

## Cap. 1: Conjuntos finitos e infinitos

### 1. Números Naturais

O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Existe uma função injetiva  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . A imagem  $s(n)$  de cada número natural  $n \in \mathbb{N}$  chama-se o *sucessor* de  $n$ .
2. Existe um único número natural  $1 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \neq s(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Se um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  é tal que  $1 \in X$  e  $s(X) \subset X$  (isto é,  $n \in X \implies s(n) \in X$ ) então  $X = \mathbb{N}$ .

1)  $\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injetiva  
 $n \mapsto s(n)$  sucesor de  $n$ .

2)  $\exists! 1 \in \mathbb{N}; 1 \neq s(n) \forall n \in \mathbb{N}$ .

3)  $X \subset \mathbb{N}; 1 \in X \wedge \underline{s(X) \subset X} \Rightarrow X = \mathbb{N}$

Axiomas de Peano

Axioma 3 es conocido como el principio de inducción.

Textualmente

- 1'. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.
- 2'. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
- 3'. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

O **princípio da indução** serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como o **método de indução** (ou *recorrência*), o qual funciona assim: “se uma propriedade  $P$  é válida para o número 1 e se, supondo  $P$  válida para o número  $n$  daí resultar que  $P$  é válida também para seu sucessor  $s(n)$ , então  $P$  é válida para todos os números naturais”.

Método de inducción

$P$ : propiedad en  $n$ .

①  $P$  es válida para  $n=1$

②  $P$  es válida para  $n \Rightarrow P$  es válida para  $s(n)$

$\therefore P$  es válida  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Como exemplo de demonstração por indução, provemos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $s(n) \neq n$ . Esta afirmação é verdadeira para  $n = 1$  porque, pelo axioma 2, tem-se  $1 \neq s(1)$  para todo  $n$  logo, em particular,  $1 \neq s(1)$ . Supondo-a verdadeira para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , vale  $n \neq s(n)$ . Como a função  $s$  é injetiva, daí resulta  $s(n) \neq s(s(n))$ , isto é, a afirmação é verdadeira para  $s(n)$ .

Exemplo :  $P: \forall n \in \mathbb{N}, s(n) \neq n$ .

Probamos la propiedad  $P$  por inducción.

①  $s(1) \neq 1$  es válida por el axioma 2.

② Supongamos que  $P$  es válida para  $n$ ; es decir,  
 $s(n) \neq n$ .

Luego, por la inyectividad de  $s$ ,

$$s(s(n)) \neq s(n).$$

Por tanto,  $P$  es válida para  $s(n)$ .

De (1) y (2) tenemos que  $P$  es válida  $\forall n \in \mathbb{N}$ ; es decir,

$$\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \neq n.$$

No conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais são definidas duas operações fundamentais: a *adição*, que associa a cada par de números  $(m, n)$  sua *soma*  $m + n$ , e a *multiplicação*, que faz corresponder ao par  $(m, n)$  seu *produto*  $m \cdot n$ . Essas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:

$$m + 1 = s(m);$$

$$m + s(n) = s(m + n), \text{ isto é, } m + (n + 1) = (m + n) + 1;$$

$$m \cdot 1 = m;$$

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

En  $\mathbb{N}$  son definidas las operaciones

Adición  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$(m, n) \longmapsto m + n \text{ suma}$$

Multiplicación  $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$(m, n) \longmapsto m \cdot n \text{ producto}$$

tales que:

- $m + 1 = s(m)$

- $m \cdot 1 = m$

- $m + s(n) = s(m + n)$

- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$

### propriedades da adição e da multiplicação:

- 1) *associatividade*:  $(m+n)+p = m+(n+p)$ ,  $m.(n.p) = (m.n).p$ ;  $m, n, p \in \mathbb{N}$ .
- 2) *distributividade*:  $m.(n+p) = m.n + m.p$ ;
- 3) *comutividade*:  $m+n = n+m$ ,  $m.n = n.m$ ;
- 4) *lei do corte*:  $m+n = m+p \implies n=p$ ,  $m.n = m.p \implies n=p$ .

Dem.

1) Fijando  $m$  y  $n$ , probemos la propiedad por inducción sobre  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\forall p \in \mathbb{N}, (m+n)+p = m+(n+p)$$

i) Para  $p=1$ .

$$(m+n)+1 = s(m+n)$$

$$m+(n+1) = m+s(n) = s(m+n)$$

$$s(p) = p+1$$

$$\text{Entonces } (m+n)+1 = m+(n+1).$$

ii) Supongamos que la propiedad es válida para  $p$ ; es decir,

$$(m+n)+p = m+(n+p) \text{ se cumple.}$$

$$m+1 = s(m)$$

Ahora verifiquemos la propiedad para  $s(p) = p+1$ .

$$m+s(n) = s(m+n) \checkmark$$

$$(m+n)+s(p) = s((m+n)+p) \text{ por definición}$$

$$= s(m+(n+p)) \text{ por hipótesis de inducción,}$$

$$= m+s(n+p) \text{ def.}$$

$$= m+(m+s(p)) \text{ def.}$$

$$\Rightarrow (m+n)+s(p) = m+(m+s(p)).$$

Por inducción, de (1) y (2), la propiedad se cumple para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

### Orden en $\mathbb{N}$

$$m < n \iff \exists p \in \mathbb{N}; n = m+p$$

$$m \leq n \iff m < n \text{ ó } m = n.$$

### Propiedades:

1) Transitividad.

$$m < n \text{ y } n < p \implies m < p$$

2) Tercio Excluido; Para  $m$  y  $n$  en  $\mathbb{N}$  cualesquiera, vale una y sólo una de las alternativas

$$m = n, m < n, n < m.$$

Dem.

$$1) \quad m < n \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{N}; \quad n = m + q_1$$

$$n < p \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{N}; \quad p = n + q_2$$

$$\text{Entonces } p = n + q_2 = (m + q_1) + q_2 = m + \underbrace{(q_1 + q_2)}_{q \in \mathbb{N}}$$

$$\exists q \in \mathbb{N}; \quad p = m + q \Rightarrow m < p.$$

**Propiedad (Principio del buen orden)** Todo subconjunto no vacío  $A \subset \mathbb{N}$  posee un menor elemento.

$$\lceil n_0 \in A \text{ es menor elemento de } A \Leftrightarrow n_0 \leq n, \forall n \in A. \rceil$$

Dem. Si  $1 \in A$ , entonces 1 es el menor elemento de  $A$ .

Supongamos que  $1 \notin A$ . Sea

$$X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}, \text{ donde } I_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Tenemos:

$$I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A \Rightarrow 1 \in X \quad \checkmark$$

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists p \in A; \quad p \neq 1.$$

$$\Rightarrow I_p \not\subset \mathbb{N} - A$$

$$\Rightarrow p \notin X$$

$$\Rightarrow X \neq \mathbb{N} \quad \checkmark$$

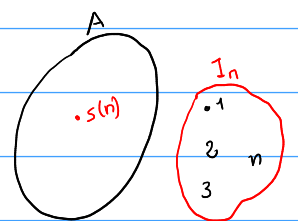
Como  $1 \in X$  y  $X \neq \mathbb{N}$ , por axioma 3, tenemos  $s(x) \notin X$ .

$$s(x) \notin X \Rightarrow \exists n \in X; \quad s(n) \notin X$$

$$\Rightarrow I_n \subset \mathbb{N} - A \quad \text{y} \quad I_{s(n)} \not\subset \mathbb{N} - A$$

$$\Rightarrow s(n) \in A.$$

$$\Rightarrow s(n) \text{ es el menor elemento de } A$$



## 2. Conjuntos Finitos

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\} = \{p \in \mathbb{N}; \quad p \leq n\}.$$

Def.  $X$  es finito  $\Leftrightarrow X = \emptyset$  ó  $\exists f: I_n \rightarrow X$  una biyección.

$$f: I_n \rightarrow X \\ n \mapsto f(n) = x_n$$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$f$  se llama conteo de los elementos de  $X$ .

$n$  es el número de elementos o cardinal de  $X$ .

**Teorema 1.** Si  $A \subset I_n$  propio, entonces no puede existir una biyección

$$f: A \rightarrow I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Dem.** Por absurdo. Entonces

$$\exists n \in \mathbb{N}; \quad A \subset I_n \text{ propio y } \exists f: A \rightarrow I_n \text{ biyectiva.} \quad (*)$$

Sea  $n_0$  el mínimo tq

$$A \subset I_{n_0} \text{ propio y } \exists f: A \rightarrow I_{n_0} \text{ biyectiva.} \quad I_{n_0} = \{1, 2, \dots, n_0\}$$

Como  $n_0 \in I_{n_0}$ , entonces por la biyectividad de  $f$ ,  $\exists ! a \in A$  tq

$$f(a) = n_0$$

Luego,

$$f: A - \{a\} \rightarrow I_{n_0} - \{n_0\} = I_{n_0-1}$$

es biyectiva. Esto contradice la minimalidad de  $n_0$  con la propiedad (\*).

$$\begin{array}{ccc} p & \Rightarrow & q \\ \text{///} & & \\ \neg q & \Rightarrow & \neg p \end{array}$$

**Corolario 1.** Si  $f: I_m \rightarrow X$  y  $g: I_n \rightarrow X$  son biyecciones, entonces  $m = n$ .

**Dem.**

$$\begin{array}{ccccc} I_m & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g^{-1}} & I_n \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g^{-1} \circ f & & \end{array}$$

$g^{-1} \circ f: I_m \rightarrow I_n$  es biyectiva.

Sup. que  $m < n$ . Entonces  $I_m \subset I_n$  propio. Luego, tenemos:

$$I_m \subset I_n \text{ propio y } \exists g^{-1} \circ f: I_m \rightarrow I_n \text{ biyectiva.}$$

Esto viola el teorema 1. Por tanto,  $m \neq n$  y de forma análoga se demuestra que  $n \neq m$ . Por tanto,  $n = m$ .

**Corolario 2.** Sea  $X$  conjunto finito no vacío.

$$f: X \rightarrow X \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva.}$$

**Dem.**

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f$  es inyectiva.

Si  $X$  es finito, entonces existe una biyección  $\varphi: I_n \rightarrow X$ .

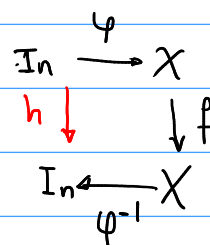
Entonces

$$h = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi: I_n \rightarrow I_n$$

es inyectiva. Por tanto,

$$h: I_n \rightarrow h(I_n) \subset I_n \text{ biyectiva}$$

$$\text{y } h^{-1}: h(I_n) \rightarrow I_n \text{ biyectiva.}$$



Luego, por teorema 1, tenemos que  $h(I_n) \subset I_n$  no propio. Entonces

$h(I_n) = I_n$ . Por tanto,  $h: I_n \rightarrow I_n$  es biyectiva de donde

se tiene que  $f = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$  es biyectiva, por tanto, sobreyectiva.

⇐) EJERCICIO

**Corolario 3.** No puede existir una biyección entre un conjunto finito y su parte propia.

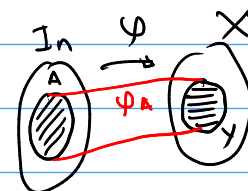
Dem. Sea  $X$  un conjunto finito no vacío y  $Y \subset X$  subconjunto propio.

Tenemos:

$$X \text{ es finito} \Rightarrow \exists \text{ una biyección } \varphi: I_n \rightarrow X.$$

y

$$Y \subset X \text{ propio} \Rightarrow \varphi^{-1}(Y) \subset I_n \text{ propio por la biyectividad de } \varphi.$$



Sea  $A = \varphi^{-1}(Y) \subset I_n$ . Definamos

$$\varphi_A: A \rightarrow Y$$

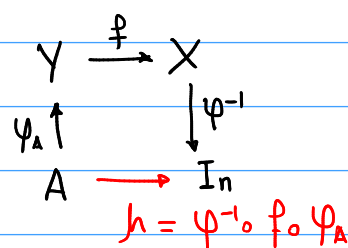
$$p \mapsto \varphi_A(p) = \varphi(p)$$

el cual es biyectiva.

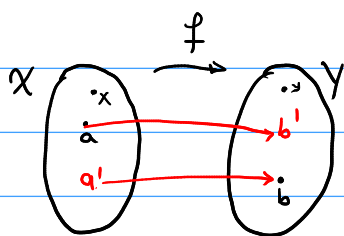
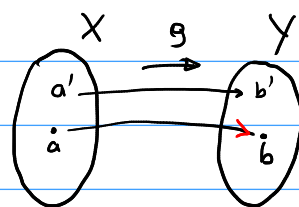
Supongamos que existe una biyección  $f: Y \rightarrow X$ .

Entonces  $h = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_A: A \rightarrow I_n$  es una

biyección. Esto viola el teorema 1, por tanto no existe una biyección  $f: Y \rightarrow X$ .



**Lema:** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una biyección entonces para  $a \in X$  y  $b \in Y$  existe una biyección  $g: X \rightarrow Y$  tq  $g(a) = b$ .



Dem. Sea  $b' = f(a)$  y  $f(a') = b$ .

Definamos  $g: X \rightarrow Y$  por

$$g(x) = \begin{cases} b', & x = a' \\ b, & x = a \\ f(x), & x \neq a', x \neq a. \end{cases}$$

Así definida  $g$  es biyectiva.

**Teorema 2.** Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

$$Y \subset X \text{ y } X \text{ finito} \Rightarrow Y \text{ es finito} \quad (*)$$

Dem. Si  $X = \emptyset$ , el teorema es obvio

Supongamos que  $X \neq \emptyset$ .

**Afirmación:**  $X$  es finito  $\Rightarrow X - \{a\}$  es finito para  $a \in X$ .

En efecto:

$$X \text{ es finito} \Rightarrow \exists f: \underset{n}{I_n} \rightarrow \underset{a}{X} \text{ biyectiva}$$

$I_m$

$$\Rightarrow \exists \varphi: I_n \rightarrow X \text{ biyectiva tq } \varphi(n) = a$$

(Por Lema)

$$\underset{n}{I_n} \rightarrow \underset{a}{a}$$

$$\Rightarrow \varphi: I_n - \{n\} \rightarrow X - \{a\} \text{ es biyectiva}$$

$$\varphi: I_{n-1} \rightarrow X - \{a\} \text{ es biyectiva}$$

Si  $X - \{a\} = \emptyset$  entonces es finito, pero si  $X - \{a\} \neq \emptyset$  tendremos la existencia de  $\varphi: I_{n-1} \rightarrow X - \{a\}$  biyectiva, lo que prueba que  $X - \{a\}$  es finito.  $\perp$

Ahora probemos el teorema. Reescribiendo  $(*)$

$$Y \subset X \text{ y } X \text{ tiene } n \text{ elementos} \Rightarrow Y \text{ es finito.} \quad (**)$$

Probemos por Inducción sobre  $n$ .

i) Para  $n=1$ .  $X=\{x_1\}$ . Entonces  $Y=\emptyset$  ó  $Y=X$  evidentemente es finito.

ii) Supongamos que  $(**)$  se cumple para  $n$ . Entonces probemos que también se cumple para  $n+1$ .

Si  $X$  tiene  $n+1$  elementos y como  $Y \subset X$  se tiene

$$Y=X \text{ ó } Y \subset X \text{ propio.}$$

(9)

•  $Y=X \Rightarrow Y$  es finito. (obvio)

•  $Y \subset X$  propio  $\Rightarrow \exists a \in X \wedge a \notin Y$ .

Como  $X$  es finito, entonces  $X-\{a\}$  es finito y tiene  $n$  elementos, esto por la AFIRMACIÓN.

Entonces

$$Y = X - \{a\} \text{ ó } Y \subset X - \{a\} \text{ propio}$$

$Y$  es finito.



Por hipótesis de inducción, si  $Y \subset X - \{a\}$  y  $X - \{a\}$  tiene  $n$  elementos, entonces  $Y$  es finito.

De i) y ii) la propiedad  $(**)$  se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corolario 1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$

a)  $Y$  finito y  $f$  inyectiva  $\Rightarrow X$  finito

b)  $X$  finito y  $f$  sobreyectiva  $\Rightarrow Y$  finito.

Dem

a)  $f: X \rightarrow Y$  es inyectiva  $\Rightarrow f: X \rightarrow f(X)$  es biyectiva

$Y$  es finito y  $f(X) \subset Y \Rightarrow f(X)$  es finito, por teorema 2.

$\Rightarrow \exists \phi: I_m \rightarrow f(X)$  biyectiva.

$$I_m \xrightarrow{\phi} f(X) \xrightarrow{f} X$$

$h = f \circ \phi: I_m \rightarrow X$  biyectiva

$\Rightarrow X$  es finito.

**Def.**  $X \subset \mathbb{N}$  es acotado cuando existe  $p \in \mathbb{N}$  t.q.  $x \leq p$  para todo  $x \in X$ .

**Corolario 2.**  $X \subset \mathbb{N}$  es finito  $\Leftrightarrow X$  es acotado.

### 3. Conjunto infinitos

$X$  es infinito cuando no es finito.

Ejemplo:  $\mathbb{N}$  es infinito.

En efecto: supongamos que  $\mathbb{N}$  es finito. Entonces  $\mathbb{N}$  es acotado. (cor. 2, teo. 2)

Si  $\mathbb{N}$  es acotado, existe  $p \in \mathbb{N}$  t.q.

$$n \leq p, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular para  $n = p+1$ , tenemos:

$$p+1 \leq p. \text{ (Absurdo)}$$

Por tanto,  $\mathbb{N}$  es infinito.

$$X = \emptyset$$

**Teorema 3.**  $X$  es infinito  $\Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \rightarrow X$  una **inyección**.

Dem:  $X$  es infinito  $\Rightarrow X \neq \emptyset$ .

• Sup. que  $A_1 = X$ . Elegimos  $x_1 \in A_1$  y definimos

$$f(1) = x_1.$$

• Sea  $A_2 = X - \{x_1\}$ . Elegimos  $x_2 \in A_2$  y definimos

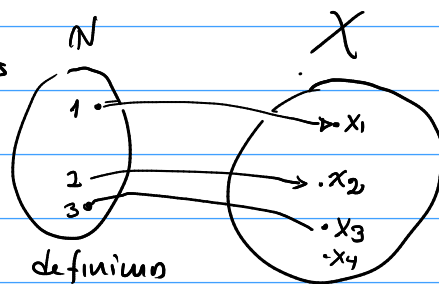
$$f(2) = x_2$$

$\vdots$

• sea  $A_n = X - \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . Elegimos  $x_n \in A_n$  y definimos

$$f(n) = x_n$$

$f: \mathbb{N} \rightarrow X$  es inyectiva



**Corolario.**  $X$  es infinito  $\Leftrightarrow \exists$  una biyección  $\varphi: X \rightarrow Y$  donde  $Y$  es un subconjunto propio de  $X$ .

Dem

$\Rightarrow X$  infinito  $\Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \rightarrow X$  inyectiva. (teorema 3)

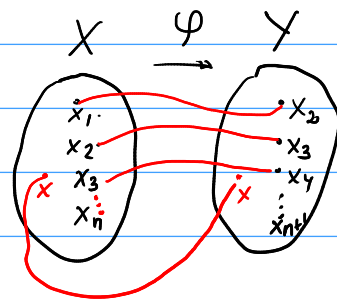
$$n \mapsto f(n) = x_n$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset X$$

Sea  $Y = X - \{x_1\}$ . Definamos  $\varphi: X \rightarrow Y$  por

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq x_n \\ x_{n+1}, & x = x_n \end{cases}$$

$\varphi$  es biyectiva



$\Leftarrow$

Corolario 3. (teorema 1):  $Y \subset X$  propio.  $\exists \varphi: X \rightarrow Y$  biyectiva  $\Rightarrow X$  es infinito.

Sea  $\varphi: X \rightarrow Y$  una biyección donde  $Y \subset X$  propio, por Corolario 3 del teorema 1,  $X$  es infinito.