
الوحدة الثالثة
قوانين التفاضل

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	65
تمهيد	65
أهداف الوحدة	65
1. قوانين التفاضل	66
1.1 تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين	66
2.1 تفاضل حاصل ضرب دالتين	66
3.1 تفاضل حاصل قسمة دالتين	69
4.1 تفاضل دالة الدالة	70
الخلاصة	73
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	73
إجابات التدريبات	74
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	78
مسرد المصطلحات	79
المراجع	80

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس نرحب بك في الوحدة الثالثة بعنوان قوانين التفاضل بعد الشرح والفهم الجيد للوحدة الأولى والثانية والتي كانت تشمل الدوال ومشتقات الدوال المثلثية والتي سترد كثيرا في أمثلة هذه الوحدة.

تبدأ قوانين التفاضل بقانون تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين، ثم قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين يأتي بعده تفاضل حاصل قسمة دالتين وتفاضل دالة الدالة.

تجد في ثنايا هذه الوحدة أمثلة لتعميق الشرح وتقريب الفهم والاستيعاب، وحتى يتمكن الدارس من حل التدريبات الواردة في هذه الوحدة مع وجود أسئلة تقويم ذاتي لاسترجاع القوانين واستذكارها وحفظها.

في نهاية هذه الوحدة نجد حلول للتدريبات وكذلك نجد من الوسائط السمعية والبصرية وبرمجيات الحاسوب ما يعينك علي زيادة المعرفة وتعميق الشرح.

نطلب منك أن تساعدنا في تقييم هذه الوحدة.

أهداف الوحدة

أخي الدارس

بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي أن تكون قادرا علي أن:

1/ تشرح تفاضل حاصل جمع وطرح دالتين.

2/ تحل تفاضل حاصل ضرب دالتين .

3/ تحسب تفاضل حاصل قسمة دالتين.

4/ تستنتج وتشرح تفاضل دالة الدالة.

5/ تميز بين قوانين التفاضل الأربعة.

1. قوانين التفاضل The Differentiation Rules

يجب عليك مراجعة الوحدة الأولى والثانية جيدا حتى نبدأ معا مشوارنا مع الوحدة الثالثة وقوانين التفاضل وهي كما يلي:

1.1 تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين

لتوضيح الشرح نبدأ بالمثال الآتي:

لتكن $y=u\pm v$ حيث u,v بدلالة x وليكن $\Delta u,\Delta v$ هما التغير الناتج في u,v على الترتيب عندما يحدث تغير Δx في x.

$$\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)-u\pm v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$$

والقاعدة هي : تفاضل حاصل جمع (طرح) دالتين يساوي جمع (طرح) تفاضل الدالتين .

- **أمثلة:**

(1) $y=x^2+\cos x$

$$\frac{dy}{dx}=2x-\sin x$$

(2) $y=\tan x+\operatorname{cosec} x$

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x-\operatorname{cosec} x\cot x$$

2.1 تفاضل حاصل ضرب دالتين

المثال أدناه يشرح لك تفاضل حاصل ضرب دالتين ومنه نستنتج القاعدة التي لابد لك أن تحفظها وتتأكد من معرفتك وفهمك الجيد لها.

لتكن $y=uv$ حيث u,v دالتان في x وليكن $\Delta u,\Delta v$ هما التغير الناتج في u,v على الترتيب عندما يحدث تغير Δx في x.

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv$$
$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

عندما تقترب Δx من الصفر فان Δu أيضا تقترب من الصفر . إذن

وهذه هي قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين :

المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين يساوي الدالة الأولى × المعامل التفاضلي للدالة الثانية زائداً الدالة الثانية × المعامل التفاضلي للأولى.

سوف يتبادر إلى ذهنك إذا كان هنالك حاصل ضرب أكثر من دالتين ما هو القانون أو القاعدة التي يجب أن تطبق؟ للإجابة علي هذا السؤال

_يمكننا تعميم هذه القاعدة لحاصل ضرب أكثر من دالتين ، مثلاً لإيجاد المعامل التفاضلي لحاصل ضرب ثلاث دوال نعتبر دالتين منها كدالة واحدة ونطبق القاعدة السابقة مثلاً إذا كانت

$$y = uvw = (uv)w$$
$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + w\frac{d(uv)}{dx}$$
$$= uv\frac{dw}{dx} + w\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)$$
$$= uv\frac{dw}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + wv\frac{du}{dx}$$

وإذا كانت y حاصل ضرب أربع دوال يمكننا اخذ دالتين كدالة واحدة أو اخذ ثلاث دوال كدالة واحدة ونطبق قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين.

- **أمثله:**

$$1)\quad y = x^3 \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \frac{d\sin x}{dx} + \sin x \frac{dx^3}{dx}$$

$$= x^3 \cos x + \sin x\left(3x^2\right) = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$$

$$2)\quad y = x^3 \sin x \tan x = \left(x^3 \sin x\right)\tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \sin x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}\left(x^3 \sin x\right)$$

$$= x^3 \sin x \sec^2 x + \tan x\left(x^3 \cos x + 3x^2 \sin x\right)$$

بعد دراستك ومعرفتك للقانونين قانون حاصل جمع وطرح دالتين وقانون حاصل ضرب دالتين تكون قد حققت الهدف الأول والثاني وحتى يتم لك التأكد من الفهم نأتي إلى أسئلة التقويم الذاتي لتبدأ في وضع الحلول لها.

أسئلة تقويم ذاتي (1)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1/ $y = x^3 + \cos x$

2/ $y = x^3 \sin x \tan x$

3/ $y = x^3 \sin x$

4/ $y = \tan x + \operatorname{cosec} x$

5/ برهن قانون حاصل ضرب دالتين.

3.1 تفاضل حاصل قسمة دالتين

بعد نهاية شرح ضرب الدالتين فأكثر ندخل سوياً إلى شرح حاصل قسمة دالتين

لتكن $y=\frac{u}{v}$ حيث v,u بدلالة x

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\div v^2$$

- **أمثله:**

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y=\frac{x^2+3x+5}{2x^2-7}$ **2)** $y=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$

الحل

1) $y=\frac{x^2+3x+5}{2x^2-7}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^2-7)(2x+3)-(x^2+3x+5)(4x)}{(2x^2-7)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(4x^3+6x^2-14x-21)-(4x^3+12x^2+20x)}{4x^4-28x^2+49}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-6x^2-34x-21}{4x^4-28x^2+49}$$

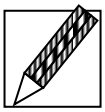
2) $\mathbf{y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x}$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x}$$

وهذه النتيجة تذكرك بالتي حصلت عليها بالوحدة الثانية باستخدام المبادئ الأولية.عليك أخي الدارس الرجوع إليها حتى تستطيع ربط الوحدات والتأكد من ذلك.

تدريب (1)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = (x^2 + 1)(3x - 1)$ 2) $y = (x^2 + 1)(3x - 1)\cos x$

3) $y = (2x^2 - 3)\operatorname{cosec} x$ 4) $y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$

5) $y = \frac{x^2}{1 + \cot an x}$ 6) $y = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$

4.1 تفاضل دالة الدالة

مما سبق شرحه حاول أن تتعرف علي ماذا نعني بتفاضل دالة الدالة.

إذا كانت y معطاة بدلالة **u** و **u** معطاة بدلالة **x**فنقول أن **y**دالة في **x**. و نستطيع أن نكتب

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

➢ **أمثلة**

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y=(6x-1)^4$ **2)** $y=\sin(3x^2-x+7)$ **3)** $y=\cotan(7x-2)$

4) $y=\tan^3 x$

1) $y=(6x-1)^4$

الحل:

بأخذ $u=(6x-1)$ فان $y=u^4$

$$\frac{dy}{du}=4(u)^3 \quad , \quad \frac{du}{dx}=6$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[4(6x-1)^3\right][6]=24(6x-1)^3$$

2) $y=\sin(3x^2-x+7)$

الحل:

بأخذ $u=3x^2-x+7$ فان $y=\sin u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\cos u)(6x-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=(6x-1)\cos(3x^2-x+7)$$

3) $y=\cotan(7x-2)$

الحل:

بوضع $u=7x-2$ فان $y=\cotan u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(-\operatorname{cosec}^2 u\right)(7)$$

$$\frac{dy}{dx}=-7\operatorname{cosec}^2(7x-2)$$

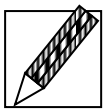
4) $\mathbf{y = \tan^3 x}$

الحل:

بوضع $\mathbf{u = \tan x}$ فان $\mathbf{y = u^3}$

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} = \left(\mathbf{3u^2}\right)\left(\mathbf{\sec^2 x}\right) = \mathbf{3\tan^2 x \sec^2 x}$$

تدريب (2)



أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

1) $y = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

2) $y = \tan^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3) $y = \frac{\sqrt{1-\sin x^2}}{\sec^2 x}$

4) $y = \frac{\sin x^3 \tan(5x+1)}{(7x+1)}$

أسئلة تقويم ذاتي(2)



أوجد $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ إذا كانت

1. $y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

2. $y = (6x - 1)^4$

3. $y = \text{cotan}\,(7x-2)$

4. $y = \tan^3 x$

5. $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 - 7}$

6. برهن تفاضل دالة الدالة.

الخلاصة

دعنا نقوم معا بتلخيص أهم ما ورد في هذه الوحدة

شملت الوحدة الثالثة قوانين التفاضل وهي تعتبر ذات أهمية قصوى في علم الحسبان وبدأت الوحدة بالقانون الأول للتفاضل وهو تفاضل حاصل جمع وطرح دالتين تم برهان القانون وتوصلنا إلى القاعدة وهي تفاضل حاصل جمع أو طرح دالتين يساوي جمع أو طرح تفاضل الدالتين بعد ذلك تم شرح ضرب دالتين أو أكثر بانه المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين أو أكثر يساوي الدالة الأولى في المعامل التفاضلي للدالة الثانية زايدا الدالة الثانية في المعامل التفاضلي للأولى $\mathbf{\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$ في حالة ثلاثة دوال تعتبر دالتين كدالة واحدة وإذا أكثر من ثلاثة اخذ دالتين كدالة واحدة أو احذ ثلاثة دوال كدالة واحدة. ويأتي القانون الثالث حاصل قسمة دالتين $\frac{dy}{dx} = \left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right) \div v^2$ ثم القانون الرابع تفاضل دالة داله.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

بعد نهاية الوحدة الثالثة نأتي بك إلى شرح الوحدة الرابعة بعنوان الدالة الأسية وفي هذه الوحدة سوف تتعرف عن الدالة الأسية والعدد e وكذلك بيان ورسم الدالة الأسية ثم عمليات تفاضل الدالة الأسية مع وجود أمثلة وتدريبات لتعميق الفهم والشرح.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

الحل

1) $\mathbf{y = (x^2 + 1)(3x - 1)}$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)(3) + (3x - 1)(2x) = 3x^2 + 3 + 6x^2 - 2x$$

$$= 9x^2 - 2x + 3$$

2) $\mathbf{y = (x^2 + 1)(3x - 1)\cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)(3x - 1)(-\sin x) + (x^2 + 1)(\cos x)(3) + (3x - 1)(\cos x)(2x)$$

$$= -(x^2 + 1)(3x - 1)\sin x + 3(x^2 + 1)\cos x + 2x(3x - 1)\cos x$$

3) $y = (2x^2 - 3)\operatorname{cosec} x$

$$\frac{y}{dx} = (2x^2 - 3)(-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x) + 4x \operatorname{cosec} x$$

$$= \left((3 - 2x^2) \operatorname{cotan} x + 4x\right)\operatorname{cosec} x$$

4) $\mathbf{y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \tan x)\sec^2 x - (\tan x)\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

5) $\mathbf{y = \frac{x^2}{1 + \operatorname{cotan} x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \operatorname{cotan} x)(2x) - x^2\left(-\operatorname{cosec}^2 x\right)}{(1 + \operatorname{cotan} x)^2}$$

$$= \frac{2x(1 + \operatorname{cotan} x) + x^2 \operatorname{cosec}^2 x}{(1 + \operatorname{cotan} x)^2}$$

6) $\mathbf{y=\dfrac{x^2+1}{x\sin x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x\sin x)(2x)-\left(x^2+1\right)\left(x\cos x+(1)\sin x\right)}{(x\sin x)^2}$$

$$=\frac{2x^2\sin x-\left(x^3+x\right)\cos x-\left(x^2+1\right)\sin x}{x^2\sin^2 x}$$

تدريب (2)

1) $y=\tan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

$u=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 \Rightarrow y=\tan u$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\sec^2 u\cdot\dfrac{du}{dx}$ .....(1)

إذا أخذنا $\mathbf{w=\dfrac{x+1}{x-1}}$ فان $\mathbf{u=w^2}$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}=2w\cdot\left(\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\right)=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)=-4\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

بالتعويض في (1)

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 u\left(\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}\right)$$

$$=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}\sec^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

2) $y=\tan^2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

إذا عوضنا $\mathbf{u=\tan\dfrac{x+1}{x-1}}$ نجد $\mathbf{y=u^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\frac{du}{dx}$$

وإذا عوضنا $\mathbf{w=\dfrac{x+1}{x-1}}$ فان $\mathbf{u=\tan w}$

$$\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}=\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dw}}\cdot\frac{\mathbf{dw}}{\mathbf{dx}}=\mathbf{sec}^2\,\mathbf{w}\cdot\frac{\mathbf{(x-1)(1)-(x+1)(1)}}{\mathbf{(x-1)^2}}$$

$$=\mathbf{sec}^2\,\mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{(x-1)^2}}\right)$$

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}=\mathbf{2u}\left(\frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{(x-1)^2}}\right)\mathbf{sec}^2\,\mathbf{w}=\mathbf{2}\tan\left(\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}\right)\left(\frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{(x-1)^2}}\right)\mathbf{sec}^2\left(\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}\right)$$

$$=\frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{(x-1)^2}}\tan\left(\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}\right)\mathbf{sec}^2\left(\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}\right)$$

3) $y=\dfrac{\sqrt{1-\sin x^2}}{\sec^2 x}$

$$y=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{w^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{w^2\frac{d}{dx}u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}w^2}{w^4}=\frac{w\left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}\right)-u^{\frac{1}{2}}\left(2w\frac{dw}{dx}\right)}{w^4}\ldots\ldots\ldots(1)$$

وذلك بوضع $\mathbf{w=secx}\quad,\quad\mathbf{u=1-sinx^2}$

أيضا إذا عوضنا $\mathbf{v=x^2}\Rightarrow\mathbf{u=1-sinv}$ فان

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=-\cos v(2x)=-2x\cos x^2$$

$$\frac{dw}{dx}=\sec x\tan x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 x\left(\frac{1}{2}\left(1-\sin x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\cos x^2\right)\right)-\left(1-\sin x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\sec^2 x\tan x\right)}{\sec^4 x}$$

4) $y=\dfrac{\sin x^3\tan(5x+1)}{(7x+1)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(7x+1)\frac{d}{dx}\left(\sin x^3\tan(5x+1)\right)-\sin x^3\tan(5x+1)\frac{d}{dx}(7x+1)}{(7x+1)^2}$$

$$\frac{d(7x+1)}{dx}=7$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x^3\tan(5x+1)\right)=\frac{d}{dx}\sin x^3\cdot\tan(5x+1)+\sin x^3\frac{d}{dx}\tan(5x+1)$$

بوضع $u = x^3$

$$\frac{d}{dx}\sin x^3 = \frac{d}{du}\sin u \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

بوضع $v = 5x + 1$

$$\frac{d}{dx}\tan(5x+1) = \frac{d}{dv}\tan v \cdot \frac{dv}{dx} = 5\sec^2(5x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(7x+1)\left(3x^2 \cos x^3 \tan(5x+1) + 5\sec^2(5x+1)\sin x^3\right) - 7\sin x^3 \tan(5x+1)}{(7x+1)^2}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (1)

1. $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$

2. $\frac{dy}{dx} = x^3 \sin x \sec^2 x + \tan x (x^3 \cos x + 3x^2 \sin x)$

3. $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos x + \sin x (3x^2) = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$

4. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - \text{cosec } x \cot x$

5. الرجوع إلى البرهان داخل الوحدة

تقويم ذاتي (2)

1. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

2. $\frac{dy}{dx} = 24 (6x-1)^3$

3. $\frac{dy}{dx} = -7 \text{ cosec}^2 (7x - 2)$

4. $\frac{dy}{dx} = 3 \tan^2 x \sec^2 x$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2 - 34x - 21}{4x^4 - 28x^2 + 49}$

6. الرجوع إلى البرهان داخل الوحدة

مسرد المصطلحات

- **تفاضل Differential**

إذا كانت f دالة فان

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

هذه النهاية تسمي تفاضل الدالة f عند x ويرمز لها بالرمز $f'(x)$

- **اشتقاق Differentiation**

هو دراسة متسلسلة للنهايات والتي يطلق عليها الرياضيون نظريات الاشتقاق

المراجع

أولا المراجع العربية

1/ توماس (1968) ، **حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية**، دار النشر اديسون ويسلي الطبعة الثانية.

2/ خالد قاسم سمور (1999) ، **الرياضيات والهندسة التحليلية**، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.

3/ خالد قاسم سمور (2002) ، **أساسيات التفاضل والتكامل** ، دار الفكر للطباعة والنشر عمان الأردن.

4/ محمد عثمان المكي (1999)، **الحسبان الأولى** ، مطبعة جامعة الخرطوم.

5/ فرانك أبرز (1977)، **حساب التفاضل والتكامل** ، مطابع الدار الهندسية سلسلة شوم.

ثانيا المراجع الأجنبية

1/ Caunt, G, W **Elementary Calculus,** copy right by Carndon , Oxford. U.K

2/ K. R. Nailana, (2000), **Calculus**, printing and published by university of South Africa

3/ Piskunov, N **, Differential and Integral Calculus,** translation from Russian to English by G. Y anousky, copy right by mair Russian.

4/ S. L. Salas Eindar Hille , (1990) **Calculus one and several variable**, 6th edition John Willy and sons, Inc, Canada