الكميات الفيزيائية والمتجهة

الكميات القياسية: هي كميات فيزيائية غير متجهة، يتم تعيينها تمامًا إذا عرف مقدارها فقط.

ومن أمثلتها: الكتلة - الزمن - الطول - درجة الحرارة والطاقة.

الكميات المتجهة: هي كميات فيزيائية يتم تعيينها تمامًا إذا عرف مقدارها واتجاهها.

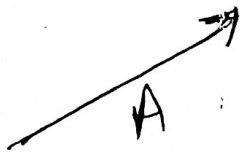
* تعبر عن الكمية المتجهة برسم أو إشارة سهم على الحرف (مثلاً $\vec{A}$) وأما الكمية القياسية فتكتب بدون سهم (A).

- الكميات المتجهة مثل الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة وكمية الحركة.

- تستخدم عادةً الطرق الهندسية أو تمثيل الكمية المتجهة على شكل بياني

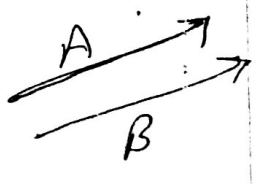
←

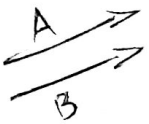
ليكن لدينا شعاع طوله طرديا مع مقدار الكمية
واتجاهه يمثل اتجاه الكمية



تساوي كميات

نقول أن كميتان
A و B متساويات إذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه





لهما نفس المقدار والاتجاه
المتجهات متساويان

سالب كمية

إذا كان لدينا كمية A فإن
(-A) كمية مساوية له في المقدار ومعاكسة في الاتجاه



جمع كميات

عند جمع المتجهات يجب
أن تكون كميات من نفس النوع فلا يمكن
جمع كمية متجهة مع كمية عددية لاختلافهما في
الأبعاد.

محصلة مجموعة من المتجهات :-

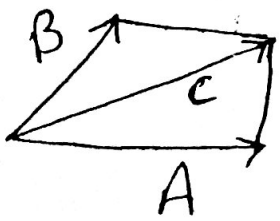
تجمع المتجهات بأشكالها وذلك بعد اختيار اتجاه موجب لكل منها . وإذا تساوى مقدار متجهين و تضادا في الاتجاه كانت محصلتهما صفر .

وهناك لإيجاد المحصلة عدة طرق منها :-

1/ طريقة متوازي الأضلاع :-

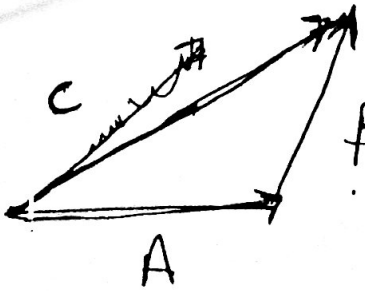
فاصل بين المتجهين A و B هو C .

ويسمى عادةً بالمحصلة

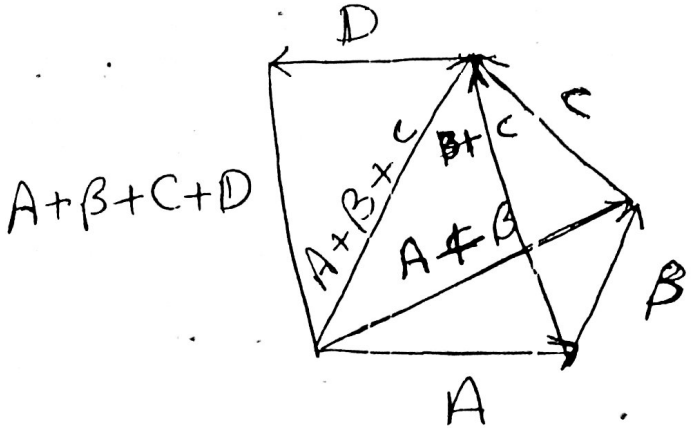


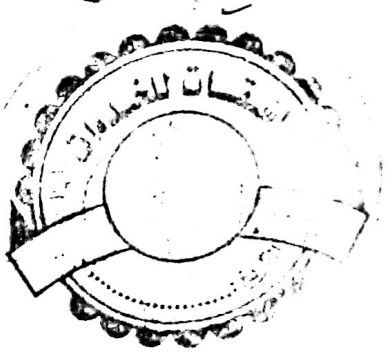
ان للخدمات

2/ طريقة المثلث

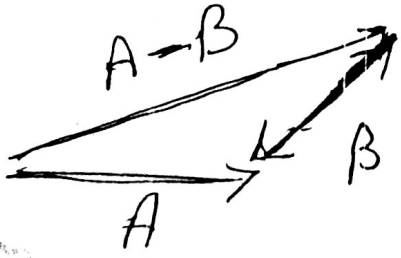


- كما يمكننا استخدام طريقة المثلث لجمع أكثر من متجهين.





طرح المتجهات





ضرب المتجهات

١/ الضرب القياسي: عرفنا سابقاً العلاقة التالية $\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta$ أي أن الضرب القياسي لمتجهين يساوي حاصل ضرب القيمة المطلقة للمتجه الأول والثاني في جيب تمام الزاوية بينهما.

- وهناك صورة أخرى للضرب القياسي

1/ ناتج الضرب يكون كمية قياسية لها مقدار فقط.

2/ ناتج الضرب يساوي صفر إذا كانا أحد المتجهين عمودياً على الآخر.

3/ إذا كان ناتج الضرب يساوي صفر فهذا يعني إما أحدهما عمودي على الآخر أو أحدهما يساوي صفر.

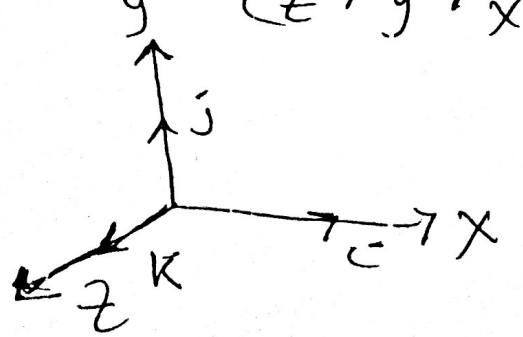
الضرب الإتجاهي :

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}||B| \sin\theta$$

- إذا كان لدينا متجه A في اتجاه (x, y, z) فيمكن كتابته كالآتي :

$$\bar{A} = A_x i + A_y j + A_z k$$

حيث (i, j, k) هي متجهات الوحدة المتجهة على الإتجاهات (x, y, z)



مثال : اوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين

$$\vec{A} = i - 3j + 2K$$

$$\vec{B} = -3i + 4j - K$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta$$

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{-3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B$$

$$i^2 = 1$$
$$j^2 = 1$$
$$k^2 = 1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -3 - 12 - 2 = -17$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A||B|}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-17}{\sqrt{364}} = -0.89$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}(-0.89) = 153^\circ$$

7. مثال: $\vec{A} = 2\hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z$ و $\vec{B} = \hat{e}_x - \hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ أوجد

① $\vec{A} \times \vec{B}$ ② $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ③ الزاوية بينهما

الحل

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z) \cdot (\hat{e}_x - \hat{e}_y + 2\hat{e}_z)$$

$$= 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{e}_x(2-1) - \hat{e}_y(4+1) + \hat{e}_z(-2-1) = \hat{e}_x - 5\hat{e}_y - 3\hat{e}_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A||B|} = \frac{-1}{6}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right) = 99.6^\circ$$

8.

1) المؤثرات التفاضلية للمتجهات

(del or nabla)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z}$$

التفرق Divergence

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$\vec{F}$ حيث F_x و F_y و F_z مركبات

مثال: If $F = 2xi + 3xyj + z^2k$

Then

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2 + 3x + 2z$$

10. If $F = x^2 i + 2z j + 3xy k$

Then

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 & 2z & -3xy \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} z^2 - \frac{\partial}{\partial z}(3xy)\right] i - \left[\frac{\partial}{\partial x} z^2 - \frac{\partial}{\partial z}(2xy^2 z)\right] j$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 z)\right] k$$

$$= 2xy^2 j + (3y - 4xyz) k$$

(Laplacian) تسمى لابلاسيان

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Given $f = 3x^2 y + xz^2$ find $\nabla^2 f$

$$\therefore \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(3x^2 y + xz^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(3x^2 y + xz^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(3x^2 y + xz^2$$

$$= 6y + 2x$$

1 (The gradient or Grad) (التدرج) التدرج

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}(f)\,i + \frac{\partial}{\partial y}(f)\,j + \frac{\partial}{\partial z}(f)\,k$$

if $f = zz^2 + 3yx$ مثال

Then

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}(zz^2+3yx)i + \frac{\partial}{\partial y}(zz^2+3yx)j + \frac{\partial}{\partial z}(zz^2+3yx)k$$

$$= 3y\,i + 3x\,j + 4z\,k$$

- Curl (التفاف) الدوران

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) k$$