(س)}{\text{ع}(س)} = \frac{\text{دا}(P)}{٠}$

الجذرية: في اللوغاريتمات

$\text{لو}_{ب}(أ^{س}) = \frac{\text{لو}أ^{س}}{\text{لو}ب}$

أثبت على ذلك

١) $\text{لو}_{٢}٧ = \frac{\text{لو}٧}{\text{لو}٢} = ٣$

٢) $\text{لو}_{٣}\frac{١}{٣} = \frac{\text{لو}\frac{١}{٣}}{\text{لو}٣} = -١$

٣) $\text{لو}_{٣}٣ = \frac{\text{لو}٣}{\text{لو}٣} = ١$

٤) $\text{لو}_{٥}٢٥ = \frac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}٥} = ٢$

٥) $\text{لو}_{٢}٦٤ = \frac{\text{لو}٦٤}{\text{لو}٢} = ٦$

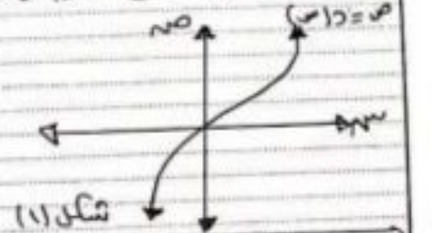
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مفهوم الاتصال:

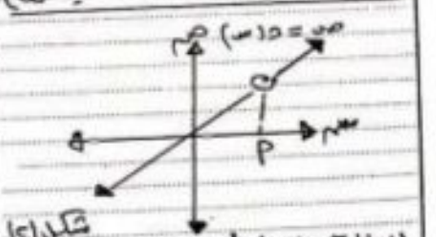
- الاتصال يعني الاستمرار.
- بيانياً: يعني عدم رفع سن القلم عند رسم بيان الدالة.

أو استمرار بيان الدالة دون انقطاع بيانها في مجال تعريفها.

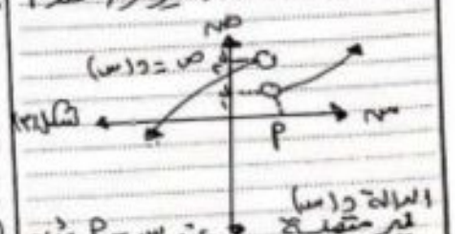
الأشكال التالية توضح مفهوم الاتصال



الدالة (د) متصلة على مجالها



الدالة د(س) غير متصلة عند س = P لأنها غير معرفة عند P



الدالة د(س) غير متصلة عند س = P لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى للدالة د(س)

قاعدة إعادة تعريف الدالة

قاعدة إعادة تعريف الدالة د(س) عند النقطة (س = P) لكي تكون متصلة فيه

د(س) = { د(س) ; س ≠ P
       { ناتج نهاية الدالة ; س = P

الجزء الأول: في الاتصال

- هل الدالة متصلة أم غير متصلة وإعادة تعريفها حتى تكون متصلة إن أمكن.

أمثلة:

(1) إذا كانت د(س) = 2س + 1

فإن الدالة د(س) متصلة عند س = 1 (✓)

التوضيح:

د(1) = 2(1) + 1 = 3

الدالة معرفة عند س = 1

(2) إذا كانت د(س) = |س − 1|

فإن الدالة د(س) متصلة عند س = 1 (✓)

التوضيح:

د(1) = |1 − 1| = 0

ندرس النهاية من اليمين واليسار

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

∴ الدالة غير متصلة عند س = 1

(3) إذا كانت د(س) = 1/س

فإن الدالة متصلة عند س = 0 (✗)

التوضيح:

د(0) = 1/0 = غير معرفة

∴ الدالة غير متصلة عند س = 1

(4) إذا كانت د(س) = |س − 2|

فإن الدالة د(س) متصلة عند س = 1 (✗)

التوضيح:

د(1) = |1 − 2| = |−1| = 1

1 − 1 = 0 غير معرف

∴ الدالة غير متصلة عند س = 1

(5) إذا كانت د(س) = لو(س − 3)

فإن الدالة متصلة عند س = 2 (✗)

التوضيح:

د(2) = لو(2 − 3)

= لو(−1) غير معرفة

∴ الدالة غير متصلة عند س = 2

(6) هل الدالة د(س) = (جا 3س)/(س − 2) متصلة عند س = 2 أم لا

ثم أعد تعريفها حتى تكون متصلة عند س = 2 إن أمكن؟

(7) د(س) = { س + 1 ; س ≠ 1
           { 3 ; س = 1

نهاية د(س) عند س = 1 غير معرفة

ملاحظة مهمة

إذا كانت نهاية د(س) عند س = P خطية

فإن الدالة غير متصلة عند س = P

اتصال الدالة عند النقطة (س = P)

تعريف:

تكون الدالة متصلة عند (س = P) إذا تحقق مايلي:

1) أن تكون الدالة د(س) معرفة عند (س = P) أي أن د(P) موجودة

2) نهاية الدالة د(س) عند (س → P) موجودة أي:

(نهاية د(س) موجودة) س → P

3) نهاية الدالة د(س) عند (س → P) تساوي قيمة الدالة عند (س = P) أي أن:

نهاية د(س) س → P = د(P)

تكون الدالة غير متصلة في الحالات الآتية عند س = P:

1) إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = P

وفي هذه الحالة لا يمكن جعل الدالة متصلة عند النقطة س = P

2) النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

وفي هذه الحالة لا يمكن جعل الدالة متصلة عند هذه النقطة

3) عدم التعيين (ع.ت)

وفي هذه الحالة يمكن جعل الدالة متصلة (بإعادة تعريفها حتى تكون متصلة) عند س = P

إذا كانت نهاية الدالة معرفة عند س = P

ويمكن استخدام م.ت لمعرفة اتصال الدالة عند نقطة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أكمل: $د(س) = \frac{٦ جا ٣\pi س}{س - ٢}$

$د(٢) = \frac{٦ جا ٦\pi}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

عدم تعيين (ع.ت)

غير متصلة، ويمكن إعادة تعريفها حتى تكون متصلة عند س = ٢

$نهـا_{س \to ٢} \frac{٦ جا ٣\pi س}{س - ٢} = نهـا \frac{١٨\pi جتا ٣\pi س}{١}$ (لوبيتال)

$= ١٨\pi جتا ٦\pi$

$= ١٨\pi \times ١ = \boxed{١٨\pi}$

$\therefore د(س) = \begin{cases} \frac{٦ جا ٣\pi س}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ١٨\pi & ، س = ٢ \end{cases}$

لتكن $د(س) = \begin{cases} \frac{جا^٢ س}{٤س^٢} & ، س < ٠ \\ ٢ جتا \frac{س}{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة عند س = ٠، وإذا كانت غير متصلة أعد تعريفها حتى تكون متصلة عند س = ٠.

الحل: $نهـا_{س \to ٠^-} \frac{جا^٢ س}{٤س^٢}$ ← صفرية ∴ (تقريبا)

$= نهـا_{س \to ٠} \frac{(٢س)^٢}{٤س^٢} = \frac{٤س^٢}{٤س^٢} = \boxed{١}$

$نهـا_{س \to ٠^+} ٢ جتا \frac{س}{٢} = ٢ جتا ٠$

$= ٢ \times ١ = \boxed{٢}$

النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ الدالة غير متصلة ولا يمكن جعلها متصلة.

مبرهنات

١) الدالة الثابتة متصلة على ح

٢) الدالة الحدودية متصلة على ح

٣) د(س) = |س| متصلة على ح

٤) د(س) = $هـ^س$ متصلة على ح

٥) د(س) = $\sqrt[٣]{س}$ متصلة على ح

٦) د(س) = جا س متصلة على ح

، د(س) = جتا س متصلة على ح

٧) الدالة الكسرية متصلة على ح / أصفار المقام

٨) د(س) = $\sqrt{د(س)}$ متصلة على الفترة الناتجة من د(س) ≥ ٠

٩) د(س) = لو(س) متصلة على الفترة الناتجة من د(س) > ٠

١٠) جا د(س) حسب نظرية شروط الاتصال

$\frac{د(س)}{هـ(س)}$ حسب نظرية شروط الاتصال

✓ ، ×

٨) تكون الدالة د(س) = جا س متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ إذا كانت $نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = ١$ (✓)

الحل: $د(\frac{\pi}{٢}) = جا س = جا(٢ \times ٤٥)$

$= جا ٩٠ = \boxed{١}$

النهاية = القيمة

$نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = د(\frac{\pi}{٢})$

٩) ✓ أم (×):

تكون الدالة د(س) = س قتا ٢س متصلة عند س = ٠ إذا كان د(٠) = ٢ (×)

التوضيح:

$نهـا_{س \to ٠} س قتا ٢س = نهـا_{س \to ٠} \frac{س}{جا ٢س}$

$= نهـا_{س \to ٠} \frac{س}{٢س} = \frac{١}{٢}$

النهاية ≠ القيمة ، $\frac{١}{٢} \neq ٢$

١٠) إذا كانت د(س) = جا ٥س قتا ٢س تكون متصلة عند س = ٠ إذا كان د(٠) = ... [٢ ، ٥ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ١٠]

التوضيح:

$نهـا_{س \to ٠} جا ٥س قتا ٢س = نهـا_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{جا ٢س}$

$= نهـا_{س \to ٠} \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$

١١) تكون الدالة $د(س) = \frac{جا س ظا س}{١ - جتا ٢س}$ متصلة عند س = ٠ إذا كانت $د(٠) = \frac{١}{٢}$ (×)

التوضيح:

$نهـا_{س \to ٠} \frac{جا س ظا س}{١ - جتا ٢س} = نهـا_{س \to ٠} \frac{جا س ظا س}{٢ جا^٢ س}$ ← عوض

$= نهـا_{س \to ٠} \frac{ظا س}{٢}$

$= \frac{١}{٢}$

$نهـا_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$

$نهـا_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$

١٢) تكون $د(س) = \frac{قتا س - ١}{(\pi - ٢س)^٢}$ متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ إذا كانت $د(\frac{\pi}{٢}) = ...$ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨ ، −٨]

الحل:

$نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{قتا س - ١}{(\pi - ٢س)^٢} = \frac{٠}{٠}$ (ع.ت) (لوبيتال)

$= نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{- قتا س ظتا س}{٢(\pi - ٢س) \times -٢}$

$= نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{قتا س ظتا س}{٤(\pi - ٢س)} = \frac{٠}{٠}$ (لوبيتال)

$= نهـا_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{- قتا س ظتا س ظتا س + قتا س قتا^٢ س}{٤ \times -٢}$

$= \frac{-١ \times ٠ \times ٠ + ١ = -١}{-٨}$

$= \frac{٠ - ١}{-٨} = \frac{-١}{-٨} = \frac{١}{٨}$

١٣) ✓ أم (×):

إذا كانت $نهـا_{س \to ل} د(س)$ موجودة فإن د(س) متصلة عند س = ل (×)

التوضيح: هذا الشرط غير كافٍ

الصح: $نهـا_{س \to ل} د(س) = د(ل)$

أي: النهاية = القيمة

CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الجزء الثاني في الإتصال

ايجاد قيمة المجهول

بإيجاد قيمة المجهول في تصبح الدالة متصلة عند $س = p$ ؛ نجعل نهاية $د(س)$ عند $س \to p$ $= د(p)$ ثم نحل كمعادلة.

أمثلة:

(1) $ب$ ، $أ$ ؟

تكون الدالة $د(س) = جا٦س$ ظتاس متصلة عند $س = 0$ إذا كانت $د(0) = أ^{٣}$ ، $أ \neq 0$ ، $د(س) = ٦$ $(\times)$

التوضيح:

$\lim_{س \to 0} جا٦س$ ظتاس $= \lim_{س \to 0} \frac{جا٦س}{ظاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٦س}{س}$ $= ٦$

$\therefore د(0) = أ^{٣}$ بالمساواة

$أ^{٣} = ٦ \Leftarrow أ = \sqrt[٣]{٦}$

(2) قيمة p التي تجعل الدالة $د(س) = \frac{جتاه س - جتا٣س}{س^{٢}}$ ، $س \neq 0$

دالة متصلة عند $س = 0$ حيث $د(0) = p^{٣}$

$\lim_{س \to 0} \frac{جتاه س - جتا٣س}{س^{٢}}$ $[\frac{0}{0}]$ $(\times)$ $[-\frac{1}{2}$ ، $(\times)$ ، $\frac{9}{2}]$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{جتاه س - جتا٣س}{س^{٢}}$ $\times$ مرافق البسط

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا^{٢}س - جتا^{٢}٣س}{س^{٢}(جتاه س + جتا٣س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س - جا^{٢}٣س}{س^{٢}(جتاه س + جتا٣س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{س} - \frac{جا٣س}{س} \times \frac{جا٣س}{س}$ $\times \frac{1}{جتاه س + جتا٣س}$

$= ١ \times ١ - ٣ \times ٣ \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{7}{2}$

$\therefore p^{٣} = -\frac{7}{2} \Leftarrow p = -\frac{3}{2}$

(3) إذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{جا٣س}{ظا٥س} & ، س < 0 \\ ك & ، س = 0 \\ \frac{جا٢س \times جا٣س}{س^{٢}} & ، س > 0 \end{cases}$ (سجب زوايا)

فأوجد قيمة $ك$ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$.

الحل

$\lim_{س \to 0^{-}} \frac{جا٣س}{ظا٥س} = \frac{3}{5}$

قيمة $ك$ التي تجعل الدالة $د(س) = \frac{جا٣س}{ظا٥س}$ متصلة عند $س = 0$

$\lim_{س \to 0^{+}} \frac{جا٢س \times جا٣س}{س^{٢}}$ (سجب زوايا)

$= \frac{2 \times 3}{1} = 6$

$\therefore ك = 6$

(4) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣ + ظاس & ، س < 0 \\ ك & ، س = 0 \\ ٢ + p^{٢} & ، س > 0 \end{cases}$

أوجد قيم p التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$.

الحل

$\lim_{س \to 0^{-}} ٣ + ظاس = ٣$

$\lim_{س \to 0^{+}} ٢ + p^{٢} = ٢ + p^{٢}$

$\therefore ٢ + p^{٢} = ٣ \Leftarrow p^{٢} = ١$

$\therefore p = \pm ١$

(5) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{أ^{س} - ٣^{س}}{ظاس} & ، س \neq 0 \\ ٢ & ، س = 0 \end{cases}$ ، $أ > 0$

فأوجد قيم $أ$ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - ٣^{س}}{ظاس}$ $= \div$ (عند 0) $= \frac{أ^{س} \ln أ - ٣^{س} \ln ٣}{جتا^{٢}س}$ (قاعدة لوبيتال)

$= \frac{\ln أ - \ln ٣}{1} = \ln \frac{أ}{٣}$

$\therefore \ln \frac{أ}{٣} = ٢ \Leftarrow \frac{أ}{٣} = ه^{٢} \Leftarrow أ = ٣ه^{٢}$

(6) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جا٦س}{ظتاس} & ، س < 0 \\ ك & ، س = 0 \\ ٦س^{٢} \text{ ظتاس} & ، س > 0 \end{cases}$

فأوجد قيمة $ك$ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$.

الحل

$\lim_{س \to 0^{-}} \frac{جا٦س}{ظتاس} = \lim_{س \to 0^{-}} جا٦س \times ظاس$

$= ٦ \times 0 = 0$

$\lim_{س \to 0^{+}} ٦س^{٢} \text{ ظتاس} = \lim_{س \to 0^{+}} ٦س \times \frac{س}{ظاس}$

$= ٦ \times 0 \times ١ = 0$

$\therefore ك = 0$

(7) قيمة p التي تجعل الدالة $د(س) = \begin{cases} ٤س \text{ ظتا}٣س & ، س \neq 0 \\ p^{٣} - ٦ & ، س = 0 \end{cases}$

متصلة عند $س = 0$. تساوي ....

$[0$ ، $\frac{1}{3}$ ، $3]$

الحل

$\lim_{س \to 0} ٤س \text{ ظتا}٣س = \lim_{س \to 0} ٤س \times \frac{1}{ظا٣س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٤س}{ظا٣س} \times \frac{3}{3}$

$= \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} = p^{٣} - ٦ \Leftarrow p^{٣} = \frac{22}{3}$

(8) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جا(أس - ٣س)}{ظتاس} & ، س \neq 0 \\ ٢ & ، س = 0 \end{cases}$

فأوجد قيم $أ$ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{جا(أس - ٣س)}{ظتاس} = \lim_{س \to 0} جا(أس - ٣س) \times ظاس$

$= 0 \times 0 = 0$

$\therefore ٢ = 0$ ، $٢ \neq 0$ ، $\therefore$ لا توجد قيمة لـ $أ$

(9) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جا(أس - ٣س)}{ظتاس} & ، س \neq 0 \\ ٢ & ، س = 0 \end{cases}$

فأوجد قيم $أ$ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{جا(أس - ٣س)}{ظتاس} = \lim_{س \to 0} جا(أس - ٣س) \times ظاس$

$= 0 \times 0 = 0$

$\therefore ٢ = 0$ ، $٢ \neq 0$ ، $\therefore$ لا توجد قيمة لـ $أ$

(10) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جا٣س}{ظا٥س} & ، س < 0 \\ ك & ، س = 0 \\ \frac{جا٢س \times جا٣س}{س^{٢}} & ، س > 0 \end{cases}$ (سجب زوايا)

فأوجد قيمة $ك$ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = 0$.

الحل

$\lim_{س \to 0^{-}} \frac{جا٣س}{ظا٥س} = \frac{3}{5}$

$\lim_{س \to 0^{+}} \frac{جا٢س \times جا٣س}{س^{٢}}$ (سجب زوايا)

$= \frac{2 \times 3}{1} = 6$

$\therefore ك = 6$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑨ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{أ\,س + ب\,س^2 جتا 2س}{س^3} & ، س \neq 0 \\ أ^2 - 6 & ، س = 0 \end{cases}$

أوجد قيم أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = 0

الحل

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{أ\,س}{س^3} + \frac{ب\,س^2 جتا 2س}{س^3} \right)$

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{أ}{س^2} + \frac{ب جتا 2س}{س} \right)$

$= أ + ب \times 1 \times جتا 0$

$= أ + ب = د(0)$

$أ^2 - 6 = أ$

$أ^2 - أ - 6 = 0$ (مقص بسيط)

$(أ - 3)(أ + 2) = 0$

$أ = 3$ ، $أ = -2$

⑩ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جتا 2س - جتا 4س}{س^2} & ، س < 0 \\ جتا س - 9 & ، س \geq 0 \end{cases}$

أوجد قيم أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = 0

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{-2 جا(أ + 2)س \times جا(أ - 2)س}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2 \times (أ+2)س \times (أ-2)س}{س^2}$

$= -2(أ^2 - 4)$ (بسيط)

$= -2أ^2 + 8$ ①

$د(0) = جتا 0 - 9 = -8$

$-2أ^2 + 8 = -8$ بالمساواة ②

$-2أ^2 = -16$

$أ^2 = 8 \Leftarrow أ = \pm 2\sqrt{2}$

⑪ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا 3س}{جتا \frac{\pi}{2} س} & ، س \neq \frac{\pi}{3} \\ أ - 6 جتا س & ، س = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

أوجد قيم أ التي تجعل الدالة متصلة عند $س = \frac{\pi}{3}$

الحل

$\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{ظا 3س}{جتا \frac{\pi}{2} س} = \frac{0}{0}$ (صورة غير معينة)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{قا^2 3س \times 3}{-جا \frac{\pi}{2} س \times \frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-6 قا^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2} جا \frac{\pi}{2}} = \frac{-24}{\pi}$

$د(\frac{\pi}{3}) = أ - 6 جتا \frac{\pi}{3} = أ - 3$ بالمساواة

$أ - 3 = \frac{-24}{\pi} \Leftarrow أ = 3 - \frac{24}{\pi}$

⑫ أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د متصلة عند س = 0

$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{س^2}(قا أس - 1) & ، س \neq 0 \\ أ^2 & ، س = 0 \end{cases}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{س^2}(قا أس - 1)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س^2} \times ظا أس$ واضح بالرياضيا

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س^2} \times (أس)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س^2} \times أ^2 س^2$ ①

$د(0) = أ^2 - 0 = أ^2$ ②

بالمساواة ① = ②

$أ^2 = أ^2 - 0$

$أ^2 - أ^2 = 0$

$أ(أ - 1) = 0$ (اشتركنا)

$أ = 0$ أو $أ = 1$

⑬ أوجد قيم أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = 0

$د(س) = \begin{cases} \frac{جا(1 - جتا 3س)}{س جا س} & ، س < 0 \\ أ + 6 جتا س & ، س \geq 0 \end{cases}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{جا(1 - جتا 3س)}{س جا س}$ العزيمة

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا(2 جا^2 \frac{3}{2} س)}{س \times س}$ (بسيط)

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا(2 \times \frac{3}{2} س \times \frac{3}{2} س)}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا \frac{9}{2} س^2}{س^2}$

$= \frac{9}{2}$ ①

$د(0) = أ + 6$ ②

بالمساواة ① = ②

$أ + 6 = \frac{9}{2} \Leftarrow أ = \frac{-3}{2}$

⑭ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{قا أس - ظا أس}{س^3} & ، س \neq 0 \\ أ^2 - 1 & ، س = 0 \end{cases}$

أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د متصلة عند س = 0

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{(قا أس - 1) - (ظا أس - 0)}{س^3}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(قا أس - 1)}{س^3} \times \frac{(قا أس + 1)}{(قا أس + 1)} - \frac{(ظا أس - 0)}{س^3} \times \frac{(قا أس + ظا أس)}{(قا أس + ظا أس)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^2 أس - 1}{س^3 (قا أس + 1)} - \frac{ظا أس}{س^3} \times \frac{(قا أس + ظا أس)}{(قا أس + ظا أس)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 أس}{س^3 (قا أس + 1)} - \frac{ظا أس}{س^3} \times \frac{(قا أس + ظا أس)}{(قا أس + ظا أس)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا أس}{س^3} \times \frac{ظا أس}{(قا أس + 1)} - \frac{(قا أس - ظا أس)}{(قا أس + ظا أس)}$ (اختصار المرافق)

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^2 أس - ظا^2 أس}{قا أس + ظا أس}$ ← قا^2 أس - ظا^2 أس = 1

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{قا أس + ظا أس}$

$= \frac{1}{قا 0 + ظا 0} = \frac{1}{1 + 0} = \frac{1}{1}$ ①

$د(0) = أ^2 - 1$ ②

بالمساواة ① = ②

$أ^2 - 1 = 1 \Leftarrow أ^2 = 2 \Leftarrow أ = \pm \sqrt{2}$

⑮ أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د متصلة عند س = 0

$د(س) = \begin{cases} \frac{5س + س^2 جا \frac{1}{س}}{ظا س} & ، س < 0 \\ أ^2 + أ + 1 & ، س \geq 0 \end{cases}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{5س + س^2 جا \frac{1}{س}}{ظا س}$ (بسيط)

$= \lim_{س \to 0} \frac{5س}{س} + \frac{س^2 جا \frac{1}{س}}{س}$

$= \lim_{س \to 0} 5 + س جا \frac{1}{س}$

$= 5 + 0 \times$ محدود $= 5$

$د(0) = أ^2 + أ + 1$

$أ^2 + أ + 1 = 5 \Leftarrow أ^2 + أ - 4 = 0$

$أ = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٦) لتكن د(س) = { (ظاس − ظاس) / (هـ^ظاس − ١) ، س ≠ ٠ ; ل − ٣جتاس ، س = ٠ }

أوجد قيمة ل التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

الحل: نهـ د(س) = نهـ (هـ^ظاس − ظاس − ٣) / (هـ^ظاس − ١) (بضرب البسط والمقام في مرافق البسط)

= نهـ (هـ^ظاس − هـ^س + هـ^س − ظاس − ٣) / (هـ^ظاس − ١)

= نهـ (هـ^س (هـ^(ظاس − س) − ١) + (هـ^س − ظاس − ٣)) / (ل (هـ^ظاس − ١))

= نهـ ((هـ^س − ٣)(هـ^(ظاس − س) − ١)) / (ل (هـ^ظاس − ١)) + نهـ (هـ^س − ظاس − ٣) / (ل (هـ^ظاس − ١))

= نهـ (هـ^س − ٣) / ل + نهـ (هـ^(ظاس − س) − ١) / (ل (ظاس − س)) = ٤/ل + ١/ل = ٥/ل ← ①

د(٠) = ل − ٣جتا٠س = ل − ٣جتا٠ = ل − ٣

بالمساواة ② ← ل − ٣ = ٤/ل (بضرب طرفين × ل)

ل^٢ − ٣ل = ٤ ⇐ ل^٢ − ٣ل − ٤ = ٠

(ل − ٤)(ل + ١) = ٠

إما ل = ٤ أو ل = −١

١٧) أوجد قيمة ب التي تجعل الدالة د متصلة عند س = ٠

د(س) = { (جتاس − جتا^٢س) / (ب س^٢) ، س ≠ ٠ ; ١/٢ ب ، س = ٠ }

نهـ د(س) = نهـ (جتاس − جتا^٢س) / (ب س^٢) (مشترك)

= نهـ جتاس (١ − جتاس) / (ب س^٢) (المقابل)

= نهـ جتاس / ب × نهـ (١ − جتاس) / س^٢ (بضرب البسط والمقام في مرافق البسط)

= نهـ جتاس / ب × نهـ جا^٢س / (س^٢ (١ + جتاس)) (بالتعويض)

= نهـ جتاس / ب × نهـ (جاس/س)^٢ × نهـ ١/(١ + جتاس)

= ١/ب × ١^٢ × ١/٢ = ١/٢ ب

د متصلة عند س = ٠ ⇐ نهـ د(س) = د(٠)

١/٢ ب = ١/٢ ب ← ب = ١

ملاحظة:

ظا٩٠ غير معرف ، ظا٩٠ غير معرف

قتا٩٠ غير معرف ، قتا٩٠ غير معرف

ظتا٠ غير معرف ، ظتا١٨٠ غير معرف

ههتا٠ غير معرف ، ظتا١٨٠ غير معرف

ملاحظة مهمة جداً:

تكون الدالة غير متصلة إذا كانت تحتوي على:

١) ∞ ٢) عدد ÷ ٠ ٣) لوغ (٠) ٤) جذر تربيعي لعدد سالب

٥) ظا٩٠ ٦) قا٩٠ ٧) ظتا٠ ٨) قتا٠ ٩) ظتا١٨٠ ١٠) قتا١٨٠

نشاط

١) إذا كانت د(٠) = P

فإن نهـ د(س) = نهـ جا^٢س + ٢س / ظاس

دالة متصلة عند س = ٠ إذا كانت

قيمة P = ٢ ∈ [٢، ٣، ٤]

٢) أ ، ب ، ح ∈ ح

تكون الدالة د(س) = جا٦س ظتاس

متصلة عند س = ٠ إذا كانت د(٠) = ٣ (X)

٣) د(س) = { P س قاس قتاس ، س ≠ ٠ ; P^٢ + س − ٢ ، س = ٠ }

أوجد قيمة P التي تجعل الدالة متصلة عند س = صفر

P^٢ − ٢ = ٠ ⇐ P = ±√٢

٤) د(س) = { (١ − جاس) / (٣ − ٢س)^٢ ، س ≠ π/٢ ; ح / ٣P ، س = π/٢ }

أوجد قيمة P التي تجعل الدالة متصلة عند س = π/٢

٥) د(س) = { (أ س^٢ + ب س + جـ) / س ، س < ٠ ; ٣ ، س = ٠ ; ٦س / (جا٣س + ظا٢س) ، س > ٠ }

أوجد قيمة P، ب التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

جـ = ٣ ، ب = −٦

٦) د(س) = { (جتاس − ١) / س ، س < ٠ ; ٢ ، س = ٠ ; (ظا٣س + ظا٢س) / س ، س > ٠ }

أوجد قيمة P التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

٧) د(س) = { (جتا^٢س − P جتاس + (P − ١)) / س^٢ ، س ≠ ٠ ; ٣/٢ ، س = صفر }

أوجد قيمة P التي تجعل الدالة متصلة عند س = صفر

P = ٢ ، ٣ = ٠

٨) د(س) = { (P − ٢ جتا٣س) / (س جاس) ، س ≠ ٠ ; س + ٣ ، س = ٠ }

أوجد قيمة P، ب التي تجعل الدالة متصلة عند س = صفر

P = ٢ ، ب = ٣

٩) د(س) = { (٥ − ١٠ جتاس) / (ب (١ − ٤ جا^٢س)) ، س ≠ π/٦ ; ٣ ، س = π/٦ }

أوجد قيمة ب التي تجعل الدالة متصلة عند س = π/٦

ب = ٥/٣

١٠) (أ) أوجد قاعدة الدالة د(س) = (س − π) ظتا(٢٢ − س)

الدالة د(س) = (س − π) ظتا(٢٢ − س) تكون متصلة إذا كانت د(π) = −١ (✓)

عند س = π

ب) إذا كانت نهـ د(س) موجودة

س ← P

فإن د(س) متصلة عند س = P (X)

١١) (أ) أوجد قاعدة الدالة د(س) = جاس ظا٣س / س^٢ تكون متصلة إذا كان د(٠) = −١ (X)

عند س = ٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عنصر رقم 10

10) $(\forall s)\ f(s)=\dfrac{\text{جا}\pi s}{s^2-s}$ تكون الدالة f متصلة إذا كانت $f(1)=-\pi$ (ب)

11) $(\forall s)\ f(s)=\dfrac{\text{ظا}s-1}{s-\frac{\pi}{4}}$ تكون متصلة إذا كان $f(\frac{\pi}{4})=$ صفر (ب)

12) $(\forall s)\ f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{جا}s+\text{ظا}s}{s}, & s\neq 0\\ 2, & s=0\end{cases}$

أوجد قيمة a التي تجعل f متصلة عند $s=0$ (ب)

13) $(\forall s)\ f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{ظا}(2s-\pi)}{s-\pi}, & s\neq \pi\\ p^2-3p, & s=\pi\end{cases}$

أوجد قيمة p التي تجعل f متصلة عند $s=\pi$ ؟ $p=2$ أو $p=1$

14) أوجد قيمة (p) التي تجعل f متصلة عند $s=0$.

$f(s)=\begin{cases}p\,s\,\text{قتا}s, & s\neq 0\\ p^2-2s, & s=0\end{cases}$

$p=2$ أو $p=-1$

15) أوجد قيمة p التي تجعل f متصلة عند $s=\frac{\pi}{4}$

$f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{ظا}s-1}{s-\frac{\pi}{4}}, & s\neq\frac{\pi}{4}\\ p, & s=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

$p=2$ (ب)

16) أوجد قيمة p التي تجعل f متصلة عند $s=0$

$f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{جا}s-\text{جا}2s}{s}, & s\neq 0\\ p, & s=0\end{cases}$

$p=-1$

17) أوجد قيمة p التي تجعل f متصلة عند $s=\frac{\pi}{3}$

$f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{جا}s-\text{جا}\frac{\pi}{3}}{s-\frac{\pi}{3}}, & s\neq\frac{\pi}{3}\\ p, & s=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

$p=\frac{1}{2}$

18) أوجد قيمة (k) التي تجعل f متصلة عند $s=0$.

$f(s)=\begin{cases}\dfrac{1-\text{جتا}2s}{s\,\text{ظا}s}, & s\neq 0\\ k, & s=0\end{cases}$

$k=1$ (ب)

19) أوجد قيمة (k) التي تجعل f متصلة عند $s=0$.

$f(s)=\begin{cases}\dfrac{s^2}{2(\text{جتا}(2s)-1)}, & s<0\\ \dfrac{\text{جتا}(2s)+1}{s+2}, & s\geq 0\end{cases}$

$k=-\frac{1}{4}$

20) $f(s)=\dfrac{\text{جا}s-\text{جا}2s}{1-2\,\text{جتا}s}$ متصلة عند $s=\frac{\pi}{3}$

وإذا لم تكن متصلة أعد تعريفها بما يجعلها كذلك فإنها تكون متصلة للتأكد فيما إذا كانت متصلة

$f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{جا}s-\text{جا}2s}{1-2\,\text{جتا}s}, & s\neq\frac{\pi}{3}\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}, & s=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

عناصر النهايات والاتصال

1) $\lim_{s\to\frac{\pi}{4}}\text{جا}(\text{ظا}s)\,\text{جتا}(\frac{\pi}{4}-s)=$

$\lim_{s\to\frac{\pi}{4}}\text{جا}(\text{ظا}\frac{\pi}{4})\,\text{جتا}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})$

$=\text{جا}(1)\,\text{جتا}(0)$

$=\text{جا}1\times\text{جتا}0$

$=$ صفر $\times$ مقدار $=$ صفر

2) $\lim_{s\to\frac{\pi}{2}}\text{ظا}s\,\text{جا}2s\,\text{جتا}s=$

$\lim_{s\to\frac{\pi}{2}}\text{جا}s\,\text{جا}2s$

$=\text{جا}\frac{\pi}{2}\,\text{جا}\pi$

$=1\times 0=0$

3) $\lim_{s\to 0}(\text{جا}s)^{\text{جا}s}=$

$[0,\frac{1}{2},3]$

$(\frac{1}{2})^{\text{جا}0}$

$(\frac{1}{2})^0$

صفر $\times$ جاه $=$ صفر

4) إذا كانت $f(s)=\dfrac{\log 3s}{\text{جا}s}$ فإن $\lim_{s\to 0}f(s)=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\log 3s}{\text{جا}s}$

بفرض $p=$ [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]

$\lim_{s\to 0}\dfrac{s\log p}{\text{جا}s}=\lim_{s\to 0}\dfrac{\log p}{\frac{\text{جا}s}{s}}$

$\therefore \log p=2\log 3$

$\log p=\log 3^2$

$p=9$

5) إذا كانت $f(s)=\begin{cases}\dfrac{\text{جا}(p+1)s}{s}+1, & s<0\\ \dfrac{\text{ظا}ps}{s}+2, & s\geq 0\end{cases}$

متصلة عند $s=0$ فإن $p=$

$\lim_{s\to 0^-}f(s)=\lim_{s\to 0^+}f(s)=f(0)$

$\lim_{s\to 0^-}\dfrac{\text{جا}(p+1)s}{s}+1=\lim_{s\to 0^+}\dfrac{\text{ظا}ps}{s}+2=f(0)$

$(p+1)+1=p+2=f(0)$

$p+1=p+2=f(0)$

$p+1=p+2$

$1=2$ (غير صحيح)

$\therefore p\in\varnothing$

6) $\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s-\text{جتا}3s}{s^2}=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}^2 3s-\text{جا}^2 s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}3s\,\text{جا}3s-\text{جا}s\,\text{جا}s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{3\,\text{جا}s\,\text{جا}3s-\text{جا}s\,\text{جا}s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}s(3\,\text{جا}3s-\text{جا}s)}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}s}{s}\times\dfrac{3\,\text{جا}3s-\text{جا}s}{s}$

$=1\times\lim_{s\to 0}\dfrac{3\,\text{جا}3s-\text{جا}s}{s}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{3\times 3\,\text{جا}3s-\text{جا}s}{3s}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{9\,\text{جا}3s-\text{جا}s}{3s}=\dfrac{1}{3}$

7) $\lim_{s\to 1}(s^2-2s+1)\,\text{جا}(s-1)=$

$[0,1,2,3]$

$0\times\text{جا}0=0$

8) $\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s-\text{جتا}2s}{s^2}=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}^2 2s-\text{جا}^2 s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}2s\,\text{جا}2s-\text{جا}s\,\text{جا}s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{2\,\text{جا}s\,\text{جا}2s-\text{جا}s\,\text{جا}s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}s(2\,\text{جا}2s-\text{جا}s)}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جا}s}{s}\times\dfrac{2\,\text{جا}2s-\text{جا}s}{s}$

$=1\times\lim_{s\to 0}\dfrac{2\,\text{جا}2s-\text{جا}s}{s}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{2\times 2\,\text{جا}2s-\text{جا}s}{2s}$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{4\,\text{جا}2s-\text{جا}s}{2s}=\dfrac{3}{2}$

9) $\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s-\text{جتا}^3 s}{s^2}=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s(1-\text{جتا}^2 s)}{s^2}$ عامل مشترك

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s\,\text{جا}^2 s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\text{جتا}s\times\dfrac{\text{جا}s}{s}\times\dfrac{\text{جا}s}{s}$

$=1\times 1\times 1=1$

10) $\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s-\text{جتا}^3 s}{s^2}=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s(1-\text{جتا}^2 s)}{s^2}$ عامل مشترك

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s\,\text{جا}^2 s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\text{جتا}s\times\dfrac{\text{جا}s}{s}\times\dfrac{\text{جا}s}{s}$

$=1\times 1\times 1=1$

11) $\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s-\text{جتا}^3 s}{s^2}=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s(1-\text{جتا}^2 s)}{s^2}$ عامل مشترك

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s\,\text{جا}^2 s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\text{جتا}s\times\dfrac{\text{جا}s}{s}\times\dfrac{\text{جا}s}{s}$

$=1\times 1\times 1=1$

12) $\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s-\text{جتا}^3 s}{s^2}=$

$\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s(1-\text{جتا}^2 s)}{s^2}$ عامل مشترك

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{\text{جتا}s\,\text{جا}^2 s}{s^2}$

$=\lim_{s\to 0}\text{جتا}s\times\dfrac{\text{جا}s}{s}\times\dfrac{\text{جا}s}{s}$

$=1\times 1\times 1=1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$= \lim_{س \to 1} \frac{1}{(س-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$= \lim_{س \to 3} \frac{1}{(س-1)^2} = \frac{1}{4} = 1$

٨) إذا كانت $ق = \frac{2 - 2جتا س}{جا^2 س}$ ، $0 < ق < 1$

فإن أكبر قيمة صحيحة لـ $ق$ هي .....

$\lim_{س \to 0} \frac{2 - 2جتا س}{جا^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{2(1 - جتا س)}{جا^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{2 \times 2جا^2 \frac{س}{2}}{جا^2 س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{4 س^2}{س^2} \times \left(\frac{\frac{س}{2}}{س}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1$

$\therefore ق = 1$

٩) يمكن إعادة تعريف الدالة $د(س) = \frac{لو س}{جا(لو س)}$ لتصبح متصلة

عند $س = 1$ ، $د(1) = \frac{لو 1}{جا(لو 1)} = \frac{0}{0}$ (ح - ب)

يمكن إعادة التعريف حتى تكون متصلة إذا كانت نهاية الدالة موجودة ، نهاد(س) = ؟

$س \to 1$

١٠) الدالة $د(س) = لو(س - 1)$ متصلة عند $س =$ .....

{-١ ، ٠ ، ١ ، ٢} (ج)

الحل

يكون اللوغاريتم متصلة إذا كان ما داخله موجب (لو+)

بالتعويض $س = 2$

$د(س) = لو(4 - 1) = لو 3$ ← معرفة

١١) إذا كانت $د(س)$ متصلة عند $س = P$

، $د(P) = 2 - نها_{س \to P} د(س)$

فإن $د(P) = 1$ (ح)

الحل

$\because د(P) = 2 - نها_{س \to P} د(س)$

$1 = 2 - نها_{س \to P} د(س)$

$1 - 2 = - نها_{س \to P} د(س)$

$-1 = - نها_{س \to P} د(س)$

$1 = نها_{س \to P} د(س)$

$\therefore نها_{س \to P} د(س) = د(P) = 1$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = P$

نشاط ① إذا كانت $د(س) = س$ قتاس

، $س \neq 0$ فإن الدالة متصلة عند $س = 0$ ، إذا كانت $د(0) =$ ..... [٠ ، ٠,٦ ، ١ ، ٣٫٢٧]

② إذا كانت $د(س) = \frac{جا 3س}{س^2 - س}$

حيث $س \in ح - \{1\}$ فإن الدالة متصلة عند $س = 0$ إذا كانت

$د(0) = 3$ (X)

المشتقة ذات الرتب العليا

$ص'$ ، $ص''$ ، $ص'''$ ، ...

تمارين

١) إذا كانت $ص = هـ^{س}$ فإن

نتيجة المقدار $ص'' - 3ص' + 2ص = ...$

[صفر ، $هـ^{س}$ ، $3هـ^{س}$ ، $12هـ^{س}$]

التوضيح : $\because ص = هـ^{س} \leftarrow$ أسية

$ص' = هـ^{س} \times 2 \times لو هـ$

$ص'' = 2هـ^{س}$ ← ①

$ص''' = 2هـ^{س} \times 2 \times لو هـ$

$ص''' = 4هـ^{س}$ ← ②

نعوض عن $ص'$ ، $ص''$ ، $ص'''$ في المقدار

$ص''' - 3ص' + 2ص$

$4هـ^{س} - 3 \times 2هـ^{س} + 2هـ^{س}$

$4هـ^{س} - 6هـ^{س} + 2هـ^{س}$

$-2هـ^{س} + 2هـ^{س} =$ صفر

٢) إذا كان $د(س) = ظاس$ ، $د'(س) = ق^2$

فإن $(ظاس)^2 + (ص')^2 = 2$ (ح)

التوضيح :

$ص' = جتاس - 1(-جاس)$

$ص' = جتاس + جاس$ ← ①

$ص'' = -جاس + جتاس$ ← ②

نعوض في $(ص')^2 + (ص'')^2$

$(جتاس + جاس)^2 + (-جاس + جتاس)^2$

مربع كامل + مربع كامل

$جتا^2 س + 2جتاس جاس + جا^2 س$

$+ جا^2 س - 2جتاس جاس + جتا^2 س$

$جتا^2 س + جا^2 س$ | $+ جا^2 س + جتا^2 س$

المطابق الفيثاغوري | المطابق الفيثاغوري

$1 + 1 = 2$

٣) إذا كانت $ص'' - 2س = 0$

، $ص(1) = 3$ فإن : $ص = ص^3$

الحل

$\because ص'' - 2(س) = 0$

$\therefore ص'' = 2س$ (نذكر الفرضية)

$ص' = س^2$ (نشتق)

$4ص^3 ص' = 4$

$ص' = \frac{4}{4ص^3}$

$ص' = \frac{1}{ص^3}$ ...

٤) إذا كان $د(س) = ظا^2 س$ ، $د'(س) = ق$

فإن : $(ص + 3س)^2 = 2ص$ (ح)

فإن $ص'' =$ صفر (ح)

التوضيح : $(ص + 3س)^2 = 2ص$ (نأخذ الجذر)

$ص + 3س = ص$ (نشتق)

$ص' + 3 = ص' \Leftarrow ص'' = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥ ← ١ ، ٢ ، ٣ :

إذا كانت ص = لو قتاس

وكانت صـ + ٢ ص = ٠

فإن قيمة ظتاس = ١ (ب)

التوضيح:

∵ ص = لو قتاس

ص = $\frac{\text{مشتاس ظتاس}}{\text{قتاس}}$

ص = − ظتاس ← ①

صـ = − ١ − قتأس

صـ = قتأس ← ②

نعوض في صـ + ٢ ص = ٠

قتأس + ٢(− ظتاس) = ٠

قتأس + ١ − ٢ ظتاس = ٠

ظتأس − ٢ ظتاس + ١ = ٠ (نشتق)

(ظتاس − ١)(ظتاس − ١) = ٠

∴ ظتاس − ١ = ٠ ← ظتاس = ١

٦ إذا كان:

ص = (قاس + ظاس)٢

راشد ١٣: ص = $\frac{٢ ص}{\text{جتاس}}$

الحل مشتقة أضرب

صـ = ٢(قاس + ظاس)(قاس ظاس + قأس)

عامل مشترك

صـ = ٢(قاس + ظاس)(ظاس + قأس) قاس

صـ = ٢ قاس (قاس + ظاس)٢ ← نتيجة ص

صـ = ٢ قاس × ص

ص = $\frac{٢ ص}{\text{جتاس}}$ (قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$)

٧ إذا كان ص = لو (جاس) ،

فإذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ جاس

فإن ص + صـ٢ = ١ (x)

التوضيح:

∵ ص = $\frac{١}{٢}$ جاس

∴ صـ = $\frac{١}{٢}$ جتاس

صـ٢ = $\frac{١}{٤}$ (− جاس)

صـ٢ = $\frac{١}{٤}$ جاس نعوض في

ص + صـ٢

$\frac{١}{٢}$ جاس + ($-\frac{١}{٤}$ جاس)

$\frac{١}{٤}$ جاس − $\frac{١}{٤}$ جاس = صفر

٨ إذا كانت ص = س جاس

فإن ٤(صـ)٢ + (ص)٢ = ٠٠٠٠

[٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٢٠٦٣٢]

التوضيح: ص = جاس س

∴ صـ = جتاس س × ١ ← صـ = جتاس س ←

صـ = − ٢ × جتاس س ×

صـ = − ٤ جتاس س ← ③

نعوض ②، ③ في ٤(صـ)٢ + (ص)٢

٤(ص)٢ + (صـ)٢

٤(٢ جتاس)٢ + (− ٤ جاس)٢

٤ × ٤ جتأس + ١٦ جأس

١٦ جتأس + ١٦ جأس

١٦ (جتأس + جأس) ← المرهبي

١٦ × ١ = ١٦

٩ إذا كانت ص = $\frac{\text{س}}{\text{لو س}}$

فإن س صـ + ١ = ٠٠٠٠

[− ١ ، ٠ ، ١ ، ٢]

التوضيح: لو س

ص = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ← (ص = س ص)

صـ = − ١ س ص نعوض في

س صـ + ١

س × − ١ س ص + ١

− ص + ١ = صفر

١٠ إذا كانت ص = س − لو س

راشد ١٣: س صـ − صـ − $\frac{١}{\text{س}}$ = ٠

الحل

∵ ص = س − لو س

∴ صـ = ١ − $\frac{١}{\text{س}}$ ②

صـ = − ($\frac{١}{\text{س}}$)

صـ = $\frac{١}{\text{س}}$ ③ نعوض في ②

س صـ − صـ − $\frac{١}{\text{س}}$

س × $\frac{١}{\text{س}}$ − (١ − $\frac{١}{\text{س}}$) − $\frac{١}{\text{س}}$

١ − ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ − $\frac{١}{\text{س}}$ = صفر

١١ إذا كان ص = لو (جتاس)

راشد ١٣: ٢ صـ ص + صـ٣ = صفر

الحل

∵ ص = لو (جتاس)

صـ = $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ⇐ صـ = − ظاس ①

صـ = − ظاس ← ②

صـ٢ = − ٢ قاس × قاس × ظاس

صـ٢ = − ٢ قأس ظاس

نعوض في

٢ صـ ص + صـ٣

٢ × − قاس × − ظاس + (− ٢ قأس ظاس)

٢ قأس ظاس − ٢ قأس ظاس = صفر

١٢ إذا كانت ص = $\frac{\text{س}}{\text{لو س}}$

راشد ١٣: س صـ + ص − $\frac{١}{\text{س}}$ = صفر

الحل

∵ ص = $\frac{\text{س}}{\text{لو س}}$ أضرب لو للطرفين

لو ص = س أشتق ضمنياً

صـ = ١ − $\frac{١}{\text{س}}$ ⇐ $\frac{١}{\text{س}}$ = ١ − صـ ⇐ صـ = ١ + $\frac{١}{\text{س}}$

صـ = $\frac{١}{\text{س}}$ نعوض في

س صـ + ص − $\frac{١}{\text{س}}$

س × $\frac{١}{\text{س}}$ + ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ − $\frac{١}{\text{س}}$ = ١ − ١ = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٣) إذا كان $ص = (س)^{ن}$

فإذا كانت $ص^{٢} - س^{٢} = ٣$

فإن $\frac{دص}{دس} = (\frac{٣س}{ص})^{٣}$ (برهن)

التوضيح:

$ص^{٢} - س^{٢} = ٣$ (نشتقه)

$\therefore ٢ص\frac{دص}{دس} - ٢س = ٠$

$٢ص\frac{دص}{دس} = ٢س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{س}{ص}$ ← نشتقه بالكسر

$\frac{دص}{دس} = \frac{١ \times ص - س \times \frac{دص}{دس}}{ص^{٢}}$ ← نعوض عنها

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص - \frac{س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}}$ ← وهو مقام

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}}$ ← مقام البسط

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص^{٣}}$ ← قيمة ٣ نحتاجها

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{ص^{٣}}$ (أس المقام وجذر المقام)

$\therefore \frac{دص}{دس} = (\frac{٣}{ص})^{٣}$

(١٢) إذا كان $ص = \frac{١}{٢}ظا س$ فإن $\frac{دص}{دس} = ...$

(ص ظا س ، $\frac{دص}{دس}$ ظا س ، $\frac{١}{٢}$ ص ظتا س)

الحل: $\therefore ص = \frac{١}{٢}ظا س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} \times ٢ \times ظا س \times ظا س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ظا^{٢} س$ ← نوضح

$\therefore \frac{دص}{دس} = ص \times ظا س$ ($ص = \frac{١}{٢}ظا س$ ، $٢ص = ظا س$)

(١٥) إذا كان

$ص = جا^{ن} س$ فإن $\frac{دص}{دس} = ...$

[$ن جا^{ن-١} س جتا س$ ، $ن ص ظتا س$]

الحل: $\frac{دص}{دس} = ن جا^{ن-١} س \times جتا س$

$\frac{دص}{دس} = ن جا^{ن-١} س \times جا س \times \frac{جتا س}{جا س}$ ← نضرب ونقسم

$\frac{دص}{دس} = ن جا^{ن} س \times \frac{جتا س}{جا س}$

$\frac{دص}{دس} = ن ص \times ظتا س$

(١٤) إذا كانت $ص = ظا س$ فإن $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ...$ (X)

الحل: $\frac{دص}{دس} = ن ظا^{ن-١} س \times قا^{٢} س$

$ص_{١} = ن ظا^{ن-١} س \times قا^{٢} س$

$ص_{٢} = ن(ن-١) ظا^{ن-٢} س \times قا^{٢} س \times قا^{٢} س$

$ص_{٢} = ن(ن-١) ظا^{ن-٢} س \times ظا^{٢} س \times قا^{٢} س \times قا^{٢} س$

$ص_{٢} = ن(ن-١) ص \times ظا^{٢} س \times قا^{٢} س$

ملاحظة: ليكون للطالبة في درس الإثباتات الدخول في $د^{ن}$ ودون أن تجعل $ص^{ن}$ صورية

مثال ١:

إذا كانت $٢ص^{٢} - ٣س^{٢} = صفر$

فأثبت أن: $٢ص\frac{دص}{دس} - ٣ = ٠$

الحل: $\therefore ٢ص^{٢} - ٣س^{٢} = ٠$ (نشتقه)

$٤ص\frac{دص}{دس} - ٦س = ٠$ (÷ ٢)

$٢ص\frac{دص}{دس} - ٣س = ٠$ (منشتق ضرب وهو نقوم به)

$٢ص \times \frac{دص}{دس} + ٢ص\frac{دص}{دس} - ٣ = ٠$

$٢(\frac{دص}{دس})^{٢} + ٢ص\frac{دص}{دس} - ٣ = ٠$ (نرتب)

$٢\frac{دص}{دس} + ٢ص\frac{دص}{دس} - ٣ = ٠$

نقسم ثابت وهو المطلوب

مثال ٢:

إذا كان $س = لو(س+ص)$

فأثبت أن: $١ + \frac{دص}{دس} = صفر$

الحل: $\therefore س = لو(س+ص)$ (نشتقه)

$\therefore ١ = \frac{١ + \frac{دص}{دس}}{س+ص}$ (ضرب تبادلي)

$س + ص = ١ + \frac{دص}{دس}$ (نشتقه)

$١ + \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس}$

$١ + \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} = صفر$

نقسم الثابت وهو المطلوب

مثال ٣: إذا كانت $س ص = ٢ جتا س$

فأثبت أن: $ص + س\frac{دص}{دس} + ٢جتا س = ٠$

الحل: $\therefore س ص = ٢ جتا س$ (نشتقه) ضربية

$١ \times ص + س\frac{دص}{دس} = -٢ جا س$

$ص + س\frac{دص}{دس} = -٢ جا س$ (نشتقه) ضربية

$ص' + ١ \times ص + س\frac{دص}{دس} = -٢ جتا س$

$ص + ص + س\frac{دص}{دس} + ٢جتا س = ٠$ ← السؤال

$٢ص + س\frac{دص}{دس} + ٢جتا س = ٠$ ← نقسم الثابت وهو المطلوب

تمرين: إذا كانت $س ص = ظتا س$

فأثبت أن: $١ + س^{٢}ص + ص + س\frac{دص}{دس} = ٠$

الحل: $\therefore س ص = ظتا س$ (نشتقه)

$١ \times ص + س\frac{دص}{دس} = -قتا^{٢} س$

$ص + س\frac{دص}{دس} + قتا^{٢} س = ٠$ ← نقسم

$ص + س\frac{دص}{دس} + ١ + ظتا^{٢} س = ٠$

$ص + س\frac{دص}{دس} + ١ + (س ص)^{٢} = ٠$

$ص + س\frac{دص}{دس} + ١ + س^{٢}ص^{٢} = ٠$

نشاط

(١) إذا كانت $ص = س ظا س$

فأثبت أن: $\frac{دص}{دس} = ٢ قا^{٢}(١+ص)$

(٢) إذا كانت $س = جا ص$ فأثبت أن:

$\frac{دص}{دس} - س(\frac{دص}{دس})^{٣} = صفر$

(٣) إذا كانت $ص^{٢} + س^{٢} = ٥$ فأثبت أن:

$\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

مثال ٤: إذا كانت $س ص = ٢ جتا س$

فأثبت أن: $س\frac{دص}{دس} + ٢ص + ٢جتا س = ٠$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نماذج أمتحانات 2021

(1) إذا كانت ص = س² + هـ^س فإن قيمة س التي تجعل ص″ = ٤ هي ......

[صفر ، ١ ، لو٢ ، لو٣]

الحل

∵ ص = س² + هـ^س

ص′ = ٢س + هـ^س

ص″ = ٢ + هـ^س

٤ = ٢ + هـ^س

٤ − ٢ = هـ^س ⇐ هـ^س = ٢

(اللوغاريتمية) لو هـ^س = لو٢ ⇐ س = لو٢

(2) إذا كانت ص = لو قاس فإن ٢ص − لو ص″ = ... (ب)

الحل

ص = لو قاس ⇐ ص′ = قاس ظاس / قاس

ص′ = ظاس

ص″ = قا²س

∴ ٢ص − لو ص″ = ٢لو قاس − لو قا²س

= ٢لو قاس − ٢لو قاس = ٠

(3) إذا كانت د(س) = ٥ هـ^{−أس} وكانت د‴(٠) = ٤٠ فإن قيمة أ = ...

[−٢ ، صفر ، ١ ، ٢]

الحل

∵ د(س) = ٥ هـ^{−أس} ⇐ أسية

د′(س) = ٥ هـ^{−أس} × −أ × لوهـ

د′(س) = −٥أ هـ^{−أس} ← (1)

د″(س) = −٥أ هـ^{−أس} × −أ × لوهـ

د″(س) = +٥أ² هـ^{−أس} ← (2)

د‴(س) = ٥أ² × هـ^{−أس} × −أ × لوهـ

د‴(س) = −٥أ³ هـ^{−أس}

د‴(٠) = −٥أ³ هـ^{−أ×٠}

٤٠ = −٥أ³ × هـ⁰ ، (هـ⁰ = ١)

٤٠ = −٥أ³ ÷ (−٥)

−٨ = أ³ (∛)

−٢ = أ

(4) إذا كانت هـ^ص = جاس فإن (ص′)² + ص″ = ...

[−١ ، صفر ، ١ ، ٢]

الحل

∵ هـ^ص = جاس (اللوغاريتمية)

ص = لو جاس

ص′ = جتاس / جاس ⇐ ص′ = ظتاس

ص″ = −قتا²س

∴ (ص′)² + ص″

ظتا²س + −قتا²س

ظتا²س − قتا²س ⇐ متطابقة

= −١

قتا²س − ظتا²س = ١ ⇐ ظتا²س − قتا²س = −١

نشاط: إذا كانت ص = أ^٧ هـ^س ، ص^(٥٠) = ... فإن قيمة أ = ١٠٤ (ب)

المشتقة النونية (ص^(ن)) لدوال

المشتقة النونية تعني إيجاد:

ص^(1) ، ص^(2) ، ص^(3) ، ...... ، ص^(ن)

أساسيات المشتقة النونية

[1] تناوب الإشارات

◆ − ، + ، − ، + ، ...... = (−1)^ن

◆ + ، − ، + ، − ، ...... = (−1)^{ن+1}

◆ + ، − ، + ، − ، ...... = (−1)^{ن+1} (1) أو (−1)^{ن−1} (2)

◆ − ، − ، − ، ...... ، − = −

[2] القوى:

◆ ٣ × ٣ = ٣² إذا كانت العوامل متساوية تكتب بصورة قوى

◆ ٧ × ٧ × ٧ = ٧³

[3] ضرب أعداد متتابعة ن! ، ل^ن_ر

◆ ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٦! (1) = ل^٦_٦ (2)

◆ ٣ × ٢ × ١ = ٣! (1) = ل^٣_٣ (2)

◆ ٧ × ٦ × ٥ = ل^٧_٣ (يبدأ / العدد)

◆ ن(ن − ١) = ل^ن_٢

◆ ل^ن_ن = ن! ، ل^ن_{ن−1} = ن!

[4] جاس ، جتاس ، جا أس ، جتا أس

◆ ص = جاس

ص′ = جا(π/2 + س)

ص″ = جا(2π/2 + س)

مشتقة أي دالة تتكرر مع إضافة π/2 في كل مشتقة

كذلك أيضا:

◆ ص = جتاس

ص′ = جتا(π/2 + س)

ص″ = جتا(2π/2 + س)

ص‴ = جتا(3π/2 + س)

مثال آخر:

ص = جا٢س

ص′ = جا(π/2 + ٢س) × ٢

ص″ = جا(2π/2 + ٢س) × ٢²

ص‴ = جا(3π/2 + ٢س) × ٢³

◆ ص = جا²س

ص′ = جا٢س × ١ (ومشتقة الزاوية)

ص′ = جا(الضعف) × مشتقة الزاوية

◆ ص = جا²٥س

ص′ = جا١٠س × ٥

ص′ = جا(الضعف) × مشتقة الزاوية

◆ ص = جتا²س

ص′ = −جا(الضعف) × مشتقة الزاوية

ص′ = −جا٢س

◆ ص = جتا²٣س

◆ ص′ = −جا٦س × ٣

ملاحظة: ص¹ ≠ ص′ حيث الرقم

ص² ≠ ص″ ، ص³ ≠ ص‴ لا بعد القوس

أ/ مختار النبعي (770393433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وزارة التربية والتعليم
إدارة التعليم الأهلي
منطقة معين التعليمية
مدرسة .....

المادة : رياضيات
وحدة : المفاضلة
الموضوع : المشتقة النونية

٧٣

ملاحظة :
عند إيجاد المشتقة النونية ينبغي ان تكون الدالة من الانواع الاتية :
١- أسية
٢- كثيرة أو مقدرية
٣- لوغاريتمية (لو)
٤- جذرية
٥- جاس أو جتاس أو كاجاس أو كتاس أو قاس أو جاس أو صاس ...

ويرمز للمشتقة النونية بالرمز $ص^{(ن)}$ أو $د^{ن}_{س}$

لعلاء الدالة الاسية

أمثلة :
أوجد المشتقة النونية للدوال الاتية :-

① $ص = ٧^{س}$

الحل
$ص^{(١)} = ٧^{س} \times ١ \times لو٧$

$ص^{(١)} = ٧^{س} لو٧$ ← ①

$ص^{(٢)} = ٧^{س} \times ١ \times لو٧ \times لو٧$

$ص^{(٢)} = ٧^{س} (لو٧)^{٢}$ ← ②

$ص^{(٣)} = ٧^{س} \times ١ \times (لو٧)^{٢} \times لو٧$

$ص^{(٣)} = ٧^{س} (لو٧)^{٣}$

⋮

$ص^{(ن)} = ٧^{س} (لو٧)^{ن}$ ← المشتقة النونية

وبكتابة خاصية التالي كما يلي

$ص^{(ن)} = ص \times (لو٧)^{ن}$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك^{س}$ فإن $ص^{(ن)} = ك^{س} (لوك)^{ن}$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك$ حيث ك ثابت فإن $ص^{(ن)} = ٠$

② $ص = هـ^{س}$

الحل
$ص^{(١)} = هـ^{س} \times ١$

$ص^{(١)} = هـ^{س}$ ← ①

$ص^{(٢)} = هـ^{س} \times ١ \times ١$

$ص^{(٢)} = هـ^{س}$ ← ②

$ص^{(٣)} = هـ^{س} \times ١ \times ١ \times ١$

$ص^{(٣)} = هـ^{س}$ ← ③

⋮

$ص^{(ن)} = هـ^{س}$ ← النونية

قاعدة : إذا كانت $ص = هـ^{ك س}$ فإن $ص^{(ن)} = ك^{ن} هـ^{ك س}$

③ $ص = ب^{٣س}$

الحل
$ص = ب^{٣س}$

$ص^{(١)} = ب^{٣س} \times ٣ \times لوب$ ← ①

$ص^{(٢)} = ب^{٣س} \times ٣ \times ٣ \times لوب$

$ص^{(٢)} = ب^{٣س} \times ٣^{٢} \times (لوب)^{٢}$ ← ②

⋮

$ص^{(ن)} = ب^{٣س} \times ٣^{ن} \times (لوب)^{ن}$ ← النونية

قاعدة : إذا كانت $ص = ك^{ل س}$ فإن $ص^{(ن)} = ك^{ل س} (ل لوك)^{ن}$

④ $ص = س هـ^{س}$

الحل
مشتقة ضرب دالتين

$ص^{(١)} = ١ \times هـ^{س} + س \times هـ^{س}$ (مشتقة الأول)

$ص^{(١)} = هـ^{س} (١ + س)$ ← ①

$ص^{(٢)} = هـ^{س} (١ + س) + هـ^{س} \times ١$ (مشتقة الثاني)

$ص^{(٢)} = هـ^{س} (١ + س + ١)$

$ص^{(٢)} = هـ^{س} (٢ + س)$ ← ②

$ص^{(٣)} = هـ^{س} (٣ + س)$ ← ③

$ص^{(ن)} = هـ^{س} (ن + س)$ ← النونية

قاعدة : إذا كانت $ص = ك^{ل س}$ فإن $ص^{(ن)} = ك^{ل س} (ل لوك)^{ن}$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك$ حيث ك ثابت فإن $ص^{(ن)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = س^{ن}$ فإن $ص^{(ن)} = ن!$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن)} = ك ن!$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن+١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-١)} = ك ن! س$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-٢)} = \frac{ك ن!}{٢} س^{٢}$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن)} = ك ن!$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٢٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٣٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٤٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٥٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٦٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٧٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٨٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٠)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩١)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٢)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٣)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٤)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٥)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٦)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٧)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٨)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-٩٩)} = ٠$

قاعدة : إذا كانت $ص = ك س^{ن}$ فإن $ص^{(ن-ن-١٠٠)} = ٠$

أ/ مختار الذبعي
ت : ٧٧٠٣٩٣٤٣٣

⑤ $ص = ا^{س}$ حيث $ا > ٠$ ، $ا \neq ١$ ، لوس ـ س

إذا كانت $ص = هـ$

فإن : $ص^{(ن)} = (-١)^{ن} \times هـ \times (ن - س)$

الحل
نستطيع فقط نوجد $ط^{(١)}$
ثم نعوض عن (١) في $ط^{(ن)}$
ونطلع لقى جواب $ط^{(ن)}$

∴ $ص = لوس - س$ (نعدل لغ الدالة)

$ص = لوس \times هـ - س$

$ص = س \times هـ - س$ ← ضربية

∴ $ص^{(١)} = ١ \times هـ + س \times هـ - ١$

$ص^{(١)} = هـ - س هـ - ١$

$ص^{(١)} = هـ (١ - س) - ١$ ← عامل مشترك

نعوض عن ن = ١ في

$ص^{(ن)} = (-١)^{ن+١} \times هـ \times (ن - س)$

$ص^{(١)} = (-١)^{٢} هـ (١ - س)$

$ص^{(١)} = (-١)^{٢} هـ (١ - س)$

$ص^{(١)} = هـ (١ - س)$ ← (ع)

المشتقة النونية للدوال المكسورة الجذرية

① إذا كانت $ص = \frac{١}{س}$

فإن $ص^{(ن)} = ؟$

الحل : $ص = س^{-١}$ ← تعديل

$ص^{(١)} = -١ س^{-٢}$ ← (١) (-١) (-١)

$ص^{(٢)} = -١ \times -٢ س^{-٣}$

$ص^{(٣)} = -١ \times -٢ \times -٣ س^{-٤}$ ← (٢) (-٣) تنام ب

$ص^{(٤)} = -١ \times -٢ \times -٣ \times -٤ س^{-٥}$ ← (٣) (-٤)

⋮

$ص^{(ن)} = (-١)^{ن} ن! س^{-(ن+١)}$

$ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن} ن!}{س^{ن+١}}$

② إذا كانت $ص = \frac{١}{س}$ فإن $ص^{(ن)} = ؟$

الحل : نعدل $ص = س^{-١}$

$ص^{(١)} = -١ س^{-٢}$ ← (١) (-١)

$ص^{(٢)} = -١ \times -٢ س^{-٣}$

$ص^{(٣)} = -١ \times -٢ \times -٣ س^{-٤}$ ← (٢) (-٣)

$ص^{(٤)} = -١ \times -٢ \times -٣ \times -٤ س^{-٥}$ ← (٣) (-٤)

$ص^{(٥)} = -١ \times -٢ \times -٣ \times -٤ \times -٥ س^{-٦}$ ← (٤) (-٥)

$ص^{(٦)} = ٦ س^{-٧}$

$ص^{(ن)} = (-١)^{ن} ن! س^{-(ن+١)}$

$ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن} ن!}{س^{ن+١}}$

أ/ مختار الذبعي (770393433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أ/ مختار الدبعي (770393433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المشتقة النونية للنسب المثلثية

١) إذا كانت ص = جا س فإن ص^(ن) = ...

الحل: ص' = جا($\frac{\pi}{2}$ + س) بإضافة $\frac{\pi}{2}$ لكل مشتقة

ص'' = جا($\frac{2\pi}{2}$ + س)

ص''' = جا($\frac{3\pi}{2}$ + س)

∴ ص^(ن) = جا($\frac{ن\pi}{2}$ + س)

٢) ص = جتا ٣س فإن ص^(ن) = ...

الحل: ص' = جتا($\frac{\pi}{2}$ + ٣س) × ٣

ص'' = جتا($\frac{2\pi}{2}$ + ٣س) × ٣²

⋮

ص^(ن) = جتا($\frac{ن\pi}{2}$ + ٣س) × ٣^ن

قاعدة

١) ص = جا أس ⟸ ص^(ن) = أ^ن جا($\frac{ن\pi}{2}$ + أس)

٢) ص = جتا أس ⟸ ص^(ن) = أ^ن جتا($\frac{ن\pi}{2}$ + أس)

مثال: لتكن ص = جا ٥س فإن ص^(ن) = ...

الحل: ص^(ن) = أ^ن جا($\frac{ن\pi}{2}$ + أس)

ص^(ن) = ٥^ن جا($\frac{ن\pi}{2}$ + ٥س)

تمارين ٨، ١٨ جتا²س − جا²س = جتا ٢س
هام: جتا² زاوية − جا² زاوية = جتا ضعفها

٥) جتا²س − جا²س = جتا ٢س

مثال: لتكن ص = جتا²س − جا²س فإن ص^(ن) = ...

الحل: ص = جتا²س − جا²س ← تذكر

∴ ص = جتا ٢س

∴ ص^(ن) = ٢^ن جتا($\frac{ن\pi}{2}$ + ٢س)

قاعدة

١) إذا كانت ص = جا س ، ن ∈ م(٤) (مضاعفات ٤) فإن ص^(ن) = جا س ، ن ∈ م(٤)

٢) وكذلك ص = جتا س ، ن ∈ م(٤) فإن ص^(ن) = جتا س ، ن ∈ م(٤)

مثال: ص = جا س فإن ص^(٨٠) = ...

الحل: ٨٠ ∈ م(٤) (أن يقبل القسمة على ٤)

∴ ص^(٨٠) = جا س

مثال: إذا كانت ص = جتا س فإن ص^(٤١) = ...

[جتا س ، − جا س ، جا س ، − جتا س]

الحل: ص^(٤٠) = جتا س ⟸ ص^(٤١) = − جا س

مثال: ص = جا س فإن ص^(٢٢٢) = ...

الحل: ص^(٢٢٠) = جا س

ص^(٢٢١) = جتا س

ص^(٢٢٢) = − جا س

تمارين

مثال: ص = $\frac{قا^2س - ١}{قا^2س}$ أوجد ص^(ن)

ص = $\frac{قا^2س}{قا^2س}$ − $\frac{١}{قا^2س}$

ص = ١ − جتا²س

ص = جا²س

ص' = جا ٢س

ص'' = جا($\frac{\pi}{2}$ + ٢س) × ٢

ص''' = جا($\frac{2\pi}{2}$ + ٢س) × ٢²

⋮

ص^(ن) = جا($\frac{(ن-١)\pi}{2}$ + ٢س) × ٢^(ن−١)

مثال: ص = جا س جتا س أوجد ص^(ن)

الحل: ص = ½ جا ٢س تذكر

ص' = ½ جا($\frac{\pi}{2}$ + ٢س) × ٢

ص'' = جا($\frac{2\pi}{2}$ + ٢س) × ٢

ص''' = جا($\frac{3\pi}{2}$ + ٢س) × ٢²

⋮

ص^(ن) = جا($\frac{ن\pi}{2}$ + ٢س) × ٢^(ن−١)

مثال: ص = $\frac{١}{١ + ظا^2س}$ أوجد ص^(ن)

الحل: ١ + ظا²س = قا²س تذكر

ص = $\frac{١}{قا^2س}$ ، ص = جتا²س

ص' = − جا ٢س

ص'' = − جا($\frac{\pi}{2}$ + ٢س) × ٢

ص''' = − جا($\frac{2\pi}{2}$ + ٢س) × ٢²

⋮

ص^(ن) = − جا($\frac{(ن-١)\pi}{2}$ + ٢س) × ٢^(ن−١)

ملاحظات

١) ص = هـ^س ، ص^(ن) = هـ^س نفسها

٢) ص = س^ن ، ن ∈ ط أي عدد صحيح موجب

ص^(ن−١) = ن! س

ص^(ن) = ن!

ص^(ن+١) = صفر ، ن+١ وما فوق

أمثلة

ص = س⁵ فإن
ص^(٤) = ٥! س
ص^(٥) = ٥!
ص^(٦) = صفر
ص^(٧) = صفر
ص^(ن) = صفر

ص = س⁸ + س⁷ + ٥س
ص^(٧) = ٨! س
ص^(٨) = ٨!
ص^(٩) = صفر

ص = ٥ س⁶
ص^(٥) = ٥ × ٦! س
ص^(٦) = ٥ × ٦!
ص^(٧) = صفر

ص = س³
ص^(٢) = ٣! س
ص^(٣) = ٣!
ص^(٤) = صفر

أ/ مختار الدبعي (770393433)

ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المشتقة النونية لكثيرة الحدود

مثال: لتوضيح

$ص = س^٤$

$ص^{(١)} = ٤س^٣ = \frac{٤!}{٣!}س^٣$

$ص^{(٢)} = ١٢س^٢ = \frac{٤!}{٢!}س^٢$

$ص^{(٣)} = ٢٤س = \frac{٤!}{١!}س$

$ص^{(٤)} = ٢٤ = \frac{٤!}{٠!}س^٠$

$ص^{(٥)} = صفر$

$ص^{(٦)} = صفر$

$ص^{(ن)} = صفر$

إذا كانت $ص = س^ن$

فإن $ص^{(ن)} = \begin{cases} \frac{ن!}{(ن-ر)!}س^{ن-ر} & ، ر \le ن \\ صفر & ، ر > ن \end{cases}$

أس(س) الفرق بينهما

$ص^{(ر)} = \begin{cases} \text{س} & \text{رتبة المشتقة} \\ صفر & \text{، رتبة المشتقة} > \text{أس(س)} \end{cases}$

مثال: إذا كانت $ص = س^٧$ فإن المشتقة النونية تساوي .....

[$= ٧!$ ، $ل(س)$ ، ٧]

مثال: إذا كانت $ص = س^{١٠٠}$

فإن $ص^{(٩٩)} = ...$

[$ل(س)$ ، ١٠٠ ، $٩٩س$ ، $١٠٠س$]

مثال: $ص = ث$

فإن $ص^{(٦)} = ...$

الحد $\frac{ل}{٦}ث^٦ = ل$

مثال: $ص = ث$ ، $ص^{(٣)} = ...$

$ص^{(٣)} = \frac{ل}{٣!}ث^٣ = \frac{ل}{٦}ث^٣$

مثال 2021

إذا كانت $ص = \frac{س^{١٠}}{١٠!}$ فإن $ص^{(١٠)} = ...$

[$ل(س)$ ، ٩ ، ١٠ ، $ل$]

$ص = \frac{س^{١٠}}{١٠!} \Rightarrow ص^{(١٠)} = \frac{١٠!}{١٠!} = ١$

مثال: إذا كانت $ص = س^ن$

فإن $ص^{(ن+٢)} = ...$ كل حد

$ن+٢$ رتبة المشتقة $> ن$

مثال: إذا كانت $ص = س^{٢٠}$ فإن $ص^{(٢٠)} = ...$

فإن $ن = ٦$

$\therefore ص = ث^٦ \therefore ص^{(٦)} = ٦!$

$= ٧٢٠$

مثال: إذا كانت $ص = س^ن$

فإن $ص^{(ن)} = ل(ن)$

$ص^{(ن+١)} = ...$

$ص^{(ن+٢)} = ...$

مثال: إذا كانت $ص = (٣س+٢)^ن$

فإن $ص^{(ن)} = ٣^ن ل(ن)$

$ص^{(ن+١)} = ...$

$ص^{(ن+٢)} = ٣^{ن+١} ل(ن) ، ٣^{ن+٢} ل(ن) ، ل(ن)$

تعميم

إذا كانت $ص = (أس+ب)^ن$ فإن

$ص^{(ر)} = \begin{cases} أ^ر ل(ن) (أس+ب)^{ن-ر} & ، ر \le ن \\ صفر & ، ر > ن \end{cases}$

مثال: إذا كانت $ص = (٥س+١)^{٣٠}$

فإن $ص^{(٤)} = ... ل(٣٠)$

رتبة المشتقة $> ن$

مثال 2021: إذا كانت $ص = ص_{ن-١} + ص_{ن-٢}$

فإن $ص_{ن} = ...$

$\therefore ص_ن = ص_ن$

$\therefore ص^٢ = ٢ص ص_١ \Rightarrow$ نفرض

$ص^٢ = ٢ص ص_١$

$ص^٣ = ٢ص ص_٢$

$ص^{(ن)} = ٢ص ص_{ن+١}$

نشاط

أوجد $ص^{(ن)}$

١) $ص = \frac{س-٢}{س-١}$

٢) $ص = \frac{س+٣}{س}$

٣) $ص = \frac{١}{٩س^٢-١٢س+٤}$

٤) $ص = جتا(٣س+ب)$

٥) $ص = س$ جتا $(-١)^{ن+١} ل(ن) س^{-ن}$

٦) $ص = \frac{س}{س}$ جتا $(-١)^{ن+١} ل(ن) س^{-ن}$

٧) $ص =$ لوا $(٣س+٤)$ فإن $(-١)^{ن-١} ل(ن) (٣)^ن (٣س+٤)^{-ن}$

٨) $ص = \frac{١}{٣س+٤}$ جتا $(٣س+٤)$ فإن $٣^ن$ جتا $(\frac{ن\pi}{٢}+٣س+٤)$

٩) $ص = \frac{س-١}{س^٢+س-٢}$ فإن $(-١)^{ن-١} ل(ن) [(س-١)^{-ن} - (س+٢)^{-ن}]$

١٠) $ص = ٣س^٣+٤س+٣$ فإن ٣×٢^ن

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



معادلة المماس ص :-

$$ص - ص_1 = ص'(س - س_1)$$

◄ ناظم أبو نقطة

معادلة الناظم (العمود) ص :-

$$ص - ص_1 = \frac{-1}{ص'}(س - س_1)$$

معادلة المماس والناظم تأتي في الثانوية أشياء :-

1) $س_1$ 2) $ص_1$ 3) $ص' = صفر$

العلاقة بين ميل المماس وميل الناظم هي :-

$$\text{ميل المماس} \times \text{ميل الناظم} = -1$$

ع حي

$$\text{ميل المماس} = \frac{1}{\text{ميل الناظم}}$$

$$\text{ميل الناظم} = \frac{-1}{\text{ميل المماس}}$$

توضيح

إذا كان ميل المماس $= \frac{3}{5}$

فإن ميل الناظم $= -\frac{5}{3}$

◄ لو كان ميل الناظم $= -3$

فإن ميل المماس $= +\frac{1}{3}$

◄ إذا كان ميل المماس = صفر

فإن ميل الناظم غير معرف

◄ إذا كان ميل المماس غير معرف

فإن ميل الناظم = صفر

تمارين :-

1) إذا كان $ص = س^2$ فإن معادلة المماس عند نقطة التماس (صفر، صفر) هي :- . . . . .

(س = صفر ، س = -2 ، ص = 2 ، ص = -2)

المعادلة المطلوبة

س = صفر ، ص = 2 ، ص' = ؟

$ص = س^2 + 4$ (نشتق)

$ص' = 2س$ (÷ 2)

$\frac{ص'}{2} = س$

$\therefore ص' = \frac{س}{ص}$ نعوض عنهم بقيم س ، ص

$ص' = \frac{صفر}{2} = صفر$

∴ معادلة المماس هي : $ص - ص_1 = ص'(س - س_1)$

∴ معادلة المماس ص :-

$ص - 2 = صفر(س - صفر)$

$ص - 2 = صفر \Leftarrow ص = 2$

2) إذا كانت $د(س) = س^2 + ظا\frac{\pi}{4}س$

فإن معادلة الناظم عند س = 1 هي :-

أ) $2ص - 3 = 3$ ب) $2ص + س = 3$

ج) $2ص + س = 1$ د) $2س - ص = 3$

المثال: س = 1 ، هـ = ؟ ، ص' = ؟

نعوض س = 1 في

$ص = س^2 + ظا\frac{\pi}{4}س$ (بالجاد ص)

$ص = 1 + ظا\frac{\pi}{4}$

$ص = 1 + صفر$

$ص = 1$

ظا$\frac{\pi}{4}$ = صفر

ظا$\frac{\pi}{4}$ = 1

الآن نوجد ص'

$\therefore ص = س^2 + ظا\frac{\pi}{4}س$

$\therefore ص' = 2س + ظا\frac{\pi}{4}$ قا$^2\frac{\pi}{4}س$ (مشتقة الزاوية)

نعوض س = 1

$ص' = 2\times1 + 2\times1$ قا$^2\frac{\pi}{4}$

$ص' = 2 + 2\times1\times$ قا$^2\frac{\pi}{4}$

قا$\frac{\pi}{4}$ = 1

$ص' = 2 + 2$

$ص' = 4$ ← ميل المماس

معادلة الناظم هي

$ص - ص_1 = \frac{-1}{ص'}(س - س_1)$

$ص - 1 = \frac{-1}{4}(س - 1)$

(ضرب تبادلي)

$4ص - 4 = -1(س - 1)$

$4ص - 4 = -س + 1$

$4ص + س = 1 + 4$

$4ص + س = 5$

3) إذا كان :

ميل الناظم للمنحنى $س^2 + ص^2 = 2$

عند النقطة (1،1) يساوي -1 (×)

الحل: نشتق معادلة المنحنى

$4س^3 + 4ص^3 ص' = صفر$

نفرض س = 1 ، ص = 1

$4(1)^3 + 4(1)^3 ص' = صفر$

$4 + 4ص' = صفر$

$4ص' = -4$

$ص' = -1$ ← ميل المماس

∴ ميل المماس = -1

∴ ميل الناظم = +1

4) (س) أو (x) :

معادلة الناظم للمنحنى $ص = س(x)$ عند النقطة (1،1) هي $ص = س(x)$

الحل: $ص' - س ص' = صفر$

$\therefore ص'(س - س) = س - ص$

$\therefore ص' = \frac{س - ص}{س - س}$ (لو للطرفين)

$لو ص' = لو \frac{س - ص}{س - س}$

$س لو ص' = ص لو س$ (نشتق)

مرتين

$1\times لو ص' + س\times\frac{ص'}{ص'} = ص'\times لو س + ص\times\frac{1}{س}$

نعوض كل س = 1 ، ص = 1

$لو 1 + 1\times\frac{ص'}{1} = ص'\times لو 1 + 1\times1$

$0 + ص' = ص'\times0 + 1$

$ص' = 1$ ← ميل المماس

معادلة الناظم هي $ص - ص_1 = \frac{-1}{ص'}(س - س_1)$

$ص - 1 = -1(س - 1)$

$ص - 1 = -س + 1 \Leftarrow ص = -س + 2$

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ⓐ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة
$س قا ص + ظا ص = ٢ س$
عند نقطة الأصل

الحل: نقطة الأصل هي $(٠،٠)$
$س = ٠ ، ص = ٠ ، ص' = ...$
$س قا ص + ظا ص = ٢ س$ (نشتق)
$١ \times قا ص + س \times قا ص ظا ص \times ص' + قا^٢ ص \times ص' = ٢$
$قا + ٠ \times قا \times ظا \times ص' + قا^٢ \times ص' = ٢$
$١ + ٠ + ص' = ٢$
$ص' = ٢ - ١$
$ص' = ١$

∴ معادلة المماس هي $ص - ص_١ = م(س - س_١)$
$ص - ٠ = ١(س - ٠)$
$ص = س$
معادلة المماس $ص = س$

ⓑ معادلة الناظم للمنحنى
$٢ص - ٢س ص + س^٢ = لو س$
عند النقطة $(١،١)$ هي ...
الحل
$س = ١ ، ص = ١ ، ص' = ...$؟
$٢ص' - ٢س ص' - ٢ص + ٢س ص = \frac{١}{س}$ (نشتق)
$٢ص' - ٢ص' + (-٢س)(ص' س + ص) + ٢س = \frac{١}{س}$
$٢ص' - ٢ص' - ٢س ص' - ٢ص + ٢س = \frac{١}{س}$
$٢ص' - ٢ص' - ٢س ص' - ٢ص + ٢س = ١$
$٢ص' - ٢ص' - ٢ص' - ٢ + ٢ = ١$
$-٢ص' = ١ + ٢ - ٢$
$-٢ص' = ١$
$ص' = -\frac{١}{٢}$
∴ ميل الناظم هو $\frac{١}{٢}$

ⓒ أوجد معادلة المماس للدالة
$س ص = ٢٥$ ، عندما ميل $= -١$
$٠ < س < ٦$
الحل $س = ؟ ، ص = ؟ ، ص' = -١$
$\because س ص = ٢٥ \Leftarrow (\frac{ص = ٥}{س = ٥})$
$١ \times ص + س \times ص' = ٠$ (نفرض $ص' = -١$)
$ص + س(-١) = ٠$
$ص - س = ١$
$ص = س$ نفرض في $س ص = ٢٥$
$س س = ٢٥ \Leftarrow س^٢ = ٢٥$
$\Leftarrow س = ٥$ مرفوض
$\because ص = ٥$
معادلة المماس $ص - ص_١ = م(س - س_١)$
$ص - ٥ = -١(س - ٥)$
$ص - ٥ = -س + ٥$
$ص - ٥ + س - ٥ = ٠$
$ص + س - ١٠ = ٠$
معادلة المماس

ⓓ إذا كان $ص = ع + ٤ع ، ع = (س - ١)^٢$
أوجد معادلة المماس عند $ع = ؟$
الحل:
$\because ع = ٢ \Leftarrow ص = (٢)^٢ + ٢$
$\Leftarrow ص = ٦$
وكذلك $\because ع = ٢ \Leftarrow (س - ١)^٢ = ٢$ (تربيع)
$س - ١ = \sqrt{٢}$ نفرض $ع = ٢$
$س = ١ + \sqrt{٢}$
$\therefore ص = ع^٢ + ٤ع ، ع = (س - ١)^٢$ نفرض
$\therefore ص = (س - ١)^٤ + ٤(س - ١)^٢$
$\therefore ص' = ٤(س - ١)^٣ + ٨(س - ١)$ (نشتق)
$ص' = ١ + \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$ ، نفرض $س = ٥$
$ص' = ١ + \frac{١}{٢\sqrt{٤}} \Leftarrow ص' = ١ + \frac{١}{٤}$
$ص' = \frac{٥}{٤} \Leftarrow ص' = \frac{٤ + ١}{٤}$
(معادلة المماس هي $ص - ص_١ = ص'(س - س_١)$)
$ص - ٦ = \frac{٥}{٤}(س - ٥)$ (×٤)
$٤ص - ٢٤ = ٥س - ٢٥$
$٤ص - ٥س - ٢٤ + ٢٥ = ٠$
$ص - ٥س + ١ = ٠$
معادلة المماس

ⓔ إذا كان $ص = ٢ لو س$ أوجد معادلة الناظم للمنحنى عند $س = \frac{١}{٤}$ ليساوي ...
الحل
$ص = ٢ لو س \Leftarrow ص' = \frac{٢}{س}$
$\therefore ص' = \frac{٢}{\frac{١}{٤}} \Leftarrow ص' = ٢ \times ٤$
$ص' = ٨$
∴ ميل المماس $= ٨$
وميل الناظم $= -\frac{١}{٨}$ (الناظم يعمد المماس)
للتأكد
$٨ \times -\frac{١}{٨} = -١$

ⓕ إذا كانت معادلة الناظم (العمودي) للمنحنى $د(س)$ عند النقطة $(١،١)$ هي $س + ٤ص = ٥$ فإن $د'(١) = ...$
$[\frac{٤}{٥} ، \frac{١}{٥} ، ٤ ، ٥]$

و هايا المماس و الناظم

وجهة (ب)

ⓐ إذا كان المستقيمان متعامدان
فإن $م_١ \times م_٢ = -١$
$\frac{١}{م_٢} \times م_٢ = -١$
$م_٢ = \frac{-١}{\frac{١}{م_٢}}$
$م_٢ = -م_٢$ (ميل = ميل)

ⓑ إذا كان المستقيمان متوازيان
فإن ميلهما متساويان
والعكس صحيح

مثلة:-

ⓐ ميل الناظم للمنحنى $ص = لو س$ عند $س = \frac{١}{٤}$ ليساوي ...
الحل
$ص = ٢ لو س \Leftarrow ص' = \frac{٢}{س}$
$\therefore ص' = \frac{٢}{\frac{١}{٤}} \Leftarrow ص' = ٢ \times ٤$
$ص' = ٨$
∴ ميل المماس $= ٨$
وميل الناظم $= -\frac{١}{٨}$ (الناظم يعمد المماس)
للتأكد
$٨ \times -\frac{١}{٨} = -١$

ⓑ إذا كانت معادلة الناظم (العمودي) للمنحنى $د(س)$ عند النقطة $(١،١)$ هي $س + ٤ص = ٥$ فإن $د'(١) = ...$
$[\frac{٤}{٥} ، \frac{١}{٥} ، ٤ ، ٥]$

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore$ $s + 4ص = 5$ (نشتقه)

$\therefore$ $1 + 4ص' = 0$

$4ص' = -1 \Leftarrow ص' = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ المعادلة ص معادلة للناظم

$\therefore$ ميل الناظم هو $\frac{1}{4}$

$\therefore$ ميل المماس $= 4$

$\therefore$ $د(ا) = 4 \Leftarrow$ لم نحتاج لـ ا

ملاحظة: ميل المماس $\neq$ د

ج) $ا = 1$

المماس للمنحنى $ص = ق(س)$ جتا $س$ عند $س =$ صفر متوازيان (لـ)

إذا كان $ص_1' = ص_2'$

فإن المماسان متوازيان

$\therefore ص = ق(س)$

$\therefore ص' = ق'(س) \times$ ظا $س \times 2$

$\therefore ص' = ق'(0) \times$ ظا 0×2

$\therefore ص' = 1 \times 0 \times 2$

$\therefore ص' = 0$ (1)

$\therefore ص = جتا س$

$\therefore ص' = -$ جا $س \times 2$

$ص' = -$ جا 0×2

$ص' = 0 \times 2 = 0 \Leftarrow ص' = 0$ (2)

$\therefore$ المماسان متوازيان

د) (لـ) $ا = 1$

المستقيم $ص = 3س + 1$ يوازي

عماس المنحنى $ص =$ جتا $3س$

عند $س = \frac{\pi}{2}$ (م)

الحل

$ص = 3س + 1 \Leftarrow ص' = 3$ (1)

$ص =$ جتا $3س \Leftarrow ص' = -$ جا $3س \times 3$

$ص' = -$ جا $(90 \times 3) \times 3$

$ص' = -$ جا 270×3

$ص' = -(-1) \times 3$

$ص' = 3$ (2)

(1) = (2) المماسان متوازيان

$\therefore ص' = 3$

المماس المنحنى $ص =$ جتا $3س$

رمزية (ق): ((يقطع))

كلمة يقطع تفيد ايجاد تقاطع $س$ و $ص$

1) يقطع السينات $\Leftarrow ص = 0$

2) يقطع الصادات $\Leftarrow س = 0$

* يقطع السينات والصادات في نقطة نقطة الأصل $\Leftarrow$ النقطة $(0,0)$

مثال: منحنى الدالة $ص = س^3 - 4س + 3$ يقطع محور الصادات في النقطة .....

الحل: يقطع الصادات $\Leftarrow س = 0$

نعوض عنه $س = 0$ في المنحنى

$ص = (0)^3 - 4(0) + 3 \Leftarrow ص = 3$

$\therefore$ النقطة هي $(3,0)$

ا) اوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = (س + ص) - 1$ عند نقطة تقاطع المستقيم $س + ص = 1$ مع محور السينات

الحل

يقطع السينات $\Leftarrow ص = 0$ عوض في

$س + ص = 1 \Rightarrow س = 1$

لإيجاد $ص'$ نوجد معادلة المنحنى

$ص' = 2(س + ص) - 1$

$ص' = \frac{1 + ص'}{2(س + ص)}$ (نعوض $س = 1$، $ص = 0$)

$ص' = \frac{1 + ص'}{2} \times 0 \times 2$

$0 = \frac{1 + ص'}{2} \Leftarrow 1 + ص' = 0$

$ص' = -1$

معادلة المماس هي $ص - جـ = م(س - ب)$

$ص - 0 = -1(س - 1)$

$ص = -س + 1$ معادلة المماس

رمزية (ع): ((يوازي))

* يوازي السينات $\Rightarrow$ أفقي $\Rightarrow$ تعودي على الصادات

يوازي الصادات $\Rightarrow$ رأسي $\Rightarrow$ تعودي على السينات

1) إذا كان المماس يوازي السينات

فإن $ص' = 0$

2) إذا كان المماس يوازي الصادات فإن

$ص' = \frac{1}{0}$ (غير معرفة)

((تعميم))

أولاً: إذا كان المماس // محور السينات

فإن .....

1) ميل المماس = صفر

2) ميل الناظم = $\frac{1}{0}$

3) الناظم // محور الصادات

ثانياً: إذا كان المماس // محور الصادات

فإن: 1) ميل المماس = $\frac{1}{0}$ (غير معرفة)

2) ميل الناظم = صفر

3) الناظم // محور السينات

تلخيص: ميل المماس $\times$ ميل الناظم $= -1$

* كل كام يوازي السينات فإن ميله = صفر

* كل كام يوازي الصادات فإن ميله (لا)

مثال: إذا كان $\frac{ص}{س} = 0$ فإن المماس .....

فإن: 1) المماس يوازي ..... (السينات)

2) ميل المماس = ... (صفر)

3) الناظم يوازي ..... (محور الصادات)

4) ميل الناظم = ... ($\frac{1}{0}$)

مثال: إذا كان $\frac{ص}{س}$ غير معرف فإن

1) ميل المماس = ... (لا)

2) المماس يوازي ..... (محور الصادات)

3) ميل الناظم = ... (صفر)

4) الناظم يوازي ..... (محور السينات)

مثال: إذا كان المماس للمنحنى والناظم يوازي محور الصادات فإن

ميله = ... $[-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1) إذا كان $\frac{ص}{س}$ غير معرفة
فإن الناظم لمنحنى الدالة هو ..... الخ
∴ $\frac{ص}{س}$ غير معرفة
∴ المماس // الصادات
∴ الناظم // السينات

2) إذا كان الناظم لمنحنى الدالة هو السينات
فإن ميل المماس = صفر (X)
التوضيح: الناظم // السينات
ميل الناظم = 0
∴ ميل المماس = $\frac{1}{0}$

3) إذا كان المماس موازياً لمحور الصادات
فإن ميل العمودي عليه يساوي صفر (X)
التوضيح: المماس // الصادات
ميل المماس = $\frac{1}{0}$
ميل الناظم (العمودي) = صفر

4) إذا كان المماس غير معرف فإن المماس يكون موازياً لمحور الصادات (X)

5) إذا كان المماس موازياً لمحور السينات
فإن ميل المماس = صفر (X)
التوضيح: الناظم // السينات
ميل الناظم = 0
∴ ميل المماس = $\frac{1}{0}$

6) إذا كان المماس موازياً لمحور الصادات
فإن ميل العمودي عليه يساوي صفر (X)
التوضيح: المماس // الصادات
ميل المماس = $\frac{1}{0}$
ميل الناظم (العمودي) = صفر

7) إذا كان المماس غير معرف فإن المماس يكون موازياً لمحور الصادات (X)

8) منحنى الدالة $ص = س^2 + 2$
عند النقطة (1، 1) يوازي محور السينات (X)
الحل: لإيجاد المماس // السينات نجعل $\frac{ص}{س} = 0$
$ص^2 + 2س\,ص = س^2 + 2$ (نشتق)
$2ص\,\frac{ص}{س} + 2س\,\frac{ص}{س} + 2ص = 2س$

$2(1)\,\frac{ص}{س} + 2(1)\,\frac{ص}{س} + 2(1) = 2(1)$
$2\,\frac{ص}{س} + 2\,\frac{ص}{س} + 2 = 2$
$2\,\frac{ص}{س} + 2\,\frac{ص}{س} = 2 - 2$
$4\,\frac{ص}{س} = 0$ (÷ 4)
$\frac{ص}{س} = 0$ ⇐ المماس // السينات
ملاحظة: $\frac{ص}{س} = 0 \Leftrightarrow$ المماس // السينات
$\frac{ص}{س} = 0 \Leftrightarrow$ المماس // السينات

9) منحنى الدالة $ص = جا س$
يوازي المحور السيني عند $س = \pi$ (X)
التوضيح: نوجد $\frac{ص}{س}$ ونساوي
نظل $\frac{ص}{س} = 0$ حتى نكون
المماس // المحور السيني
$\frac{ص}{س} = جتا س \times 2$
$\frac{ص}{س} = جتا \pi \times 2$
$\frac{ص}{س} = -1 \times 2 \Leftarrow \frac{ص}{س} = -2$
∴ المماس لا يوازي المحور السيني
لأن $\frac{ص}{س} \neq 0$

10) منحنى الدالة $ص = 2س^3 - 3س$
أفقي عند $س = \frac{2}{3}$ (X)
التوضيح:
أفقي ⇐ $\frac{ص}{س} = 0$ ← نعم جزء
$\frac{ص}{س} = 6س^2 - 3$ نعوض $س = \frac{2}{3}$
$\frac{ص}{س} = 6(\frac{2}{3})^2 - 3 \Leftarrow \frac{ص}{س} = 6 \times \frac{4}{9} - 3$
$\frac{ص}{س} = \frac{24}{9} - 3 \neq 0 \Leftarrow$ المماس ليس أفقي

مرحلة (4)

لإيجاد معادلة المماس والناظم بسهولة
1) إذا كان $\frac{ص}{س} = 0$ فإن
المماس // السينات ، الناظم // الصادات
2) إذا كانت $\frac{ص}{س}$ = غير معرفة
فإن (المماس // الناظم) ⇐ المماس يوازي السينات ، الناظم // الصادات
* التخمين أخر !!
إذا كان المماس أفقياً فإنه (الناظم // المماس) (س = س1 ، ص = ص1)
إذا كان المماس رأسياً فإنه (المماس // الناظم) (س = س1 ، ص = ص1)

1) إذا كان المماس رأسياً فإن ميل المماس = غير معرف
عند النقطة (4، 5) فإن معادلة الناظم هي
(س = معادلة الناظم ، ص = معادلة المماس)
(س = 4 ، ص = 5)
∴ معادلة الناظم هي (س = 4)

2) إذا كان المماس يوازي المحور الصادي
عند النقطة (2، -3) فإن معادلة المماس هي .....
(ص = -3 ، س = 2 ، س = -3)
التوضيح: المماس // الصادات
⇐ $\frac{ص}{س} = \frac{1}{0}$ (غير معرفة)
(المماس // الناظم) ← المماس يصبح (س = 2 ، ص = -3)
(س = 2 ، ص = -3)
معادلة المماس هي (س = 2)

3) ميل المماس لمنحنى الدالة هـ = و اس
إذا كان رأسياً عند النقطة (1، 3)
فإن معادلة العمودي هي .....
[هـ = 3 ، س = 1 ، ص = 1 ، س = 3]
التوضيح
المماس رأسياً ⇐ $\frac{ص}{س}$ = غير معرفة
⇐ (المماس // الناظم)
(س = 1 ، ص = 3)
(المماس // الناظم العمودي)

4) معادلة المماس لمنحنى الدالة هـ = و اس
الموازي لمحور السينات عند النقطة
(3، 2) هـ س = 2 (X)
التوضيح
(س = 2) فإن ميل المماس = 3 ميل الناظم

5) معادلة المماس لمنحنى هـ = 2س^2 + 1
عند النقطة (1، 3) هي .....
[س = 1 ، ص = 3 ، ميل = 1 ، ميل = 0]
الحل
س = 0 ، ص = 1 ، ص = ؟؟
$ص^2 = 2س^2 + 1$ (نشتقه)
$2ص\,\frac{ص}{س} = 4س$ (نقوص)
$2 \times 1 \times \frac{ص}{س} = 4 \times 0$ ، $\frac{ص}{س} = 1$
$2\,\frac{ص}{س} = 0 \Leftarrow \frac{ص}{س} = 0$
∴ $\frac{ص}{س} = 0 \Leftarrow$ (الناظم // المماس)
(س = 0 ، ص = 1)

• زاوية المماس - زاوية الناظم = 90
• زاوية المماس = 45 ⇐ زاوية الناظم = 90 + 45 = 135
زاوية المماس = 150 ⇐ زاوية الناظم = 90 + 150 = 60

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وحدة (d) « زاوية الميل »

واذا علمت أن الزاوية θ التي يصنعها المماس في الاتجاه الموجب لمحور السينات تبدأ من $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = 180^\circ$

الزاوية θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

- اذا كانت $\tan\theta = 1 \Leftarrow \theta = 45^\circ$ الميل موجب الزاوية حادة
- اذا كانت $\tan\theta = -1$ الميل سالب تقابل $\theta = 135^\circ$ الزاوية منفرجة

(1) اذا كان ميل المماس للدالة $\theta = \tan$ يساوي 1 فإن قياس الزاوية $\theta = \ldots$

$(30^\circ, 45^\circ, \frac{\pi}{4}, 90^\circ)$

(2) اذا كان المماس لمنحنى الدالة $\theta = s$ لوس يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن نقطة التماس هي $\ldots\ldots$

$(1, \frac{\pi}{4})$ ، $(1, \frac{\pi}{4})$ ، $(-1, \frac{\pi}{4})$ ، $(1, -\frac{\pi}{4})$

التحقق!

$\theta = \frac{\pi}{4} \Leftarrow \tan\theta = 1$

$\theta = s$ لوس اشتق لايجاد ميل المماس

$\frac{d\theta}{ds} = 1 \times$ لوس $+ s \times \frac{1}{s}$

$\frac{d\theta}{ds} =$ لوس $+ 1$

$1 =$ لوس $+ 1 \Leftarrow$ لوس $= 1 - 1$

$\Leftarrow$ لوس $= 0 \Leftarrow s = 1$

لأنه لو $(1) = 0$

نوجه ص بالتعويض في

ص $=$ س لوس

ص $= 1 \times 1$ لوا

ص $= 0$ لوا $\Leftarrow$ ص $= 0$

∴ نقطة التماس هي $(1, 0)$

(3) اذا كانت (واس) $= \theta$ حيث θ زاوية المماس مع المحور الموجب لمحور السينات عند نقطة الأصل $= \ldots$

الحل

نقطة $\times$ ص هي $\ldots$ $(0, 0)$

لايجاد زاوية نوجد $\frac{dy}{dx}$

∴ ص $= \theta$ جاس $+$ جتاس

$\frac{dy}{dx} = \theta$ جاس $+ \theta$ جتاس

$\frac{dy}{dx} = 0 \times$ جا $0 + 0 \times$ جتا 0

$\frac{dy}{dx} = 1 \times 0 + 1 \times 1$

$\frac{dy}{dx} = 1 \Leftarrow \tan\theta = 1$

$\theta = 45^\circ \Leftarrow$ زاوية حادة

وحدة (6): علاقة ميل المماس بميل المنحنى

ميل المماس = ميل المنحنى

$$\text{ميل المماس} = \frac{1}{\text{ميل المنحنى}}$$

مثال: معادلة المماس للمنحنى $(س) = 8س^2 + 2$ هي ص $= 4س$ عند $س = \frac{1}{4}$ فإن قيمة $\theta = \ldots$

الحل

ميل المماس = ميل المنحنى

مشتقة المماس = مشتقة المنحنى

$(\theta س)' = (8س^2 + 2)'$

$\theta = 16س$

$\theta = \frac{1}{4} \times 16$

$\theta = 4$

(4) اذا كان المستقيم ص $= \theta س - 4$ هو العمودي على مماس المنحنى:

$س^2 - ص^2 +$ جاس $+$ ظاص $= 0$

عند نقطة الأصل فإن قيمة $\theta = \ldots$

$[\frac{1}{2}, -1, \tan\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

الحل

ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المنحنى}}$

ميل المماس $=$ ميل المنحنى

ميل العمود: ص $= \theta س - 4$

ميل العمود: $\frac{dy}{dx} = \theta$

∴ (ميل المماس) $= \frac{-1}{\theta}$

$س^2 - ص^2 +$ جاس $+$ ظاص $= 0$

مشتقة

$2س - 2ص \frac{dy}{dx} +$ جتاس $+$ ظاص $\frac{dy}{dx} = 0$

$2(0) - 2(0) \times \frac{dy}{dx} +$ جتا $0 +$ ظا $0 \times \frac{dy}{dx} = 0$

$0 + 1 + 0 \times \frac{dy}{dx} = 0$

$1 + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -1$

ميل المنحنى

∴ ميل المماس = ميل المنحنى

$\frac{1}{\theta} = -1 \Leftarrow \theta = -1$

وحدة (7): نقطة التقاطع

نقطة تقاطع تعني $(س، ص)$

تستطيع ايجاد نقطة التقاطع بين المستقيم ومنحنى أو بين المنحنى ومنحنى آخر لا

وذلك بعدة طرق. نوضحها بالتعويض

مثال: اوجد نقاط تقاطع المنحنى:

$ص^2 + س^3 = س^2 - س + 2$ مع

المستقيم $ص + 1 = س$

الحل

$ص + 1 = س \Leftarrow$ يقطع $ص^2 + س^3 = س^2 - س + 2$

∴ $ص + 1 = س \Leftarrow (ص = س - 1)$

نعوض عن ص بـ $س - 1$

$(س - 1)^2 + س^3 = س^2 - س + 2$ بالكامل

$س^2 - 2س + 1 + س^3 = س^2 - س + 2$

$س^3 - 2س + 1 = 2 - س$

$س^3 = 2 - 1 \Leftarrow س^3 = 1$

∴ $س = 1$

بما أن $ص = س - 1 \Leftarrow ص = 1 - 1$

$ص = 0$

∴ نقطة التقاطع هي $(1, 0)$

ملاحظة هامة: اذا كانت زاوية المماس حادة فإن زاوية الناظم منفرجة واذا كانت زاوية المماس منفرجة فإن زاوية الناظم حادة

زاوية الناظم $=$ زاوية المماس $\pm 90^\circ$

(ما 1) الحادة $+ 90^\circ$

أو (1) المنفرجة $- 90^\circ$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المادة: رياضيات — تابع:

تمارين متنوعة:

١) ص = س² + ٢س + ٤ : معادلة المماس للمنحنى: ص = س² - ٦س + ٤ الذي يوازي المستقيم ص = ٢س + ١ هي ص = ٢س - ١٢

الحل

∴ ص = س² - ٦س + ٤

∴ ص' = ٢س - ٦ ← ميل المنحنى

∴ ص = ٢س + ١٤ ← معادلة المستقيم

∴ ص' = ٢ ← ميل المستقيم الموازي للمماس

∴ ص' = ٢ ← ميل المماس (أيضاً)

∴ ميل المماس = ميل المنحنى

وميل المستقيم المتعامد معه = ٢

∴ ٢س - ٦ = ٢

٢س = ٨ ⇐ س = ٤

∴ ص = س² - ٦س + ٤ (نعوض)

ص = ٤² - ٦×٤ + ٤

ص = ١٦ - ٢٤ + ٤ ⇐ ص = -٤

∴ نقطة التماس هي (٤، -٤)

معادلة المماس هي ص - ص₁ = م(س - س₁)

ص - (-٤) = ٢(س - ٤)

ص + ٤ = ٢س - ٨

ص = ٢س - ٨ - ٤

ص = ٢س - ١٢

٢) إذا كانت المماس للمنحنى: ٣ص² - ٢ص = س حيث ص معرفاً بدلالة المتغير p حيث الصادات عند ص = ٢١ وجد قيمة p

الحل

المماس ⊥ الصادات ⇐ ص' = ١/٠ ... (١)

∴ ٣ص² - ٢ص = س (ميل المنحنى)

∴ ٦ص ص' - ٢ص' = ١

ص'(٦ص - ٢) = ١

ص' = ١ / (٦ص - ٢)

نعوض ص' = ١/٠

١/٠ = ١ / (٦ص - ٢)

١/٠ = ١ / (٦×٢١ - ٢)

١/٠ × ١/(١٢٤ - ٦) (خواص تبادلي)

١/٠ × ١/(١٢٤ - ٦) = ٠

١٢٤ - ٦ = ٠

١٢٤ = ٦ ⇐ p = ٣

٣) إذا كان المستقيم: ص + ٣س - ٤ = ٠ يمس منحنى دالة ص = p س - س² عند س = ٢ أوجد قيمة p

الحل

∴ ص + ٣س - ٤ = ٠ (بحل س)

ص' + ٣ = ٠

ص' = -٣ ... (١) ← ميل المماس

ص = p س - س² ← (منحنى)

ص' = p - ٢س ← ميل منحنى

ص' = p - ٢×٢

ص' = p - ٤ ... (٢)

بالمساواة (١)، (٢)

∴ ميل المماس = ميل المنحنى

∴ p - ٤ = -٣

p = -٣ + ٤

p = ١

سلسلة المختار في الرياضيات — الصف الثالث الثانوي — اعداد أ/ مختار الديبي — وحدة: التفاضل

امتحان 2021

تذكير: إذا كانت زاوية

∴ المماس = ٦٠ فإن زاوية

المتمم = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠°

◆ إذا كانت زاوية المماس = ١٢٠

فإن زاوية المتمم = ١٢٠ - ٩٠ = ٣٠°

(١) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س - ١ يساوي ١ فإن نقطة التماس هي ....

(٢، ١)، (٠، ٢)، (٣، ٠)، (٤، ٣)

الحل

ص = س - ١ (لو للطرفين)

ص = لو(س - ١) (اشتق)

ص' = ١ / (س - ١) (تعويض)

١ = ١ / (س - ١) (ضرب تبادلي)

س - ١ = ١ ⇐ س = ٢ تعويض

ص = لو(س - ١)

ص = لو(٢ - ١) ⇐ ص = لو١

ص = ٠ ∴ نقطة التماس هي (٢، ٠)

(٣) إذا كان المماس محودياً على المستقيم ٢س - ٤ص + ١ = ٠ فإن ميل المماس = ...

[٢/٤ ، ٢/٤] ، [٢/٤ ، ٢/٤]

الحل

ميل المستقيم: ٢س - ٤ص + ١ = ٠

٢ - ٤ص' = ٠

٢ = ٤ص' ⇐ ص' = ١/٢

ميل المستقيم = ١/٢ ← عمودي على المماس

∴ ميل المماس = -٢ ← نقلب ونغير

(٤) معادلة المماس للمنحنى ص = س² - لو س عند النقطة (١، ١) هي .....

[ص = -س + ٢] ، [ص = س + ٢] ، [ص = -س] ، [ص = س]

الحل

ص = س² - لو س ، س = ١ ⇐ ص = ١ - لو ١ = ١

ص' = [اشتق(س) عند أ] / [اشتق ص عند أ]

ص' = [٢س - ١/س] / ١

ص' = [٢(١) - ١/١] / ١ = [٢ - ١] / ١

ص' = [ص - ١] / [س - ٠] ← (المماس ⊥ الناظم)

ص' = -١ ← (الناظم)

معادلة الناظم هي ص - ص₁ = م(س - س₁)

ص - ١ = -١(س - ٠)

ص = -س + ١ ⇐ معادلة المماس

(٥) إذا كان المنحنى ص = س² + ص س = ٢ مماساً عند النقطة (١، ١) فإن الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي ....

[-π/٤ ، ٣π/٤] ، [-π/٤ ، ٣π/٤]

الحل

ص = س² + ص س - ٢ = ٠

ص' = -[اشتق(س) عند أ] / [اشتق ص عند أ]

ص' = -[٢س + ص + س ص' - ٠] / [س × ٢ص + ص + ١ - ٠]

ص' = -[٢(١) + ١ + ١ ص'] / [١ × ٢ × ١ + ١ + ١]

ص' = -[٣ + ص'] / ٤ ⇐ ص' = -١

ظا θ = -١ ⇐ زاوية ∈ الربع الثاني

الزاوية = ١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥ = ٣π/٤

ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ معادلة المماس للمنحنى
ص = جا س + ظا س عند س = صفر
ص = جتا س + قا² س
ص = جا ٠ + قا² ٠
ص = ٠ + ١ ⇐ ص = ١
نوجد ص بالتعويض في المعادلة
ص = جا س + ظا س
ص = جا ٠ + ظا ٠
ص = ٠ + ٠ ⇐ ص = ٠
معادلة المماس هي ص − ص₁ = م(س − س₁)
ص − ٠ = ١ (س − ٠)
ص = س

⑥ إذا كان المماس للمنحنى والمستقيم المار بنقطة التماس يصنع زاوية قياسها (٣٠°) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المماس = ظا ٣٠° = ١/√٣
ص = ظا س ⇐ ص = ظا ٣٠
ص = ١/√٣
ص = ظا س ⇐ ص = ظا ٦٠
ص = √٣
ص = ٢ ص² ⇐ ص = ٢ (√٣)²
ص = ٦
ص = ٢ ص² ⇐ ص = ٢ (١/√٣)²
ص = ٢/٣
ص = ٢ ص² ⇐ ص = ٢ (−١/√٣)²
ص = ٢/٣
ص = ٢ ص² ⇐ ص = ٢ (−√٣)²
ص = ٦
حل آخر: زاوية الميل = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠°
ميل المماس = ظا ٣٠ = ١/√٣
ميل المماس = ظا ١٥٠ = −١/√٣
ميل المماس = ظا ١٢٠ = −√٣
ميل المماس = ظا ٦٠ = √٣

الزاوية θ	٤٥°	١٣٥°	٦٠°	١٢٠°	٣٠°	١٥٠°
الميل (ظا θ)	١	−١	√٣	−√٣	١/√٣	−١/√٣

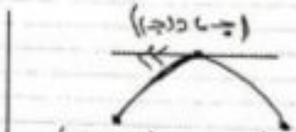
⑦ إذا كان ميل المحور ص على المماس للمنحنى ص = ٢ س عند نقطة التماس يساوي −١/٣ فإن قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ؟
الحل
ميل المماس = −١/٣
ظا θ = −١/٣
θ = ١٥٠° (لأن ٣٠° ، ٦٠° ، ١٥٠° ، ٣٣٠°)

⑧ إذا كان ميل المحور ص على المماس للمنحنى ص = ٢ س عند نقطة التماس يساوي −٢ فإن نقطة التماس هي ... (١، ٢) ، (٢، ٤) ، (−١، ٢) ، (−٢، ٤)
الحل
ميل المحور ص = −٢ ⇐ ميل المماس = ١/٢
ص = ٢ س ⇐ نشتق
ص' = ٢
٢ = ١/٢ ص' ⇐ ص' = ٤
نعوض في ص = ٢ س² ⇐ ٤ = ٢ س²
س = ±٢ ⇐ ص = ٢ (±٢)²
ص = ٨
نقطة التماس هي (٢، ٨) ، (−٢، ٨)

⑨ إذا كان المماس للمنحنى ص = ٢ س² + ٣ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢، ٨) فإن معادلة العمودي هي ... ص − ص₁ = −١/م (س − س₁)
الحل: نوجد م بالتعويض في ص' = ٤ س
ص = ٢ س² + ٣
ص' = ٤ س
م = ٤ (٢) = ٨
ص − ص₁ = م (س − س₁)
ص − ٨ = −١/٨ (س − ٢)
٨ ص − ٦٤ = −س + ٢
٨ ص + س − ٦٦ = ٠

⑩ معادلة المماس ص = س² + ٣ عند النقطة التي ميل العمودي عليها = −١/٣
معادلة العمودي هي ص − ص₁ = −١/م (س − س₁)
ص − ص₁ = ٣ (س − س₁)
ص = ٣ س + ٣ − ٣ س₁ + ص₁
ص = ٣ س + ٣ − ٣ س₁ + س₁²
ص = ٣ س + ٣ − ٣ س₁ + ٣ س₁ + ٣
ص = ٣ س + ٦
ص = ٣ س + ٦ ⇐ ص = ٣ (−٢) + ٦
ص = ٠
النقطة هي (−٢، ٠)
معادلة المماس ص − ص₁ = م (س − س₁)
ص − ٠ = ٣ (س + ٢)
ص = ٣ س + ٦

مبرهنة رول



◆ التمثيل البياني لمبرهنة رول

◆ شروط مبرهنة رول
١) الدالة قابلة للاتصال على [أ، ب]
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على]أ، ب[
٣) د(أ) = د(ب)
إذا توفرت شروط رول للدالة د
فإنه: يوجد ج ∈]أ، ب[بحيث د'(ج) = ٠

◆ ملاحظات على مبرهنة رول
١) المماس في رول دائماً أفقي (معادلته محور السينات).
٢) نقطة التماس هي (ج، د(ج))
٣) د(س) = صفر

◆ ملاحظة على الاتصال
◆ هناك حالات كثيرة تكون الدالة فيها غير متصلة عند س = أ
إذا كان ناتج التعويض عند س = أ
د(أ) هو ... ٠/٠ ، ∞/∞ ، ٠ × ∞ ، ∞ − ∞ ، ١^∞ ، ٠^٠ ، ∞^٠
١) ٠/٠ ⇐ نحلل البسط والمقام ونختصر
مثل: (س² − ٤)/(س − ٢) = (س − ٢)(س + ٢)/(س − ٢) = س + ٢
٢) ∞/∞ ⇐ نقسم البسط والمقام على أعلى أس
مثل: (٣س² + ٥)/(٢س² − ٧) = ٣/٢
٣) ٠ × ∞ ⇐ نحول إلى ٠/٠ أو ∞/∞
مثل: لو(−٣) = لو(−٣) × ١ = لو(−٣) × ١/١ = لو(−٣)/١
٤) ∞ − ∞ ⇐ نوحد المقامات
مثل: ١/(س − ٢) − ٣/(س − ٢)(س + ٢) = (س + ٢ − ٣)/(س − ٢)(س + ٢) = (س − ١)/(س − ٢)(س + ٢)
٥) ١^∞ ، ٠^٠ ، ∞^٠ ⇐ نأخذ لوغاريتم الطرفين

◆ الدوال المتصلة دوماً
١) كثيرة الحدود (صعودية)
مثل ص = س² − ٣س
٢) الدالة الأسية
مثل ص = ٥^س ، ص = هـ^س
٣) مجموع مركبين
مثل: ص = س² + ٩ ، ص = لو(س + ٥)
ص = ٧ س² + ١ ، ص = ١/(س² + ٤)
٤) جاس ، جتاس
٥) الدالة الثابتة
مثل: ص = ٧ ، ص = لو ٣
ص = ٧ س⁰ ، ص = ١/٢

◆ الدوال التي ندرس اتصالها
أي نتأكد من اتصالها على فترة
١) الجذر التربيعي
ص = √(س − ٣) ⇐ مثال
٢) الدالة اللوغاريتمية
مثل: ص = لو(٥ − س)
٣) الدالة الكسرية
مثل ص = ١/(س − ١) ، ص = ٢/(س² − ٩)
ص = ١/(س − ١)²

◆ جا س ، جتا س ، ظا س ، قتا س ، قا س ، ظتا س

◆ الدوال المعرفة بقاعدتين
١) المقياس

◆ قا ٩٠ ، قا ٧٠
◆ ظا ٩٠ ، ظا ٧٠
◆ متا ٠ ، متا ١٨٠ ، متا ٣٦٠
◆ ظتا ٠ ، ظتا ١٨٠ ، ظتا ٣٦٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين على مبرهنة رول

1) أوجد $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ في كل حالة:

أ) إذا كانت $f(x) = x^2 - x - 2$

بما أن الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, 2]$

لكل: 1) الدالة قابلة للاشتقاق على $[-1, 2]$ لأنها كثيرة حدود

2) $f(x) = x^2 - x - 2$ الدالة قابلة للاشتقاق على $[-1, 2]$ لأنها كثيرة حدود

3) $f(2) = f(-1)$

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2$

$= 1 + 1 - 2 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 2 - 2$

$= 4 - 4 = 0$

$\therefore f(-1) = f(2)$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط رول.

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x}$

تحقق شروط رول على الفترة $[1, 8]$

لكل: الدالة كسرية، تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر الذي ينتمي إلى المقام في الفترة

فالدالة غير متصلة

$\therefore$ الدالة غير متصلة على $[1, 8]$

$\therefore$ الدالة لا تحقق شروط رول.

ج) $f(x) = x^3 - 3x$

تحقق شروط رول على $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (X)

لكل: الدالة كثيرة حدود (Y)

حيث درجتها زوجية تتناقص

$x^2 - 3 \geq 0$

$x^2 \geq 3$

$|x| \geq \sqrt{3}$

$x \geq \sqrt{3}$ أو $x \leq -\sqrt{3}$

الواحد ليس أكبر من 3

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاتصال على $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

طريقة أخرى نأخذ $c \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

رقم c الفترة ونقوض فيه

$f(c) = c^3 - 3c$

$f(c) = -1 - 3(-1)$ (c ليس معرف)

$\therefore$ الدالة غير متصلة على $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

د) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

تحقق شروط رول على $[-2, 2]$ (X)

لكل: الدالة لوغاريتمية، تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الذي يجعل اللوغاريتم ≤ 0.

$x^2 - 3 > 0 \Leftarrow x^2 > 3$

$x^2 - 8 = 0 \Leftarrow x^2 = 8$

$\Leftarrow x = 4 \notin [1, 5]$

$\therefore$ الدالة غير متصلة على $[1, 5]$

$\therefore$ الدالة لا تحقق شروط رول.

هـ) $f(x) = \frac{7}{x^2 - 8}$

تحقق شروط رول على الفترة $[1, 5]$

لكل: الدالة كسرية، تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الذي يجعل المقام $= 0$ في الفترة

فالدالة غير متصلة

$\therefore$ أصفار المقام $\notin$ الفترة

فالدالة متصلة

و) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

هل تحقق شروط رول على الفترة $[-2, 2]$ ثم أوجد c التي تنتمي إلى الفترة المفتوحة؟

الحل

1) الدالة قابلة للاتصال (لوجود (x^2+1) مجموع مربعين) على $[-2, 2]$

2) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

الدالة قابلة للاشتقاق على $]-2, 2[$ لوجود (x^2+1) مجموع مربعين.

3) $f(-2) = \ln(4+1) = \ln 5$

$f(2) = \ln(4+1) = \ln 5$

$\therefore f(-2) = f(2)$

$\therefore$ تحقق شروط مبرهنة رول

لوجد c من العلاقة

$f'(c) = 0$

$\frac{2c}{c^2+1} = 0 \Leftarrow 2c = 0$

$\Leftarrow c = 0$

$c = 0 \in]-2, 2[$ مقبول

حيث من الشروط أن تكون $c \in]-2, 2[$

ز) $f(x) = x^3 + 5x$

تحقق شروط رول على $[0, 1]$ (X)

الحل

1) الدالة قابلة للاتصال على $[0, 1]$ لأنها كثيرة حدود

2) $f'(x) = 3x^2 + 5$ الدالة قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$ لأنها كثيرة حدود

3) $f(1) = 1 + 5 = 6$

$f(0) = 0 + 0 = 0$

$f(0) \neq f(1)$

$\therefore$ لا تحقق شروط مبرهنة رول

ح) الدالة: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ جذر تكعيبي

$f(x) = (x^2)^{\frac{1}{3}}$ لا تحقق شروط مبرهنة رول على $[-2, 2]$

الحل

$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2)^{-\frac{1}{3}}$ جذر تكعيبي

الدالة قابلة للاتصال على $[-2, 2]$

أ. مختار النبهي (770393433)

حة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢) $هـ = \frac{٢(س-٣)}{٣(س-٢)^{\frac{٤}{٣}}}$

حسبية: أصفار المقام ∉ للفترة
ماذا إذا كان = ٠
$(س-٢)^{\frac{٤}{٣}} = ٠$
$س-٢ = ٠$
$س = ٢ \notin]٣،٤[$
∴ الدالة قابلة للاشتقاق في $]٣،٤[$

٣) $د(٣) = ٣(٣-٢)^{\frac{٢}{٣}} = ٣$ صفر
$د(٤) = ٣(٤-٢)^{\frac{٢}{٣}} = ٣\sqrt[٣]{٤}$
$د(٣) \neq د(٤)$
∴ الدالة لا تحقق شروط رول
∴ الدالة (٢)

كيفية إيجاد المجاهيل في مبرهنة رول

١) لإيجاد المجهول جـ، نستخدم العلاقة
$د(جـ) = ٠$ ← عام
أو $جـ = \frac{أ+ب}{٢}$ ← خاص
٢) حالة الدالة تربيعية (س) (حدودية من الدرجة الثانية)
المجهول الأخير (الوحيد) نستخدم العلاقة
$د(أ) = د(ب)$

١) إذا كانت $د(س) = س^{٣} - ٣س$
تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[٠، \sqrt{٣}]$ فإن $جـ =$ ....
$(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ (ج)
الحل
$د(س) = ٣س^{٢} - ٣$
$٣جـ^{٢} - ٣ = ٠$
$٣جـ^{٢} = ٣$
$جـ^{٢} = ١$
$جـ = \pm ١$
$جـ = ١ \notin]٠، \sqrt{٣}[$ مرفوض
$جـ = -١ \notin]٠، \sqrt{٣}[$ مرفوض
∴ لا توجد قيمة جـ

٢) إذا كانت $د(س) = \frac{س^{٢}}{س+٢}$ تحقق شروط رول على $[-٤، ٠]$ فإن $جـ =$ ....
(ب) -٢
الحل
$د(-٤) = د(٠)$
$\frac{(-٤)^{٢}}{-٤+٢} = \frac{٠}{٠+٢}$
$\frac{١٦}{-٢} = ٠$
$-٨ = ٠$ ✗
∴ الدالة لا تحقق شروط رول
∴ لا توجد قيمة جـ

٣) إذا كانت $د(س) = س^{٣} - ٣س$
تحقق شروط رول على $[-\sqrt{٣}، \sqrt{٣}]$
فإن قيمة جـ = صفر (ب)
الحل
نستخدم العلاقة $د(جـ) = ٠$
$هـ = س - جاس \times لو_{هـ}$ جتاس
$٠ = س - جاس$
جتاس
$هـ^{س} - جاس = ٠$
جتاس
$هـ^{س} - جاس = ٠$ (مرفوض)
لو $هـ$ جتاس = لو ٠ ← العلاقة السببية
جتاس = (لو ٠) ← غير معرف
أو $-جاجـ = ٠ \Leftarrow جاجـ = ٠$
$جـ = ٠ \in]-\frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٣}[$
أو $جـ = \pi \notin]-\frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٣}[$ مرفوض
∴ الفترة

٣) إذا كانت الدالة $د(س)$
$د(س) = جاس + جتاس$ تحقق شروط مبرهنة رول فإن قيمة جـ التي تحقق المبرهنة في الفترة $[٠، \frac{\pi}{٢}]$ هي $جـ(جـ) = ٠$
$د'(س) = جتاس - جاس$
∴ جتاجـ - جاجـ = ٠
∴ جتاجـ = جاجـ ← متى؟
∴ جـ = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ $]٠، \frac{\pi}{٢}[$ مقبول
أو جـ = $\frac{٥\pi}{٤} \notin]٠، \frac{\pi}{٢}[$ مرفوض

٤) إذا كانت $د(س) = لو(٤-س^{٢})$
تحقق مبرهنة رول على $[١-، ١]$
أوجد $ب$، جـ الناتجة عن المبرهنة
الحل
أولاً: $د(ب) = د(جـ) = د(أ) = د(١-)$
$لو(٤-ب^{٢}) = لو(٤-١)$
$لو(٤-ب^{٢}) = لو٣$
$٤-ب^{٢} = ٣$
$ب^{٢} = ٤-٣ = ١ \Leftarrow ب = \pm ١$
$ب = ١$ مقبول
$ب = -١$ مرفوض
ثانياً: إيجاد جـ نطبق العلاقة
$د'(جـ) = ٠ \Leftarrow \frac{-٢س}{٤-س^{٢}} = ٠$
$-٢جـ = ٠ \Leftarrow جـ = ٠$ ∈ $]-١، ١[$ ∴ مقبول

٥) إذا كانت $د(س) = س + \frac{ب}{س}$
تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-٢، -\frac{١}{٢}]$ فإن قيمة ب = ...
(أ) -٢، -١، ١، ٢
الحل
نطبق العلاقة
$د(أ) = د(ب)$
$د(-٢) = د(-\frac{١}{٢})$
$-٢ + \frac{ب}{-٢} = \frac{١}{٢} + \frac{ب}{-\frac{١}{٢}}$
$-٢ - \frac{ب}{٢} = \frac{١}{٢} - ٢ب$ (×٢)
$-٤ - ب = ١ - ٤ب$
$-ب + ٤ب = ١ + ٤$
$٣ب = ٥ \Leftarrow ب = ١$

٦) إذا كانت $د(س) = \frac{س^{٢}+ب}{س-١}$
تحقق شروط رول على $[٤، ٥]$
فإن قيمة ب = ...
(أ) -٤
الحل
$د(٤) = د(٥)$
$\frac{١٦+ب}{٤-١} = \frac{٢٥+ب}{٥-١}$
$\frac{١٦+ب}{٣} = \frac{٢٥+ب}{٤}$
$٦٤+٤ب = ٧٥+٣ب$
$ب = ٧٥-٦٤ \Leftarrow ب = ١١$

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧) إذا كانت د(س) = $س^2 - ٥س + ٦$ تحققت شروط مبرهنة رول على [١+P ، P] فإن قيمة P = ...
[صفر ، ١ ، ② ، ٣]
الحل: د(P) = د(١+P)
$P^2 - ٥P + ٦ = (١+P)^2 - ٥(١+P) + ٦$
$P^2 - ٥P + ٦ = P^2 + ٢P + ١ - ٥P - ٥ + ٦$
$٠ = ٢P - ٤$
$٢P = ٤ \Leftarrow P = ٢$ ②

٨) إذا كانت د(س) = ١ - جتا٣س تحقق شروط مبرهنة رول على $[P ، \frac{\pi}{٣}]$ أوجد قيمة P ، ج التي تحقق المبرهنة
الحل
أولاً: د(P) = د($\frac{\pi}{٣}$)
١ - جتا٣P = ١ - جتا٣($\frac{\pi}{٣}$)
جتا٣P = جتا٢π
جتا٣P = ١
٣P = ٠ ⇐ P = ٠ مقبول
أو ٣P = ٣٦٠ ⇐ P = ١٢٠ مرفوض
ثانياً: $P \in [٠ ، \frac{\pi}{٣}]$ = [٠ ، ٦٠] ⇐ P = ٠
∴ الفترة هي [٠ ، ٦٠] ، P ≠ ٠
ثالثاً: نوجد ج من العلاقة د(ج) = ٠
د(س) = ٣جا٣س
د(ج) = ٣جا٣ج
٣جا٣ج = ٠ ⇐ جا٣ج = ٠
٣ج = ٠ ⇐ ج = ٠ مرفوض
أو ٣ج = ١٨٠ ⇐ ج = ٦٠ مقبول
أو ٣ج = ٣٦٠ ⇐ ج = ١٢٠ مرفوض

٩) إذا كانت الدالة د(س) = $س^2 - ٩$ تحقق شروط رول على [P ، ٣] أوجد قيم P ، ج التي تحقق المبرهنة
الحل
أولاً: د(P) = د(٣)
$P^2 - ٩ = ٩ - ٩ = ٠$
$P^2 - ٩ = ٠ \Leftarrow P^2 = ٩$
P = ٣ ⇐ P = -٣ مقبول
ثانياً: د(ج) = ٠ في الفترة]-٣ ، ٣[
د(س) = $٢س^{-٩}$
د(ج) = $٢ج^{-٩}$
$٢ج^{-٩} = ٠$
$ج^{-٩} = ٠$ (مرفوض) لأن $ج^{-٩} \neq ٠$
أو ٢ج = ٠ ⇐ ج = ٠ مقبول

١٠) إذا كانت د(س) = $س^2 - ٣س - ب$ تحقق رول على [-١ ، ٤] فإن ب = ...
[٥ ، ② ، ٣ ، ٢]

نشاط
١) إذا كانت د(س) تحقق شروط رول على [P ، ب] فإن د(ج) = ٠ ( )

٢) إذا كانت د(س) = $\frac{P}{س^2}$ تحقق شروط رول على [٢ ، P] فإن P = ...
[٤ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ٥ ، $\frac{٥}{٤}$] الحل ج = ...

٣) بين أن الدالة د(س) = س + $\frac{٤}{س}$ تحقق شروط رول على [١ ، ٤] ثم أوجد قيمة ج التي تحقق نتيجة المبرهنة الحل

٤) إذا كانت د(س) = ٥ جتاس تحقق شروط رول على $[-\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}]$ أوجد قيمة ج التي تحقق نتيجة المبرهنة الحل ٠

٥) إذا كانت د(س) = $س^2 - ٤س + ٥$ تحقق شروط رول على [P ، P+٢] أوجد P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ١ ⇐ ج = ٢

٦) إذا كانت ص = جاس جتاس تحقق شروط رول على [٠ ، ٢π] فإن ج = ... الحل ١٣٥° ، ٤٥°

٧) إذا كانت الدالة د(س) = $(س - ٣)^{\frac{٢}{٣}}$ تحقق شروط رول على [٢ ، ٥] الحل (٨)

٨) الدالة د(س) = س + $\frac{٤}{س}$ تحقق شروط رول على [١ ، ٤] ( )

٩) إذا كانت د(س) = س + $\frac{ل}{س}$ تحقق رول على [٢ ، ٤] فإن ل = ... الحل -٨

١٠) إذا كانت د(س) = $\sqrt{س^2 + ٤}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٠ ⇐ ج = ٠

١١) إذا كانت الدالة د(س) = $س^2 + \frac{٤}{س}$ تحقق شروط مبرهنة رول على [١ ، ٤] أوجد قيمة ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل
$د'(س) = ٢س - \frac{٤}{س^2} = \frac{٢س^3 - ٤}{س^2}$
$د'(ج) = ٢ج - \frac{٤}{ج^2} = \frac{٢ج^3 - ٤}{ج^2}$
$د'(ج) = ٠ \Leftarrow \frac{٢ج^3 - ٤}{ج^2} = ٠$
$٢ج^3 - ٤ = ٠$
$ج^3 = ٢$
$ج = \sqrt[3]{٢}$

١٢) إذا كانت د(س) = $\sqrt{س^2 + ٤}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٠ ⇐ ج = ٠

١٣) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

١٤) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

١٥) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

١٦) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

١٧) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

١٨) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

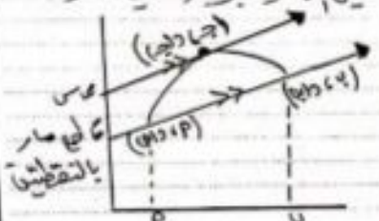
١٩) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

٢٠) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٤}{س}$ تحقق شروط رول على [P ، ٤] أوجد قيمة P ، ج التي تحقق نتيجة المبرهنة
الحل P = ٢ ⇐ ج = ٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة القيمة المتوسطة (لاجرانج)

التمثيل البياني لمبرهنة القيمة المتوسطة



شروط مبرهنة القيمة المتوسطة

1) الدالة قابلة للاتصال على [أ، ب]
2) الدالة قابلة للاشتقاق على]أ، ب[

ونتيجة لذلك أنه يوجد على الأقل جـ ∈]أ، ب[بحيث أن:

أ) $د'(جـ) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$

ب) $د'(جـ) = \frac{د(أ) - د(ب)}{أ - ب}$

ملاحظات:

1) النقطة التماس هي (جـ، د(جـ))
2) وضع المماس:
مواز يا للمستقيم المار بالنقطتين (أ، د(أ)) ، (ب، د(ب))
3) $د'(جـ) = \frac{أ + ب}{2}$ في الدالة التربيعية

1) بين أن الدالة د(س) = س² - ٢ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [-١، ٣]
وإذا وجدت فأوجد نقطة التماس؟

الحل:
1) الدالة د(س) = س² - ٢ قابلة للاتصال على [-١، ٣] لأنها كثيرة حدود
2) د' = ٢س قابلة للاشتقاق على]-١، ٣[لأنها كثيرة حدود
∴ تحققت شروط القيمة المتوسطة
∴ توجد جـ؟

$د'(-١) = ٢ - ٤ = -٢$

$\frac{د(٣) - د(-١)}{٣ - (-١)} = \frac{٧ - ١}{٤} = \frac{٦}{٤}$

$٢جـ = \frac{٦}{٤}$

$جـ = \frac{٣}{٤}$ ∈]-١، ٣[مقبول

∴ النقطة التماس هي $(\frac{٣}{٤}، د(\frac{٣}{٤}))$

$د(\frac{٣}{٤}) = (\frac{٣}{٤})^2 - ٢ = \frac{٩}{١٦} - ٢ = -\frac{٢٣}{١٦}$

∴ نقطة التماس هي $(\frac{٣}{٤}، -\frac{٢٣}{١٦})$

أ. مختار الشبلي (770393433)

1) إذا كانت د(س) = لو(س - ١) تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٢، ٩] فأوجد قيمة جـ التي تحقق المبرهنة؟

الحل:
د(س) = لو(س - ١)
$د' = \frac{1}{س - 1}$
د(٢) = لو(٢ - ١) = لو ١ = ٠
د(٩) = لو(٩ - ١) = لو ٨
$\frac{د(٩) - د(٢)}{٩ - ٢} = د'(جـ)$
$\frac{لو ٨ - ٠}{٧} = \frac{1}{جـ - 1}$
$\frac{لو ٨}{٧} = \frac{1}{جـ - 1}$ (ضرب تبادلي)
$جـ - 1 = \frac{٧}{لو ٨}$
$جـ = \frac{٧}{لو ٨} + 1$

2) إذا كانت د(س) = س² - ٤س + ٥ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [٢، ٦] فأوجد قيمة جـ = ...
(٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

الحل: جـ = $\frac{أ + ب}{2}$ (دالة تربيعية وحيدة)
$جـ = \frac{٢ + ٦}{2} = ٤$

3) إذا كانت د(س) = س - ٢ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [٠، ٤] فأوجد قيمة جـ = ...
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

الحل: جـ = $\frac{أ + ب}{2}$ (دالة تربيعية وحيدة)
$جـ = \frac{٠ + ٤}{2} = ٢$

4) إذا كانت د(س) = س² - ٢س + ٥ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [٠، ٣] فأوجد قيمة جـ = ...
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

الحل: جـ = $\frac{أ + ب}{2}$ (دالة تربيعية وحيدة)
$جـ = \frac{٠ + ٣}{2} = \frac{٣}{2}$

5) الدالة د(س) = (س - ٢)² تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على [٠، ٣]
التوضيح: $د' = \frac{1}{2\sqrt{س - 2}}$ (X)
1) الدالة كسرية تناقصية لاتصال بأصفار المقام.
أصفار المقام في الفترة غير متصلة
أصفار المقام في الفترة متصلة
س - ٢ = ٠ ⇐ س = ٢ ∈ [٠، ٣]
∴ غير قابلة للاتصال على [٠، ٣]
∴ لا تحقق شروط المتوسطة

6) د(س) = |س² - ٤| تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [-١، ١] (ب)

الحل:
1) الدالة |س² - ٤| قابلة للاتصال دوماً لاحتوائها على مجموعتين صريحتين
2) د' = $\frac{2س}{|س^2 - 4|}$ قابلة للاشتقاق (مجموعتين صريحتين)
∴ تحققت شروط المتوسطة (ب)

• الدالة د(س) = ظتاس تحقق شروط المتوسطة على [$\frac{\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{4}$] (X)

ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٧) $د(س)=\frac{1}{س}$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة:
$[-٣،-١]\cup[٤،٦]$، $[-٣،٣]$، $[-٢،٢]$
الحل: أصفار المقام
$س=٠ \notin [٤،٦]$

(٨) إذا تحققت الدالة $د(س)$ شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على $[أ،ب]$ فإن
$د'(جـ)=\frac{د(ب)-د(أ)}{ب-أ}$ (×)

(٩) إذا كانت $د(س)$ تحقق شروط مبرهنة رول فإن $د(س)$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة
إذا كانت $د(س)$ تحقق شروط القيمة المتوسطة فإن $د(س)$ تحقق شروط مبرهنة رول (×)
إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فإنها قابلة للاتصال (✓)
إذا كانت قابلة للاتصال فإنها قابلة للاشتقاق (×)

(١٠) إذا كانت الدالة $د(س)=\frac{1}{٣}س^٣-٣س$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على $[٠،٣]$ فإن $جـ=$ ---- $[\frac{٣}{٢}، -٣، \frac{٣}{٢}]$
الحل: $د(٠)=\frac{1}{٣}س^٣-٣س$
$د'(س)=س^٢-٣$

$د'(جـ)=\frac{د(ب)-د(أ)}{ب-أ}$
$د(ب)=د(٣)=\frac{1}{٣}(٣)^٣-٣(٣)$
$د(٣)=\frac{1}{٣}\times٢٧-٩$
$د(٣)=٩-٩$
$د(٣)=٠$
$د(أ)=د(٠)=٠$
$\therefore د'(جـ)=\frac{٠-٠}{٣-٠}=٠$
$جـ^٢-٣=٠ \Leftarrow جـ^٢=٣$
$\Leftarrow جـ=\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٣}\in]٠،٣[$

(١١) أثبت أن الدالة $د(س)=|س-١|$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على $[٢،٥]$ ثم أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة
الحل
الدالة جذرية (✓)
$\therefore س-١\geq٠$
$\therefore س\geq١$
$[٢،٥]\subseteq[١،\infty[$ الفترة
$\therefore$ الدالة قابلة للاتصال على $[٢،٥]$

$د(س)=س^٢-٣$ (✗)
$د(٠)=\frac{1}{٣}س^٣-٣س$
$د(٠)=\frac{1}{٣}\times٠-٣\times٠=٠$
$د(٠)=٠$
$د(٣)=\frac{1}{٣}(٣)^٣-٣(٣)$
$د(٣)=\frac{1}{٣}\times٢٧-٩$
$د(٣)=٩-٩$
$د(٣)=٠$
$\therefore د(أ)=د(٠)=د(٣)$
$\therefore$ تحققت شروط المتوسطة $\Leftarrow$ تحققت شروط رول
$\therefore د'(جـ)=٠$ ، وكذلك $د'(جـ)=\frac{د(ب)-د(أ)}{ب-أ}$ (١)
$د'(جـ)=٠$
$جـ^٢-٣=٠ \Leftarrow جـ^٢=٣$
$\Leftarrow جـ=\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٣}\in]٠،٣[$ ✓

(٥) $د(س)=\frac{1}{س-٢}$
$س-٢\neq٠$
$س\neq٢$
$[٥،٦]\subseteq]٢،\infty[$ (✓)
$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق على $]٢،٥[$
$\therefore$ تحققت شروط المتوسطة
الآن نوجد قيمة جـ.
$د(أ)=د(٣)=\frac{1}{٣-٢}=١$
$د(ب)=د(٥)=\frac{1}{٥-٢}=\frac{1}{٣}$
$\therefore د(٣)=د(٥)=\frac{1}{٣}$
$د'(جـ)=\frac{د(٥)-د(٣)}{٥-٣}$
$\frac{1}{(جـ-٢)^٢}=\frac{\frac{1}{٣}-١}{٢}$
$\frac{1}{(جـ-٢)^٢}=\frac{-٢}{٣}$
$(جـ-٢)^٢=\frac{٩}{٢}$ (نوجد بياخذ $\sqrt{}$)
$جـ-٢=\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ (نرفع)
$جـ=\frac{٣}{\sqrt{٢}}+٢$
$جـ=\frac{٣\sqrt{٢}+٤}{٢}$ مقبول

(٦) إذا كانت جـ = ٣ الناتجة عن مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $د(س)=س^٣-٢س$ على $[٠،ب]$ أوجد ب
الحل: $د(٠)=س^٣-٢س$
$د(٠)=٠$
$د(ب)=ب^٣-٢ب$
نوجد $د'$
$د'(س)=٣س^٢-٤س$
$د'(جـ)=\frac{د(ب)-د(٠)}{ب-٠}$
$٣جـ^٢-٤جـ=\frac{ب^٣-٢ب-٠}{ب-٠}$
$٢(٣)^٢-٤(٣)=\frac{ب^٣-٢ب}{ب}$
$٢٧-١٢=ب^٢-٢$
$١٥=ب^٢-٢$
$ب^٢-١٥=٠$ (تحليل)
$(ب-٥)(ب+٣)=٠$
إما $ب=٥$ ← مقبول
أو $ب=-٣$ ← مرفوض

(١٢) إذا كانت $د(س)=س^٢+ل س$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على $[٠،٣]$ و $د(جـ)=١$ أوجد ل، جـ
الحل
$د(٠)=٠$ ، $د(٣)=٩+٣ل$
$د'(جـ)=\frac{د(٣)-د(٠)}{٣-٠}$
$١=\frac{٩+٣ل-٠}{٣-٠}$
$٩+٣ل=٣ \Leftarrow ٣ل=-٦$
$\Leftarrow ل=-٢$
$جـ=\frac{٣+٠}{٢} \Leftarrow جـ=\frac{٣}{٢}$

ة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة رول - مبرهنة لاجرانج

أسئلة 2021

(1) إذا كانت الدالة د(س) = س³ - ٢س تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠، p] وكانت قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة تساوي ١، فأوجد قيمة p = ٢

الحل
∵ الدالة تربيعية ⇐ جـ = $\frac{p+0}{2}$
$\frac{p+0}{2}$ = ١
p + ٠ = ٢
p = ٢ (مرفوض)
الطرفان متساويان ⇐ ١ = ١ (صح)

(2) الدالة د(س) = جاس
د(س) = جتاس تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [٠، π] (صح)
الحل
١) الدالة قابلة للاتصال على [٠، π]
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على]٠، π[
٣) د(٠) = جاس = ٠
د(π) = جاس = ٠
∴ د(٠) = د(π) = ٠
∴ الدالة تحقق شروط رول

(3) إذا كانت د(س) تحقق شروط رول على [p، ٤] فأوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة (جـ) (د(جـ) = ٠)
يوازي محور السينات // محور الصادات (X)
الحل المماس // محور الصادات

(4) إذا تحققت د(س) شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٣، ٢] فأوجد د(جـ) علماً بأن د(٢) = د(٣)
الحل
$\frac{د(ب) - د(p)}{p - ب}$ = د'(جـ)
$\frac{د(٣) - د(٢)}{٣ - ٢}$ = د'(جـ)
د'(جـ) = د(٣) - د(٢)
د'(جـ) + د(٢) = د(٣) (صح)

(5) إذا كانت جـ = ١ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة د(س) = س² على الفترة [٠، ب] فأوجد قيمة ب = ٢ (صح)
[٣، ٢، ١، ٠]
الحل
$\frac{د(ب) - د(٠)}{ب - ٠}$ = د'(جـ)
$\frac{ب^2 - ٠}{ب}$ = ٢جـ
$\frac{ب}{ب}$ = ٢جـ
$\frac{1}{2}$ = جـ
$\frac{1}{2}$ = $\frac{ب}{2}$ ⇐ ب = ١ مرفوض
ب = ٢ مقبول

(6) إذا كانت د(س) = لـ جتاس + ل جاس تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [٠، $\frac{π}{2}$] ، لـ ≠ ٠ فأوجد قيمة لـ = ١
[-٢، -١، $\frac{1}{2}$، ٢]
الحل
د(٠) = د($\frac{π}{2}$)
لـ جتا٠ + ل جا٠ = لـ جتا$\frac{π}{2}$ + ل جا$\frac{π}{2}$
لـ × ١ + ل × ٠ = لـ × ٠ + ل × ١
لـ = ل
∴ لـ = ل (عدد حقيقي غير الصفر)
عندما ل = ١ مقبول أو ل = -١ مرفوض

(7) إذا كانت د(س) = س - جاس تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [٠، π] ، فأوجد (٠، π) القطع المماس
الحل
د'(جـ) = $\frac{د(π) - د(٠)}{π - ٠}$
١ - جتاس = $\frac{(π - جا π) - (٠ - جا٠)}{π}$
١ - جتاجـ = $\frac{π}{π}$
١ - جتاجـ = ١ ⇐ - جتاجـ = ٠
جتاجـ = ٠
جـ = $\frac{π}{2}$ (مقبول) أو جـ = $\frac{3π}{2}$ (مرفوض)
∴ جـ = $\frac{π}{2}$ ، نقطة التماس هي (جـ، د(جـ)) = ($\frac{π}{2}$، ١)
د(جـ) = س - جاس = $\frac{π}{2}$ - جا$\frac{π}{2}$
د(جـ) = $\frac{π}{2}$ - ١
∴ نقطة التماس هي ($\frac{π}{2}$، $\frac{π}{2}$ - ١)

(8) إذا كانت د(س) = س³ + ٣س تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [٠، ب] فأوجد قيمة ب = ٣ (صح)
الحل
د(٠) = د(ب)
٠ = ب³ + ٣ب
ب(ب² + ٣) = ٠
إما ب = ٠ مرفوض
أو ب² + ٣ = ٠ ⇐ ب² = -٣

(9) إذا كانت د(س) = $\frac{س^2 + ٣س}{س + ١}$ تحقق شروط مبرهنة رول على [-٣، ١]
فأوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة
[-٢، (صفر)، ١، ٢]
الحل
د'(جـ) = ٠ غير صحيح

(10) الدالة د(س) = ظاس تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [٠، π] (X)
الحل
ظاس غير معرفة عند س = ٩٠
ظا٩٠ = غير معرفة
∵ ٩٠ ∉ [٠، ١٨٠] ∴ الدالة غير متصلة على [٠، π]
ظاس متصلة على [٠، $\frac{π}{2}$] // [٠، $\frac{π}{2}$[
قاس متصلة على [٠، $\frac{π}{2}$] // [٠، $\frac{π}{2}$[
ظتاس متصلة على [٠، $\frac{π}{2}$] // [٠، $\frac{π}{2}$[
جتاس متصلة على [٠، π] // [٠، π]

أي عدد يجعل الدالة غير معرفة وينتمي للفترة [p، ب] يلغي الاتصال

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دراسة تغيرات الدالة

عناصر الدرس
1. مجموعة التعريف (م.ت)
2. عدد الفروع اللانهائية
3. أنواع النقاط
4. أنواع المستقيمات المقاربة
5. التزايد والتناقص
6. التقعر
7. الجدول ـ الرسم

أولاً: م.ت بدلالة عدد الفروع اللانهائية

1) دالة كثيرة الحدود
م.ت = ح =]−∞، ∞[
عدد الأفرع اللانهائية = ؟

مثال: د(س) = س² − ٩ ← دستورية
م.ت = ح أي م.ت =]−∞، ∞[
عدد الأفرع اللانهائية = ؟
- ∞ ← فرع واحد
- ∞ ← فرع واحد
- ح ← فرعان

ثانياً: الدالة الكسرية

م.ت = ح / أصفار المقام
ح / {٢} لها أربعة أفرع لانهائية
ح / {٢، ٥} لها ستة أفرع لانهائية
ح / {أ، ب، جـ} لها ثمانية أفرع لانهائية

كل عدد (صفري) يصفر المقام له فرعان

مثال: د(س) = س / (س − ٢) كسرية
س − ٢ = ٠ ⇐ س = ٢
م.ت = ح / {٢}
عدد الأفرع اللانهائية = ٤ أفرع

مثال: د(س) = ١ / (س² − ٤)
س² − ٤ = ٠ ⇐ س² = ٤
⇐ س = ± ٢
م.ت = ح / {٢، −٢}
عدد الأفرع اللانهائية = ٦ أفرع

مثال: د(س) = (س + ٢) / (س³ − س)
س³ − س = ٠ ⇐ س(س² − ١) = ٠
س(س − ١)(س + ١) = ٠
إما س = ٠ أو س = ١ أو س = −١
م.ت = ح / {٠، ١، −١}
عدد الأفرع اللانهائية = ٨ أفرع

تنبيه: بجوج المدبعين
م.ت = ح ⇐ عدد الأفرع = ؟

مثال: د(س) = س² + ٩
م.ت = ح ⇐ عدد الأفرع = ؟

مثال: د(س) = (س + ١)² / س
م.ت = ح ⇐ عدد الأفرع = ؟

مثال: د(س) = لو(س² + ٩)
م.ت = ح ⇐ عدد الأفرع = ؟

مثال: د(س) = ٨ / (١٤ − س²)
م.ت = ح ⇐ عدد الأفرع = ؟

رابعاً: د(س) = (س² + ٩)
م.ت = جميع الأعداد الحقيقية
عدد الأفرع اللانهائية = ١ (واحد)

مثال: د(س) = √(س² − ٦)
م.ت: س² − ٦ ≥ ٠ ⇐ س² ≥ ٦
م.ت =]−∞، −√٦] ∪ [√٦، ∞[
عدد الأفرع اللانهائية = ١ (واحد)

ملاحظة: عند إيجاد م.ت تارة نوجد م.ت ثم نجري تعديل في السؤال وتكتفي بإجراء تعديل في السؤال تارة أخرى دون إجراء تعديل في السؤال
← يجب تعديل السؤال إذا كان قابل للتعديل في حساب عدد الأفرع اللانهائية

خامساً: د(س) = لو(س² + ٩)
م.ت = جميع الأعداد الحقيقية
عدد الأفرع اللانهائية = ١ (واحد)

مثال: د(س) = لو(٥ − س)
٥ − س > ٠ ⇐ −س > −٥
س < ٥
م.ت =]−∞، ٥[
عدد الأفرع اللانهائية = واحد (فرع واحد)

سادساً: الدالة د(س) = ٩ − س²
م.ت =]−∞، ٩]
ليس لها أفرع لانهائية

مثال: د(س) = ٧ − س
م.ت =]−∞، ٧]
ليس لها أفرع لانهائية

سابعاً: الدالة د(س) = √(س² − ٩)
م.ت =]−∞، −٣] ∪ [٣، ∞[

مثال: د(س) = √(س² − ٩)
م.ت =]−∞، −٣] ∪ [٣، ∞[
عدد الأفرع اللانهائية = ؟

مثال: د(س) = |س² − ٩|
م.ت = ح
عدد الأفرع اللانهائية = ؟

مثال: د(س) = |س| / س
م.ت = ح − {٠}
عدد الأفرع اللانهائية = ٢ أفرع

مثال: د(س) = س / |س|
م.ت = ح − {٠}
عدد الأفرع اللانهائية = ٢ أفرع

مثال: د(س) = ٤س / (س² − ١)
م.ت = ح − {١، −١}
عدد الأفرع اللانهائية = ؟
- ∞ ← فرع واحد
- ∞ ← فرع واحد
عدد الأفرع اللانهائية = ٤ أفرع

مثال: د(س) = ٤س / (س − ١)
أصفار المقام: س − ١ = ٠ ⇐ س = ١
- ∞ ← فرع
١ ← فرع
∞ ← فرع
عدد الأفرع اللانهائية = ٣ أفرع

مثال: د(س) = ٤س / (س² − ١)
م.ت = ح − {١، −١}
عدد الأفرع اللانهائية = ؟

فرع لانهائي واحد	فرع لانهائي	ليس له أفرع لانهائية	له أربع أفرع لانهائية

بشرط الدالة غير قابلة للتعديل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

◆ المستقيمات المقاربة :-

يقصد بها تلك الخطوط المستقيمة التي يقربها منحنى الدالة بالقرب منها وعادة ما توجد في الدوال الكسرية ويوجد منها ثلاثة أنواع هي :-

(1) المستقيمات الرأسية :

وعادة ما تكون أصفار المقام وصورتها $س = P$ (عدد)

مثال : $ص = \frac{س+5}{س-2}$ ، $س = 2$ ، $ص = \infty$

معادلة المستقيم المقارب الرأسي

للدالة $ص = \frac{س+5}{س-2}$ هي ...

$س = 5$ (×)

أصفار المقام : $س - 2 = 0$

$\therefore س = 2$

معادلة المقارب الرأسي هي $س = 2$

(2) $ص = أ$ حيث $س$: إذا كانت

$ص = \frac{3س - 1}{3س^2 - 4}$ فإن للدالة

مستقيم مقارب رأسي معادلته

$س = 2$ (ل)

الحل

$3س^2 - 4 = 0 \Leftarrow 3س^2 = 4$

$س^2 = \frac{4}{3} \Leftarrow س = \pm 2$

نهايتها $= \infty$

(3) $ص = أ$ حيث $س$: للدالة

$ص = \frac{س^2 + 2}{س^2 - 1}$ مستقيماً

رأسياً (ر)

الحل $س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س^2 = 1$

$س = \pm 1$

◆ ملاحظة هامة جداً

المستقيم المقارب الرأسي لا يكون مستقيم مقارباً رأسياً إلا إذا كان ناتج التعويض عنه في الدالة غير معرف أي يؤدي إلى $\frac{أ}{0}$

(4) $ص = أ$ حيث $س$: للدالة

$ص = \frac{1}{س^2 + 4}$ مستقيماً مقارباً رأسياً (×)

الحل : $س^2 + 4 = 0 \Leftarrow س^2 = -4$

$\Leftarrow س = \sqrt{-4}$ ∉ ح

∴ لا يوجد مستقيم مقارب رأسي

(5) $ص = أ$ حيث $س$: للدالة

$ص = \frac{س^2 - 4}{س - 2}$ مستقيماً مقارباً رأسياً (×)

المستقيمات المقاربة عادة ما تأتي في الدوال الكسرية .

(6) $ص = أ$ حيث $س$: للدالة

$ص = \frac{س^2 - 4س + 3}{س - 3}$ مستقيماً مقارباً رأسياً معادلته $س = 3$ (×)

الحل : $س = 3$ عوض في $ص = \frac{9 - 12 + 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ ≠ ∞

∴ $س = 3$ ليس مستقيماً رأسياً

طريقة أخرى : إذا كان السؤال قابل للتحليل والاختصار يجب التحليل والاختصار قبل تصفير المقام

∴ $ص = \frac{(س-3)(س-1)}{س-3}$ ، $س = 3$

صارت الدالة بعد التبسيط لا يوجد مستقيم رأسي

أ/ مختار الشهبي (770353433)

(7) معادلة المستقيم الرأسي

للدالة $ص = \frac{س}{س^2 - س}$ هي

$س = ...$ [(1، 0) ـ (1، 2)]

الحل $س = 1$ لا ∈ عند التعويض فيه

$ص = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$ (غير معرف)

جوابه غير معرف

(8) للدالة $ص = \frac{1}{2س - ل}$

مستقيم مقارب رأسي معادلته

$س = 4$ فإن $ل = ...$

الحل $2س - ل = 0$

$2 \times 4 - ل = 0$

$8 - ل = 0 \Leftarrow ل = 8$

ثانياً : المستقيمات الأفقية :

هي عبارة عن قيم المتغير ص عندما $س \to \pm\infty$

أي $ص = \lim_{س \to \pm\infty}$ (س) ∈ ح

وعموماً نقول $ص = أ$ حيث $ص$ عدد

ويتم الحصول عليها في الدوال الكسرية التي يكون بسطها ومقامها :-

1) درجة البسط ≤ درجة المقام

ويكون المستقيم X نفس معادلته $(ص = 0)$

2) درجة البسط = درجة المقام

ومعادلة X نفس ص العامل الرئيسي

العامل الرئيسي

باختصار : معادلة الأفقي هي ... $ص = \{$ المعاملات

◆ المحور السيني نفس $ص = 0$

◆ المحور الصادي نفس $س = 0$

مثال : $ص = أ$ حيث $س$:

للدالة $ص = \frac{2}{3س + 4}$ مستقيم

مقارب أفقي معادلته $ص = \frac{1}{2}$ (×)

الحل $ص = 0$ لا ∈ درجة البسط ≤ درجة المقام

(9) معادلة المستقيم المقارب الأفقي لمنحنى الدالة $ص = \frac{3س^2 + 1}{س^2 + 2}$ هي ...

$(ص = 1 ، ص = 3 ، س = \pm 1 ، س = \pm 3)$

الحل درجة البسط = درجة المقام $\Rightarrow ص = \frac{3}{1}$

$ص = 3$

(10) المستقيم المقارب الأفقي للدالة $ص = \frac{1}{س}$ هو المحور السيني (ل)

الحل $ص = \frac{1}{س} \to$ صغير $\Leftarrow س \to$ كبير

$ص = 0 \Leftarrow$ تعني المحور السيني

(11) إذا كان للدالة $(ص = أ)$ حيث $ص$:

$ص = \frac{P س^2 - 3}{4 س^3 + 1}$ مقارباً أفقياً

معادلته $ص = \frac{3}{2}$ فإن رتبة $P = ...$

الحل $ص = \frac{P}{4}$ المعاملات

$\frac{P}{4} = \frac{3}{2} \Leftarrow 2P = 12$

$P = 6$

أ/ مختار الشهبي (770353433)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ ب/ أوجد:
المقاربات الأفقية للدالة $(س) = \frac{3س^2+2}{1-س}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته $ص = -3$
الحل ص = المعاملات $\Rightarrow ص = \frac{3}{-1}$
$ص = -3$

⑥ الدالة $(س) = 3 + \frac{س}{س^2-4}$
مستقيم مقارب أفقي معادلته $ص = 3$
[$(-2, ص=4)$، $(0, ص=1)$، $س=1$]
الحل ص = 3 + المعاملات
$ص = 3 + \frac{س}{(س-1)(س+2)}$
$ص = 3 + 1 \Rightarrow ص = 4$

⑦ ب/ أوجد:
المقاربات الأفقية للدالة
$(س) = 5 + \frac{2-5س}{3+س^3}$
هو محور السينات
الحل
$ص = 5 + \frac{-5}{1}$
$ص = 5 - 5$
$ص = 0$ وهو محور السينات

⑧ إذا كانت (2، 2) نقطة تقاطع المقاربين للدالة
$(س) = \frac{م س + 2}{س - ن}$ فأوجد م + ن
الحل
المقاربين هما الرأسي والأفقي
$س - ن = 0$
$س = 0 \Rightarrow$ معادلة الرأسي
$ن = 2$

معادلة الأفقي هي $ص = \frac{م}{1}$ (المعاملات)
$ص = م$
$2 = م$
$\therefore م + ن = 2 + 2 = 4$

ثالثاً: المستقيمات المائلة

هي خطوط مائلة وتكون صورتها
$ص = P س + ب$،
حيث $P = \lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} \times (س)$ الدالة
$ب = \lim_{س \to \infty} ((س) - P س)$
نحصل عليه إذا كانت
درجة البسط > درجة المقام
بدرجة واحدة فقط.
◆ ويمكن إيجاد معادلة المستقيم المائل بإحدى طرق منها
1) القسمة المطولة
وتكون معادلة (ص = الناتج) ناتج القسمة
2) بالمقارنة $ص = P س + ب$
3) معادلة جاهزة في الدالة (موجودة في السالبة) ناتج القسمة

مثال: المقارب المائل للدالة $ص = \frac{س^2+3س}{س+1}$ هو المستقيم $ص = \ldots$
[$س \neq -1$، $(0, 0)$، $(-3, 0)$]
حسمة مطلوبة
معادلة المائل ص
$س + 1 \overline{)س^2 + 3س}$
$ص = س + 1$

⑨ ب/ أوجد: المستقيم المقارب المائل لمنحنى الدالة $ص = \frac{س^2}{1-س}$
هو $ص = س + 1$
الحل
$س + 1 \overline{)س^2 \quad + س}$
$-س^2 + س$
$س$
$-س + 1$
1
(أ) الخطوات
1) القسم
2) الورقة
3) تغيرات
4) جمع أوجد
$ص = س + 1$ (ناتج القسمة)
$ص = س + 1$ معادلة المائل

⑩ معادلة المستقيم المقارب المائل للدالة
$(س) = 1 + \frac{س^2}{س-2}$ هو ...
$ص = \frac{س - 2 + س^2}{س-2}$ وجدنا المعاملات
$P = \lim_{س \to \infty} \frac{س - 2 + س^2}{س - 2} \times \frac{1}{س}$
$P = \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + س - 2}{س^2 - 2س} = \frac{1}{1}$
$P = 1$
$ب = \lim_{س \to \infty} \frac{س - 2 + س^2}{س - 2} - P س$
$P = 1$
$ب = \lim_{س \to \infty} \frac{س - 2 + س^2}{س - 2} - س$
$\lim_{س \to \infty} \frac{س - 2 + س^2 - س^2 + 2س}{س - 2}$
$ب = \lim_{س \to \infty} \frac{3س - 2}{س - 2} = \frac{3}{1}$
$\therefore ب = 3$
معادلة المائل هي $ص = P س + ب$
$\therefore ص = 1 س + 3$
$ص = س + 3$ معادلة المائل

⑪ معادلة المقارب المائل للدالة
$ص = \frac{س^2+1}{س-2}$ هي ...
الحل معادلة المائل هي $ص = P س + ب$
لإيجاد P: $P = \lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} \times (س)$
$P = \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + 1}{س^2 - 2س} \times \frac{1}{س}$
$P = \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + 1}{س^2 - 2س} = \frac{1}{1}$ المعاملات
$P = 1 \Leftarrow P = \frac{1}{1}$
$ب = \lim_{س \to \infty} ((س) - P س)$
$ب = \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + 1}{س - 2} - 1 س$ توحيد المقامات
$ب = \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + 1 - س^2 + 2س}{س - 2}$
$ب = \lim_{س \to \infty} \frac{1 + 2س}{س - 2} = \frac{2}{1}$
$\therefore ب = 2$
معادلة المقارب المائل $ص = P س + ب$
$ص = س + 2$

◆ إيجاد معادلة المقارب المائل
هي معادلة المستقيم مباشرة إذا كان شكل الدالة كالآتي
$ص = ($المقدار$ س \pm ق$
مثال: $ص = س + \frac{1}{س}$ معادلة المقارب المائل هي ... الحل $ص = س + 0$ مائل

أ/ مختار الشبحي (7703033433)
ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[2] $ص = س - 2 + \frac{1}{س+1}$

معادلة المقارب المائل هـ ...

المائل $ص = س - 2$ + (الحاصلة)

$ص = س - 2 + \frac{1}{س+1}$

$ص = س$ ← معادلة المقارب المائل

أو $ص - س = -1$ ← معادلة المقارب المائل

أو $ص - س + 1 = 0$

[3] إذا كانت $ص = 3س - \frac{1}{س}$

بيّن أن الدالة مقاربة مائل

معادلته هـ ...

[$ص = 3س$ ، $ص = -\frac{3}{س}$ ، $ص = س$]

المائل $ص = 3س - \frac{1}{س}$

$ص = 2س - 0$ معادلة

$ص = 3س$ ← المائل

[4] $ص = س - 2 + \frac{س}{س+1}$

معادلة المقارب المائل هـ ...

المائل $ص = س - 2 + \frac{1}{+}$ (الحاصلة)

$ص = س - 2 + 1$

$ص = س - 1$ ← معادلة المقارب المائل

أو $ص - س = -1$ ← معادلة المقارب المائل

أو $ص - س + 1 = 0$

عندما $س = 3$ $ص = 3 - \frac{3}{3+2} = 3 - \frac{3}{5}$

المنحنى $(ج)$ يقطع المقارب المائل في $(3, \frac{12}{5})$

[5] $ص = س - 1 + \frac{س}{س+1}$

لهذه الدالة مقاربة ...

[مائل ، أفقي]

$ص = س - 1 + \frac{1}{1}$

$ص = س - 1 + 1$

$ص = س$ ← معادلة المقارب المائل

لا تقطع س

تذكير: $ص = ار + \frac{ب}{س+ج}$ (2024)

لتقاطع المستقيمين المقاربين

الدالة $د(س) = م س - \frac{3}{س-ل}$ فإن

$ج ل = 0$ (1)

المقاربان هما المستقيم المار بالمبدأ و المائل

$ص = م س - \frac{3}{س-ل}$

الرأسي: $س - ل = 0 \Leftarrow س = ل$ (2)

المائل: $ص = م س$

$0 = 2 \times م \Leftarrow 0 = م$

$\therefore م ل = 0 \times 2$

$ج ل = 0$

المستقيم المقارب المائل لمنحنى $د(س) = \frac{3س^2 + 2س}{س+1}$ يوازي المستقيم $ص = 3س$ (1)

[6] $ص = \frac{س^2 + 3س}{س+2}$ الدالة

مقاربة ... [مائل ، أفقي]

ومعادلتها هي ...

المائل $ص = 3 - \frac{1}{س+2}$

$ص = س - 2 + \frac{1}{س+2}$

معادلة المقارب المائل هـ ...

المائل $ص = س - 2$ + (الحاصلة)

$ص = س - 2 + \frac{1}{س+2}$

$ص = س - 2$ ← معادلة المقارب المائل

أو $ص - س = -2$ ← معادلة المقارب المائل

أو $ص - س + 2 = 0$

$ص = 3$ ← معادلة المقارب الأفقي

$ص = س + 1$

معادلة المقارب المائل

$ص = س + 1$ ← معادلة المقارب المائل

لا يحتمله في دالة

ظهور الأفقي يمنع ظهور المائل

وظهور المائل يمنع ظهور الأفقي

عندما $س = 0$ $ص = 0 - 1 + \frac{0}{0+1} = -1$

$ص = 3$ ← معادلة المقارب الأفقي

لا اختفاء $س$ مع المعادلة

معادلة المقارب الأفقي هـ $ص = 3$

$ص = س + 1$

$ص = 3$ ← معادلة المنحنى

معادلة: المقاربان المائل والأفقي

لا يجتمعان في دالة

ظهور الأفقي يمنع ظهور المائل

وظهور المائل يمنع ظهور الأفقي

عندما $س = 0$ $ص = 0 - 1 + \frac{0}{0+1} = -1$

لهذه الدالة مقارب ...

[مائل ، أفقي]

$ص = س - 1 + \frac{1}{1}$

$ص = س - 1 + 1$

$ص = س$ ← معادلة المقارب المائل

لا تقطع $س$

تذكير: $ص = ار + \frac{ب}{س+ج}$ (2024)

لتقاطع المستقيمين المقاربين

الدالة $د(س) = م س - \frac{3}{س-ل}$ فإن

$ج ل = 0$ (1)

المقاربان هما المستقيم المار بالمبدأ و المائل

$ص = م س - \frac{3}{س-ل}$

الرأسي: $س - ل = 0 \Leftarrow س = ل$ (2)

المائل: $ص = م س$

$0 = 2 \times م \Leftarrow 0 = م$

$\therefore م ل = 0 \times 2$

$ج ل = 0$

المستقيم المقارب المائل لمنحنى $د(س) = \frac{3س^2 + 2س}{س+1}$ يوازي المستقيم $ص = 3س$ (1)

[1] $ص = \frac{س - 1}{س^2 - 1}$ مقارب أفقي

معادلته $ص = 0$ (محور السينات)

$ص = \frac{س - 1}{(س-1)(س+1)} = \frac{1}{س+1}$

$س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$ مرفوض

طريقة أخرى:

$س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س^2 = 1 \Leftarrow س = \pm 1$

التحقق: $س = 1 \Leftarrow ص = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (ح.ت)

$\therefore س = 1$ مرفوض

$س = -1 \Leftarrow ص = \frac{-1-1}{1-1} = \frac{-2}{0} = \infty$

$\therefore س = 1$ مقبول

[2] $ص = \frac{س^2 + 3س + 2}{س - 1}$ مقارب مائل

معادلته ...

$\frac{س^2 + 3س + 2}{س - 1}$ | $س - 1$

$\frac{س^2 - س}{4س + 2}$

$\frac{4س - 4}{6}$

معادلة المائل

$ص =$ ناتج القسمة

$ص = س + 4$

[3] $ص = \frac{1 - 2س^3}{س^2}$ مقارب مائل

معادلته ... الحل بالتوزيع

$ص = \frac{1}{س^2} - \frac{2س^3}{س^2}$

$ص = \frac{1}{س^2} - 2س$

$\therefore$ معادلة المائل هـ $ص = -2س$

تمرين: إذا كان $ص = \frac{م س^2 + 3}{س - 1}$ المقارب المائل لها $ص = 3س + ن$ فإن $م + ن =$ ...

الحل: $م س^2 + 3 = (3س + ن)(س - 1)$

$م س^2 + 3 = 3س^2 - 3س + ن س - ن$

$م = 3$ ، $-3 + ن = 0 \Leftarrow ن = 3$

$\therefore م + ن = 6$

[1] أ) أعد القسمة وتقارب

$ص = \frac{س^2 + 3س + 2}{س + 2}$ فنكتب الدالة

$ص = س + 1 + \frac{1}{س + 2}$

$\therefore$ المائل $ص = س + 1$

ب) $P = \frac{\text{طول المستطيل}}{\text{عرض المستطيل}} = \frac{س^2 + 3س + 2}{س - 1}$

$P = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \times \frac{1}{\text{عرض}} = \frac{س^2 + 3س + 2}{س - 1} \times \frac{1}{س^2}$

$P = \frac{س^2}{س^2} + \frac{3س}{س^2} + \frac{2}{س^2}$

$P = 1 + \frac{3}{س} + \frac{2}{س^2}$

$P = 1 \Leftarrow \frac{3}{س} + \frac{2}{س^2} = 0$

ملاحظة: المائل هو $ص = س + 1$

لهما مقاربان أحدهما موازٍ لمحور السينات

والآخر موازٍ لمحور الصادات

أفقي $ص = 0$ (محور السينات)

رأسي $س = 0$ (محور الصادات)

[4] $ص = \frac{س^2 - 8س}{س^2 + 4}$ مستقيم مقارب أفقي

معادلته هـ ...

[$ص = 2$ ، $س = 2$ ، $س = -2$]

$ص = \frac{س^2 - 8س}{س^2 + 4} = \frac{-8س}{4س} = -2$

$ص = -2$

[5] $ص = \frac{س - 2}{س^2 - 4}$ مستقيم مقارب

أفقي وأرأسي ومتقاطعان

[رأسي ومائل ، أفقي ومائل]

$ص = \frac{س - 2}{(س-2)(س+2)} = \frac{1}{س+2}$

$\therefore ص = 0 \Leftarrow \frac{1}{س+2} = 0$ (أفقي)

$ص = \frac{1}{س+2}$ ← أفقي

[6] إذا كان $ص = \frac{م س^2 + 3}{س^2 + 1}$ المقارب المائل لها $ص = 3$

$\frac{م س^2 + 3}{س^2 + 1}$ فإن $م =$ ...

$م = 1$

[7] أ) أثبت أن $ص = 1$ مستقيماً مقارباً أفقياً فإن $م =$ ...

$ص = 1 \Leftarrow \frac{م س^2 + 3س + 2}{س^2 - 3س + 2} = 1$

$م س^2 + 3س + 2 = س^2 - 3س + 2$

$(م - 1) س^2 + 6س = 0$

$م - 1 = 0 \Leftarrow م = 1$

ب) أوجد معادلة المقارب الرأسي هو $س = 1$

$\therefore ص = \frac{4س + 2}{3س - 3}$ مستقيماً مقارباً أفقياً فإن $م =$ ...

$3س - 3 = 0 \Leftarrow س = 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

◆ ثانياً: أنواع النقاط

1. حرجة: $(أ)، (ب)، (ج)$
2. قصوى $\begin{cases} \text{عظمى } م \text{ (أ)} \\ \text{صغرى لها } ق \text{ (ب)} \end{cases}$ (أ) انواعها
3. انعطاف (ب)، (ج)

أولاً: النقطة الحرجة $\in$ م.ت

إذا كانت الدالة معرفة عند النقطة $س = ب$ فإننا نقول أن $س = ب$ نقطة حرجة إذا كانت $د(ب) =$ صفر أو $د(ب)$ غير موجودة

ملاحظة: النقطة الحرجة $\in$ م.ت

أمثلة:

1. الدالة $د(س) = س^3 - 6س - 5$ نقطة حرجة عند $س = ...$

الحل $د(س) = 0$ ← لتعيين الحرجة

$3س^2 - 6 = 0 \Leftarrow 3س^2 = 6$

$\Leftarrow س = \pm\sqrt{2}$

2. لتكن $د(س) = \frac{س - 1}{س + 2}$

الدالة نقطة حرجة عند $س = ...$

(أ) $د(س) = - \Leftarrow \frac{س - 1}{س + 2} = 0$

مرفوض ولي

$س - 1 = 0 \Leftarrow س = 1$

◆ الدالة $د(س) =$ أ $س^3$ + ب $س^2$ + ج $س$ + د تقطع حرجة عند $س = 0$ (الحل $د(0) = 1$) ← غير صحيح (X)

3. إذا كانت $د(س) = س^3 - ب س$ لها نقطة حرجة عند $س = -1$ فإن قيمة $ب = ...$ [-3، 3، 2، 1، $\frac{1}{2}$]

التوضيح:

$د(س) = 0 \Leftarrow د(-1) = 3 - ب = 0$

$3 - ب = 0$

$\Leftarrow ب = 3$

4. إذا كانت $د(س) = س^2 \, ه^{ل س}$ نقطة حرجة عند $س = 1$ فإن $ل = ...$ [1، 0، -1، -2] (ب)

الحل $د(س) = 0$

$ص = س^2 \, ه^{ل س}$ ← ضربية

$ص' = س^2 \, ه^{ل س} \times ل + 2س \, ه^{ل س}$

$2 \times 1 \, ه^{ل} + 1 \times ه^{ل} \, ل = 0$

$2 ه^{ل} + ه^{ل} \, ل = 0$ (الشرط)

$ه^{ل}(2 + ل) = 0$

إما $ه^{ل} = 0$ ← مرفوض لأن $ه^{ل} \neq 0$

أو $2 + ل = 0 \Leftarrow ل = -2$

5. الدالة $د(س) = ك - 4س$ لا نقطة حرجة عند $س = لو 4$ (X)

التوضيح:

$ص = ك - 4س$ لنشتق "ثم نضع"

$ص' = ك - 4$

$ك - 4 = 0 \Leftarrow ك = 4$

(لو للطرفين) $\Leftarrow$ لو $ك$ = لو 4

$\Leftarrow س = لو 4$

6. إذا كانت $د(س) = (ب - 1)س + \frac{\Delta}{س - 1}$ لها نقطة حرجة عند $س = ب$ فإن $ب = ...$ [-3، 2، -2، 3] (أ)

التوضيح:

$ص = (ب - 1)س + \frac{8}{س - 1}$ (اشتقة)

$ص' = (ب - 1) + \frac{-8}{(س - 1)^2}$ (تغير التربيع)

$ص' = 0$ (من النقاط الحرجة)

$\therefore (ب - 1) - \frac{8}{(س - 1)^2} = 0$

$س = ب$،

$ب - 1 = \frac{8}{(ب - 1)^2}$ (أوجد تبادلي)

$(ب - 1)^3 = 8 \Leftarrow ب - 1 = \sqrt[3]{8}$

$\Leftarrow ب - 1 = 2 \Leftarrow ب = 3$

7. $د: ح \times ح \to ح$

(2، 5) نقطة حرجة للدالة

$د(س) = س + \frac{4}{س - 1}$ (ب)

التوضيح: نضع $س = 3$ $\Leftarrow ص = 5$

$ص' = 0$ ← وتتأكد

أو نضع $ص' = 0$ ← وتتأكد من أن $س = 3 \Leftarrow ص = 5$

$ص = س + \frac{4}{س - 1}$

$ص' = 1 + \frac{-4}{(س - 1)^2}$ ، $س = 3$

$ص' = 1 - \frac{4}{(3 - 1)^2}$

$ص' = 1 - \frac{4}{4} \Leftarrow ص' = 1 - 1$

$ص' = 0$ (ب)

نتأكد من أن $ص = 5$

$\therefore ص = س + \frac{4}{س - 1}$ ، $س = 3$

$ص = 3 + \frac{4}{3 - 1} \Leftarrow ص = 3 + \frac{4}{2}$

$ص = 3 + 2$

$ص = 5$ (أ)

8. $د: ح \to ح$ إذا كانت $د$ للدالة $د(س) = أ س^3 - ك س$ نقطة حرجة عند $س = 0$ فإن $أ = 1$ (ب)

الحل نضع $س = 0$ ، $أ = 1$ ونتأكد أن $ص$ كـ صفر

$ص = أ س^3 - ك س$

$ص' = أ \cdot 0 - ك$

$ص' = 1 - ك$

$ص' = 1 - 1 \Leftarrow ص' = 0$ (أ)

أو نضع $ص' = 0$ ، $س = 0$ ونتأكد أن $أ = 1$

ملحق أ $\times$ أ:

الدالة $د(س) = س + جاس$ نقطة حرجة في الفترة $]0، 2\pi[$ (X)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حرجة ⇐ ص' = ٠

∴ ص = س + جاس

∴ ص' = ١ + جتاس = ٠

جتاس = −١ ⇐ س = ١٨٠°

س = ١٨٠° ∉]٠°، ٩٠°[

∴ لا توجد نقطة حرجة في الفترة]٠°، ٩٠°[

ملاحظة:

حرجة ⇐ ص' = ٠ (تطبيق عادي)

حرجة ⇐ ص' غير موجودة (نركز عليها في الجذور ( ))

((وذلك بالتعويض في ص'))

∴ ص' غير موجودة (أصفار مقام ص')

◆ النقاط الحرجة للدالة د(س) تلازم نتأكد من أنواعها ع.ت وذلك بالتعويض في د

وتطلع معرفة أو ع.م.ت

ثانياً: ص' غير موجودة (أصفار مقام ص')

٤ − س² = ٠ بالتربيع

٤ − س² = ٠ ⇐ ٤ = س²

⇐ ±٢ = س

س = ٢ ، س = −٢ التأكد

س = ٢ ⇐ ص = ٤ − س²

⇐ ص = ٤ − ٤ = ٠ معرف

⇐ ص = ٠ معرف

س = −٢ ⇐ ص = ٤ − (−٢)² = ٠ معرف

∴ النقاط الحرجة هي {(٢، ٠)، (−٢، ٠)}

عددها نقاط حرجة

(١) إذا كانت د(س) = س³ − ٤س بأي عدد النقاط الحرجة للدالة د(س) تساوي ..... (١، ٢، ٣، ٤)

الحل أولاً ص' = ٠

ص' = (٣س² − ٤) / (٢√(س³ − ٤س)) = ٠ (أصفار البسط)

٣س² − ٤ = ٠ ⇐ س = ±√(٤/٣)

التأكد

ص = (س³ − ٤س)^(١/٢) ⇐ ص = √(س³ − ٤س) ⇐ ص = √(−٤ × −٤) = √١٦ = ٤ معرف

ص = √(س³ − ٤س) ⇐ ص = √(−٤ × −٤) = √١٦ = ٤ معرف

∴ يوجد نقطتان حرجتان

(٢) إذا كانت ص = (٤ − س²) بأي قيم س التي يكون عندها للدالة نقطة حرجة هي .....

[٠، ٢] ، {٠، ٢، ٤} ، [٠، ٢] ، [٠، ٢]

الحل أولاً ص' = ٠

ص' = (−٢س × ٢√(٤ − س²) − (−س)) / (٤ − س²) ⇐ ص' = ٠

(٢س√(٤ − س²) − س) / (٤ − س²) = ٠ ⇐ ٢س√(٤ − س²) − س = ٠

س = ٠ ⇐ ٢√(٤ − س²) = ١

٤(٤ − س²) = ١ ⇐ ١٦ − ٤س² = ١

١٥ = ٤س² ⇐ س² = ١٥/٤

س = ±√١٥/٢

التأكد

ص = (٤ − س²)^(١/٢) ⇐ ص = √(٤ − س²)

ص = √(٤ − ٠) = ٢ معرف

ص = √(٤ − ١٥/٤) = √١/٢ معرف

∴ يوجد ثلاث نقاط حرجة

(٣) إذا كان د(س) = س³ − ٤س² + ٥س − ٢ فإن عدد النقاط الحرجة للدالة د(س) في الفترة]٠، ٤[هو .....

د'(س) = ٣س² − ٨س + ٥

٣س² − ٨س + ٥ = ٠

(٣س − ٥)(س − ١) = ٠

س = ١ ∈]٠، ٤[، س = ٥/٣ ∈]٠، ٤[

∴ عدد النقاط الحرجة = ٢

(٤) إذا كان د(س) = س³ − ٣س² − ٩س + ٥ فإن عدد النقاط الحرجة للدالة د(س) في الفترة]−٢، ٤[هو .....

د'(س) = ٣س² − ٦س − ٩

٣س² − ٦س − ٩ = ٠

٣(س² − ٢س − ٣) = ٠

٣(س − ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣ ∈]−٢، ٤[، س = −١ ∈]−٢، ٤[

∴ عدد النقاط الحرجة = ٢

مثال 2021

للدالة د(س) = (س − ٢)(س² + ٢) توجد حرجة عند س = ٢ (X)

الحل

ص' = ٠ ⇐ ص' = ٢(س − ٢)(س² + ٢)(س)

ص' = (٢س − ٤)(س² + ٢)(س) = ٠

٢ = س ⇐ ٢س − ٤ = ٠ حرجة

أو س² + ٢ = ٠ ⇐ س² = −٢

س = ±√−٢ غير معرف (لا حرجة)

س = ٠ ⇐ س = ٠ حرجة

ولذلك أ طالما الفترة مغلقة تعتبر نقاط حرجة

∴ س = ٢ ، س = ٠ ، س = ٣

نقاط حرجة

عدد النقاط الحرجة = ثلاث

رابعاً:

د(س) = جاس للأعداد الانتقائية (ب)

عدد النقاط الحرجة

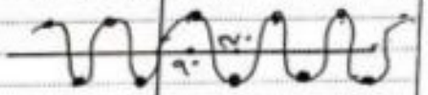
الحل

ص = جاس

ص' = جتاس = ٠ ⇐ س = ٩٠° [الدورة الأولى]

س = ٩٠° + ن(١٨٠°) ، ن = ٠، ١، ٢، ٣، ...

عدد الأعداد التي تحقق (عدد النقاط الحرجة) لانهائي



وفي كل دورة توجد قيمتان لـ س.

٢) عدد النقاط الحرجة للدالة د(س) = س² − ٤س في الفترة]٠، ٣[يساوي .....

الحل ص = س² − ٤س

ص' = ٢س − ٤ = ٠

٢س = ٤ ⇐ س = ٢ ∈]٠، ٣[

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانياً: القيم القصوى

يقصد بالقيم القصوى للدالة القيم العظمى والصغرى لها.

- القيم القصوى هي أحد أهم أنواع النقاط الحرجة لذلك
- كل نقطة قصوى هي نقطة حرجة (✓)
- كل نقطة حرجة هي نقطة قصوى (✗)
- تحصل على نقاط قصوى إذا كانت $f'=0$

مثال:

القيمة القصوى للدالة $f(x)=x^3-9x$ هي .....

$[(-3,6),(0,0),(3,-6)]$

$f'=3x^2-9$

قصوى $\Leftarrow f'=0$

$3x^2-9=0 \Leftarrow 3x^2=9$

$x^2=3 \Leftarrow x=\pm\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3}$ أو $x=\sqrt{3}$

نعوض $x=0$ في المعادلة

$y=0 \Leftarrow y=-9(0)$

$\therefore$ النقطة القصوى هي $(0,0)$

تعريف

القيمة (النهاية) العظمى: يقال أن للدالة f قيمة عظمى إذا كانت $f'(a)=0$ أو $f'(a)$ غير معرفة عند $x=a$ وإشارة f' حول a هي $(+,-)$

القيمة (النهاية) الصغرى: يقال أن للدالة f قيمة صغرى إذا كانت $f'(a)=0$ أو $f'(a)$ غير معرفة عند $x=a$ وإشارة f' حول a هي $(-,+)$

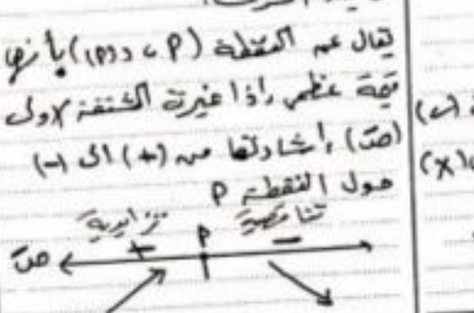
تعريف: القيمة (النهاية) الصغرى

يقال أن للدالة f قيمة صغرى إذا كانت $f'(a)=0$ أو $f'(a)$ غير معرفة عند $x=a$ وإشارة f' حول a هي $(-,+)$

طريقة أخرى:

يقال عن النقطة $(p, f(p))$ بأنها قيمة عظمى إذا غيرت الدالة f' (ص) إشارتها من $(+)$ إلى $(-)$ حول النقطة p

ونقول عن النقطة $(p, f(p))$ بأنها قيمة صغرى إذا غيرت الدالة f' إشارتها من $(-)$ إلى $(+)$ حول النقطة p



أمثلة (1)

1) $f'(x)=3x^2$ عند $x=3$

إذا كانت $f'(3)=0$

$f'(3)=0$

نبأ للدالة $f(x)$ قيمة صغرى عندما $x=3$ (✗)

المعوضين: $f'(3)=0$

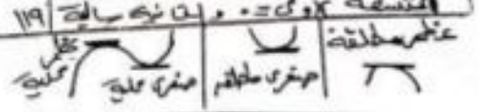
$f'(3)=$ سالب (عظمى)

$f'(3)=0$، $f'(x)$ موجب (صغرى)

2) $f'(x)=x^3$ عند $x=0$ إذا كانت $f'(a)=0$

نبأ $f'(a)>0$ فإن $f(a)$ قيمة صغرى ✓

نبأ $f'(a)<0$ فإن $f(a)$ قيمة عظمى



(3) إذا كانت $f'(5)=0$، $f'(5)<0$

فإن للدالة قيمة عظمى (✓)

(4) للدالة $f(x)=1-x^3$ قيمة صغرى مطلقة عند النقطة $(1,0)$ (✗)

الحل

قيمة صغرى إذا تحقق شرطان

1) $f'(x)=0$ ، $f'(x)>0$ (قيمة صغرى)

$x=1-x^3 \Leftarrow f'=-3x^2$

$-3x^2=0 \Leftarrow x=0$

$x=0$ نختبرها على صغرى أم عظمى

$f''=-6x$

$f''=-6(0)<0$ (عظمى)

$f''=-6(0)$ (عظمى)

$\therefore x=0$ قيمة عظمى

(5) إذا كانت للدالة $f(x)=x^3+px$ قيمة عظمى عندما $x=-2$ فإن

قيمة p = ... $[\frac{1}{4}, (\frac{1}{2})^2, -(\frac{1}{2})^2, -\frac{1}{4}]$

الحل

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى $\Leftarrow f'=0$

$f'=3x^2+p$

$f'=3p+1$ ، $x=-2$

$12+p=0$

$-4p=1 \Leftarrow p=-\frac{1}{4}$

(6) إذا كانت $f'(x)=x^3-6x$

فإن للدالة قيمة .....

[عظمى ـ صغرى] عندما $x=3$

الحل

$f'=x^2-6x$

$f''=2x-6$ ، $f''=0$

$2x-6=0$

$x=3$ هل عظمى أم صغرى

نختبرها بـ 1) f''

2) أو خط الأعداد

$f''(x)=2>0 \therefore$ صغرى

$\therefore x=3$ قيمة صغرى $f''=0$، $f''>0$

(7) إذا كانت $f'(x)=8x-x^3$

فإن للدالة عند $x=4$ قيمة .....

[عظمى ، صغرى]

الحل

$f'=8x-x^3$

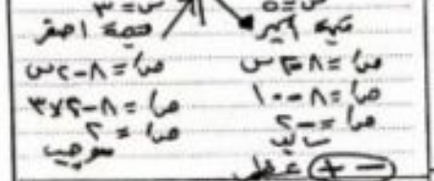
$f''=8-3x^2$

$8-3x^2=0 \Leftarrow 3x^2=8$

$x=4$ هل عظمى أم صغرى

نختبرها إما بـ f'' أو خط الأعداد

الخط:



أو: $f''=-6$ عظمى

كيف نميز بين القيمة العظمى والصغرى؟

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة: $-P+$ عظمى
- $+P-$ صغرى
- $+P+$ لا عظمى ولا صغرى
- $-P-$ لا عظمى ولا صغرى

ضروري تتغير الإشارة حول P حتى تكون عظمى أو صغرى

مثال: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)=x^3$ لها قيمة صغرى عند $x=0$ (X)

الحل: $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$

$3x^2=0 \Rightarrow x^2=0$

$\Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها على خط الأعداد

	$x=0$	
	يسار	يمين
$y=x^3$	$y=(-1)^3$	$y=(1)^3$
$y'=3x^2$	$y'=3(-1)^2$	$y'=3(1)^2$
	$y'=3(1)$	$y'=3(1)$
	$y'=3$	$y'=3$
	$y'=+$	$y'=+$

لم تتغير الإشارة حول الصفر

∴ لا توجد قيمة صغرى للدالة وعندك لا توجد قيمة عظمى للدالة.

ثالثاً: نقطة الانعطاف (الانقلاب)

إذا كانت الدالة معرفة عند $x=P$

بأن $x=P$ نقطة انعطاف

إذا كان $f''(P)=0$ (P) صغرى أو كبرى

وتغير f'' حول $x=P$

لا توجد نقطة انعطاف P

ملاحظة: جميع النقاط الحرجة لا يجب أن تكون عظمى

أمثلة:

1) للدالة $f(x)=x^3-3x$

نقطة انعطاف عند النقطة .....

$(0,0)$ ، $(1,-2)$ ، $(-1,2)$ ، $(1,0)$

انعطاف $\Rightarrow f''=0$

$f'=3x^2-3$

$f''=6x \Rightarrow 6x=0$

$\Rightarrow x=0$ ← نعوض

نعوض في $x=0$ تحل الدالة لإيجاد y

$y=x^3-3x \Rightarrow y=0$

$\Rightarrow (0,0)$

∴ نقطة الانعطاف هي $(0,0)$ أي نقطة الأصل.

2) إذا كانت $f(x)=x^4-x$

بأن للدالة نقطة انعطاف عند

$x=$ ---- $[-1, 0, \frac{1}{2}, 1]$

الحل

$f'=4x^3-1$

$f''=12x^2$

$12x^2=0 \Rightarrow x^2=0$

$\Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها على خط الأعداد

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f''=12x^2$	$f''=12(-1)^2$	$f''=12(1)^2$
	$f''=12$	$f''=12$
	$f''=+$	$f''=+$

لم تتغير الإشارة حول $x=0$

∴ لا توجد نقاط انعطاف

3) إذا كانت $f(x)=\ln(P-x)$

وعندما $x=2$ نقطة انعطاف فإن $P=$ ----

$f'=\frac{-1}{P-x}$

$f''=\frac{-1}{(P-x)^2}$

$\frac{-1}{(P-x)^2}=0 \Rightarrow -1=0$ (مرفوض)

∴ لا توجد قيمة لـ P

4) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=-8 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$ ∴ انعطاف

5) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=6 \Rightarrow x=1$

$f'(1)=0$ ∴ صغرى

6) إذا كانت $f(x)=2x-6$

فإن $f(3)=$ ----

[صغرى، عظمى، حرجة، انعطاف]

$f'=2 \Rightarrow f''=0$

$x=3$ نختبرها

	$x=3$	
	يسار	يمين
$f'=2$	$f'=2$	$f'=2$
	$f'=+$	$f'=+$

لم تتغير الإشارة حول $x=3$

∴ لا توجد نقاط انعطاف

7) إذا كانت $f(x)=\sin x$ فإن $f(\frac{\pi}{2})=$ ----

[صغرى، عظمى، حرجة، انعطاف]

$f'=\cos x$

$f''=-\sin x$

$-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$

$x=\pi$ ← نعوض

$y=\sin x \Rightarrow y=\sin\pi=0$

$(\pi,0)$

نقطة انعطاف

8) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=-$	$f'=+$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

9) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

10) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=-$	$f'=+$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

11) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

12) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

13) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

14) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

15) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

16) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

17) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

18) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

19) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

20) إذا كانت $f(x)=x^3-3x$ فإن

نقطة ..... (انعطاف - عظمى - صغرى - حرجة)

$f'=3x^2-3$

$f''=6x$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ نختبرها

	$x=0$	
	يسار	يمين
$f'=3x^2-3$	$f'=3(-1)^2-3$	$f'=3(1)^2-3$
	$f'=0$	$f'=0$
	$f'=+$	$f'=-$

تغيرت الإشارة حول $x=0$

∴ نقطة انعطاف

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين:

(1) للدالة د(س) = س + 1/س

نقطة حرجة عندما س = ...

الحل د'(س) = 1 - 1/س² = 0

1 = 1/س² ⇐ س² = 1 ⇐ س = ±1 (مرفوض)

(2) أوجد القيم القصوى للدالة

د(س) = س³ - 3س²

الحل

د'(س) = 3س² - 6س

3س² - 6س = 0 (÷3)

س² - 2س = 0

س(س - 2) = 0 (بالتحليل)

إما س = 0 أو س = 2

نقاط حرجة نعوض في د''(س)

د''(س) = 6س - 6

د''(0) = 6×0 - 6 = -6 سالب ⇐ د(0) قيمة عظمى

د(0) = 0³ - 3×0² = 0

ص = 0 قيمة عظمى

د''(2) = 6×2 - 6 = 6 موجب ⇐ د(2) قيمة صغرى

د(2) = 2³ - 3×2² = 8 - 12 = -4

∴ ص = -4 قيمة صغرى

(3) للدالة د(س) = جاس قيمة عظمى عند (π/2، 1)

الحل د'(س) = جتاس

جتاس = 0

إما س = π/2 أو س = 3π/2

نتأكد هل هي عظمى أم صغرى

د''(س) = -جاس

د''(π/2) = -جا(π/2) = -1 سالب ⇐ قيمة عظمى

د''(3π/2) = -جا(3π/2) = -(-1) = 1 موجب ⇐ قيمة صغرى

د(π/2) = جا(π/2) = 1

د(3π/2) = جا(3π/2) = -1

(4) أوجد القيم القصوى المحلية لكل من الدالة د حيث د(س) = جاس + جتاس

الحل د'(س) = جتاس - جاس

جتاس - جاس = 0

جتاس = جاس

ظاس = 1

س = π/4 أو 5π/4

نتأكد هل هي عظمى أم صغرى

د''(س) = -جاس - جتاس

د''(π/4) = -جا(π/4) - جتا(π/4) = -√2/2 - √2/2 = -√2 سالب ⇐ قيمة عظمى

د''(5π/4) = -جا(5π/4) - جتا(5π/4) = √2/2 + √2/2 = √2 موجب ⇐ قيمة صغرى

د(π/4) = جا(π/4) + جتا(π/4) = √2/2 + √2/2 = √2

د(5π/4) = جا(5π/4) + جتا(5π/4) = -√2/2 - √2/2 = -√2

(5) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(6) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(7) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(8) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(9) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(10) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(11) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(12) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(13) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(14) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(15) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(16) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(17) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(18) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(19) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(20) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(21) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(22) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(23) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(24) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(25) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(26) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(27) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(28) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(29) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(30) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(31) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(32) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(33) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(34) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(35) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(36) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(37) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(38) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(39) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(40) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(41) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(42) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(43) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(44) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(45) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(46) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(47) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(48) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(49) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

(50) أوجد القيمة العظمى للدالة د(س) = جاس + جتاس على الفترة [-π/2، π/2]

الحل

[صفر، √2] ∪ [√2، 2]

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

تزايد وتناقص دالة

تكون الدالة تزايدية على (م، ت)
إذا كانت د(س) > ٠ موجبة

تكون الدالة تناقصية على (م، ت)
إذا كانت د(س) < ٠ سالبة
د(س) = مقدر الدالة كاملة
+ تزايدية ، − تناقصية

خطوات التزايد والتناقص

١- م، ت
٢- صفر = ٠ (لايجاد قيم حرجة)
٣- خط الأعداد ودراسة الإشارات
+ تزايدية − تناقصية

مثال: د:]٠، ٢[

الدالة د(س) = $\frac{1}{س}$ تناقصية على مجموعة التعريف

الحل:
١) صفر = $\frac{1}{س}$ كسر
س = ٠ ⇐ م، ت =]٠، ٢[
ق صفر = $\frac{1}{س^2}$
$\frac{1}{س^2}$ = ٠ ⇐ ١ = ٠ (مرفوض)
∴ لا توجد قيم حرجة
٣) نرسم]٠، ٢[← م، ت

لا س = ١	
صفر = $\frac{1}{1}$	صفر = $\frac{1}{2}$
صفر = ١	صفر = ٠.٥
صفر = موجب	صفر = موجب

نلاحظ على خط الأعداد الإشارات كلها موجبة
∴ الدالة تناقصية

---

١) د: ح
الدالة د(س) = لو(س − ٢)
تناقصية على (م، ت) (X)
الحل:
١) ٢ = ٠ ، الدالة لوغاريتمية
∴ س − ٢ > ٠ ⇐ س > ٢ (فترة)
∴ م، ت =]٢، ∞[
٢) صفر = $\frac{1}{س-2}$ = ٠
$\frac{1}{س-2}$ = ٠ ⇐ ١ = ٠ (مرفوض)
لا توجد قيم حرجة
٣) نرسم م، ت =]٢، ∞[

س = ٣	
صفر = $\frac{1}{3-2}$	
صفر = ١	
صفر = موجبة	∴ تزايدية

٣) د(س) = $\frac{1}{س^2+1}$ متزايدة على مجموعة تعريفها (X)
الحل: م، ت = ح (كسر على مجموع مربعين)
صفر = $\frac{0-2س}{(س^2+1)^2}$ = $\frac{-2س}{(س^2+1)^2}$
$\frac{-2س}{(س^2+1)^2}$ = ٠ ⇐ −٢س = ٠
س = ٠ ⇐ س = ٠ جذر مرفوع لأس زوجي
نرسم الأعداد ← م، ت =]−∞، ∞[

س = ٠	
صفر = ٠	
صفر = ٠	∴ تزايدية

∴ الدالة تزايدية ومتناقصية

٤) د:]−∞، ٥] تزايدية
]٥، ∞[تناقصية

التقعر ∩ ∪

١) تكون الدالة مقعرة نحو الأعلى على مجموعة التعريف إذا كانت
صفر > ٠ (موجبة) (+)

٢) تكون الدالة مقعرة نحو الأسفل على م، ت إذا كانت صفر < ٠ (سالبة) (A)
مثال: الدالة د(س) = س − س²
مقعرة نحو ...
الحل: صفر = ١ − ٢س
صفر = (−٢) < ٠ (سالبة)
∴ مقعرة نحو الأسفل

+ ينظر للأعلى ∪
− ينظر للأسفل ∩

٣) منحنى الدالة د(س) = س³ + ١
مقعراً نحو الأعلى في الفترة [٠، ∞[(X)
الحل: ص = س³ + ١
صفر = ٣س²
صفر = ٦س (نحو الأعلى صفر > ٠)
٦س > ٠
س > ٠
مقعرة في الفترة [٠، ∞[

٤) إذا كانت د(س) < ٠
∀ س ∈]أ، ب[فإن د(س) على الفترة تكون ...
[تزايدية - تناقصية
مقعرة نحو الأعلى - مقعرة نحو الأسفل]

٥) إذا كانت د(س) = ٣س² − ٦س
فإن فترة التناقص لمنحنى الدالة هي ...
(أ)]١، ∞[(ب)]−١، ∞[
(ج)]−∞، ١[(د)]−∞، −١[
التوضيح: شرط التناقصية د(س) < ٠
∴ ٦س − ٦ < ٠ ⇐ ٦س < ٦
⇐ س < ١ ∴ فترة التناقص]−∞، ١[

٦) د:]−∞، ٥] تزايدية
]٥، ∞[تناقصية

المختار شبلي (770329433)

حة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين متنوعة ١

تمرين (١):

س	$-\infty$		١		٣		∞
$د'(س)$		+	٠	−	٠	+	
$د(س)$							
$(س)$	$-\infty$		٤		∞		$-\infty$

من الجدول أكمل ما يلي :-

① مجموعة تعريف الدالة ـــــــ

② الدالة تزايدية على الفترة ـــــــ

③ الدالة تناقصية على الفترة ـــــــ

④ للدالة قيمة عظمى محلية عند النقطة ـــــــ

الحل

① $ح = \mathbb{R} - \{٢\}$ أو $ح =]-\infty, ٢[\cup]٢, \infty[$

② $]-\infty, ١] \cup [٣, \infty[$ ← $ص' \geq ٠$ ← تزايدية

③ $[١, ٢[\cup]٢, ٣]$ ← $ص' \leq ٠$ ← تناقصية

④ $(٤, ٣)$ ، $ص' = ٠$ ، $ص = ٣$ ← عظمى محلية

⑤ $-\infty, \infty$ ، لها خط تقارب أفقي $ص = ٤$ (مفتوح)

⑥ النقطة تعني زحزحة مرتين ولا تعني فترة (ارتقاء)

⑦ تناقصية تعني فترة (−) السالب في $ص'$

⑧ تزايدية تعني فترة (+) الموجب في $ص'$

⑨ مقعرة نحو الأعلى فترة (+) الموجب في $ص''$

⑩ مقعرة نحو الأسفل فترة (−) السالب في $ص''$

⑪ قيمة عظمى تساوي تعني إيجاد $ص$

⑫ قيمة صغرى تساوي تعني إيجاد $ص$

⑬ قيمة صغرى تعني مرجود $-\infty$ في $ص'$

⑭ قيمة عظمى تعني مرجود $+\infty$ في $ص'$

⑮ سبب عدم وجود قيمة عظمى (أو) تعني إيجاد قيمة $ص$

تمرين (٢):

س	$-\infty$		١		∞		$-\infty$
$ص'$		+		+			
$ص''$		+		−			
$ص$	$-\infty$		٢		∞		$-\infty$

مستعيناً بالجدول أمامك التالي :-

١- مجموعة تعريف الدالة ـــــــ

٢- الدالة تزايدية تماماً على الفترة ـــــــ

٣- مقعرتي الدالة مقعرة نحو الأسفل على الفترة ـــــــ

٤- المقارب الأفقي هو ـــــــ

الحل

① $ح = \mathbb{R} - \{١\}$ أو $ح =]-\infty, ١[\cup]١, \infty[$

② $]-\infty, ١[$

③ $ص = ٢ \Leftarrow$ نظير مضاعف $(س) = ٢$

تمرين (٣):

س	$-\infty$		٠		٢		∞
$د'(س)$		+	٠	−	٠	+	
$د''(س)$		+		+		+	
$د(س)$	$-\infty$				٣		∞

مستعيناً بالجدول أمامك :-

١- مجموعة التعريف = ـــــــ

٢- فترة التناقص = ـــــــ

٣- القيمة الصغرى = ـــــــ

٤- فترة التقعر نحو الأعلى = ـــــــ

(٤) لتكن المنحنى

$ص = س^٤ - ٦س^٣ + ٧$ مقعرة نحو الأعلى خ الفترة $]-\infty, ١[$ (X)

الحل

$ص' = ٤س^٣ - ١٢س^٢$

$ص'' = ١٢س^٢ - ١٢س$

$ص'' > ٠$ مقعرة نحو الأعلى

$١٢س^٢ - ١٢س > ٠$

$١٢س^٢ > ١٢س$

$س > ١$ (÷ ١٢)

$س \in]١, \infty[$

فترة التقعر حسب المنحنى لوزاري نحو الأعلى

$[-١, ١]$

طريقة (١) لإيجاد $ص$

$ص'' = ٠$

خط الدالة وراسم إشارة

	+		−	+
		١		٠

$ص = س^٤ - ٦س^٣ + ٧$

$ص'' = ١٢س^٢ - ١٢س$ ← تقعر عكس التقعر

$١٢س^٢ - ١٢س = ٠$

$١٢س(س - ١) = ٠$

$س = ١ \Leftarrow س = ١$

$س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

	+		−	+
		٠		١

مقعرة نحو الأسفل خ الفترة $[٠, ١]$

ملاحظة

١) الدالة $د(س)$ هـ تزايدية ⟺ هـ تزايدية وتناقصية حسب إشارتها معاً

٢) $د(س) = \frac{١}{٣}س^٣ - ٢س^٢ + ٣س + ١$ تناقصية

$د'(س) = س^٢ - ٤س + ٣$

$د'(س) = ٠ \Leftarrow س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$

$(س - ١)(س - ٣) = ٠$

$س = ١ \Leftarrow س = ٣$

	+		−	+
		١		٣

تناقصية على الفترة $[١, ٣]$

تذكير: على $م = ٠$

١) $د'(س) > ٠$ ← الدالة تزايدية

٢) $د'(س) < ٠$ ← الدالة تناقصية

٣) $د'(س) = ٠$ ← الدالة ثابتة

٤) $د'(س) > ٠$ ← الدالة مقعرة نحو الأعلى

٥) $د'(س) < ٠$ ← الدالة مقعرة نحو الأسفل

٦) $د'(س) = ٠$ ، $د'(س) > ٠$ ← تعريف لقيمة لعظمى

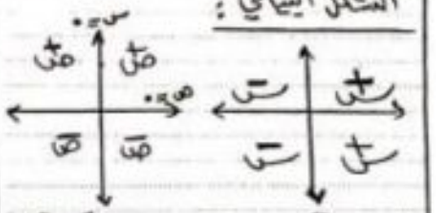
٧) $د'(س) = ٠$ ، $د'(س) < ٠$ ← تعريف لقيمة لصغرى

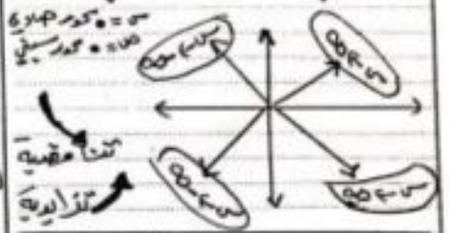
١) القيمة الصغرى المطلقة للدالة $د(س) = س^٤ - ٤س^٣ + ٥$ هي

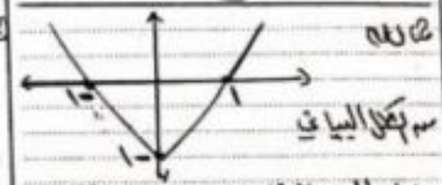
٢) إذا كانت $س = ١$ نقطة حرجة للدالة $د(س) = -س^٣ + ٣س + ٩$ فإن قيمة $م \in$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الشكل البياني :







سم الشكل البياني

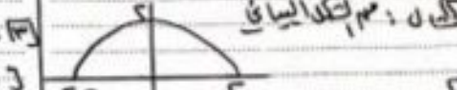
(1) الدالة قيمة صغرى مطلقة عند النقطة .....

[(0،0)، (1،0)، (0،-1)، (-1،0)]

(2) الدالة (س) تناقصية في الفترة

]-∞، ∞[=]-∞، 0[∩]-1، 1[

◆ الرسم دائماً من اليسار الى اليمين



ك 1 : من الشكل البياني

(1) الدالة تزايدية في الفترة .....

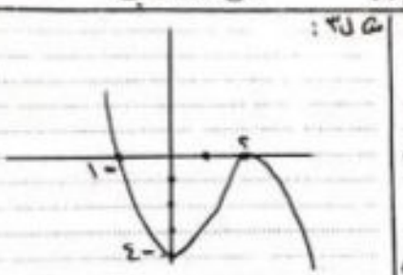
]-∞، -2[،]-1، 1[،]2، ∞[

(2) القيمة العظمى للدالة تساوي .....

[صفر، 1، 2، 4]

◆ القيمة العظمى تساوي ..... (تقع ص)

◆ القيمة الصغرى تساوي ..... (تقع ص)



(1) الدالة تزايدية على الفترة .....

]-∞، ∞[=]-∞، 0[∪]0، ∞[

(2) الدالة لها قيمة صغرى محلية تساوي .....

-4

(3) عدد الفروع اللانهائية للدالة ..... [1، 2، 3، 4]

(4) نكتب (س) = ... [∞، ∞-، ∞+]

(5) نهـ د(س) = ... إلى ∞

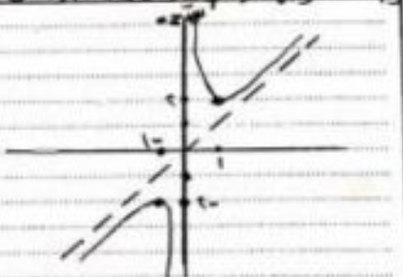
س→∞

(6) نهـ د(س) = ... إلى -∞

س→-∞

(7) تناقصية في الفترة ..... [-1، 1]

(8) د(1) = ... إلى صفر، د(-1) = ... إلى صفر



(1) القيمة العظمى للدالة عند النقطة .....

(-1، -2)، (1، -2)، (1، 2)، (-1، 2)

(2) نترك تقعر الدالة لأعلى في .....

]-∞، ∞[=]-∞، 0[∪]0، ∞[

(3) عدد الفروع اللانهائية للدالة = ...

[1، 2، 3، 4]

(4) نكتب (س) = ... [∞، ∞-، ∞+]

(5) نهـ د(س) = ... إلى ∞

س→∞

(6) نهـ د(س) = ... إلى -∞

س→-∞

(7) تناقصية في الفترة ..... [-1، 1]

(8) د(1) = ... إلى صفر، د(-1) = ... إلى صفر

رابعة لدراسة تغيرات الدالة

(1) القيمة الصغرى المطلقة للدالة

د(س) = س² - 4س على الفترة

[-1، 3] تساوي ...

د(-1) = (-1)² - 4(-1) = 5

د(3) = 3² - 4(3) = -3

د(2) = 2² - 4(2) = -4

∴ القيمة الصغرى المطلقة = -4

نوجد هل بالفرض في الدالة

د(ج) = ج² - 4ج = -4

ج² - 4ج + 4 = 0

(ج - 2)² = 0

ج = 2 ∈]-1، 3[

∴ صـ = -4 قيمة صغرى

(2) القيمة العظمى للدالة

د(س) = جتاس على الفترة [-π/4، 11π/4]

تساوي ...

{صفر، 1/2، √2/2، 1}

د(0) = جتا0 = 1

د(π/4) = جتا(π/4) = √2/2

د(π/2) = جتا(π/2) = 0

د(π) = جتاπ = -1

د(3π/4) = جتا(3π/4) = -√2/2

د(11π/4) = جتا(11π/4) = √2/2

∴ القيمة العظمى = 1

(3) نقطة الانقطاف للدالة

د(س) = س³ - 3س² + 6

د(-1) = -1 - 3 - 6 = -10

د(0) = 6

د(1) = 1 - 3 + 6 = 4

د(3) = 27 - 27 + 6 = 6

∴ نقطة الانقطاف هي (1، 4)

(4) إذا كانت د(س) = جتاس، س ∈ [0، 2π] فإن

مدى الدالة محصور نحو الأعلى في الفترة .....

[0، π/3]، [π/3، 2π]

أي [0، π/3] ∪ [π/3، 2π]

طريقة (1) : د'(س) = 0

د'(س) = -جاس

-جاس = 0 ⇐ جاس = 0

س = 0، π، 2π

د''(س) = -جتاس

د''(0) = -1 < 0

د''(π) = 1 > 0

د''(2π) = -1 < 0

∴ تكون الجتاس سالبة في الربع الثاني والرابع

[π/2، 3π/2]

طريقة (2) : نرسم د(س) = جتاس



من الرسم د(س) متزايدة نحو الأعلى في الفترة [π/2، 3π/2]

(5) إذا كان د(س) = 1/(س² + 9) فإن

(3، 0) نقطة حرجة عظمى للدالة (X)

د'(س) = (0 × (س² + 9) - 1 × 2س) / (س² + 9)² = -2س / (س² + 9)²

د'(س) = 0 ⇐ -2س = 0 ⇐ س = 0

د''(س) = (-2(س² + 9)² - (-2س) × 2(س² + 9) × 2س) / (س² + 9)⁴

د''(0) = -2(9)² / (9)⁴ = -2/9 < 0

∴ (0، 1/9) نقطة حرجة عظمى للدالة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

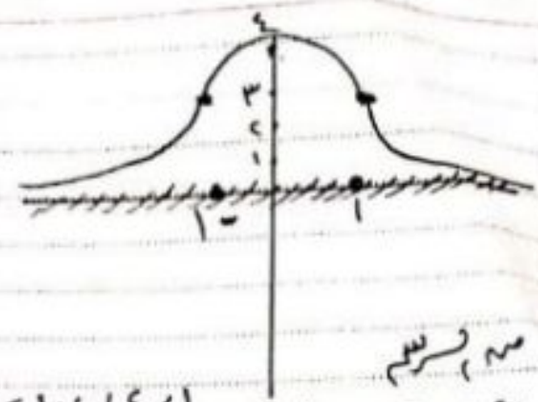
أ اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم العظمى والصغرى المحلية

اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم العظمى والصغرى المحلية

ب اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم العظمى والصغرى المحلية

ج اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم العظمى والصغرى المحلية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



ص = ٠ المستقيم

(١) مجـ = ح (٢) عدد القروع الأفقية = ٠

(٣) المستقيم ص = ٠ (المحور السيني)

(٤) الدالة تزايدية على الفترة]-∞، ٠[

(٥) الدالة تناقصية على الفترة]٠، ∞[

(٦) د(٠) = صفر (لأن المماس أفقي) مقعر

(٧) قيمة عظمى عند التقطة (٠، ٤)

(٨) د(١) = صفر ، د(-١) = صفر
عند س = ١ ، ١- نقاط إنقطاف

(٩) الدالة مقعرة نحو الأسفل على الفترة [-١، ١]

(١٠) نقاط الإنقطاف هما (١، ٣)، (-١، ٣)

تمرين b

(١) إذا كان الدالة د(س) = $\frac{س - ٤}{س^{٢} + ١}$ ، $\frac{d\theta}{dس}$

مقارب عندما θ = ٠٠٠ [١، ٤، ٣٢، ٤٣]

(٢) عدد القروع اللانهائية للدالة

د(س) = $\frac{س^{٣} + ١}{س^{٢} - ١}$ يساوي ---

[٠، ٤، ٦، ١]

(٣) الدالة د(س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - ١}$

مقاربة رأسي معادلته

س = ١ (×)

(٤) إذا كان س = β ، β ≠ ٠
مستقيم مقارب رأسي لمنحنى
الدالة د(س) = $\frac{س^{٣}}{س^{٢} - β^{٢}}$ فإن

قيمة β = ٠٠٠ [١، ٤، ٣٢، ٤٣] (✓)

(٥) تقطة الإنقطاف للدالة
د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٦ هي
(١، ٤) (٠، ٦) (١، ٤) (٣، ٦)

(٦) إذا كان الدالة
د(س) = $\frac{ل س + ٦}{٤ - س}$ مستقيم مقارب
أفقي معادلته ص = ٢
فإن قيمة ل = ٠٠٠
[٢، ٤، ٢-، ٤-]

(٧) إذا كان ص = ٢ س - β مقارب
مائل للدالة د(س) = $\frac{٦س^{٢} + ١}{٣ + ٣س}$
فإن قيمة β = ٠٠٠ [١، ٤، ٣٢، ٤٣]

(٨) منحنى الدالة
د(س) = س - (β + ٤)س
مقعر لأعلى لكل س تنتمي
للفترة ---
]-∞، ٠[∩]٠، ∞[∩]-∞، ٠[∩]٠، ∞[

(٩) عدد نقاط الحرجة للدالة
د(س) = س^٣ - ٣س على الفترة
[-١، ١] تساوي ---
[١، ٢، ٣، ٤]

(١٠) المحوران الاحداثيان يمثلان
مستقيمان مقاربان لمنحنى ص = $\frac{١}{س}$
(✓)

(١١) الدالة د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س}$ تزايدية على الفترة
١٣٣ عندما β > ١

حة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner