بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان المفتوحة

برنامج العلوم الإدارية

الرياضة المالية

رمز المقرر ورقمه: أدر 233

المؤلف:

أ. عبد العزيز محمد أحمد تنقساوي

التنضيد الطباعي :

منى محجوب

سهير محمد يوسف

حسن عبد العزيز تنقساوي

التصميم التعليمي :

أ . محمد حسن الزبير

منشورات جامعة السودان المفتوحة، الطبعة الأولى 2007

رقم الإيداع:

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المقرر، وبأي وجه من الوجوه، إلا بعد الموافقة المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على نبيه سيدنا محمد المبعوث رحمة للعالمين وعلى آله وصحبه أجمعين .

عزيزي الدارس نرحب بك في هذا المقرر الذي يتكون من جزءين : الأول خاص بالجبر والثانى خاص بالحُسبان. فيهما تجد كل ما تحتاجه من الرياضيات التى تعينك على فهم العلوم الآخرى المتصلة بتخصصك من العلوم الإدارية والمحاسبية. الجزء الأول خاص بالجبر، و هو يتكون من ثلاث وحدات: الأولى في المتواليات و تشمل أيضا حساب الأرباح و مسائل الأقساط، الثانية فى المعادلات و المتباينات الآنية و البرمجة الخطية،والثالثة في المجموعات والعمليات الجبرية عليها ، أما الجزء الثاني فيتكون أيضا من ثلاث وحدات : الرابعة في الدوال و النهايات, والخامسة في الحسبان و تشمل بعض المفاهيم الاقتصادية و الخامسة في التكامل.

علماً بأننا رأينا أن نقدم لك هذا الكتاب في أسلوب بسيط وسلس حتى يتسنى لك فهم محتوياته فهماً جيداً ، وستجد من خلال وحدات هذا الكتاب العديد من الأمثلة والتدريبات والتي نأمل أن تعينك على الاستيعاب الممتاز لموضوعات هذا المقرر .

الأهداف العامة للمقرر



عزيزي الدارس،،

بعد فراغك من دراسة هذا المقرر ينبغي أن تكون لديك القدرة على :

(1) **تعريف** المتوالية وإيجاد مجموعها بنوعيها حسابية أو هندسية .

(2) **حل** المعادلات الخطية .

(3) **حل** المتباينات الخطية .

(4) **صياغة** مسائل البرمجة الخطية اللفظية في شكل متباينات خطية ثم حلها .

(5) **تعريف** المجموعة والعلاقات المعرفة على المجموعات والعمليات الجبرية عليها .

(6) **معرفة** الدالة وأنواعها وبعض الطرق لإيجاد نهاياتها .

(7) **معرفة** مشتقة الدالة وبعض الطرق لإيجادها .

(8) **تعريف** التكامل وحساب بعض التكاملات .

محتويات المقرر

الوحدة	عنوان الوحدة	الصفحة
الوحدة الأولى	المتواليات	1
الوحدة الثانية	المعادلات والمتباينات الخطية	31
الوحدة الثالثة	المجموعات	81
الوحدة الرابعة	الدالات الحقيقية والنهايات	107
الوحدة الخامسة	التفاضل	141
الوحدة السادسة	التكامل	199


الوحدة الأولى
المتواليات
PROGRESSIONS

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	3
تمهيد	3
أهداف الوحدة	4
1. المتوالية	5
1.1 مفهوم المتوالية	5
2.1 المتوالية الحسابية	6
3.1 مجموع المتوالية الحسابية.	7
4.1 المتوالية الهندسية.	11
5.1 مجموع المتوالية الهندسية .	11
6.1 مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية.	14
2. حساب الأرباح	15
1.2 الربح البسيط	16
2.2 الربح المركب	17
3.2 حساب أرباح الأقساط	19
الخلاصة	22
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	23
إجابات التدريبات	24
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	28
مسرد المصطلحات	29
المراجع	30

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس نرحب بك في الوحدة الأولى من مقرر الرياضيات لطلاب العلوم الإدارية والمحاسبية، ولعلك تدرك أن كثيراً من المعاملات الاقتصادية تبنى على الاستدانة والتقسيط وحسابات الأرباح بأشكالها المتنوعة؛ ولهذا نعرض عليك من خلال هذه الوحدة معظم الجوانب المتعلقة بهذه المواضيع حيث سنتعرف من خلال الوحدة على المتواليات الحسابية والهندسية وكيفية إيجاد مجموع كل منهما كما سيتضح لك تطبيقات ذلك من خلال دراستك في هذه الوحدة لحسابات الأرباح سواء كان الربح بسيطاً أو مركباً .

ولهذا نأمل أن تدرس هذه الوحدة بتمعن وتدبر وتقوم بحل التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي التي تخللت الوحدة وفي حالة مواجهتك لأي صعوبة في ذلك يمكنك الرجوع إلى مشرفك الأكاديمي .

ختاماً نرحب بكل رأي أو اقتراح تراه معيناً لك في فهم واستيعاب هذه الوحدة جيداً .

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

بعد انتهائك من دراسة هذه الوحدة نتوقع منك أن تكون قادراً على أن:

(1)**تعرف** المتوالية الحسابية.

(2) **تجد** الحد العام للمتوالية الحسابية.

(3) **تجد** مجموع المتوالية الحسابية.

(4)**تعرف** المتوالية الهندسية .

(5)**تكتب** الحد العام للمتوالية الهندسية.

(6)**تحسب** مجموع المتوالية الهندسية.

(7)**تحسب** الربح البسيط أو الربح المركب لعملية تجارية .

(8)**تحدد** قيمة القسط لعملية تجارية في حالة الربح البسيط .

(9)**تحدد** قيمة القسط لعملية تجارية في حالة الربح المركب.

1. المتوالية Progression

1.1 مفهوم المتوالية

المتوالية هى مجموع أعداد تسمى حدودا (terms) مقاديرها تحدد حسب قانون محدد. يعتمد على ترتيب الحد فى المتوالية. يرمز لترتيب الحد بالحرف اللاتينى r ويسمى الحد الذى ترتيبه r (r = 1، 2، 3، ...) **بالحد الرائى** أو **الحد العام** للمتوالية (general term). ويحدد كل حد بمعرفة ترتيبه في المتوالية والقانون الذي يحدد قيمته.مثلاً التعويض r = 1 يعطي قيمة الحد الأول ، r = 2 تعطي الحد الثاني وهكذا حتى نحدد كل الحدود، ثم نقوم بإضافة هذه الحدود إلى بعضها بالتتالي حتى نحصل على مجموع المتوالية إلى n حداً. إذا كان عدد حدود المتوالية محدوداً فتسمى محدودة (finite) وإذا كان لا نهائيا فتسمى المتوالية لا نهائية (infinite).

مثلاً : حدود المتوالية التى حدها العام

$$u_r = 2r + 1$$

هى r = 1 $\Leftarrow$ الحد الأول = 3

r = 2 $\Leftarrow$ الحد الثاني = 5

r = 3 $\Leftarrow$ الحد الثالث = 7

إذن المتوالية هي : 3 + 5 + 7 + ...

2.1 المتوالية الحسابية Arithmetical Progression

تعريف

المتوالية الحسابية هى متوالية فيها كل حد يزيد عن سابقه بقيمة ثابتة تسمى الفرق أو الفرق الثابت Common difference. نلاحظ أن الحد العام للمتوالية التي حدها الأول a وفرقها الثابت d يكون فى الصورة

$$u_r = a + (r-1)d \; ; \quad r = 1,2,3, \cdots .$$

كما نلاحظ أن a و d ثابتان لا يعتمدان على r .

مثال (1): المتوالية $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \ldots + 62$

- متوالية حسابية محدودة حدها الأول 5 وفرقها الثابت 3
- وعدد حدودها عشرون :

$$u_n = 62 = a + (n-1)d = 5 + 3(n-1)$$

أى

$$5 + 3(n-1) = 62$$
$$3(n-1) = 57$$
$$n - 1 = 19$$

. عدد حدودها $n = 20$.

3.1 مجموع المتوالية الحسابية S_n

لإيجاد مجموع متوالية حسابية محدودة فإننا نضيف المتوالية إلى نفسها بعد كتابتها من النهاية إلى الأول. مثلا إذا أردنا مجموع المتوالية ذات الثمانية حدود:

$$2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30$$

فنضيف لها $30 + 26 + 22 + 18 + 14 + 10 + 6 + 2$

وبجمع الحدود المتناظرة نحصل على

$$(2+30) + (26+6) + \ldots + (30+2)$$

ونلاحظ أن ما بداخل الأقواس متساوٍ فى المجموع وعدد الأقواس هو عدد الحدود. إذن مجموع ضعف المتوالية هو $32 + 32 + 32 + \ldots + 32$ إلى 8 حدود.

. ضعف المجموع = 32×8 وبالتالي مجموع المتوالية $\frac{8 \times 32}{2} = 128$.

بالمثل مجموع المتوالية التى حدها الأول a وفرقها الثابت d وعدد حدودها n يوجد كالآتى

$$(a + (n - 1)\, d) + (a + (n - 2)d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a$$
$$a + (a + d) + \ldots + [a + (n - 2)] + [a + (n-1)d]$$

ومجموع كل حدين متناظرين هو $2a + (n-1)d$

وبالتالي مجموع المتوالية $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$.

ملاحظة

مجموع المتوالية المحدودة يساوي عدد الحدود X متوسط الحدين الأول والأخير.

مثال (2) :

متوالية حدها العام (2 + 3r) . أوجد مجموعها إلى 20 حداً.

الحل:

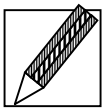
الحدود هى 5، 8،11، ...

. الحد الأول a = 5، الفرق الثابت d = 3 ، عدد الحدود n = 20

. المجموع = $\frac{20}{2}[2x\,5+(20-1)d]=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$=\frac{20}{2}[10+57]=\underline{\underline{670}}$.

تدريب (1) :



جد مجموع المتوالية ... + 12.5 + 10 + 7.5 + 5 إلى 12 حداً.

مثال (3):

جد المتوالية الحسابية التي مجموعها إلى n حداً يساوي (n + 1) n.

الحل:

المجموع لحد واحد يساوي الحد الأول

. الحد الأول هو (1 + 1) 1. = 2

مجموع الحدين الأولين (2 + 1) 2 = 6

. الحد الثاني = الفرق = 4

. الحد الأول 2 والفرق الثابت 2 أى أن المتوالية 2 + 4 + 6 + 8 + ...

مثال (4):

مجموع المتوالية 8 + 12 + 16 + 20 + ... إلى n حدا يساوي 540. أوجد قيمة n.

الحل:

a= 8 , d= 4:

$$540 = \frac{n}{2}[za + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[16 + 4(n-1)]$$

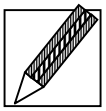
$$\therefore \quad 2n^2 - 6n - 540 = 0$$

$$n^2 - 3n - 270 = 0$$

$$(n - 18)(n + 15)$$

إذا n =18 لأن سالب 15 مرفوض.

تدريب (2) :



جد المتوالية الحسابية التى مجموعها إلى 8 حدود يساوى 66 وإلى 12 حدا يساوى 135.

مثال (5) :

ثلاثة أعداد تشكل متوالية حسابيه مجموعها 15 وحاصل ضربها 80. أوجد الأعداد الثلاثة.

الحل:

من الممكن أن نفترض حرفاً لأي من الأعداد الثلاثة، إلا أنه من الأسهل أن نفترض الحرف للعدد الأوسط الذى يسمى الوسط الحسابى (arithmetic mean) للعددين.

أفرض أن العدد الأوسط X والفرق الثابت d.

. الأعداد هى (x + d)، x ، (x – d) و مجموعها 3x = 15 و حاصل ضربها $80 = x(x^2 - d^2)$

.5 = x .

$$x(x - d)(x + d) = 5(25 - d^2) = 80$$

$$25 - d^2 = 16$$

$$\therefore \quad d^2 = 9 \quad d = \pm 3 \quad .$$

إذن الأعداد الثلاثة هي 2 , 5 ,8 .

ملاحظة:

لاحظ أن قيمتي $d = \pm 3$ تعطيان نفس الأعداد.

مثال (6) :

متوالية حسابية حدها الرابع 9 وحدها التاسع 19 جد مجموعها إلى 18 حداً.

الحل:

الحد التاسع $u_9 = a + (9-1)\, d = 19$

الحد الرابع $u_4 = a + (4-1)\, d = 9$

بالطرح $u_9 - u_4 = 5\, d = 10$

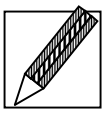
$u_9 = a + 8 \times 2 = 19$ ▪ $d = 2$

عوض فى المعادلة الأولى : $a = 3$

. مجموع المتوالية إلى 18 حدا هو

$$S_{18} = \frac{18}{2}[2\, x\, 3 + 2\,(18 - 1)] = 360$$

تدريب (3) :



خمسة أعداد تشكل متوالية حسابية مجموعها 25 وحاصل ضربها 945. جد المتوالية.

4.1 المتوالية الهندسية Geometrical Progression

تعريف :

المتوالية الهندسية متوالية فيها نسبة كل حد فيها إلى الذى سبقه قيمة ثابتة. يرمز للقيمة الثابتة بالرمز r وتسمى النسبة المشتركة (Common ratio). إذا كان الحد الأول a فإن المتوالية الهندسية تكون فى الصورة $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$

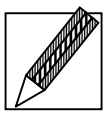
نلاحظ أن الحد الأول = $a\ r^{1-1} = a$

" الثاني = $a\ r^{2-1} = a\ r$

" الثالث = $a\ r^{3-1} = a\ r^2$

وهكذا ، وبالتالي فإن الحد النونى هو $a\ r^{n-1}$.

تدريب (4) :



متوالية هندسية حدها الرابع 400 وحدها السادس 3640. أوجد حدها الخامس.

[يسمى هذا الحد وسطا هندسيا للعددين 400, 3640]

5.1 مجموع المتوالية الهندسية S_n

لإيجاد مجموع متوالية هندسية S_n إلى n حدا، نتبع الأسلوب الآتى :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

نضرب المجموع فى النسبة الثابتة ثم نطرح :

$$S_n - r\,S_n = S_n\,(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$S_n = a\,\frac{(1-r^n)}{(1-r)} \quad , r \neq 1 \ .$$

بالطبع إذا كانت $r = 1$ فإن المتوالية هى إلى n حداً .

وبالتالي مجموعها = عدد الحدود n a.

مثال (7) :

جد مجموع المتوالية 5 + 10 + 20 + ... إلى 10 حدود.

الحل:

$$S_n = 5\,\frac{1-2^{10}}{1-2} = 5\ x\ \frac{-1023}{-1} = \underline{\underline{5115}} \ .$$

ملاحظة:

إذا كانت $r > 1$ فعادة نكتب المجموع فى الصورة المكافئة

$$S_n = a\,\frac{(r^n - 1)}{(r-1)}$$

بضرب البسط والمقام فى (−1) .

مثال (8) :

متوالية هندسية حدودها متزايدة، حدها الثالث 24 وحدها الخامس 96.

جد مجموعها إلى عشرة حدود.

الحل :

$$u_3 = ar^2 = 24$$

$$u_5 = ar^4 = 96$$

$$\therefore\ \frac{u_5}{u_3} = r^2 = \frac{96}{24} = 4$$

بما أن حدودها متزايدة فإن $r = 2$.

بالتعويض فى إحدى المعادلتين نجد أن الحد الأول $a = 6$

. المجموع إلى عشرة حدود يساوي

$$S_{10} = 6\frac{2^{10}-1}{2-1} = \underline{\underline{6138}}$$

ملاحظة :

إذا لم تكن متزايدة فإننا نوجد المجموع فى الحالة الثانية عندما $r = -2$.

مثال (9) :

جد ثلاثة أعداد فى توال هندسى، مجموعها 124 و حاصل ضربها 8000 .

الحل :

كما فى حالة المتوالية الحسابية، نفترض أن الحد الأوسط ، ويسمى الوسط الهندسى Geometrical (mean) للعددين، يساوي X . إذن الأعداد فى الصورة $\frac{a}{r}, a, ar$.

حاصل ضربها $a\ r\ (a)\frac{a}{r} = a^3 = 8000$

. $a = 20$

$$20\left(\frac{1}{r}+1+r\right) = 124$$

حاصل جمعها $\frac{1}{r}+1+r = \frac{124}{20} = \frac{31}{5}$

اضرب في 5 :

$$5 + 5r + 5r^2 = 31r$$

. $5r^2 - 26r + 5 = 0$

$$(5r-1)(r-5) = 0$$

$$r = \frac{1}{5}, 5$$

. الأعداد الثلاثة هى

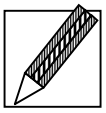
$$\frac{20}{5} \quad , \quad 20 \quad , 20\times 5$$

أو $\underline{\underline{4, 20 , 100}}$.

نلاحظ

أن قيمتي r تعطيان نفس الإجابة .

تدريب (5) :



جد المتوالية الهندسية التي مجموعها إلى 4 حدود يساوي 30 وإلى 8 حدود يساوي $\frac{255}{8}$.

أسئلة تقويم ذاتي (1)



جد مجموع المتوالية ... + 135 + 45 + 15 + 5 إلى 15 حدا.

6.1 مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية:

Infinite Geometrical Progression

المتوالية الهندسية اللانهائية يقصد بها أن عدد حدودها $n = \infty$. وبذلك فإن مجموعها هو:

$$S_\infty = a\frac{1-r^\infty}{1-r}$$

حسب القانون. نلاحظ الآتى : إذا كان $1 < r$ فإن $r^\infty = \infty$ وبذلك يكون $S_\infty = \infty$ (أى غير محدود). أما إذا كان $1 > r$ فإن r^∞ يؤول إلى الصفر (r^∞= صفر) وبذلك يكون المجموع

$$S_\infty = a\,\frac{1-r^\infty}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

مثال (10) :

عبر عن العدد $3.\bar{1}$ فى شكل كسر اعتيادى.

الحل:

$$3.\bar{1} = 3 + (0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + ...)$$

إلى ما لانهاية. نلاحظ أن المجموع داخل القوس يشكل متوالية هندسية حدها الأول 0.1 ونسبتها الثابته 0.1 أيضا. إذاً مجموع المتوالية هو $S_\infty = 3.\bar{1} = 3 + \frac{0.1}{1-0.1}$

$$= 3 + \frac{0.1}{0.9} = 3\frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{28}{9}}}$$

أسئلة تقويم ذاتي (2) :



عبر عن $0.\overline{25}$ فى صورة كسر إعتيادى.

2. حساب الأرباح

تمهيد

فى كثير من المعاملات التجارية تحتاج بعض الجهات للاقتراض من البنوك وغيرها، سواء كان الاقتراض ماليا أو عينيا. فى هذه الحالة عادة ما يدفع المقترض قيمة إضافية (كأرباح أو أتعاب أو رسوم عمل إدارى أو *devaluation* للقيمة الحالية) وهذه القيمة الإضافية تعتمد على المبلغ المستدان وفترة السداد.

هناك حالتان لحساب تلك القيمة الإضافية : إما بما يسمى الربح البسيط simple interest وفيه يظل المبلغ الذى تحسب منه الإضافة ثابتاً طوال فترة الاستدانة ، أو بما يسمى الربح المركب compound interest الذى فيه تضاف الإضافة فى نهاية كل فترة للمبلغ المستدان لتحسب من المجموع الإضافة للفترة التى تليها. عادة المعاملات التجارية الرسمية تعتمد على النوع الثاني من (الأرباح).

1.2 الربح البسيط

افرض أن تاجرا استدان من آخر مبلغا من المال Q جنيها واتفقا على أن يتقاضى الثاني r% من المبلغ الأساسى عن كل سنة حتى تاريخ السداد. بذلك يستحق الدائن مبلغ إضافياً $\frac{Q\,r}{100}$ عن كل سنة، أو $\frac{Q\;n\;r}{100}$ عن n سنة، إضافة إلى المبلغ الأساسى. إذاً جملة ما يدفعه المستدين هو $Q\left(1+\frac{r\,n}{100}\right)$ جنيهاً.

مثال (11):

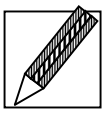
استدان رجل مبلغ 100,000 جنيه من بنك لمدة 4 سنوات بسعر فائدة 6 % فى السنة. كم سيدفع فى نهاية الفترة إذا كانت الفائدة تحسب بنظام الربح البسيط.

الحل:

جملة ما يدفعه بالجنيهات:

$$T = Q\left(1+\frac{nr}{100}\right) = 100{,}000\left(1+\frac{4\times 6}{100}\right) = \underline{\underline{124000}}$$

تدريب (6) :



رجل وفر فى الشهر الأول 50,000 جنيه وكل شهر يوفر 3000 جنيه زيادة على ما وفره فى الشهر السابق. جد (1) كم يوفر فى الشهر الأخير من السنة؟ وكم وفر خلال العام؟

2.2 الربح المركب

أفرض أن تاجراً اقترض مبلغ Q جنيها لمدة n سنة بسعر فائدة r % فى السنة على أساس الربح المركب. فى نهاية السنة الأولى يصبح المبلغ المطلوب $Q\left(1+\frac{r}{100}\right)=Q+\frac{Qr}{100}$

وهذا المبلغ يصبح المبلغ المستدان للعام الثاني. وبذلك يكون المطلوب منه فى نهاية العام الثاني

$$\left[Q\left(1+\frac{r}{100}\right)\right]\left(1+\frac{r}{100}\right)=Q\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

وبالمثل فى نهاية العام الثالث يكون مطالب بـ

$$\left[Q\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\right]\left(1+\frac{r}{100}\right)=Q\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

وهكذا. وبذلك فى نهاية n سنة يكون المبلغ المطلوب

$$T=Q\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

مثال (12) :

استدان رجل مبلغ 100,000 جنيه من بنك لمدة 4 سنوات بسعر فائدة مركبة 6 %. كم سيدفع فى نهاية السنوات الأربع؟

الحل:

مايدفعه $T = Q\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} = 100,000\left(1+\frac{6}{100}\right)^{4}$

$= 100,000 \times 1.06^{4} = \underline{\underline{126,624.77}}.$

مثال (13):

يريد رجل استلاف مبلغ 40,000 جنيه لمدة 6 سنوات، وكان له الخياران : أن يدفع بسعر فائدة 8% في السنة أو بسعر فائدة 4 % في نصف السنة. أي الخيارين يختار؟

الحل:

في حالة 8 % في السنة:-

$Q = 40,000$, r = 8 % , $n = 6$

جملة مايدفعه

$$T = 40,000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{6} = \underline{\underline{63,474.98}}$$

في حالة 4 % في نصف العام: عدد الفترات = 2×6 = 12

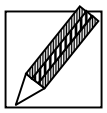
$Q = 40,0001$, r = 4 , n = 12

إذن جملة ما يدفعه

$$T = 40,000\,(1+\frac{4}{100})^{12} = \underline{\underline{64,041.29}}$$

إذن الخيار الأول أفضل.

تدريب (7) :



استدان رجل مبلغ 60,000 جنيه من أحد البنوك. على أن يسددها فى نهاية عامين. إذا كان سعر الفائدة 15 % فى السنة كم المبلغ الذى سيدفعه ؟

(1) إذا كان الربح بسيطا.

(2) إذا كان الربح مركبا.

4.2 حساب أرباح الأقساط

كثيراً ما يشترى عميل سلعة بحيث يدفع جزءا من السعرمقدما ثم يقسط الباقي على أقساط شهرية متساوية، ومقابل هذه الأقساط فإنه يدفع فائدة تحدد نسبتها %. افرض أن باقي المبلغ المراد تقسيطه Q جنيهاً ويراد دفعها على k شهرا بسعر فائدة r % فى السنة. نريد أن نحدد قيمة القسط، **(أ) فى حالة الربح البسيط و (ب) فى حالة الربح المركب.**

(أ) فى حالة الربح البسيط

بما أن الأقساط شهرية فإن القيمة الزمنية للفائدة هى $\frac{r}{12}\%$ فى الشهر. نلاحظ أن القسط الأول يدفع بعد شهر والثاني بعد شهرين والثالث بعد 3 أشهر و هكذا ، و نذكر أن قيمة القسط الشهري قبل الأرباح هى $\frac{Q}{k}$. لذلك فإن جملة ما يدفعه هو

$$T = \frac{Q}{k}\left[\left(1+\frac{r}{1200}\right)+\left(1+\frac{2r}{1200}\right)+\left(1+\frac{3r}{1200}\right)+\ldots+\left(1+\frac{kr}{1200}\right)\right]$$

$$= \frac{Q}{k}\left[k+\frac{k(k+1)}{2}.\frac{r}{1200}\right]$$

$$= \underline{\underline{Q\left[1+\frac{(k+1)r}{2400}\right]}}$$

باستخدام قانون مجموع المتوالية الحسابية.

مثال (14) :

رجل اشترى سيارة سعرها 340000 جنيه دفع منها 140,000 جنيه والباقى على 36 شهرا.

احسب قيمة القسط الواحد إذا كان سعر الفائدة 20 % فى السنة بربح بسيط.

الحل :

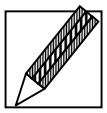
جملة ما يدفعه على الأقساط هو

$$T = Q\left[1+\frac{(k+1)r}{2400}\right] = 200{,}000\left[1+\frac{37\times 20}{2400}\right]$$

$$= \underline{\underline{261{,}666.67}}.$$

∴ القسط الشهر $= \frac{261666.67}{36} = \underline{\underline{7{,}268.5}}$.

تدريب (8) :



استلف رجل مبلغ 20,000 جنيه من أحد البنوك ودفع مبلغ 29,282 جنيه فى نهاية السنة الرابعة. جد سعر الفائدة % . إذا كان الربح بسيطا.

(ب) حالة الربح المركب:

باستخدام الرموز فى (أ) جملة الأقساط هى

$$T = \frac{Q}{k}\left[\left(1+\frac{r}{1200}\right)+\left(1+\frac{r}{1200}\right)^2+\left(1+\frac{r}{1200}\right)^3+\ldots+\left(1+\frac{r}{1200}\right)^k\right]$$

$$= \frac{Q}{k}\left[\left(1+\frac{r}{1200}\right)\frac{1-\left(1+\frac{r}{1200}\right)^K}{1-\left(1+\frac{r}{1200}\right)}\right]$$

من مجموع المتوالية الهندسية داخل القوس المربع.

مثلاً من المثال السابق

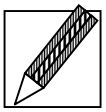
$Q = 200000, k = 36, r = 20$ فى السنة أو $\frac{r}{12}$ فى الشهر

$$T = \frac{200000}{36}\left[\left(1+\frac{20}{1200}\right)\frac{1-\frac{(1+20)^{36}}{1200}}{1-\left(\frac{1+20}{1200}\right)}\right]$$

$$= \frac{200000}{36}.\frac{1220}{1200}.\frac{0.813130}{0.016667} = 275{,}555.21$$

∴ القسط الشهري $= \frac{275{,}555.21}{36} = 7{,}654.31$ جنيه

تدريب (9) :



استلف رجل مبلغ 20,000 جنيه من أحد البنوك ودفع مبلغ 29,282 جنيه فى نهاية السنة الرابعة. أوجد سعر الفائدة % . إذا كان الربح مركباً.

أسئلة تقويم ذاتي (3) :



عدد سكان السودان عام 1999م كان 30.3م نسمة ونسبة الزيادة السنوية 2.7%. قدر عدد السكان فى السنوات 2002، 2004 ، 2006م.
واعرض اجابتك على مشرفك الأكاديمي

الخلاصة

باستعراضنا عزيزي الدارس لما ورد في هذه الوحدة نجد أننا بداية عرفنا المتوالية بأنها هي مجموع أعداد تسمى حدوداً ومقاديرها تحدد وفقاً لقانون عام يبنى على أساس ترتيب الحد في المتتالية، ومن بعد ذلك عرفنا المتتالية الحسابية بأن كل حد فيها يزيد عن سابقه بقيمة ثابتة (موجبة أو سالبة أو صفر) تسمى الفرق الثابت، و وضحنا أن حدها العام $U_r = a + (r-1)d$ ومجموعها $S_n = \frac{n}{2}[a + (r-1)d]$ حيث a هو الحد الأول و n عدد الحدود ، d الفرق الثابت .

ثم انتقلنا إلى المتوالية الهندسية وعرفناها بأن نسبة كل حد فيها إلى الحد الذي يسبقه نسبة ثابتة (قيمة ثابتة) وعرفنا حدها العام $a\ r^{n-1}$ ومجموعها $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ووضحنا أن مجموع المتوالية الهندسية غير المنتهية وذلك في حالة $r < 1$ هو $S_\infty = \frac{a}{1-r}$. وبعد كل ذلك وضحنا التطبيقات العملية لهذه المتواليات من خلال عمليات الأرباح والأقساط سواء كان ذلك بسيطاً أو مركباً .

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس

في الوحدة القادمة بإذن الله سنتناول موضوع المعادلات الخطية: تعريفها ، وكيفية إيجاد الحل المشترك لعدد من المعادلات الخطية، حيث نعرف كلاً من المحددة والمصفوفة، وكيفية استخدام المصفوفات في حل عدد من المعادلات الخطية، ثم ننتقل إلى المتباينات وكيفية إيجاد حل عدد من المتباينات بالرسم البياني، وتطبيق ذلك في موضوع البرمجة الخطية نأمل أن تكون الوحدة شيقة ومفيدة لك .

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)]d$$
$$= 6[10 + 11 \times 2 - 5]$$
$$= 225$$

تدريب (2)

$$S_8 = 4(2a + 7d) = 66$$
$$= 8a + 28\ d = 66 \quad \rightarrow \quad (1)$$
$$S_{12} = 6(2a + 11d) = 135$$
$$= 12a + 66\ d = 135 \quad \rightarrow \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن :

$$a = 3$$
$$d = 1.5$$

إذن المتوالية هي : $3 + 4.5 + 5 + \ldots$

تدريب (3)

افرض أن المتوالية هي $(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d)$

فيكون المجموع $5a$

إذن $5a = 25$

$$a = 5 \rightarrow \quad (1)$$

حاصل الضرب

$$(5-2d)(5-d)(5)(5+d)(5+2d) = 945 \quad \rightarrow \quad (2)$$

بحل المعادلة (2) نجد أن $d = \pm z$

والمتوالية هي $1+3+5+7+9$

تدريب (4)

$$U_4 = a\ r^3 = 40$$
$$U_6 = a\ r^5 = 3240$$

بالقسمة

$$\frac{a\ r^5}{a\ r^3} = \frac{3240}{40}$$
$$r^2 = 81$$
$$r = 9$$

الحد الخامس

$$U_5 = \frac{3240}{9}$$
$$= 360$$

تدريب (5)

$$a\left(\frac{1-r^4}{1-r}\right) = 30 \quad \rightarrow \quad (1)$$
$$a\left(\frac{1-r^8}{1-r}\right) = \frac{225}{8} \quad \rightarrow \quad (2)$$

بالقسمة

$$\frac{1-r^8}{1-r^4} = \frac{17}{16}$$

$$\frac{\left(1-r^4\right)\left(1+r^4\right)}{1-r^4} = \frac{17}{16}$$
$$1+r^4 = \frac{17}{16}$$

$$r^4 = \frac{1}{16}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض في أي من المعادلتين نجد أن

$a = 16$

إذن المتوالية هي : $16 + 8 + 4 + 2 + \ldots\ldots$

تدريب (6)

ما يوفره في الشهر الأخير

$$U_{12} = 50000 + 11 \times 3000$$

$$= 83000 \quad \text{جنيه}$$

ما يوفره خلال السنة

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = 6[100000 + 11 \times 3000]$$

$$= 6 \times 133000 = 798000 \quad \text{جنيه}$$

تدريب (7)

$$T = Q\left(1 + \frac{r\ n}{100}\right)$$

$$= 60000\left(1 + \frac{30}{100}\right)$$

$$= 78000 \quad \text{جنيه}$$

$$T = Q\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

$$= 60000\left(1+\frac{15}{100}\right)$$

$$= 79350 \quad \text{جنيه}$$

تدريب (8)

$$\frac{4\,r}{100} = \frac{29282-20000}{20000}$$

$$\frac{4\,r}{100} = \frac{9282}{20000}$$

$$r = 11.6025$$

تدريب (9)

$$\frac{29282}{20000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^{4}$$

$$1.4641 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^{4}$$

$$\sqrt[4]{1.4641} = \left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$r = 10\,\%$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

التقويم الذاتي (1)

المجموع $S_n = 147620$

التقويم الذاتي (2)

الكسر $\frac{25}{99}$

التقويم الذاتي (3)

1- عدد السكان

32.821 م نسمة

34.617 م نسمة

36.512 م نسمة

مسرد المصطلحات

- **المتوالية Progression :**

وهي مجموع لأعداد تسمى حدوداً ، أي مجموعة من الأعداد يفصل بين كل منها والعدد الآخر إشارة + وتكون هذه الأعداد مبنية على ترتيب الحد .

- **المتوالية الحسابية Arithmetical Progression:**

وهي المتوالية التي يزيد كل حد فيها عن سابقه بقيمة ثابتة .

- **الوسط الحسابي Arithmetic mean:**

الوسط الحسابي للمتوالية ذات الثلاثة حدود هو عبارة عن الحد الأوسط .

- **المتوالية الهندسية Geometrical Progression:**

وهي المتوالية التي تكون نسبة كل حد فيها إلى سابقه قيمة ثابتة .

- **النسبة المشتركة Common ratio:**

وهي عبارة عن القيمة الثابتة الناتجة من نسبة الحد إلى الحد السابق له في المتوالية الهندسية .

- **الوسط الهندسي Geometrical mean:**

والوسط الهندسي لثلاثة حدود متتالية في متوالية هندسية هو عبارة عن الحد الأوسط .

- **المتوالية الهندسية اللا نهائية infinite Geometrical Progression :**

وهي المتوالية الهندسية التي عدد حدودها يؤول إلى ما لانهاية .

- **الربح البسيط Simple interest:**

وهو عبارة عن الإضافة التي تظل ثابتة طول فترة الاستدانة أو الاقتراض .

- **الربح المركب Compound interest:**

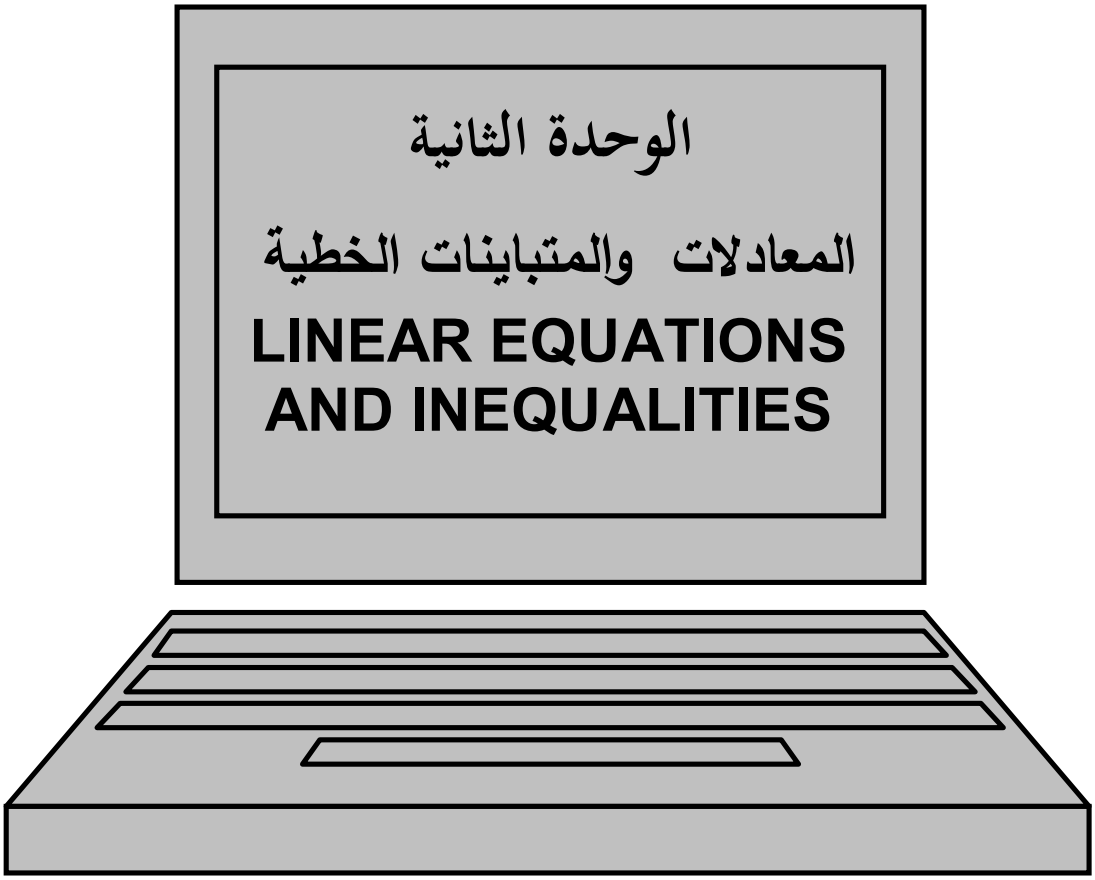
وهو الإضافة التي تتغير عند نهاية كل فترة من فترات الاستدانة

المراجع بالعربية

1. آيرز، فرانك (1974) : نظريات و مسائل في المصفوفات.
2. بلايت و روبرتسون (2000) : الجبر الخطي. (ج الملك سعود).
3. الدليمي و خضير و باقية (2000) : الرياضيات لطلبة الاقتصاد و العلوم الإدارية. (دار وائل– عمان)
4. سودان و السلمان و سرميتي (1884) : حساب التفاضل و التكامل. (جامعة الملك سعود)
5. عبدالفتاح عبدالمعطي محمد (2002) : مقرر أول في الجبر الخطي (جامعة الجزيرة) .
6. عثمان محمد المكي (1999) : الحسبان الأولي .(جامعة الخرطوم)
7. فرانك آيرز (1992) : حساب التفاضل و التكامل. (سلسلة شوم)
8. هب الريح و جهينة (1993) : الرياضيات و التفاضل و التكامل I و II . (جامعة التحدي)

المراجع بالإنجليزية

1. Glass, J.C. (1980) : An introduction to mathematical methods in Economics.(McGraw - Hill)
2. Hamilton, A.G. (1987): A first course in linear algebra with concurrent examples.(Cambridge)
3. Caunt, G.W. (1971): Elementary calculus .(Oxford)
4. Piskanov, N. (1974: Differential and integral calculus.(MIR)
5. Briggs,w and G.H. Brian(1969): Tutorial algebra.(University Tutorial)
6. Thomas, G. B. and R.L. Finny. (1982.) Calculus and analytic geometry.(Addison-Wesley)
7. Durell,C.V. and A. Robson.(1962) Elementary calculus.(Bell)
8. Anton, H.(1981) : : Calculus with analytic geometry. (Wiley).
9. Lipschutz, S.(1874) : Linear algebra.(Schaum series).


الوحدة الثانية
المعادلات والمتباينات الخطية
LINEAR EQUATIONS
AND INEQUALITIES

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	32
أهداف الوحدة	34
1. المعادلات الخطية الآنية.	35
1.1 حل المعادلات الخطية بطريقة التعويض	35
2.1 حل المعادلات الخطية بطريقة الحذف	37
2. المحددات.	41
1.2 قيمة المحددة	42
2.2 خواص المحددات	43
3. المصفوفات.	45
1.3 المصفوفة	45
2.3 مُدوَّر المصفوفة	45
4. جبر المصفوفات	46
1.4 بعض المصفوفات الخاصة	47
2.4 معكوس المصفوفة	48
5. حل المعادلات الخطية الآنية بالمصفوفات.	53
1.5 المتجه	53
2.5 خواص المصفوفات	55
6. المتباينات.	58
1.6 البرمجة الخطية.	62
الخلاصة	69
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	70
إجابات التدريبات	71
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	76
مسرد المصطلحات	78
المراجع	80

المقدمة

تمهيد

أهلاً بك أيها الدارس العزيز في الوحدة الثانية من مقرر الرياضيات لطلاب العلوم الإدارية والمحاسبية وقد بدأت الوحدة بتعريف المعادلة الخطية ثم إيجاد الحل الآني لعدد من المعادلات الخطية.

كذلك اشتملت الوحدة على موضوع المحددات حيث قمنا بتعريف المحددة وكيفية إيجاد قيمة المحددة وناقشنا خواص المحددات والاستفادة من ذلك في موضوع المصفوفات الذي بدأناه بتعريف المصفوفة بصفة عامة ثم تناولنا أنواعاً خاصة من هذه المصفوفات وذلك نظراً لأهميتها عند التطبيقات العملية للمصفوفات . وضحنا أيضاً في هذه الوحدة معكوس المصفوفة وكيف كانت الاستفادة منه في حل المعادلات الخطية وستقف على ذلك بنفسك إن شاء الله عند دراستك لحل المعادلات الخطية من خلال هذه الوحدة . كذلك في هذه الوحدة وضحنا خواص المصفوفات واختتمنا الوحدة بموضوع المتباينات الخطية حتى يتسنى لنا الاستفادة التامة من طريقة الحل الآني للمتباينات بالرسم في حل مسائل البرمجة الخطية .

مرحباً بك مرة أخرى إلى هذه الوحدة ونأمل أن تكون وحدة مفيدة لك كما نرجو منك أن تزودنا بآرائك النيرة تجاهها حتى ندرك سوياً ما نصبوا إليه .

أهداف الوحدة



ينبغي عزيزي الدارس بعد انتهائك من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

(1) **تعرف** المعادلة الخطية .

(2)**توجد** الحل لعدد من المعادلات الخطية آنياً .

(3)**توجد** قيمة محددة ما بعدها 2 × 2 أو 3 × 3 .

(4)**تذكر** خواص المحددات .

(5)**تذكر** الأنواع المهمة الخاصة للمحددات .

(6)**تجد** معكوس مصفوفة ما بعدها 2 × 2 أو 3 × 3 .

(7)**تطبق** موضوع المصفوفات في حل عدد من المعادلات الخطية آنياً

(8)**تعرف** المتباينة .

(9)**تطبق** موضوع المتباينات في حل مسائل البرمجة الخطية .

1. المعادلات الخطية linear equations

افرض أن X متغير وأن a و b ثابتان معلومان بحيث

$$a + bx = 0 \qquad (1)$$

كما نعلم، وباستخدام خواص المعادلات، من الممكن طرح a من الجانبين ثم قسمة الحاصل على b:-

$$-a + b + bx = 0 - a = -a$$

$$\therefore bx = -a$$

$$\frac{1}{b}.bx = -a.\frac{1}{b}$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{a}{b}}}. \qquad \text{أى}$$

هذه النتيجة تسمى حل المعادلة (1) . والمعادلة (1) تسمى معادلة خطية Linear (أى من الدرجة الأولى) في مجهول واحد هو x. كذلك يمكن أن تكون أمامنا معادلة أو معادلات في أكثر من متغير ، لكن لإيجاد حل فريد (أن وجد) يجب أن يساوي عدد المتغيرات عدد المعادلات. ولإيجاد الحل نطبق نفس الأسلوب أعلاه. في حالة عدد من المعادلات في عدد من المجاهيل، نقول إنها آنية إذا وجد لها حل يحققها جميعا.

1.1 حل المعادلات الخطية آنياً بطريقة التعويض

في هذه الطريقة عندما يكون لدينا مثلاً معادلتان وكلاً منهما تحتوي على متغيرين فإننا نختار أحد المعادلتين لنوجد منها قيمة متغير واحد بدلالة المتغير الآخر ونعوض هذه القيمة في المعادلة الأخرى فنحصل على معادلة جديدة في متغير واحد يمكننا حلها بنفس طريقة المعادلة (1) .

مثال :

حل المعادلتين الخطيتين الآتيتين آنياً :-

$$2x + 3y = 1 \qquad (1)$$

$$3x - 2y = 8 \qquad (2)$$

الحل :

من إحدى المعادلتين ضع أحد المتغيرين بدلالة المتغير الِثاني ثم عوض في المعادلة الثانية لتحصل على معادلة في متغير واحد، ثم نطبق ما عملناه في حل المعادلة (1) :

من (1)

$$y = \frac{1-2x}{3}$$

التعويض في (2)

$$\therefore 3x - 2\left(\frac{1-2x}{3}\right) = 8$$

$$\therefore 9x - 2 + 4x = 24$$

$$13x = 26$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$\therefore y = \frac{1-2x}{3} = \underline{\underline{-1}}$$

إذا الحل: $\underline{\underline{y = -1,\quad x = 2}}$.

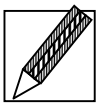
يمكن كتابة هذا الحل في الصورة (X ، Y) = (2 ، 1-)

ويسمى القوس (X,Y) زوجا مرتباً ordered pair، بمعنى أن ترتيب العناصر داخل القوس مهم أى (X,Y) ≠ (Y,X) إلا إذا كانت $y = x$.

وبالنسبة للأزواج المرتبة (X , Y) = (a , b) تعني أن a = X و b = Y. يمكن بالمثل تعريف ثلاثيات، رباعيات، ... مرتبة (X, Y, Z)، (X, Y, Z, W) ، ... إلخ.

كل هذه تسمى أيضاً متجهات صف row vectors.

تدريب (1) :



حل المعادلتين الخطيتين الآتيتين آنياً :

$$4x - 3y = 7$$
$$2x + 7y = -5$$

2.1 حل المعادلات الخطية بطريقة الحذف Elimination method

وفيها نجعل معامل أي من المتغيرات يساوي الصفر بضرب المعادلات في أعداد مناسبة ثم بطرحها (أوجمعها، حسب إشارة المعادلات) كما في المثال الآتي :-

مثال :

حل المعادلات الآتية آنياً:-

$$5x + 2y - 2z = 0 \qquad (1)$$
$$2x - y + 2z = 12 \qquad (2)$$
$$x + y + 2z = 6 \qquad (3)$$

الحل :

بما أن معاملات Z متساوية عددياً فأنه يمكن أن نتخلص من Z بإضافة المعادلة الأولى إلى كل من الثانية والثالثة:-

$$(1)+(2): \qquad 7x+y=12 \qquad (4)$$
$$(1)+(3): \qquad 6x+3y=6 \qquad (5)$$

نضرب المعادلة (4) في 3 ثم نطرح منها (5) :-

$$15x + 0.y = 30$$
$$\therefore x = 2$$

عوض في (4) $y = 12 - 7 \times 2 = -2$

من (1)

$$\therefore \quad 27 = 5(2) + 2(-2) = 6$$
$$z = 3$$
$$\therefore \quad \underline{\underline{(3, 2-, 2) = (z, y, x)}}$$

ملاحظة:

للتأكد من إجابتك ننصحك دائماً بالتعويض في المعادلتين (1) و (2) لتتأكد من أن الحل صحيح.

<u>مثال</u> :

حل المعادلات الخطية الآنية الآتية:-

$$x + y - z = -3 \qquad (1)$$
$$2x + 2y + z = 0 \qquad (2)$$
$$5x + 5y - 3z = -8 \qquad (3)$$

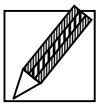
<u>الحل</u> :

$$(1)+(2): \qquad 3x + 3y = -3 \qquad (4)$$
$$3\times(2)+(3): \qquad 11x + 11y = -8 \qquad (5)$$

$$\frac{1}{3}(4): \qquad x + y = -1 \qquad (6)$$
$$\frac{1}{11}(5): \qquad x + y = -\frac{8}{11} \qquad (7)$$

وبالطبع لا يمكن إيجاد قيمتين لـ X , Y بحيث تتحقق (6) و (7). في هذه الحالة نقول إنه لايوجد حل آني للمعادلتين (1) و (2) ؛ أى أنها غير متوافقة inconsistent. لاحقاً سنرى الشرط على معاملات المعادلات حتى يوجد لها حلاً آنياً.

تدريب (2) :



حل المعادلات الخطية الآنية الآتية:

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= -6 \\ 2x + y - 2z &= 3 \\ 4x - 2y + 3z &= -12 \end{aligned}$$

<u>مثال</u> :

حل المعادلات الآنية الآتية:-

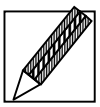
$$2x - y = 3 \qquad (1)$$
$$-4x + 2y = -6 \qquad (2)$$

<u>الحل</u> :

$$(1)\times 2: \quad 4x - 2y = 6 \qquad (3)$$
$$(2)+(3) \quad 0+0=0$$

والسبب في هذا أن المعادلتين (1) و (2) هما في الواقع معادلة واحدة لأننا اذا ضربنا الأولى في سالب 2 (−2) فأننا نحصل على المعادلة (2) . بذلك نقول إن المعادلتين (1) و (2) غير مستقلتين not independent بمعنى أن أحداهما يمكن استنتاجها من الثانية . لكن إذا حددنا قيمة لأحد المتغيرين فإن المتغير الثاني يتحدد تلقائياً مثلاً من (1) $y = 2x - 3$ وبالتالي الحل يكون في صورة $(y,x)=(2a-3,a)$مهما كانت قيمة a (سالبة أو موجبة أو صفر). وعليه في هذه الحالة نقول إنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول أى أن الحل غير فريد (not unique).

تدريب (3) :



حل المعادلات الخطية الآنية الآتية:

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 7 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

مثال :

حل المعادلات الخطية الآتية آنياً :-

$$2x-3y+4z=0 \qquad (1)$$
$$3x+y-3z=2 \qquad (2)$$
$$7x-5y+5z=2 \qquad (3)$$

الحل :

يمكـن ملاحظـة أن المعادلـة الثالثـة تـساوى مجمـوع الثآنيـة و ضـعف الأولـى و لـذا فالمعادلات غير مستقلة وعليه لا حل فريد لها. لكن كما في المثال السابق يمكن إيجاد قيمة أي متغيرين منها بدلالة الثالث، وبذا نحصل على عدد لا نهائي من الحلول :-

$$(1)+3(2): \qquad 11x-5z=6$$
$$\therefore x=\frac{6+5z}{11}$$

عوض في (2) مثلاً:

$$y=2+3z-3x$$
$$=2+3z-3\left(\frac{6+5z}{11}\right)$$
$$=\frac{22+33z-18-15z}{11}=\frac{4+18z}{11}$$

$\therefore$ الحل العام في الصورة $\left(a,\frac{4+18z}{11},\frac{6+5a}{11}\right)=(z,y,x)$

مهما كانت قيمة a.

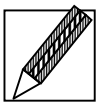
ملاحظة:

1- المعادلات (1) و(2) و(3) فيها معادلتان مستقلتان بمعنى أنه لايمكن إيجاد واحدة من الأخرى . المعادلة الباقية يمكن إيجادها من المعادلتين المستقلتين.

2- بصفة عامة، في حالة إمكانية إيجاد معادلة واحدة فقط من بقية المعادلات فإننا نحتاج لتحديد قيمة متغير واحد و نوجد الحل لبقية المتغيرات بدلالته.

3- بالمثل اذا أمكن استنتاج معادلتين اثنتين فقط من بقية المعادلات فإننا يجب أن نحدد قيمة متغيرين ثم نوجد بقية المتغيرات بدلالتهما؛ . . . وهكذا.

تدريب (4) :



حل مجموعات المعادلات الآتية آنيا :

$$3x - y + 2z = 0$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$3x + y + 2z = 0$$

أسئلة تقويم الذاتي (1) :



حل مجموعات المعادلات الآتية آنيا :

$$-3x + 4y = 5$$
$$5x - 6y = -8$$

حل مجموعات المعادلات الآتية آنيا :

$$x + y + z = 1 \quad \text{----------} \quad (1)$$
$$2x - y - z = 5 \quad \text{----------} \quad (2)$$
$$x - y + z = 3 \quad \text{----------} \quad (3)$$

2. المحددات

تعريف :

المحددة عدد يوجد من تشكيل مربع من الأعداد (أى عدد صفوفه يساوى عدد أعمدته) ويرمز له هكذا :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad (2)$$

في (1) a وb عنصرا الصف الأول (first row) ، c و d عنصرا الصف الثاني ، b وd عنصرا العمود الثاني (second column) ، بالمثل في (2) f, e, d, عناصر الصف الثاني، c و f و i عناصر العمود الثالث. يمكن أن تتكون المحددة من أى عدد من الصفوف ولكن نفس العدد من الأعمدة .

إلا أننا في هذا الكتاب نختصر عملنا على المحددات من صفين وعمودين (2×2) أو من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة (3×3). في المحددة (1) العنصران a وd يكونان القطر الأساسي principal diagonal ؛ كذلك العناصر a و e و i بالنسبة للمحددة (2) .

1.2 قيمة المحددة

يمكننا إيجاد قيمة المحددة بعدة طرق مثلاً بالنسبة للمحددة (2×2) فإن قيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الأساسي ناقصاً حاصل ضرب عنصري القطر الآخر. بالنسبة للمحددة (3×3) فإننا نلحق بها العمودين الأولين على يمينها ثم نضرب قطريا من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين ونجمع ثم نطرح حاصل الضرب القطري من أعلى اليمين إلى أدني اليسار كما في الشكل:-

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$\Delta = (a.e.i+b.f.g + c.d.h) - (c.e.g + a.f.h + b.d.i).$$

مثال :

أوجد المحددتين :

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

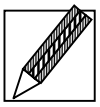
الحل :

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 4 \times 2 = \underline{\underline{22}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = [2\times 2\times 2 + (-1)\times(-2)\times 1 + 3\times(-3)\times 4] - [3.2.1 + 2.(-2).4 + (-1).(-3).2]$$

$$= \underline{\underline{-22}}.$$

تدريب (5) :



جد المحددتين $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2.2 خواص المحددات: properties

هذه الخواص التي سنحددها لك أيها الدارس العزيز ، سنحددها بالنسبة للصفوف وما يقال عن الصفوف ينطبق على الأعمدة.

(1) إذا استبدلنا صفين فإن المحددة تكون ثابتة عدديا ولكن تتغير إشارتها.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10\,; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

(2) إذا تطابق صفان فإن المحددة تساوي الصفر .

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) إذا ضربت عناصر أى صف في ثابت K فإن المحددة تضرب في K .

$$3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

(4) لا تتغير قيمة المحددة إذا أضيف لصف أى مضاعفات صف آخر.

$$6 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2+2(2) & 2+2(1) & 6+2\times 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

(5) إذا ساوى أحد الصفوف مجموع صفين آخرين بعد ضرب كل منهما في ثابت فإن المحددة تساوى صفراً.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2(3)+3(2) & 2(1)+3(4) & 2(2)+3(5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 12 & 14 & 19 \end{vmatrix} = 0$$

3. المصفوفات Matrices

1.3 المصفوفة matrix

تعريف :

المصفوفة تشكيل مستطيل من الصفوف والأعمدة، يكتب بين قوسين دائريين هكذا $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ وهي تتكون من أي عدد من الأعمدة وأي عدد من الصفوف، ويشار إليها أحياناً ببيان عددي الصفوف والأعمدة هكذا : $C_{2\times 3}$, $B_{3\times 3}$, $A_{2\times 2}$

عددا الصفوف والأعمدة يسميان بعداها (dimensions).

2.3 مدوَر المصفوفة Matrix Transpose

تعريف :

مدور المصفوفة A (ويرمز له بالرمز A' أو A^T) هوالمصفوفة الناتجة من استبدال صفوفها بأعمدتها بنفس الترتيب.

مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; B'=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

تعريف :

محددة مصفوفة مربعة $A_{k\times k}$: هي المحددة المكونة من عناصر المصفوفة ويرمز لها بالرمز $|A|$. مثلاً إذا

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; \quad |A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

المحددة غير معرفة إذا كانت المصفوفة غير مربعة .

تعريف :

المصفوفة المفردة singular matrix : هي مصفوفة مربعة محددتها تساوي الصفر . وإلا فهي غير مفردة nonsingular.

مثلاً: المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 12 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

مفردة لأن

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4. جبر المصفوفات Aatrix Algebra

عزيزي الدارس يمكنك إجراء عمليتي الجمع (أو الطرح) والضرب على المصفوفات حيث إننا نعرف كلا منهما بالشكل الآتي :

أ. مجموع (فرق) مصفوفتين:

هو المصفوفة الناتجة من جمع (طرح) العناصر المتناظرة في المصفوفتين، ويشترط أن تكون المصفوفتان من نفس البعدين.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix}5+3 & 6-4\\ 8+2 & 2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 10 & 7\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}5-3 & 6-(-4)\\ 8-2 & 2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10\\ 6 & -3\end{pmatrix}$$

ب. <u>مضروب مصفوفتين</u> :

يشترط في ضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة الأولى مساوياً لعدد صفوف الثانية وإلا فإن الضرب غير معرف. أفرض أن $C = A \times B$ حيث $C = (c_{ij})$ فإن عنصر C في الصف i والعمود j يساوي عناصر الصف رقم i في A في العناصر المناظرة في العمود j في B . نكتفي بهذا التعريف لأن ضرب المصفوفات خارج نطاق هذا الكتاب.

1.4 بعض المصفوفات الخاصة

هناك أنواع خاصة من المصفوفات لها أهميتها في التطبيقات العملية نعرف لك بعضاً منها كالآتي :

أ. **<u>المصفوفة الصفرية zero matrix</u>**

تعريف :

هي مصفوفة كل من عناصرها يساوي الصفر و يرمز لها بالرمز **0** .

ب. **<u>المصفوفة المحايدة Identity matrix</u>**

تعريف :

هي مصفوفة كل من عناصر قطرها الأساسي يساوي الواحد وبقية العناصر تساوي الصفر ، ويرمز لها بالرمز I .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أنه إذا كان $A_{K\times K}$ مصفوفة ، فأن $I_{K\times K}$ تحقق الآتي:-

$$AI = IA = A .$$

ج. **المصفوفة القطرية diagonal matrix**

تعريف :

هي مصفوفة كل عناصرها خارج القطر تساوى صفراً.

2.4 معكوس مصفوفة matrix inverse

تعريف :

معكوس مصفوفة مربعة A (ويرمز له بالرمز A^{-1}) مصفوفة من نفس بعديها تحقق الآتي:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ملاحظة : AA^{-1} تعني حاصل الضرب A في A^{-1} وكذلك $A^{-1}A$ تعني حاصل الضرب A^{-1} في A أما 1 فتعني مصفوفة الوحدة .

مثلاً :

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

بصفة عامة معكوس مصفوفة 2×2 :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

يساوي

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

لاحظ أننا حصلنا على مصفوفة بديلة للمصفوفة A وذلك بتبديل عناصر القطر الرئيس a,d للمصفوفة A مع تغيير إشارة كل عنصر من عناصر القطر الآخر c,b

أما بالنسبة للمصفوفات $A_{3\times 3}$ نشرح لك طريقتين لإيجاد المعكوس:

<u>الطريقة الأولى</u> :

افرض أن المصفوفة (a_{ij}) =A. استبدل كل عنصر a_{ij} بالمحددة $|a_{ij}|$ التي تنتج بحذف الصف رقم I و العمد رقم j ثم اضربها في $(-1)^{(i+j)}$. ثم أوجد مدور المصفوفة الناتجة واقسمها على المحددة |A| و الناتج هو المعكوس.

مثال :

أوجد معكوسي المصفوفتين :

$$(i)\qquad A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (ii)\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$(i)\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} |1| & -|2| \\ -|3| & |4| \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \qquad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$|B| = 22$$

$$= \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & 6 & 2 \\ 8 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad = \underline{\underline{\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 4 & 6 & -4 \\ -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}}}$$

<u>الطريقة الثانية:</u>

قبل أن نوضح الطريقة الثانية لإيجاد المعكوس لابد لنا أن نعرف لك عملية الصفوف

تعريف :

عملية الصفوف Row operation : نقصد بعملية الصفوف على المصفوفة إضافة مضاعفات صفوف إلى صف آخر.

ولإيجاد المعكوس بهذه الطريقة عزيزي الدارس اتبع الخطوات الآتية :

أ. في هذه الطريقة نلحق (augment) بالمصفوفة $A_{K\times K}$ المصفوفة المحايدة على يمينها لنحصل على مصفوفة $(A \mid I)_{(K\times 2K)}$.

ب. بإجراء عمليات صفية فقط على المصفوفة الجديدة نحول A إلى I .

ج. المصفوفة الناتجة مكان I هي A^{-1}
$(A \mid I) \rightarrow (I \mid A^{-1})$.

مثال :

أوجد معكوس $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

الحل :

أ- ضع $(C \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ب - اقسم الصف الأول على 4 والثاني على 6 : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right)$

ج - اطرح الصف الأول من الثاني : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$

د - اضرب الصف الثاني في 12 : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & +2 \end{array}\right)$

هـ - اضرب الثاني في $\frac{3}{4}$ ثم اطرح الحاصل من الأول : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & +2.5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 & +2 \end{array}\right)$

$$\therefore C^{-1} = \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -3.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد معكوس

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\5&3&-1\\-3&1&-9\end{pmatrix}.$$

الحل :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&4&1&0&0\\5&3&-1&0&1&0\\-3&1&-9&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)\div 2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0.5&0&0\\5&3&-1&0&1&0\\-3&1&-9&0&0&1\end{array}\right)$$

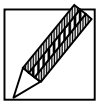
$$\xrightarrow[3+3(1)]{(2)-5(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0.5&0&0\\0&3&-11&-2.5&1&0\\0&1&-3&1.5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)\div 3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&0.5&0&0\\0&1&-\frac{11}{3}&\frac{-5}{6}&\frac{1}{3}&0\\0&1&-3&1.5&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)-(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0.5&0&0\\0&1&-\frac{11}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{2}{3}&\frac{14}{6}&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{3}{2}(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-\frac{11}{3}&-\frac{6}{5}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&\frac{7}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)+\frac{11}{3}(3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{13}{2}&1&-3\\0&1&0&\frac{72}{6}&-\frac{9}{6}&\frac{11}{2}\\0&0&1&\frac{7}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)=(I\mid A^{-1}).$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -6.5 & 1 & -3 \\ 12 & -1.5 & 5.5 \\ 3.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

تدريب (6) :



جد محددة و معكوس المصفوفات الآتية :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}$

5. حل المعادلات الخطية الآنية بالمصفوفات

1.5 المتجه Vector

تعريف:

المصفوفة $a_{n\times 1}$ تسمى متجهة عمود column vector ، والمصفوفة $b_{1\times n}$ تسمى متجهه صف row vector وعادة يرمز لمتجهات العمود بالحروف الصغيرة (أحياناً تحتها خط) مثل $\underline{a}$ و $\underline{b}$. ولمتجهات الصف بمدور متجهات العمود $\underline{a'}$ و $\underline{b'}$ ... الخ .

يمكن كتابة مجموعة من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات والمتجهات. تكون مصفوفة A من معاملات المتغيرات بعد تحويل كل الحدود الثابتة إلى الجانب الأيمن (إن كانت في الجانب الأيسر لتكون متجها $\underline{b}$. ننشئ كذلك متجها $\underline{X}$ مكونا من المتغيرات في المعادلات. بذلك تكون المعادلات في الصورة الآتية : $A\ \underline{X} = \underline{b}$ ثم نضرب هذه المعادلة من اليسار في A^{-1} ، معكوس A ، لنحصل على

$$A^{-1} A \underline{x} = A^{-1} \underline{b}$$

$$\therefore \underline{x} = A^{-1} \underline{b}$$

وهو حل المعادلة .

مثال :

حل المعادلتين الآتيتين آنيا:

$$2 x_1 + 3 x_2 = 1$$

$$. 3x_1 - 2x_2 = 8$$

الحل :

ضع :

$$. x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ، \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} ، A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

إذا

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال :

حل المعادلات الآتية آنياً:-

$$5\ x + 2\ y - 2\ z = 0$$

$$2\ x - y + 2\ z = 12$$

$$x + y + 2\ z = 6$$

الحل :

$$\therefore \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ -2 & 12 & -14 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

2.5 خواص المصفوفات

الدارس العزيز لك أن تعلم أن للمصفوفات خواص يمكن أن نلخصها في النقاط الآتية

1- $A = \left(A'\right)'$.

2- $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$.

3- $B' + A' = \left(B + A\right)'$

4- $B'A' = \left(AB\right)'$ (لاحظ الترتيب)

5- $B^{-1}A^{-1} = \left(AB\right)^{-1}$ (شريطة أن تكون المعكوسات معرفة).

6- إذا كانت C مصفوفة غير مفردة فإن

$AC = BC$ تعني أن $A = B$.

و $CA = CB$ تعني أن $A = B$.

(لاحظ الترتيب)

7- بصفة عامة $A\,B \neq B\,A$.

ملاحظة :

لقد قلنا إن A^{-1} معرفة فقط إذا كانت A غير مفردة . فإذا كانت A^{-1} غير معرفة، هذا يعني أنه لا يوجد حل فريد للمعادلات. هذه حالة ما تكون صفوف المصفوفة غير مستقلة. في هذه الحالة يمكن وضع قيم اختيارية لبعض المتغيرات ثم حل المعادلات بالنسبة لبقية المتغيرات . وكلما تغير اختيارنا للقيم توصلنا إلى حل جديد . بذلك فإن عدد الحلول لا نهائي.

مثال :

حل المعادلتين الآتيتين آنياً:

$$2x - 3y = 2$$
$$4x - 6y = 4$$

الحل :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0$$

$\therefore$ A^{-1} غير معرفة.

نلاحظ أن الصف الثاني يساوي ضعف الأول.

لذلك إذن كلما أعطينا x قيمة اختيارية فإننا نحصل على قيمة مقابلة لـ y مثلاً

$$\left(\frac{4}{3}, 3\right), \left(\frac{2}{3}, 2\right), (0,1) \ldots .$$

إذن الحل العام هو $\left(2\frac{a-1}{3}, a\right)$ حيث a أى عدد.

مثال:

حل المعادلات الآتية آنياً:

$$2x + y + 3z = 4$$
$$x + 4y - 2z = 1$$
$$4x + 9y - z = 6$$

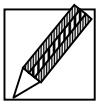
الحل:

$$|A| = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن الصف الثالث (مثلاً) يساوي الصف الأول + ضعف الثاني، أي أن الصف الثالث غير مستقل عن الصفين الأولين. أما الصفان الآخران مستقلان بمعنى لايمكن استنتاج أحدهما من الآخر. لذا يتطلب الحل اختيار قيمة اختيارية لأحد المتغيرات ثم حساب المتغيرين الآخرين.إذا وضعنا z = a، فإن الحل العام هو:

$$(x, y, z) = \frac{1}{7}(15 - 14a, 7a - 2, a)$$

تدريب (7) :



أوجد قيمة λ التي تجعل لمجموعات المعادلات الآتية :

(1) لا حل. (2) حل فريد.

$3x - 2y = 7.$

$6x + \lambda y = 6.$

أسئلة تقويم ذاتي (2) :

أوجد قيمة λ التي تجعل لمجموعات المعادلات الآتية :

(1) لا حل. (2) حل فريد.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -7 \\ -3x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + \lambda z &= -1 \end{aligned}$$

6. المتباينات Inequalities

رأينا فى الجزء الماضي أن المعادلة تتكون من مقدارين متساويين , عادة أحدهما يعتمد على مجهول واحد أو أكثر , والثانى ثابت . فى بعض الأحيان يكون الجانبان غير متساويين (مع إمكانية التساوى أحيانا) . مثل :

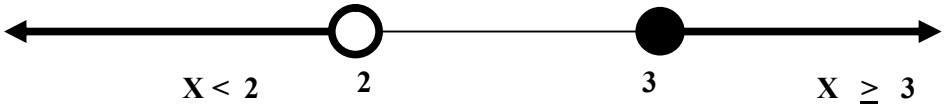
$$2x + 5y > 3$$

$$w - 4z \leq 5$$

هذه تسمى متباينة . وإذا أردنا حل متباينتان فى متغيرات يجب أن يكون عددها مساويا لعدد المتغيرات على الأقل . لكن بينما قد يعطى حل المعادلات الآنية نقطة واحدة فى مجال المتغيرات المجهولة , فإن حل المتباينات يعطي دائما عددا لا نهائيا من الحلول مثلا المتباينة $2x - 6 \geq 0$ تعطي $x \geq 3$. اى أن الحل يتكون من نصف المحور السيني ابتداء من (3−) إلى ما لا نهاية .

مثلاً : المتباينة $3x - 6 < 0$ حلها $x < 2$.

فى التمثيل البياني لمتباينة فى متغير واحد , إذا كان التساوى جزءا من الحل فتمثل النقطة النهائية بدائرة مدمجة فى حين عندما تكون متباينة مطلقة (بدون تساوي) فإن نقطة النهاية تمثل بدائرة خالية :



كما يمكن استخدام العمليات الحسابية الأربع على المعادلات فيمكن استخدامها على المتباينات لكن مع فرقين اثنين :

الأول : إذا ضربنا فى (أو قسمنا على) عدد سالب فإن اتجاه المتباينة ينقلب (مثلا أقل من تصبح أكبر من) . لاحظ أن الضرب (القسمة) فى هذه الحالة قد يكون صريحا أو ضمنيا . مثلا إذا ربعنا الجانبين , فإن كان أحدهما سالب فهذا ضرب ضمني فى سالب . (مثلا $3 > 5-$ لكن $3^2 > (-5)^2$).

الثانى : أننا لا يمكن جمع متباينتين فى مجاهيل إلا إذا كانتا فى نفس الاتجاه , كما لا يمكن طرح متباينتين مطلقا .

مثلاً نجد أن

$$15 > 14$$

و $8 > 6$

فإذا جمعنا $23 > 20$

وإذا طرحنا فالجانب الأيمن 8 و الأيسر 7 والمتباينة تنعكس. في حين إذا كان

$$13 > 4$$
$$12 > 8$$

فإن المتباينة لا تنعكس في حالة الطرح. لذلك إذا اشتملت المتباينات على مجهول أو أكثر لا نستطيع الطرح.

وكذلك مثلاً : إذا

$$3x - y \geq 7$$
$$2x + 3y \geq 9$$

فإذا جمعنا $5x + 2y \geq 16$ صحيحة ، وإذا طرحنا فإننا لا نعرف أن كانت المتباينة $x - 4y \geq -2$ صحيحة أم لا.

كذلك مثلاً إذا فرضنا أن :

$$2x + 3y \geq 5$$
$$6x - 5y < 4$$

فإذا جمعنا $8x-2y \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix} 9$

و إذا طرحنا $4x-8y \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix} -1$.

كما نلاحظ أيضاً **إذا** فرضنا أن:

$$3x - y \geq 7$$
$$2x + 3y \leq 9$$

فإذا جمعنا $5x+2y \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix} 16$

و إذا طرحنا $x-4y \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix} -2$.

مثال :

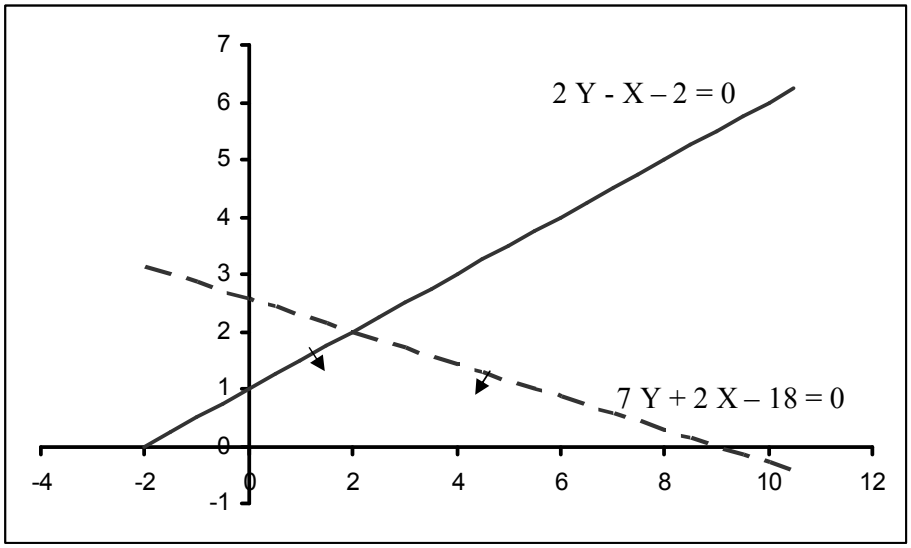
حل المتباينتين الآتيتين آنيا :

$$2x + 7y - 18 < 0$$
$$-X + 2y - 2 \geq 0 .$$

الحل :

نلجأ للرسم البيانى فى حل المتباينتين :

المتباينة الأولى تمثل المساحة تحت المستقيم ($2x + 7y - 18 < 0$), ولكن لاتشمل المستقيم لاحظ أن معادلة الخط المستقيم هي $2x+7y-18 = 0$ ، والمتباينة الثانية تمثل المساحة فوق المستقيم ($-X + 2y - 2 \geq 0$) بما فيها المستقيم نفسه لاحظ أن معادلة الخط المستقيم هي $-x+2y-2 = 0$, وبذلك الحل الآنى هو المساحة المشتركة بين المساحتين . لتحديد تحت و فوق ضع المتباينة بحيث معامل y موجب فإن كانت في الجانب الأقل فهي تحت و إلا فهي فوق. نلاحظ أن المستقيم الذي لا تشمله المتباينة رسم متقطعا بينما المستقيم المشمول رسم مستمرا .



لاحظ أن منطقة الحل هي المنطقة التي تشير إليها الأسهم

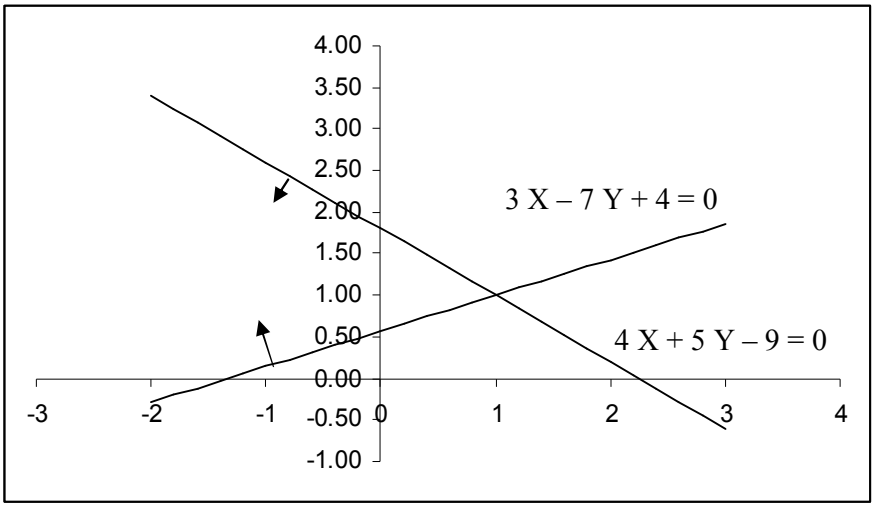
مثال :

حل المتباينتين الآتيتين آنيا :

$$4x + 5y \leq 9$$
$$3x - 7y \leq -4$$

الحل :

في المتباينة الأولى معامل y موجب في جانب أقل من و لذا تمثل المتباينة بنصف المستوى تحت و على المستقيم. أما في المتباينة الثانية فمعامل y سالب في جانب أقل من و لذا تحول إلى الجانب الآخر فتصبح جهة أكبر من لذا تمثل المتباينة بنصف المستوى فوق و على المستقيم. الأسهم تحدد منطقة الحل الآنى (solution region) وهي كل المنطقة التى تقع عند تقاطع اتجاهات الأسهم بما فيها النقاط على الخطين نسبة لوجود التساوي فى المتباينتين .



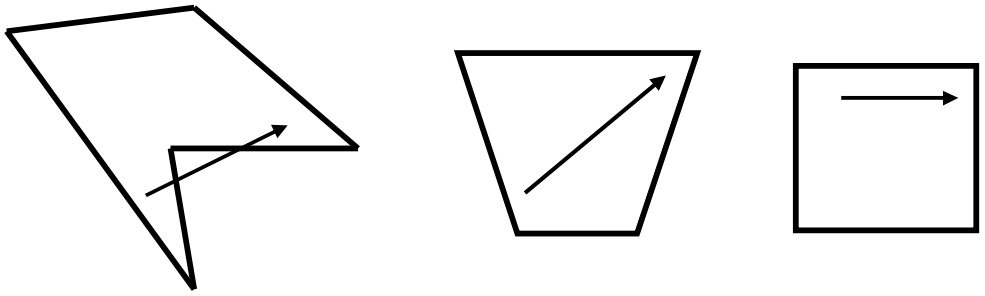
والآن بعد أن عرفنا كيفية حل المتباينات يمكننا أن نستفيد من فكرة حل المتباينات الخطية أنياً في الحياة العملية كما سترى في موضوع البرمجة الخطية

1.6 البرمجة الخطية Linear Programming

فى البند السابق رأينا كيف نوجد منطقة الحل الآنى لمجموعة متباينات . كثيراً ما لانحتاج لجميع نقط هذه المنطقة , بل فقط بعضها الذى يعطينا قيما حدية (أكبر أو أصغر قيمة) لدالة في المتغيرات . فى هذه الحالة نوجد أولا منطقة الحل , ثم منها نحدد النقطة (الحل) التى تعطى القيمة الحدية للدالة المعطاة .

تعريف :

المضلع المدبب : Convex Polygon : افرض أن لدينا مضلعا على المستوى $X - Y$. نقول إن المضلع مدبب إذا كان كل خط يصل نقتطين فيه أوعلى أضلاعه يقع كليا داخل المضلع .



مدبب **مدبب** **غير مدبب**

فى المسائل التى تواجهنا فى الأعمال التجارية قد نحتاج لحل متباينات آنية تحقق شروطا إضافية .

مثال :

افرض أن صانعاً يصنع نوعين من السلع A و B , وكانت الوحدة من A تحتاج إلى 6 وحدات من المادة الخام C و10 وحدات من المادة الخام D . بينما الوحدة من B تحتاج إلى 17 و3 وحدات من C و D على التوالى . وافرض أن كل المواد الخام المتاحة له هي 13600 من C و 10000 منD . فكم وحدة ينتج من A و B حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن، علما بأن ربحه من الوحدة A هو 4 جنيه ومن الوحدة B هو 3 جنيه .

الجدول الآتي يلخص هذه المعلومات:

	المادة الخام		الربح في الوحدة	عدد الوحدات المنتجة
السلعة	C	D		
A	6	10	4	X
B	17	3	3	Y
المجموع	13600	10000	----	----

إذا فرضنا أنه ينتج X و Y من A و B على التوالي , فسيكون ربحه :

$$P = 4X + 3Y \qquad (1)$$

والشروط التى تمليها عليه المواد الخام هي

$$6X + 17Y \leq 13600 \qquad (2)$$

$$10\,X + 3Y \leq 10000 \qquad (3)$$

إضافة إلى الشرطين الضمنيين:

$$Y \geq 0\ ,\ X \geq 0 \qquad (4)$$

لأن عدد الوحدات لا يكون سالبا .

قبل أن نحل هذا المثال نود أن نوضح الآتي :

مثل هذه المسألة تسمى مسألة البرمجة الخطية نسبة لأن كل مكوناتها خطية فى X و Y . الدالة P تسمى **الدالة الهدف (target function)** .

بصفة عامة إذا كانت الدالة الهدف $P = a\,x + by$ ونريد أكبر قيمة لها حسب الشروط , فتسمى p مجازا دالة الربح . وإذا كنا نريد لها أصغر قيمة – كما فى حالة أنها تمثل خسارة – فتسمى مجازاً دالة الخسارة. لإيجاد الحل نحرك الدالة الهدف موازية لنفسها (داخل منطقة الحل) إلى اليمين حيث تزيد P أو إلى اليسار حيث تنقص P . آخر نقطة يصل إليها على حدود منطقة الحل تعطي الحل المطلوب. أحيانا في مثل هذا الموقع يكون خط P مطابقا لضلع لمنطقة الحل (عندما يكون خط P موازيا للضلع.) في هذه الحالة أي نقطة على الضلع تعطي قيمة P المطلوبة. يمكن أن يبرهن أنه في مسائل البرمجة الخطية تكون :

1- منطقة الحل في شكل مضلع مدبب.

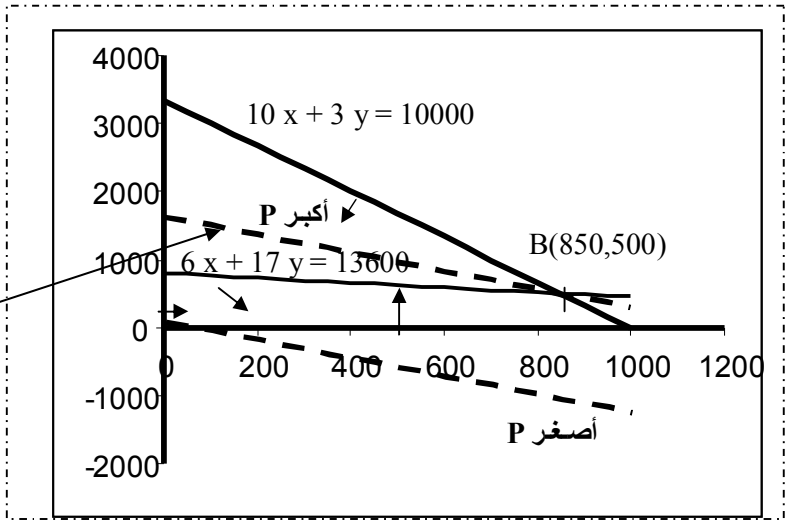
2- نقطة الحل إحدى رؤوس المضلع، مع مراعاة الحالة المذكورة.

لذا نحدد هذا المضلع مستعينين بالرسم البياني، ثم نعوض إحداثيات كل من رؤوس المضلع في الدالة P لنحدد تلك التي تعطي أكبر (أصغر) قيمة لها.

الحل :

بإيجاد الحل البياني لهذه المتباينات آنياً من الرسم يتضح لنا أن :

الشكل الآتي يبين المضلع المدبب الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة. حيث نجد رؤوس المضلع هي : (0،0)، (1000،0)، (850،500)، (0،800).



التعويض في P كما في الجدول :

الرأس(x،y)	O(0،0)	A(1000،0)	B(500،850)	C(0،800)
الربح	00	4000	4900	2400

إذا أكبر ربح 4900 جنيها عندما يصنع 850 من A و 500 من B.

نعود إلى دالة الربح $p = 4x + 3y$ لنلاحظ أن المستقيم الذي يمثلها يتحرك موازياً لنفسه (ميله $-\frac{4}{3}$): كلما تحرك إلى اليمين كانت قيمة P أكبر. وأكبر و أصغر قيمة ممكنة عندما يمر المستقيم بأحد الرؤوس وبقيته خارج منطقة الحل. و الرأس الذي يعطي أكبر P هو النقطة B .

مثال :

إسكافي يصنع نوعين من الأحذية (رباط وكشف)، داخلها من الجلد الضأني وخارجها من البقري، يحتاج صندوق الأحذية الرباط إلى 4 أمتار من الجلد الضأني و7 أمتار من البقري، ويحتاج صندوق الأحذية الكشف إلى 10 و 5 أمتار على التوالي . لديه بالمخزن 900 متر ضأني و 700 متر بقري. كم صندوقا يصنع من كل نوع حتى يعظم ربحه ، علما أن ربحه من صندوق الأحذية الرباط 4 جنيهات ومن الكشف 3 جنيهات ؟

الحل :

أفرض أنه صنع X صندوقاً من الأحذية الكشف و Y من الرباط .

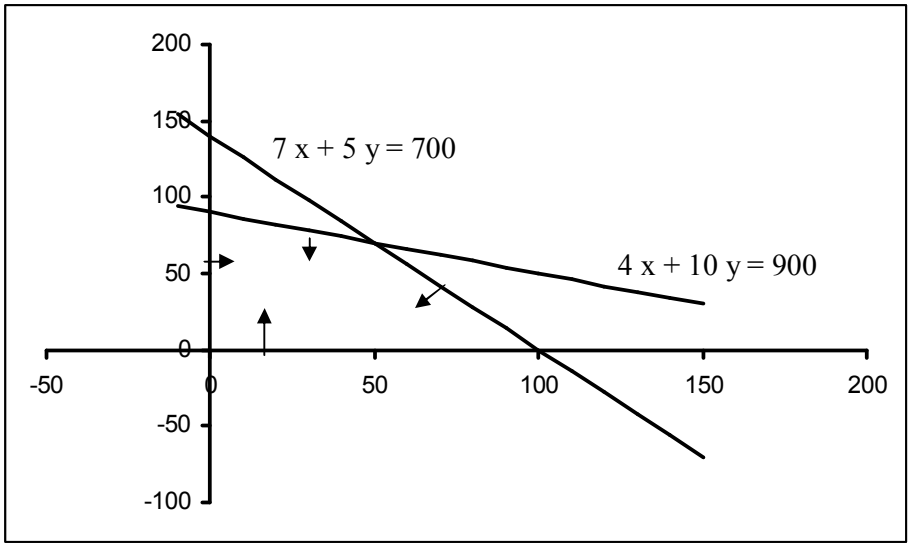
	المادة الخام		الربح في الوحدة	الإنتاج
الحذاء	الضأنى	البقري		
الرباط	4	7	4	x
الكشف	10	5	3	y
المجموع	900	700	----	----

دالة الربح : $P = 3x + 5y$

الشروط: ضأني : $7\ x\ +\ 5\ y\ \leq\ 700$

البقري : $4\ x\ +\ 10\ \ y\ \leq\ 900$

الكميات : $x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0$.



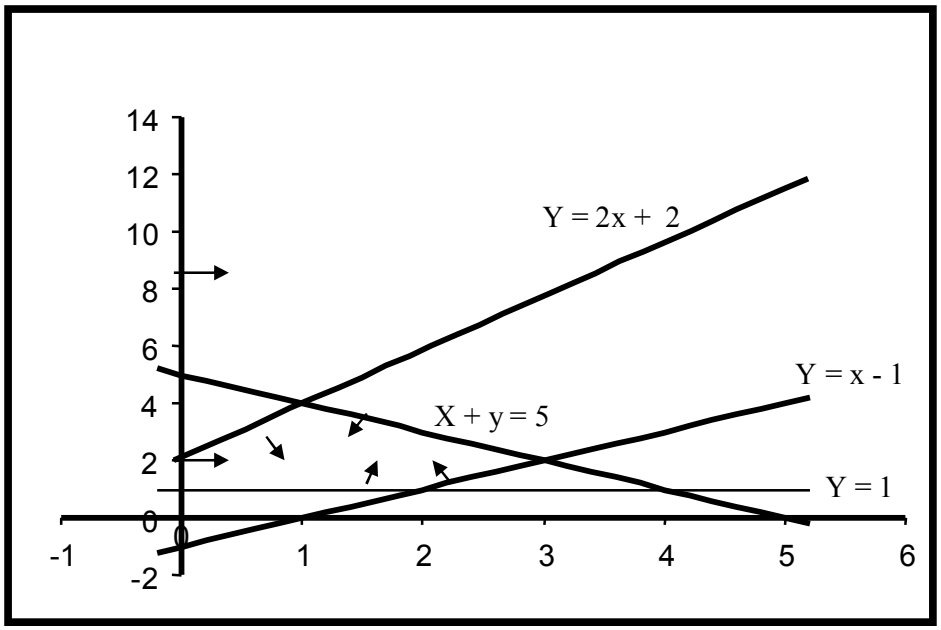
الرأس	O(0،0)	C(0،90)	B(50،70)	A(100،0)
الربح	00	270	410	400

∴ يصنع 70 صندوقاً من الأحذية الكشف و 50 من الرباط .

مثال :

جد أكبر و أصغر قيمة للدالة $P = 2x + 3y$ شريطة

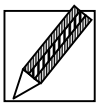
$$y + x - 5 \leq 0$$
$$2x - y + 2 \geq 0$$
$$x - y - 1 \leq 0$$
$$y - 1 \geq 0$$
$$x \geq 0$$



(X,Y) الرأس	(0,1)	(2,1)	(0,2)	(3,2)	(1,4)
P	3	7	6	12	14

∴ أكبر قيمة لـ P هي 14 عند (1,4) وأصغرها 3 عند (0,1).

تدريب (8) :



جد أكبر و أصغر قيمة للدالة P التي تحقق الشروط المذكورة :

$$P = 3x + 5y$$

$$x + y - 5 \le 0$$

$$-3x + 2y \ge 0$$

$$x, y \ge 0.$$

ملاحظة:

إذا كان خط الدالة الهدف موازيا لأحد أضلاع المضلع فإن كل النقاط على هذا الضلع تعطي نفس القيمة لها.

أسئلة تقويم الذاتي (3)



جد أكبر و أصغر قيمة للدالة P التي تحقق الشروط المذكورة :

a) $P = 3x + 4y$

$$x + y - 5 \le 0$$

$$x + 2y - 8 \le 0$$

$$x, y \ge 0.$$

b) $P = 2x - 7y$

$$x + y - 6 \le 0$$

$$2x + y - 8 \le 0.$$

$$x, y \ge 0.$$

الخلاصة

نأمل عزيزي الدارس أنه الآن بإمكانك تعريف المعادلة الخطية بأنها المعادلة التي يكون الأس لكل متغيراتها هو واحد مثل المعادلة $ax + by + cz = 0$ حيث x , y , z متغيرات كما نأمل أن تكون لديك المقدرة التامة على حل المعادلات الخطية آنياً سواء كان ذلك بطريقة التعويض أو الحذف بالجمع أو المصفوفات . كذلك من خلال هذه الوحدة فقد تعرفت على المحددات والمصفوفات وخواصهما .

وكذلك قد عرفت أن المتباينة علاقة على مقدارين علاقة المقارنة بينهما ليست علامة يساوي فقط فقد تكون علاقة (أكبر فقط) أو (أكبر أو يساوي معاً) أو (أصغر أو يساوي معاً) أو (أصغر فقط).

كذلك بمقدورك الآن أن تحل عدداً من المتباينات الخطية آنياً عن طريق الرسم كما يمكنك تطبيق ذلك في حل مسائل البرمجة الخطية بعد أن تحدد دالة الهدف P وهل هي دالة ربح أم دالة خسارة ثم تحدد مضلع منطقة الحل لتحدد رؤوسه في دالة الهدف التي تسعى المسألة لتحقيقها .

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزى الدارس

فى الوحدة التالية سندرس المجموعات وهى وحدات جديدة لها قوانينها و عملياتها، وتعتمد عليها الكثير من المفاهيم الرياضية الحديثة وهى ماأطلق عليها سابقا بالرياضيات الحديثة.

لقد تلاحظ أن كثيراً من القوانين فى العلوم الطبيعية المختلفة إذا رمزت عن طريق المجموعات، فإنها تتوحد فى قانون رياضى واحد. سنكتفى فى الوحدة القادمة بتعريف المجموعة وبعض المجموعات النمطية والعلاقات بينها والعمليات عليها.

إجابات التدريبات

التدريب (1)

$$4x = 7 + 3y$$

$$x = \frac{7+3y}{4} \quad \text{----------} \quad (1)$$

بالتعويض في المعادلة الثانية

$$2\left(\frac{7+3y}{4}\right) + 7y = -5$$

$$\frac{7+3y}{2} + 7y = -5$$

$$7 + 3y + 14y = -10$$

$$17y = -17$$

$$y = -1$$

وبالتعويض في (1) نجد أن :

$$X = 1$$

إذن الحل هو (1− , 1)

التدريب (2)

$$x - 3y + z = -6 \quad \text{----------} \quad (1)$$

$$2x + y - 2z = 3 \quad \text{----------} \quad (2)$$

$$4x - 2y + 3z = -12 \quad \text{----------} \quad (3)$$

$$2(3)+(1) \Rightarrow 7x - 5z = 3 \quad \text{----------} \quad (4)$$

$$2(2)+(3) \Rightarrow 8x - z = -6 \quad \text{----------} \quad (5)$$

$$-5(5)+(4) \Rightarrow -33x = 33 \quad \text{----------} \quad (6)$$

$$1-X =$$

وبالتعويض

$$2 - z =$$

وبالتعويض في (1) $y = 1$

الحل (-2 , 1 , -1)

التدريب (3)

$3x + 6y = 7$ ---------- (1)

$2x + 4y = 4$ ---------- (2)

نلاحظ أن هذا النظام غير متجانس لأن

$$2(1)-3(2) \Rightarrow 0 = 2$$

وهذا لا يمكن

إذن ليس للنظام حل .

التدريب (4)

$3x - y + 2z = 0$ ---------- (1)

$x + 2y - 3z = 0$ ---------- (2)

$3x + y + 2z = 0$ ---------- (3)

$2(1)+(2) \Rightarrow 7x + z = 0$ ---------- (4)

$-2(3)+(2) \Rightarrow -5x - 7z = 0$ ---------- (5)

$$7(4)+(5) \Rightarrow 23x = 0$$

$$x = 0$$

وبالتعويض $z = 0$

$y = 0$

الحل (0 , 0 , 0)

التدريب (5)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$\Delta = (-8-6+30) - (-20+24-3) = 15$$

التدريب (6)

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6+35 = 29$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{-3}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{-7}{29} & \frac{2}{29} \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

ليس لها معكوس (غير معرف)

c)

ليس لها معكوس (غير معرف)

e)

$$|e| = (56-4+30) - (16-10+42)$$
$$= 34$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 66 & 46 & 7 \\ 4 & 10 & 3 \\ -10 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{-1} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 66 & 4 & -10 \\ 46 & 10 & -8 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

التدريب (7)

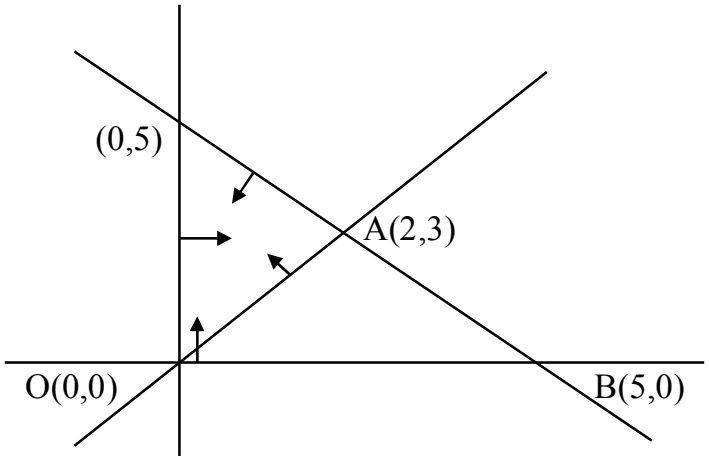
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda + 12$$

$$3\lambda + 12 = 0$$

حل فريد $\lambda \neq -4$

ليس لها حل $\lambda = -4$

التدريب (8)



رؤوس منطقة الحل O(0,0) , A(2,3) , B(0,5)

أكبر قيمة P=25 عند B(0,5)

وأقل قيمة P = 0 عند O(0,0)

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم (1)

$$-3x + 4y = 5 \quad \text{----------} \quad (1)$$
$$5x - 6y = -8 \quad \text{----------} \quad (2)$$

$$3(1) \Rightarrow -9x + 12y = 15$$
$$2(2) \Rightarrow 10x - 12y = -16$$

$$x = -1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

الحل $\left(-1 \ , \ \frac{1}{2}\right)$

$$x + y + z = 1 \quad \text{----------} \quad (1)$$
$$2x - y - z = 5 \quad \text{----------} \quad (2)$$
$$x - y + z = 3 \quad \text{----------} \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 3x = 6$$
$$x = 2$$

بالتعويض في (1)

$$y + z = -1 \quad \text{----------} \quad (4)$$

وبالتعويض في (2)

$$-y + z = 1 \quad \text{----------} \quad (5)$$
$$(4) + (5) \Rightarrow 3z = 0$$
$$z = 0$$

من (4) $y = -1$

الحل (2,-1,0)

تقويم (2)

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\lambda + 12 + 9) - (-2 + 12 - 9\lambda) \\ &= 11\lambda + 11 \\ 11\lambda &= -11 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

ليس لها حل $\lambda = -1$

لها حل فريد $\lambda \neq -1$

تقويم (3)

$$P = 3x+4y \qquad (1)$$

بعد الرسم رؤوس الحل هي $(0,4)$, $(3,2)$, $(5,0)$, $(0,0)$

أكبر قيمة 7 عند $(3,2)$ وأقل قيمة 0 عند $(0,0)$

$$P = 2x-7y \qquad (2)$$

بعد الرسم رؤوس الحل هي $(0,6)$, $(2,4)$, $(4,0)$, $(0,0)$

أكبر قيمة 8 عند $(4,0)$ وأقل قيمة -42 عند $(0,6)$

مسرد المصطلحات

- **المعادلة الخطية Linear Equation :**

وهي المتعادلة التي يكون جميع متغيراتها مرفوعة للأس واحد ، أي كل المتغيرات ليس عليها أي أس .

- **متجه صف Row Vector :**

هو ترتيب لمتغيرات في وضع صفي مثل (x , y) أو (x , y , z) ..... إلخ .

- **طريقة الحذف Elimination Method :**

وبهذه الطريقة يتم حذف أحد المتغيرات بضرب المعادلات في أعداد مناسبة ثم طرحها أو جمعها وفقاً لإشارة المتغير المراد حذفه .

- **المعادلات غير المتوافقة Inconstant Equations :**

وهي المعادلات التي لا يوجد بينها حل مشترك أي ليس لها حل آني مثل , $x + y = 1$. $x + y = 5$

- **الحل الفريد Unique Solution :**

وهو حل ليس هناك حل سواه ، أي حل وحيد .

- **القطر الرئيسي Principal diagonal :**

وهو عبارة عن العناصر التي يكون رقم ترتيبها في صفها هو نفس رقم ترتيبها في عمودها .

- **المصفوفة Matrix :**

وهي تشكيل عددي من الصفوف والأعمدة يكتب بين قوسين دائريين .

- **مدور المصفوفة Matrix Transpose :**

هو المصفوفة الناتجة من استبدال صفوفها بأعمدتها بنفس الترتيب .

- **المصفوفة المفردة Singular Matrix :**

هي مصفوفة مربعة محددتها تساوي الصفر .

- **المصفوفة الصفرية Zero Matrix :**

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار .

- **المصفوفة المحايدة Identity Matrix :**

هي مصفوفة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي الواحد وبقية العناصر تساوي الصفر .

- **المصفوفة القطرية Diagonal Matrix :**

هي مصفوفة جميع عناصرها خارج القطر تساوي صفراً .

- **معكوس مصفوفة Matrix Inverse :**

معكوس المصفوفة A هو مصفوفة مربعة من نفس بعد A إذا ما ضربت في A كان الناتج مصفوفة الوحدة من ذات البعد .

- **عملية الصفوف Row Operation :**

وهي عملية إضافة مضاعفات صف إلى صف آخر .

- **المتباينات Inequalities :**

المتباينة تحتوي على مقدارين العلاقة بينهما ليست علاقة المساواة فقط .

- **المضلع المدبب Conover Polygon :**

هو مضلع كل خط يصل نقطتين فيه أو على أضلاعه يقع كلياً داخله .

- **دالة الهدف Target Function :**

هي الدالة التي تحقق أقل خسارة أو أكبر ربح وفقاً لشروط معينة .

المراجع بالعربية

1. آيرز، فرانك (1974) : نظريات و مسائل في المصفوفات.
2. بلايت و روبرتسون (2000) : الجبر الخطي. (ج الملك سعود).
3. الدليمي و خضير و باقية (2000) : الرياضيات لطلبة الاقتصاد و العلوم الإدارية. (دار وائل– عمان)
4. سودان و السلمان و سرميتي (1884) : حساب التفاضل و التكامل. (جامعة الملك سعود)
5. عبدالفتاح عبدالمعطي محمد (2002) : مقرر أول في الجبر الخطي (جامعة الجزيرة) .
6. عثمان محمد المكي (1999) : الحسبان الأولي .(جامعة الخرطوم)
7. فرانك آيرز (1992) : حساب التفاضل و التكامل. (سلسلة شوم)
8. هب الريح و جهينة (1993) : الرياضيات و التفاضل و التكامل I و II . (جامعة التحدي)

المراجع بالإنجليزية

1. Glass, J.C. (1980) : An introduction to mathematical methods in Economics.(McGraw - Hill)
2. Hamilton, A.G. (1987): A first course in linear algebra with concurrent examples.(Cambridge)
3. Caunt, G.W. (1971): Elementary calculus .(Oxford)
4. Piskanov, N. (1974: Differential and integral calculus.(MIR)
5. Briggs,w and G.H. Brian(1969): Tutorial algebra.(University Tutorial)
6. Thomas, G. B. and R.L. Finny. (1982.) Calculus and analytic geometry.(Addison-Wesley)
7. Durell,C.V. and A. Robson.(1962) Elementary calculus.(Bell)
8. Anton, H.(1981) : : Calculus with analytic geometry. (Wiley).
9. Lipschutz, S.(1874) : Linear algebra.(Schaum series)


الوحدة الثالثة
المجموعات
SETS

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	83
أهداف الوحدة	84
1. المجموعة	85
1.1 بعض المجموعات الخاصة للأعداد والمجموعتان الشاملة والخالية	86
2.1 العلاقات بين المجموعات	89
3.1 الاحتواء	89
2. العمليات على المجموعات	91
1.2 المجموعة المكملة	91
2.2 الاتحاد	91
3.2 التقاطع	92
4.2 الفرق	93
5.2 مجموع مجموعتين	93
6.2 ضرب المجموعات	95
الخلاصة	98
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	99
إجابات التدريبات	100
إجابات بعض أسئلة التقويم الذاتي	101
مسرد المصطلحات	103
المراجع	105

المقدمة

تمهيد

أخي الدارس نرحب بك دارساً عزيزاً لهذه الوحدة وهي عبارة عن الوحدة الثالثة في هذا المقرر ، وهي تأتي مكملة للجزء الأول منه ، والذي يتعلق بفرع مهم من فروع علم الرياضيات ألا وهو الجبر وبالتأكيد لديك الكثير عن هذا العلم والذي كان لعلماء العرب والمسلمين الدور الأول في نشأته .

في هذه الوحدة سنتعرف على المجموعة بمفهومها الرياضي ومعنى انتماء عنصر أو عدمه إليها ، وكيف نعبر عن ذلك رمزياً ، وسنتطرق إلى بعض المجموعات العددية . وسنعرف من خلال هذه الوحدة كلاً من المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية ونوضح بعض العلاقات المُعَرَّفة على المجموعات . ثم ننتقل إلى موضوع العمليات الجبرية على المجموعات حيث نبدأ بعملية تكميل المجموعة ، كيفية إيجاد مكملة مجموعة ومن ثم نوضح معنى اتحاد مجموعتين أو تقاطعهما أو الفرق بينهما وسنعرف كذلك مجموع مجموعتين وعملية ضرب مجموعتين ونوضح مفهوم الزوج المرتب .

ستجد من خلال هذه الوحدة بعض الأمثلة التي نرجو منك أن تقوم بمتابعة حلها حتى تتمكن من حل أسئلة التدريبات والتقويم الذاتي التي تخللت الوحدة .

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس المتوقع منك بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

(1) **تعرف** المجموعة تعريفاً رياضياً .

(2) **تعبر** عن المجموعة رمزياً .

(3) **تعرف** بعضاً من المجموعات العددية .

(4) **توضح** مدى احتواء مجموعة لمجموعة .

(5) **تعرف** تساوي مجموعتين .

(6) **تجري** أياً من العمليات الجبرية على المجموعات (تقاطع–اتحاد–فرق) .

(7) **تجد** مجموع مجموعتين .

(8) **تجد** حاصل ضرب مجموعتين.

1. المجموعة

تعريف

المجموعة هى تجمع من الأشياء المحددة تحديدا كاملا.
و يقصد بالأشياء أنها يمكن أن تكون من نوع واحد أو من أنواع مختلفة: جماد ، نبات ، أشخاص، أعداد الخ، و يقصد بالتحديد الكامل ألا يكون هناك لبس، بحيث إذا ذكر لنا شيء ما نعرف(إذا كانت لدينا المعلومة الكافية) إذا كان من مكونات المجموعة أم لا.

تعريف

العنصر : الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة (elements).
عادة نرمز للمجموعات بالحروف اللاتينية الكبيرة والعناصر بحروف صغيرة . وفى العربيه نرمز للمجموعة بالحروف العربية المعقوفة و للعناصر بالحروف العربية المعتادة (س، ص،ى،.) في هذا الكتاب سنستخدم الحروف اللاتينية الكبيرة للمجموعات و الصغيرة للعناصر.

تحدد المجموعة إما بذكر جميع عناصرها بين قوسين من النوع {} (إن كان عددها محدودا) أو بذكر قاعدة عامة أو بقانون رياضى يحدد العناصر.

مثلا $A = \{1, 2, a, 7, ج\}$

B = مجموعة طلاب جامعة السودان المفتوحة

C = مجموعة حلول المعادلة $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

D = $\{X : X$ رجل من مواليد مدينة نيالا $\}$

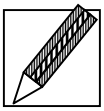
E = $\{x : 3 < x < 20\}$

لذكر أن عنصر a من عناصر مجموعة A نقول إن a ينتمى إلى A ونرمز لذلك بالرمز $a \in A$ " وتقرأ a ينتمى إلى A"

ولنفى ذلك $a \notin A$ " وتقرأ a لا تنتمي إلى A"

إذاً عرفنا مجموعة بذكر عناصرها (بين قوسين $\{\ \}$) فإن ترتيب العناصر داخل القوسين غير مهم ، مثلاً : المجموعة $\{a,b,c\}$ هي نفس $\{a,c,b\}$ وهي نفس $\{b,c,a\}$ فكل هذه المجموعات عبارة عن مجموعة واحدة .

تدريب (1) :



عبّر عن المجموعة التالية بذكر جميع عناصرها :

A : { x : x دولة عربية تجاور السودان }

1.1 بعض المجموعات الخاصة للأعداد والمجموعتين الشاملة والخالية

عزيزي الدارس ينبغي أن تعلم أن الأعداد التي يتعامل معها الإنسان في التطبيقات العملية تنقسم إلى المجموعات الآتية :

أ) مجموعة الأعداد الطبيعية: Set of Natural Numbers

هى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ويرمز لها بالرمز N

$$N = \{1,2,3,\ldots\}$$

ب) مجموعة الأعداد الكلية : Set of whole Numbers

هى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بالإضافة للعدد صفر، والذي هو عبارة عن عدد صحيح ولكنه لا يعتبر سالباً ولا موجباً .

ج) مجموعة الأعداد الصحيحة: Set of Integers

هى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة و السالبة والصفر ويرمز لها بالرمز Z $Z = \{0,\pm1,\pm\}$. حيث $Z = \{0,\pm1,\pm2,.....\}$

د) مجموعة الأعداد الحقيقية: Set of Real Number

هى مجموعة الأعداد التي مربعاتها أكبر من أو تساوى الصفر ويرمز لها بالرمز R

$$\text{R} = \left\{x : x^2 \geq 0\right\}.$$

هـ) مجموعة الأعداد النسبية : Set of Quotient Number

هى مجموعة الأعداد التي يمكن أن يعبر عنها كخارج قسمة عدد صحيح على عدد صحيح غير الصفر. ويرمز لها بالرمز Q

$$Q = \left\{\frac{x}{y} : x, y \in Z, y \neq 0\right\}$$

و) مجموعة الأعداد التخيلية : Set of Imaginary Number

هى مجموعة الأعداد التي مربعاتها سالبة : $\left\{x : x^2 < 0\right\}$ ، يرمز للعدد $\sqrt{-1}$ بالرمز i .

ز) مجموعة الأعداد المركبة :Set of Complex Number

هى مجموعة الأعداد التي تتكون من مجموع عددين أحدهما تخيلى والثانى حقيقي.

$$\left\{x + iy : x , y \in R , i = \sqrt{-1}\right\}$$

فى بعض الأحيان يرمز لعناصرها بالرمز (x, y) شريطة أن يكون مفهومها من المقصود حتى تفرق عن الزوج المرتب العادي.

لاحظ أن :

$$(x,y_1)\pm(x_2,y_2)=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$$

$$(x,y_1).(x_2y_2)=(x_1x_2,-y_1y_2,x_1x_2+x_2y_1)$$

$$\frac{(x,y_1)}{(x_2y_2)} \qquad =\frac{1}{x_2^2+y_2^2}(x_1x_2+y_1y_2,-x_1y_2+x_{1}y_1)$$

تعريف :

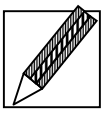
المجموعة الشاملة Universal Set: هي مجموعة تنتمي اليها كل عناصر المجموعات تحت الذكر وربما عناصر آخرى. هذه المجموعة تسمى المجموعة الشامله ويرمز لها بأى حرف (مثلاًU).

تعريف :

المجموعة الخالية Empty or null set : هى مجموعة لا عناصر لها مثل { }،

{ x سودانى يحكم فرنسا : x} يرمز للمجموعة الخالية بالرمز ϕ (فاى).

تدريب (2) :



ضع علامة (√) أو (×) أمام كل مما يلي :

(أ) $1\in Q$

(ب) $0\in N$

(ج) مجموعة الدول العربية في قارة أوربا مجموعة خالية .

(د) $-1\in Q$

(هـ) $\sqrt{-1}\in R$

(و) $\frac{3}{2}\in Z$

(ز) $\sqrt{2}\in R$

2.1 العلاقات بين المجموعات

تعريف :

تكون مجموعتان متساويتان إذا كانت عناصر الأولى هى نفس عناصر الثانية، وتستخدم علامة التساوى لذلك.

مثلاً : إذا كان

$$A = \{0,1,2,3\}$$
$$B = \{x : x(x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

فإن $A = B$.

لنفي التساوى نستخدم $\neq$، وهى تعني أن أحد عناصر إحداهما لاينتمي للأخرى.

3.1 الاحتواء Subset

أفرض أن لدينا مجموعتين A, B. إذا كانت كل عناصر B تنتمي إلى A فإننا نقول إن A تحتوي B أو إن B محتواة فى A. ونرمز لذلك بالرمز

$A \supset B$ وتقرأ "A تحتوى B (A is a superset of B)"

$B \subset A$ وتقرأ "B محتواة فى A (B is a subset of A)"

إذا أريد تأكيد إمكانية تساوى A و B فيكتب الاحتواء هكذا $B \subseteq A$ " وتقرأ A تحتوى أو تساوي B". نلاحظ أنه يمكن تعريف تساوي مجموعتين بأن كل واحدة تحتوي الأخرى. بذلك ليس من الضروري أن تشتمل المجموعة المحتوية على عناصر إضافية على عناصر المجموعة المحتواة.

مثال لذلك :

إذا كان $A = \{1,3,7,2\}, B = \{3,2,1,7\}$

نجد أن $A \subset B$, $B \subset A$

و**كذلك مثلاً** إذا فرضنا أن

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$B = \{3,6,9,10\}$$
$$C = \{1,2,3,...,10\}$$
$$D = \{x : x = 2n, n = 1,2,3\}$$

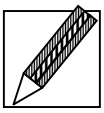
فإننا نجد كل العلاقات الآتية علاقات صحيحة :

$$A \neq B \ , B \not\subset A \ , \quad D \subset A \ , D \subset C \ , C \supset A$$

تذكر هنا أنه لاتوجد علاقة أكبر أو علاقة أصغر معرفة على المجموعات . فمثلا إذا قلنا $X < Y$ لعددين x, y فهذا يعنى أن $X \subset Y$ لكن $X \not\subset Y$ لا تعني شيئا عن احتواء Y في X.

مثال لذلك إذا كان $A = \{2,4,5,6\}$ و $B = \{3,5,6\}$ فإن $B \not\subset A$ و $A \not\subset B$.

تدريب (3) :



إذا كان $A = \{0,2,4,5\}$ و $B = \{x : x(x-2)(x-5) = 0\}$

اختر الرمز المناسب مما يلي :

(أ) $A=B$

(ب) $A \subset B$

(ج) $B \subset A$

(د) $B \not\subset A$

(هـ) $B \in A$

2. العمليات على المجموعات Set Operations

1.2 المجموعة المكملة

تعريف :

المجموعة المكملة لمجموعة A هى مجموعة كل العناصر (التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة) ولا تنتمي إلى A . يرمز لمكملة A بالرمز $A^{/}$ أو A^{c} " مكملة complement A" .

فى المثال أعلاه افرض أن $U = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 15\}$

فإن

$$A' = \{8, 9, \ldots, 15\}$$
$$D' = \{1, 3, 5, 6, 7, \ldots, 15\}$$

مثال :

إذا كانت $E = \{x : x(x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ جد E'

الحل :

$$E' = \{x : x(x-1)(x-2)(x-3) \neq 0\}$$

2.2 الاتحاد Union

تعريف :

اتحاد مجموعتين A و B (ويرمز له بالرمز $A \cup B$) هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو لهما معا.

ملاحظة :

(1) استخدام (أو) فى الرياضيات يقصد به الأول أو الثانى أو الاثنين معا، وهذا عكس المفهوم فى الاستخدام العام لها حيث لا تعنى الاثنين معا.

(2) من هذا التعريف نجد أن $A \cup B = B \cup A$.

(3) $A = \phi \cup A$.

مثال :

افرض أن $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $B = \{x : x(x-1)(x-2) = 0\}$ ، جد $A \cup B$

الحل :

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,\}$.

3.2 التقاطع Intersection

تعريف :

تقاطع مجموعتين A و B , (ويرمز له بالرمز $A \cap B$) هو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين وتقرأ A'' تقاطع B" ، أي مجموعة العناصر التي تنتمي لكل منهما. من التعريف $A \cap B = B \cap A$.

مثال :

إذا كان $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{3,5,8,9\}$

جد $A \cap B$

الحل :

$A \cap B = \{3,5\}$.

4.2 الفرق Difference

تعريف :

افرض أن A و B مجموعتان. A فرق B (و يرمز لها بالرمز A − B) هى مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولاتنتمي إلى B .

$$A - B' = A \cap B .$$

مثال :

افرض أن $A = \{2,4,6,8,10\}, B = \{1,2,3,4,\}$ ،

جد كلاً من A – B , B – A

الحل :

$$A - B = \{6, 10, 8\}$$
$$B - A = \{1, 3\}$$

ملاحظة :

يمكن التعبير عن(A - B) كالآتى $A - B = A \cap B'$ لأي مجموعتين A , B

5.2 مجموع مجموعتين : Sum

تعريف :

مجموع المجموعتين A و B (و يرمز له بالرمز A+B) هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B، و لكن ليس لهما معا. أي:

$$A + B = A \cup B - A \cap B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) = B + A .$$

أسئلة تقويم ذاتي (1) :

1- إذا كان

$$A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$
$$B = \{-1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$$
$$C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$
$$D = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

(أ) جد $A \cup B, A - B, A \cap B, A + C \quad . A - C$

ب) هل $\phi = A - D$ ؟

2- جد واشرح معنى $A \cup B, A \cap B, B - A, A'$ ،

إذا كان :-

(i)

$$A = \{(x, y): 2x - 5y + 7 = 0\}$$
$$B = \{(x, y): 3x - 2y - 18 = 0\}.$$

(ii)

$$A = \{(X,Y) : 6 + 3X - 2Y \geq 0\}$$
$$B = \{(X,Y) : 4X - Y - 2 \leq 0\}.$$

(iii)

$$A = \{X : X = 4 + 2(R - 1); R = 1, 2, 3, \ldots, 8\}$$
$$B = \{X : X = 4 \times 2(S - 1); S = 1, 2, 3\}$$

6.2 ضرب المجموعات Set Product or (Cartesian product)

تعريف :

الزوج المرتب Ordered pair : الزوج المرتب (x , y) هو عبارة عن عنصرين داخل قوس من النوع( ) بحيث $(x,y) \neq (y,x)$ إلا إذا كان $x = y$ ؛ وهو يسمى ايضا متجه صف اثنيني binary raw vector. وقد عرفنا من قبل إحداثيات النقاط على المستوى، هذه الإحداثيات متجهات صف. يمكن لمتجهات الصف أن تكون من أى عدد من العناصر.

تعريف:

افرض أن A و B مجموعتان . A ضرب B (ويرمز له بالرمز $A \times B$) هو مجموعة الازواج المرتبة التي عناصرها الأول تنتمي إلى A وعناصرها الثواني تنتمي إلى B . أى :

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \quad , \quad y \in B\}$$
$$= AB$$

مثال ذلك افرض أن $A=\{2,4,7\}$, $B=\{1,2,3\}$ ؛ فإن:

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),,(1,7),(2,2),(2,4),(2,7),(3,2),(3,4),(3,7)\}$$
$$B \times A = [(2,1),(2,2),(2,3),94,1),(4,2)4,3),(7,1),(7,2),(7,3)]$$

وعليه،

ومن التعريف $AB \neq BA$ إلا إذا كان $A = B$.

مثال:

افرض أن

$B=\{(x,y) : 5x+zy=3\}$ و $A=\{(x,y)\} : 2x-3y=5\})$.

ماذا يمثل كل مما يلي :

أ. المجموعة A .

ب. المجموعة B .

ج. $B \cap A$

د. $B \cup A$

هـ. $B - A$

الحل :

(1) A مجموعة جميع النقط على المستقيم $2x - 3y = 5$

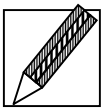
(2) B مجموعة جميع النقط على المستقيم $5x - 2y = 3$

(3) $B \cap A$ نقطة تقاطع المستقيمين

(4) $B \cup A$ مجموعة جميع النقط التي تقع على المستقيم A أو المستقيم B (أو عليهما معاً).

(5) $B' \cap A = B - A$ مجموعة النقط التي على المستقيم A ماعدا نقطة التقاطع مع المستقيم B. إذا كان المستقيمان D و C متوازيين فإن $\phi = D \cap C$ ؛ وإذا كانا متطابقين فإن $D \cup C = D \cap C = D = C$.

تدريب (4) :



إذا كان

$$U = \{1,2,3,...,30\}$$
$$A = \{5,8,10,14\}$$
$$B = \{2,6,10\}$$
$$C = \{1,6,10,20\}$$
$$D = \{3,8\}$$

جد

$A'(i)$ $A \cap B(ii)$ $B \cup C(iii)$ $B + C(iv)$ $BD(v)$.

أسئلة تقويم ذاتي (2) :



(1) أفرض أن

$$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$
$$B = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 64\}$$
$$C = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

جد

$$A + C \;, B \cup C, A \cap B, A'$$

(2) افرض أن

$$A = \{x : x \geq 0; x < 11; x \in Z\}$$
$$B = \{y : y = 2^r ; r = 1, 2, 3, 4\}$$

جد $A + B \;, A - B, A \cup B, A \cap B$.

الخلاصة

في هذه الوحدة بالتأكيد فإنك قد عرفت المجموعة بأنها تجمع من المفردات محدد تحديداً واضحاً وقد عرفت أن الرمز خ يعني ينتمي والرمز د يعني لا ينتمي ، كذلك عرفت أن رمز الاحتواء هو ج ، ورمز عدمه هو ث وقد عرفت معنى المجموعة الخالية ورمزها ئ بأنها هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر وعرفت أن المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على بقية المجموعات الأخرى فمثلاً عندما درست في هذه الوحدة بعض المجموعات العددية لعلك قد لاحظت أن مجموعة الأعداد التخيلية (المركبة) هي المجموعة الشاملة حيث حوت جميع المجموعات، ثم إنك قد لاحظت أن مجموعة الأعداد الحقيقية قد حوت كلاً من مجموعات الأعداد النسبية والصحيحة والطبيعية ثم أن مجموعة الأعداد النسبية قد حوت كلاً من مجموعة الأعداد الصحيحة والطبيعية وأخيراً نجد أن مجموعة الأعداد الصحيحة قد حوت مجموعة الأعداد الطبيعية .

كذلك عرفت أن تقاطع مجموعتين هو المجموعة التي تحوي العناصر المشتركة في المجموعتين وأن اتحاد مجموعتين هو مجموعة تضم جميع عناصر المجموعتين وأن الفرق بين مجموعتين هو المجموعة التي تضم العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى ولا تنتمي إلى المجموعة الثانية .

وأخيراً قد عرفت كيف تجد ضرب مجموعتين بأن تأخذ مجموعة تحوي جميع الأزواج المرتبة بحيث يكون العنصر الأول في الزوج ينتمي للمجموعة الأولى والثاني ينتمي للمجموعة الثانية .

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزى الدارس

الوحدة التالية نستهل بها الجزء الثاني من هذا المقرر والذي هو علم الحسبان وهو فرع مهم من فروع علم الرياضيات وقد أسهم كثيراً في التطبيقات العملية للرياضيات في شتى المجالات من هندسية وفيزيائية واقتصادية وغيرها .

تعرضنا في بداية الوحدة لتعريف الدالة وكيفية إيجاد النهايات لبعض الدوال ثم وضحنا مشتقة الدالة وكيفية طرق إيجاد مشتقات بعض الدوال ، هذا وقد قدمنا لك بعض التطبيقات التي تناسب مجال تخصصك نأمل أن تجد فيها ما تنشده .

إجابات التدريبات

التدريب (4)

(i) $A' = \{1,2,3,4,6,7,9,11,12,13,15,16,17,18,.....,30\}$

(ii) $A \cap B = \{10\}$

(iii) $B \cup C = \{1,2,6,10,20\}$

(iv) $B + C = \{1,2,20\}$

(v) $B \times D = \{(2,3),(2,8),(6,3),(6,8),(10,3),(10,8)\}$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم (1)

$A \cup B = \{-3,-2,-1,0,1,1.5,2,2.5,3\}$

$A - B = \{0,1,-3,-2\}$

$A \cap B = \{2,3\}$

$A + C = \{-4\}$

$A - C = \varnothing$

$A - D = \{0\}$ مجموعــة الصــفر

(ب) $A - D \neq \varnothing$

تقويم (2)

-1

$A' = \{0,2,4,6,...\}$

$A \cap B = \{1\}$

$B \cup C = \{1,2,3,...,10,16,32,64\}$

$A + C = \{0,11,12,13,...\}$

$A \cap B = \{2,4,8\}$

$A \cup B = \{0,1,2,...,10,16\}$

$A - B = \{0,1,2,3,5,6,7,9,10\}$

$A + B = \{0,1,2,3,5,6,7,9,10,16\}$

-2

$$A' = \{ (x,y) : 2x - 5y + 7 \neq 0 \}$$

نقاط المستوى التي يكون خارج المستقيم $2x - 5y + 7 = 0$

$$B - A = \{ (x,y) : 3x + 2y = 18 \ , \ 2x - 5y + 7 \neq 0 \}$$

نقاط المستوى التي تنتمي للمستقيم $3x + 2y = 18$ ولا تنتمي للمستقيم الثاني ، أي جميع نقاط المستقيم عدا النقطة $(4,3)$

$$A \cap B = \{ (x,y) : 2x - 5y + 7 = 0 \ , 3x + 2y - 18 = 0 \}$$
$$= \{(4,3)\}$$

$$A \cup B = \{ (x,y) : 2x - 5y + 7 = 0 \quad \text{أو} \quad 3x + 2y - 18 = 0 \}$$

جميع النقاط الي تنتمي إلى أي من المستقيمين .

مسرد المصطلحات

- **العنصر : Element**

وهو المفردة التي تتكون منها المجموعة .

- **مجموعة الأعداد الطبيعية : Set of Natural Numbers**

هي مجموعة الأعداد الصحيحة (غير الكسرية) الموجبة .

- **مجموعة الأعداد الكلية : Set of Whole Numbers**

هي مجموعة الأعداد الطبيعية زائد الصفر .

- **مجموعة الأعداد الصحيحة : Set of Integers Numbers**

هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير الكسرية السالبة والموجبة زائداً الصفر .

- **مجموعة الأعداد الحقيقية : Set of Real Numbers**

هي مجموعة الأعداد التي مربعاتها أكبر من أو تساوي الصفر .

- **مجموعة الأعداد النسبية : Set of Quotient Numbers**

هي مجموعة الأعداد التي يمكن أن يعبر عنها كخارج قسمة عدد صحيح على عدد صحيح غير الصفر .

- **مجموعة الأعداد التخيلية : Set of Imaginary Numbers**

هي مجموعة الأعداد التي تتكون من عددين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي .

- **المجموعة الشاملة : Universal Set**

هي مجموعة تحوي كل المجموعات الأخرى التي ذكرت .

- **المجموعة الخالية : Empty or Null Set**

هي مجموعة لا تحوي أي عنصر .

- **المجموعة الجزئية : Sub Set**

و هي المجموعة التي تكون محتواة في مجموعة أخرى .

- **العمليات على المجموعات : Set Operations**

وهي عمليات جبرية تعرف على المجموعات مثل التقاطع والاتحاد ..... إلخ .

- **الاتحاد : Union**

اتحاد مجموعتين عبارة عن مجموعة تحوي فقط جميع عناصر المجموعتين .

- **تقاطع : Intersection**

تقاطع مجموعتين عبارة عن مجموعة تحوي فقط العناصر المشتركة بين المجموعتين .

- **الفرق : Difference**

فرق مجموعتين (A - b) مجموعة تحوي فقط العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B .

- **المجموع : Sum**

مجموع مجموعتين (A+B) هو مجموعة تتكون فقط من العناصر الموجودة في A أو في B ولكن ليست موجودة في كلٍ منهما .

- **الزوج المرتب : Ordered Pair**

عبارة عن عنصرين داخل قوس مع مراعاة ترتيبهما .

- **الضرب الديكارتي : Cartesian Product**

وهو عبارة عن ضرب مجموعتين .

- **المجموعة المكملة : Complement Set**

مكملة المجموعةA هي مجموعة تحوي فقط كل العناصر التي تنتمي إلى الشاملة ولا تنتمي إلى A.

المراجع بالعربية

1. آيرز، فرانك (1974) : نظريات و مسائل في المصفوفات.
2. بلايت و روبرتسون (2000) : الجبر الخطي. (ج الملك سعود).
3. الدليمي و خضير و باقية (2000) : الرياضيات لطلبة الاقتصاد و العلوم الإدارية. (دار وائل– عمان)
4. سودان و السلمان و سرميتي (1884) : حساب التفاضل و التكامل. (جامعة الملك سعود)
5. عبدالفتاح عبدالمعطي محمد (2002) : مقرر أول في الجبر الخطي (جامعة الجزيرة) .
6. عثمان محمد المكي (1999) : الحسبان الأولي .(جامعة الخرطوم)
7. فرانك آيرز (1992) : حساب التفاضل و التكامل. (سلسلة شوم)
8. هب الريح و جهينة (1993) : الرياضيات و التفاضل و التكامل I و II . (جامعة التحدي)

المراجع بالإنجليزية

1. Glass, J.C. (1980) : An introduction to mathematical methods in Economics.(McGraw - Hill)
2. Hamilton, A.G. (1987): A first course in linear algebra with concurrent examples.(Cambridge)
3. Caunt, G.W. (1971): Elementary calculus .(Oxford)
4. Piskanov, N. (1974: Differential and integral calculus.(MIR)
5. Briggs,w and G.H. Brian(1969): Tutorial algebra.(University Tutorial)
6. Thomas, G. B. and R.L. Finny. (1982.) Calculus and analytic geometry.(Addison-Wesley)
7. Durell,C.V. and A. Robson.(1962) Elementary calculus.(Bell)
8. Anton, H.(1981) : : Calculus with analytic geometry. (Wiley).
9. Lipschutz, S.(1874) : Linear algebra.(Schaum series)


الوحدة الرابعة
الدالات الحقيقية
والنهايات

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	109
تمهيد	109
أهداف الوحدة	110
1. الدالات الحقيقية	111
1.1 الدالة	111
2.1 مفهوم الدالة	111
3.1 بعض أنواع الدالات المهمة	114
2. النهايات	119
1.2 مفهوم النهاية	119
2.2 خواص النهايات	121
3.2 الحالات الخاصة	124
الخلاصة	131
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	132
إجابات التدريبات	133
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	136
مسرد المصطلحات	138
المراجع	139

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس ، أهلاً بك في هذه الوحدة الدالات الحقيقية والنهايات وهي تمثل المدخل لعلم الحسبان والذي يعتبر من أهم فروع الرياضيات التطبيقية وقد بدأت الوحدة بتعريف الدالة وتوضيح معنى الدالة الضمنية والدالة الصريحة ثم تطرقت الوحدة لتوضيح بعض الدالات الهامة وعرفنا العدد النابيري e .

بعد ذلك انتقلنا بك إلى موضوع النهايات حيث أوضحنا مفهوم النهاية وتناولت الوحدة أيضاً الكيفية التي تحسب بها نهاية الدالة حيث شرحنا بعض الطرق والنظريات لإيجاد نهاية بعض الدالات .

واحتوت الوحدة على كثير من الأمثلة التي نأمل أن تعينك على حساب نهاية كثير من الدالات وذلك عند حصولك على نهاية ذات كمية غير معينة أو غير محددة . وستجد من خلال هذه الوحدة أسئلة تقويم ذاتي نأمل أن تقوم بحلها مع ترحيبنا بأي اقتراح أو رأي منك .

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

نتوقع منك بعد انتهائك من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

(1) **تعرّف** الدالة .

(2) **تجد** قيمة دالة ما عند نقطة .

(3) **تميز** بين الدالة الصريحة والدالة الضمنية .

(4) **تذكر** أهم أنواع الدالات .

(5) **تجد** نهاية الدالة .

1. الدالات الحقيقية

1.1 الدالة Function

افرض أن y,x متغيران وافرض أن y,x تربطهما علاقة بحيث معرفة أحدهما تدلنا على الآخر. قد تكون هذه العلاقة معرفة لكل قيم y,x (هنا يقصد كل الأعداد الحقيقية) ولذلك تسمى الدالة دالة حقيقية لأنها تكون معرفة على الأعداد الحقيقية أو معرفة فى مجال معين لـ x ومجال معين لـ y . مثل هذه العلاقة عادة يعبرعنها بمعادلة تربط بين y,x . وهى إما أن تكون صريحة بالنسبة لأحدهما بدلالة الثاني مثل

$$y = 2x^2 - 3x + 5$$

$$x = y^2$$

أو ضمنية فى شكل

$$2xy + 3x^2 - y^3 + 7x - 3y = 0$$

2.1 مفهوم الدالة

افرض **أن** y,x متغيران مستمران بحيث يوجد قانون رياضى يربط بينهما بحيث كل قيمة لأحدهما فى مجال معين تحدد قيمة أو قيما للمتغير الآخر. هذا القانون يسمى دالة.

ويقال إن الدالة صريحة إذا أعطت أحد المتغيرين صراحة بدلالة الآخر أي إذا كان أحد الجانبين يمثل متغيراً والجانب الآخر يمثل المتغير الآخر. في بعض الأحيان يمكن تحويل الدالة الضمنية إلى صريحه ولكن ليس فى كل الأحيان.

مثال لذلك الدالات الآتية صريحة:

$$y = x^2 - 2x + 7$$

$$x = y^3 + 3y - 2y + 5$$

والدالة الآتية ضمنية $e^{xy} - 7x^2 + 2xy = 0$.

مثال :

جد y إذا كانت

$(i)\quad y = 3x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \quad , x = 2$

$(ii)\quad 2xy + x^2 - y^2 + 2 = 0 \quad , x = 1$

$(iii)\quad y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{y^2 - 5x + 6}, \qquad x = 3$

$(iv)\quad y = (x^2 - 4x + 3)\left(\dfrac{1}{x-1}\right), \quad x = 1$

الحل :

$(i)\quad y = 3(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 1$

$= 24 - 12 + 8 - 1 = \underline{\underline{19}}$.

$(ii)\quad 2xy + 1^2 - y^2 + 2 = 0$

$\therefore -y^2 + 2y + 3 = 0$

$y - 2y - 3 = 0$

$(y - 3)(y + 1) = 0$

$\therefore \underline{\underline{y = -1}}$ أو 3

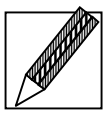
$(iii)\quad y = \dfrac{3^2 - 2 \times 3 - 3}{3 - 5 \times 3 + 6} = \dfrac{0}{0}$

∴ y غير معرفة عند $x = 3$.

$(iv)\quad y = (1 - 4 \times 1 + 3)^{\left(\frac{1}{1-1}\right)} = \underline{\underline{0^{\infty}}}$

∴ y غير معرفة عند $x = 1$.

تدريب (1) :



جد y إذا كانت

(i) $y = 3x^4 - 5x^2 + 7$, $x = 1$

(ii) $5xy + 3x^2 + y^2 - 23$, $x = 2$

(iii) $y = \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$

يمكن أن تشمل الدالة أكثر من متغيرين مثل :

$$z = 5xy^2 - 3x^2y + 3xy - x^2 + x - y + 2$$

$$6wx^2y - 3zx + 2yx^2w^2 - x + w + z = 0$$

إذا أعطى أحد المتغيرات صراحة بدلالة متغير أو متغيرات فيسمى **هذا بالمتغير التابع dependent variable** و تسمى المتغيرات فى الجانب الآخر من المعادلة **المتغيرات المستقلة independent variables.** فى هذا الكتاب نهتم فقط بالمتغيرات الحقيقية، وهى التى مربعاتها لا تكون سالبة. عند مناقشتنا للدوال نهتم بعدد من الخصائص المتعلقة بها:-

1) هل قيمة المتغير (المتغيرات) المستقلة تقابلها قيمة للمتغير التابع؟

2) هل قيمة التابع، إن وجدت، فريدة (وحيدة)؟

3) فى حالة المتغير المستقل الواحد، هل تقابل كل قيمة للمتغير التابع قيم المتغير المستقل؟ وهل هى فريدة؟

4) ماذا يحدث لقيم التابع عندما يكبر المستقل إلى ما لانهاية، موجبة أو سالبة؟

5) هل هناك قيمة للمستقل بحيث قيمة التابع المقابلة أكبر (أصغر) من قيمه المجاورة؟

3.1 بعض أنواع الدالات المهمة

عزيزي الدارس من الجدير بالذكر أن الدالات قد قسمت إلى أنواع وذلك حتى يسهل إجراء العمليات الرياضية عليها من اشتقاق أو تكامل وغير ذلك من العمليات ومن أهم هذه الأنواع ما يلى :

(أ) متعددات الحدود Polynomial functions

تعريف :

الدالة متعددة المتغيرات دالة فى الصورة

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

حيث a_0 , a_1 , a_2 , $\cdots$ ثوابت.

(لعلك قد لاحظت أن المتغير المستقل x كل قواه أعداد صحيحة غير سالبة)

مثال لذلك $y = 5 + 4x - 3x^2$.

تعريف:

الثابت النابيرى Napierian constant هو ثابت له أهمية قصوى فى الرياضيات وبقية العلوم ويرمز له بالرمز e :

$$e \approx 2.718281827\cdots$$

وقد كان هذا الثابت نتاجاً للتطبيقات الهندسية والفيزيائية وغيرها من العلوم التطبيقية مثله مثل العدد π ولعلك تذكر أن π تدخل في حساب محيط ومساحة الدائرة والأحجام الدورانية وغيرها .

(ب) الدالة اللوغرتمية : Logarithm Function

تعريف :

افرض أن $x > 0$. لوغرثم x للأساس e ، ويرمز له بالرمز ln x، يعرف كالآتى:

$$\ln\ x\ =\ \int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$$

لذا $\ln 1 = 0$ وهو سالب إذا كان $x < 1$ ، وموجب إذا كان $x > 1$.لإيجاد العلاقة بين اللوغريتم للأساس e واللوغريتم للأساس 10 نلاحظ الآتى : افرض أن

$$x = 10^{a} = e^{b}.$$

إذن $\log_e x = \ln x = b,\ \log x = a$

$$\therefore \ln x = b = a \ln 10 = \log x . \ln 10$$

$$\therefore \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

أيضا : $\log x = a = b \log e = \ln x . \log e$

$$\therefore\ \ln\ x\ =\ \frac{\log\ x}{\log\ e}\ .$$

(Log e=0.434294 …, ln 10 = 2.302585 …)

(ج) الدالات الأسية : Exponential Functions

تعريف :

الدالة الأسية بالأساس a هي $y = a\,f(x)$ ، حيث f(x) دالة فى x .

عادة يؤخذ e كأساس للدالة الأسية. وأبسط صورة للدالة الأسية هى $y\ =\ e^{x}$ ، وعندما تذكر دالة أسية دون إشارة للأساس فالمقصود للأساس e.

(د) الدالات المثلثية : Trigonometrical Functions

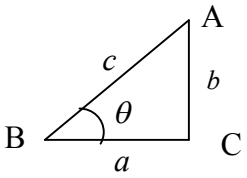
افرض أن لدينا مثلث ABC قائم الزاوية فى C والزاوية $\theta = B$ (ثيتا)

تعريف :

الدالات المثلية هى

$$\sin\ \theta \equiv \sin\ \theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\ ine\ \theta = \cos\ \theta = \frac{a}{c}$$



$$\text{Tang } ent\theta \equiv \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\sec ant\theta \equiv \sec\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cos econt\theta \equiv \cos ect\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot angent\theta \equiv \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan\theta}$$

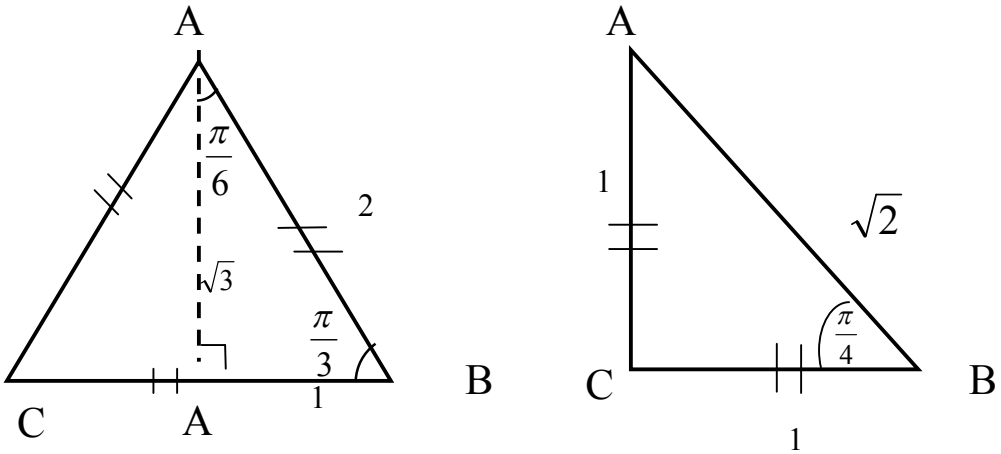
من نظرية فيثاغورس ،

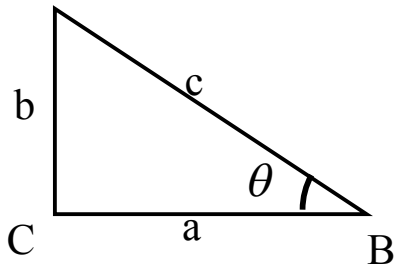
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\therefore \underline{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

قيم الدالات المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:-





من هذه الأشكال يمكن استنباط قيم الدالات المثلثية الزوايا الآتية:

$$^{\circ}90^{0} = \frac{\pi}{2}, \quad ^{\circ}60 = \frac{\pi}{3}, \quad ^{\circ}30 = \frac{\pi}{6}, \quad ^{\circ}45 = \frac{\pi}{4}$$

$$(3.1415926 \approx \pi)$$

ملاحظة: د = تسمى الدرجة بالتقدير الدائرى ، الدرجة بالتقدير الستينى.

$$1 \approx 57.2958^{\circ}.$$

كل الزاويا التى تقابلنا في مقرر الحسبان بالتقدير الدائرى، لذلك تسمى الدالات أعلاه **دالات دائرية** **Circular functions** .

(هـ) الكسر الجبرى : Algebraic Fraction

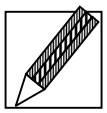
تعريف :

الكسر الجبري هو نسبة دالتين فى x ، مثلا :

$$y = \frac{2x^2 + 3x}{x - \sin x} \quad .$$

هناك نوع مهم من الدالات تسمى **الدالات الزائدية** **hyperbolic functions** وهى قريبة الشبه بالدالات المثلثية، لكن لن نتعرض لها لأنها خارج نطاق دراستكم.

تدريب (2) :



جد كلاً من الآتي :

(أ) $\ln 100$

(ب) $\ln 1000$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



جد y إذا كانت :

(أ) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 10$, $x = 0$

(ب) $3x^2y + xy^2 + 2 = 0$, $x = 1$

(ج) $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$

2. النهايات: Limits

1.2 مفهوم النهاية

افرض أن لدينا دالة y فى متغير x حيث x **عدد حقيقى Real number** . ونريد معرفة ماذا يحدث لقيمة y عندما x تقترب من قيمة محددة a (لكن دون الوصول إليها) فلناخذ مثالاً بسيطا : افرض أن $y = 2x + 3$ ونريد معرفة ما يحدث لقيمة y عندما x تقترب من قيمة محدده a (لكن دون الوصول إليها) مثلاً افرض أن y = 2x +3 ، ونريد معرفة قيمة y عندما x تقترب أكثر فأكثر من الصفر. الجدول الآتى يبين ذلك عندما x تقترب من الصفر لكنها موجبة دائما:

0.000001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	.,1	1	10	X
3.000002	3.00002	3.0002	3.001	3.02	3.2	5	23	Y

نلاحظ أن y تقترب أكثر وأكثر من العدد 3 كلما صغرت x . فى هذه الحالة نقول إن "y تؤول إلى 3 عندما x تؤول إلى الصفر وهى موجبة". فى هذه الحالة تستخدم اللغة الرياضية ونقول إن y " تؤول إلى 3 من أعلى عندما x تؤول إلى صفر من أعلى". ومعنى أعلى هنا نقصد بها أن قيم y تقترب من (وهى أكبر من) الثلاثة عندما تقترب x من (وهى أكبر من) الصفر.

ولنرى ماذا يحدث للمتغير التابع y عندما x تقترب من الصفر وهى سالبة. الجدول الآتى يعطى فكرة:

0.000001-	0.00001-	0.0001-	0.001-	0.01-	0.1-	1-	10-	X
2.999998	2.99998	2.9998	2.998	2.98	2.8	1	-17	Y

ونلاحظ هنا أيضا أن y تقترب من 3 وهى دونها عندما x تقترب من الصفر وهى سالبة. لذلك نقول إن " y تؤول إلى 3 من أدنى عندما x تؤول إلى 0 من أدنى" . نستنتج أن "y تؤول إلى 3 عندما x تقترب من 0 سواء من أدنى أو من أعلى. فى هذه الحالة لانذكر من أعلى أو من أدنى بل نقول إن " y تؤول إلى 3 عندما x تؤول إلى الصفر"، ونرمز لذلك بالرمز

$$\lim_{x\to 0} it\ y = \lim_{x \to 0}(2x+3) = 3.$$

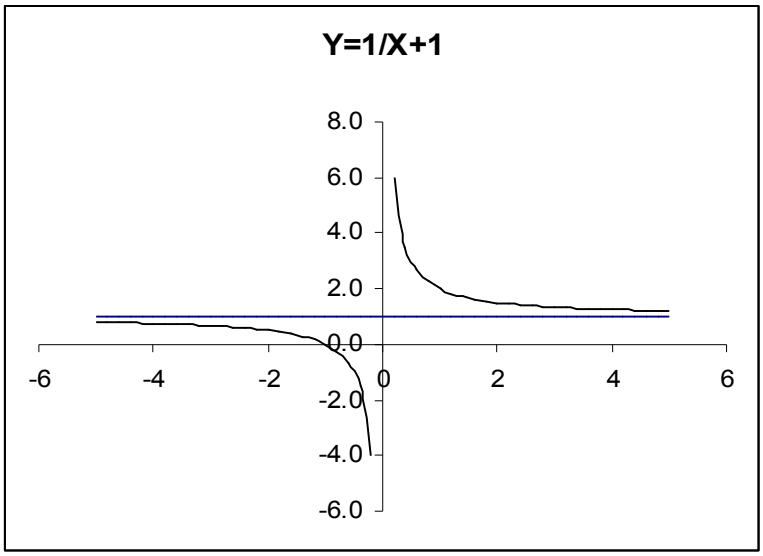
نذكر هنا أن x تؤول إلى الصفر لاتعنى أن x تساوى الصفر بل فقط تقترب منها أكثر وأكثر؛ بالمثل بالنسبة لـ y .

فى بعض الأحيان قد لا تكون نهاية y تتساوى فى الحالتين. افرض أن y تؤول إلى U عندما x تؤول إلى a من أعلى لكنها تؤول إلى L عندما x تؤول إلى a من أدنى نرمز لذلك بالرمزين :

$$\lim_{x\to a^+} y = U \quad , \quad \lim_{x\to a^-} y = L .$$

مثال لذلك $\lim_{X\to 0^+}\left(\frac{1}{X}+1\right) = \infty$ و $\lim_{X\to 0^-}\left(\frac{1}{X}+1\right) = -\infty$

لكن $\lim_{X\to 0}\left(\frac{1}{X}+1\right)$ غير معرف لأن النهايتين غير متساويتين .



تعريف:

النهاية : إذا أمكن جعل y(x) قريبة بقدر معلوم من قيمة λ (لامدا) بجعل x قريبة بقدر كاف من a فإننا نقول إن نهاية y عندما x تؤول إلى a هى λ . ونعبر عن ذلك كتابة بالآتي :

$$\lim_{x\to a} y = \lambda .$$

2.2 خواص النهايات

من أهم خواص النهايات هذه النظريات التي ستجدها مضمنة في النقاط التسعة الآتية وهذه الخواص لها أهميتها في إيجاد نهاية الدالة والنقاط هي :

1) نهاية العدد الثابت تساوى الثابت $\lim_{x\to a} c = c$ ، حيث c ثابت.

2) نهاية مجموع دالتين يساوى مجموع نهايتهما.

$$\lim_{x\to a}(y_1 + y_2) =, \quad \lim_{x\to a} y_1 + \lim_{x\to a} y_2$$

3) نهاية فرق دالتين يساوى فرق نهايتهما.

$$\lim_{x\to a} (y_1 + y_2) =, \quad \lim_{x\to a} y_1 - \lim_{x\to a} y_2$$

4) نهاية حاصل ضرب دالتين يساوى حاصل ضرب نهايتهما:

$$\lim_{x\to a} (y_1 \times y_2) = \quad \left(\lim_{x\to a} y_1\right)\left(\lim_{x\to a} y_2\right)$$

5) نهاية حاصل قسمة دالتين يساوى حاصل قسمة نهايتهما

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) =, \quad \frac{\lim_{x\to a} y_1}{\lim_{x\to a} y_2}$$

6) نهاية دالة y_1 مرفوعة إلى دالة y_2 يساوى نهاية y_1 مرفوعة إلى نهاية y_2 :

$$\lim_{x\to a}\left(y_1^{\,y_2}\right)=, \quad \left(\lim_{x\to a} y_1\right)^{\left(\lim it\, y_2\right)}$$

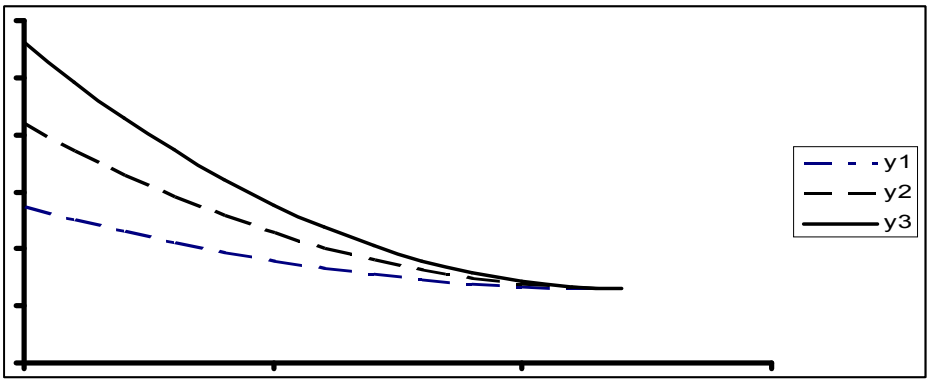
7) نظرية السندوتش Sandwich Theorem

افرض $y_1 > y_2 > y_3$ إذا كانت نهاية كلاً من y_1 ، y_3 تساوى λ عندما x تؤول إلى a فإن y_2 تؤول ايضا إلى λ عندما x تؤول إلى a .

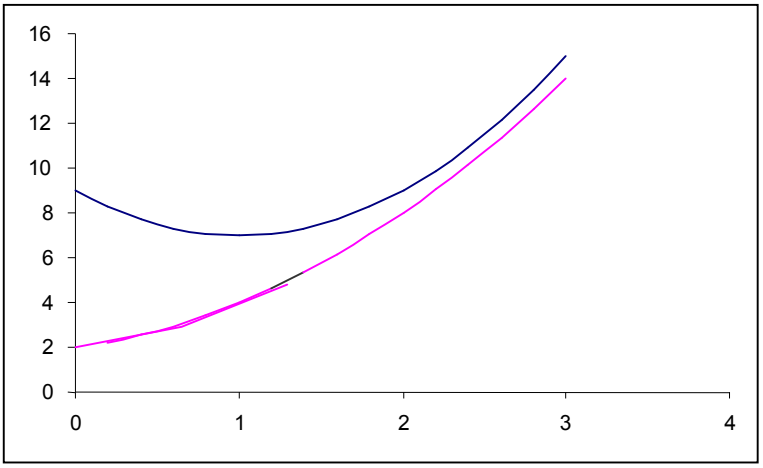
ملاحظة

لعل هذه النظرية عزيزي الدارس قد تبدو لك نظرية بديهية حيث أن قيمة y_2 دائماً محصورة بين قيمتي y_1 ، y_3 وعندما تؤول X إلى a فإن كلاً من قيم y_1 ، y_3 تقترب من λ وبالتالي تقترب قيمة y_2 من λ أيضاً

الرسم التالي يوضح ذلك :



8) إذا كان $y_1 < y_2$ فى المنطقة حول a = x فإن $\lim_{x\to a^+} y_2 \leq \lim_{x\to a} y_1$.



$$y_1 < y_2 \Rightarrow \lim_{x \to a} y_1(x) \leq \lim_{x \to a} y_2(x)$$

9) محاولة إيجاد نهاية y = y(x) . فإذا كانت نتيجة التعويض المباشر محددة فتكون هى نهاية y .

مثال :

جد النهاية $\lim_{x \to 2} (4x - 2)$.

الحل :

بالتعويض المباشر نجد أن x = 2 تعطى 4 x - 2 = 6 .

أى $\lim_{x \to 2} 4x - 2 = 6.$

مثال :

أوجد النهايات اللآتية :

(1 $\lim_{x \to 1} 3x^2 + 2x - 1$.

(2 $\lim_{x \to 4} \frac{2x+3}{x-2}$.

(3 $\lim_{x\to 2}\left(2x^2+1\right)^{x+3}$.

الحل :

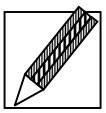
بالتعويض النهايات هى

(**1**) $3\times 1^2+2\times 1-1=\underline{\underline{4}}$

(**2**) $\lim_{x\to 4}\ \frac{2x+3}{x-2}=,\ \frac{2x4+3}{4-2}=\underline{\underline{\frac{11}{2}}}$

(**3**) $\lim_{x\to 2} it\left(2x^{\,2}+1\right)^{x+3}=\left(2\times 2^2+1\right)^{2+3}=\underline{\underline{9^5}}$

تدريب (3) :



جد النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 2}(5x-3)^{4x}$

(2) $\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$

3.2 الحالات الخاصة

فى بعض الأحيان التعويض المباشر يعطى قيمة غير محددة مثل ∞ أو $-\infty$ ففي هذه الحالة نقول إن النهاية = $\pm\infty$ (سالبة أو موجبه حسب الحالة)، وأحياناً قد يعطي التعويض قيماً غير معلومة وفي هذه الحالة نبحث عن طريقة للتبسيط حتى نتمكن من إيجاد النهاية. والحالات غير المعلومة هى متعلقة بحالات نهايتى دالتين . افرض أن التعويض المباشر أعطى أحد الحالات الآتية والتي تعتبر حالات غير معلومة أو كميات غير معينة :-

أولاً: $\infty - \infty$:

نذكر أن ∞ تعنى عدداً كبيراً ، وعندما نطرح عدد كبير من آخر كبير لانعرف الناتج الذى قد يكون $+\infty$، $-\infty$ أو أي شئ بينهما.

ثانياً :صفر $\times \infty$:

القاعدة العامة بالنسبة للصفر هى أن مضروبات الصفر = الصفر ، فى حين أن القاعدة العامة بالنسبة لـ∞ ان مضروبات ∞ تساوي ∞. فأى القاعدتين تطبق !

ملاحظة :

عندما تكون الدالة المراد نهايتها حاصل ضرب دالتين، وكانت نهاية إحداهما الصفر ونهاية الآخرى ∞ ، فيمكن إيجاد النهاية إذا عرف أى الدالتين تصل إلى نهايتها أسرع، فى هذه الحالة نهايتها هى التى تسود.

مثال :

جد $\lim_{x\to\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$

الحل:

$$\lim_{x \to \infty} x^{n} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-n} = 0$$

لكن المعروف أن الدالات الأسية تتزايد بصورة أسرع من x^n. لذلك فلها الغلبة :

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$$

ثالثاً : 1^{∞}: تذكر أن I تعنى هنا أن الدالة تقترب من الواحد (وليست تساوى الواحد) ، بذلك يمكن أن تكون سالبة أو موجبة. ولذا النهاية 1^{∞} متغير تبعاً لذلك.

رابعاً : $\frac{\infty}{\infty}$: كما فى (1) قد يكون خارج قسمة النهايتين ∞ أو صفر أو أى عدد بينهما. بالمثل

خامساً : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

سادساً : 0^0 .

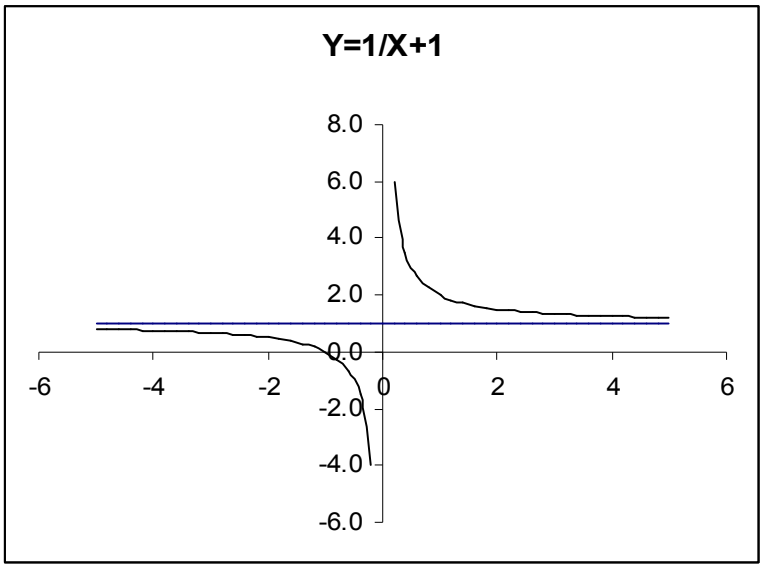
فى بعض الأحيان يمكن إيجاد النهاية فى الحالات أعلاه بإجراء عملية جبرية على الدالتين:

مثال لذلك جد النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} + 1$$

نلاحظ أن $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + 1 = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} + 1 = -\infty$

∴ نقول أن النهاية من أعلى أو من أدنى معرفتان ، لكن النهاية غير معرفة، لأن النهايتين غير متساويتين.



مثال :

جد النهاية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

الحل :

التعويض المباشر يعطى

$$\lim_{x \to 1} \frac{2^2 - 4x2 + 4}{2^2 - 3x2 + 2} = \frac{0}{0}$$

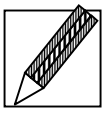
لكن إذا حللنا البسط والمقام نجد

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} t \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

وبالاختصار (لأن $x \neq 2$ وبالتالى (x - 2) ≠ صفر) :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2+}{x-1} = \frac{0}{1} = 0$$

تدريب (4) :



جد النهايات الآتية :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

مثال :

جد النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3}$.

الحل :

التعويض المباشر يعطى $\frac{\infty}{\infty}$. لكن إذا قسمنا البسط والمقام على **أكبر** أس (2) نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{\infty}}{2+\frac{3}{\infty}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad .$$

مثال :

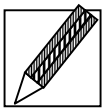
جد النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3x}{x^2+5x}$.

الحل :

التعويض المباشر يعطى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، لكن إذا قسمنا البسط و المقام على أصغر أس نجد الآتى

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3x}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+5} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}} \quad .$$

تدريب (5) :



جد النهايات الآتية :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{5x^2-2x+1}$$

مثال :

افرض أن $y(X)=3x+2$ وأن h عدد صغير موجب. أوجد النهاية:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \quad .$$

الحل :

$y(x+h)=3(x+h)+2 \therefore$ $y(x)=3x+2$

∴ النهاية المطلوبه هى $\lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)+2]-[3x+2]}{h}$

$$= \lim_{h \to o} \frac{3h}{h} = \underline{\underline{3}}.$$

مثال :

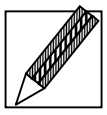
إذا كانت $y(x) = x^2$ جد $\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$

الحل :

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)=\underline{\underline{2x}}$$

تدريب (6) :



جد النهايات الآتية :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



(1) جد النهايات الآتية :

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x^{2}}{2x^{2}-5}\right)\left(\frac{x}{2+x}\right)\right]$$

$$(2)\quad \lim_{h\to 0}\ \frac{5x^{3}+8x^{2}}{3x^{4}+6x^{2}}$$

$$(3)\quad \lim_{h\to a}\ \frac{x^{3}-a^{3}}{x^{2}-a^{2}}$$

$$(4)\quad \lim_{x\to-\infty}\ \frac{2x^{3}+3x^{2}-1}{x^{3}-x^{2}+11}$$

$$(5)\quad \lim_{h\to\infty}\ x^{10}\quad e^{-x^{2}}$$

(2) جد $\lim_{x\to\infty} y(x)$ إذا كان

$$\frac{2x^{2}-3x+1}{x^{2}} \le y(x) \le \frac{2x^{2}+5x}{x^{2}}.$$

الخلاصة

في هذه الوحدة أيها الدارس العزيز قد تعرفت على معنى الدالة بأنها علاقة (قانون) تربط بين متغيرين بحيث كل قيمة لأحدهما في مجال معين تحدد قيمة أو قيماً للمتغير الآخر . هذه العلاقة قد تجعل كل متغير في طرف من طرفي المعادلة وهذه ما تعرف بالدالة الصريحة وخلاف ذلك تكون دالة ضمنية . كذلك من خلال الوحدة تعرفت على أنواع من الدالات الصريحة ، فدالة متغيرة الحدود تكون جميع قوى متغيرها المستقل أعداداً صحيحة غير سالبة والدالة اللوغريثمية هي التي تكون بدلالة لوغاريثم متغيرها المستقل أما الدالة الأسية هي التي تكون بدلالة عدد ثابت قواه عبارة عن دالة في المتغير المستقل والدالة المثلثية هي التي تكون بدلالة نسبة مثلثية لدالة في المتغير المستقل . وعرفت أيضاً أن دالة الكسر الجبري هي عبارة عن نسبة دالتين في المتغير المستقل .

ثم وضحنا بعد ذلك مفهوم النهاية وذكرنا خواص النهايات وذلك أن نهاية الثابت تساويه وأن نهاية مجموع دالتين تساوي مجموع نهايتيهما و نهاية فرق دالتين تساوي فرقي نهايتيهما ونهاية حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب نهايتيهما ونهاية قسمتهما تساوي حاصل قسمة نهايتيهما ونهاية دالة مرفوعة لدالة أخرى تساوي نهاية الدالة مرفوعة لنهاية الأخرى وكذلك ذكرنا أنه إذا تساوت نهايتي دالتين يحصران دالة بينهما فإن نهاية الدالة المحصورة تساوي نهايتيهما . وإذا كان هنالك دالة أصغر من دالة أخرى فإن نهايتها تكون أصغر من نهاية الدالة الأخرى وذكرنا أيضاً أن هناك بعض الدالات يمكن تحديد نهايتها بالتعويض المباشر وفي حالة الحصول على حالات عدم تعيين فإننا قدمنا أمثلة توضح كيفية إيجاد النهاية في هذه الحالات .

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس

فى الوحدة التالية سندرس معا إحدى تطبيقات النهايات – حساب معدل تغير متغير تابع عندما يتغير المتغير المستقل تغيراً دقيقاً، وهو ما يسمى بالاشتقاق أو التفاضل. فى ذلك سنناقش الأشكال المختلفة للدوال التي تربط بين مغيرين.

وتجد بالوحدة عدداً كبيراً من الأمثلة المحلولة والتمارين ونختم بحلول هذه التمارين. ثم ننهي الوحدة كالعادة بقائمة المصطلحات التى تمر علينا فيها.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

(i)

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 7$$
$$= 3 - 5 + 7 = 5$$

(ii)

$$5(2)y + 3(4) + y^2 - 23 = 0$$
$$y^2 + 10y + 12 - 23 = 0$$
$$y^2 + 10y - 11 = 0$$
$$(y + 11)(y - 1) = 0$$
$$y = 1$$

أو

$$y = -11$$

(iii)

$$y = \frac{0+0+1}{0-0+3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

(ملاحظة)

لم تحدد قيمة X

ولذا حددت

$X = 0$

تدريب (2)

(أ)

$$\ln 100 = \ln 10^2 = 2\ln 10$$
$$= 2(2.302585)$$
$$= 4.60517$$

(ب)

$$\ln 1000 = 3\ln 10$$
$$= 3(2.302585)$$
$$= 6.907755$$

تدريب (3)

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1) = 3 - 2 + 1 = 2$$

تدريب (4)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{9 - 18 + 9}{9 - 12 + 3} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

تدريب (5)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 3x + 1}{5x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{5 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}$$

$$= \frac{2+0+0}{5-0+0}$$

$$= \frac{2}{5}$$

تدريب (6)

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{(x+0)^3 - x^3}{0}$$

$$= \frac{0}{0}$$ كميــة غــير معينــة

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3h^2x + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^3 + 3hx + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \; 3x^3 + 3hx + h^2$$

$$= 3x^3 + 0 + 0$$

$$= 3x^3$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم (1)

(أ)

$$\mathbf{Y = 0 - 0 + 0 + 10 = 10}$$

(ب)

$$3y + y^2 + 2 = 0$$
$$(y + 2)(y + 1) = 0$$
$$y = -1 \quad \text{أو} \quad y = -2$$

$$y = \tan\frac{\pi}{4}$$
$$= 1$$

تقويم (2)

(1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2-5}\right)\left(\frac{x}{2+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{5}{x^2}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\ \frac{5x^3+8x^2}{3x^4+6x^2}=\lim_{x\to 0}\ \frac{x^2(5x+8)}{x^2(3x^2+6)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{5x+8}{3x^2+6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$(3)\quad \lim_{x\to a}\ \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\ \frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\ \frac{x^2+xa+a^2}{x+a}$$

$$=\lim_{x\to a}\ \frac{a^2+a^2+a^2}{a+a}=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3}{2}a$$

$$\lim_{x\to 0}x^{10}e^{-x^2}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{2x^2-3x+1}{x^2}=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{2x^2+5x}{x^2}=2$$

إذن بنظريـــــة الســـــندويتش

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=2$$

مسرد المصطلحات

- **الدالة : Function**

علاقة أو قانون رياضي يربط بين متغيرين بحيث كل قيمة لأحدهما في مجال معين تحدد قيمة الآخر .

- **المتغير التابع : Dependent Variable**

هو المتغير الذي يعطى في جانب من المعادلة بدلالة متغير أو متغيرات في الجانب الآخر .

- **المتغير المستقل : Independent Variable**

هو المتغير الذي يُعطى بدلالته المتغير التابع .

- **متعددة الحدود : Polynomial**

هي الدالة التي يكون جميع قوى متغيرها المستقل صحيحة وغير سالبة .

- **الدالة اللوغريثمية : Logarithmic Function**

هي الدالة التي تعطى بدلالة لوغاريثم المتغير المستقل .

- **الدالة الأسية : Exponential Function**

هي الدالة التي تعطى بدلالة ثابت مرفوع لدالة ما في المتغير المستقل .

- **الدالة المثلثية : Trigonometrical Function**

هي الدالة التي تعطى بدلالة نسبة مثلثية لدالة في المتغير المستقل .

- **الكسر الجبري : Algebraic Function**

هو نسبة دالتين في متغير مستقل .

- **النهاية : Limit**

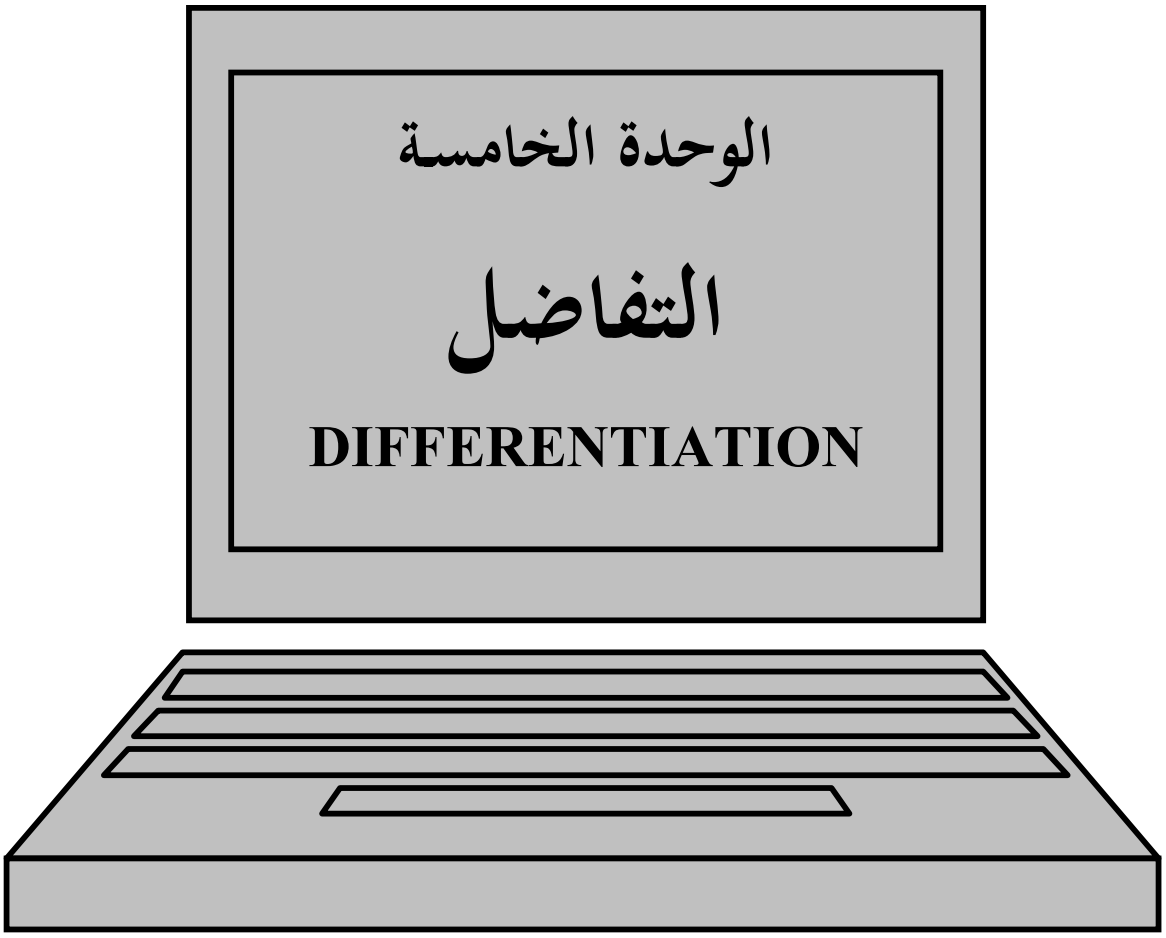
ويقصد بها القيم التي يقترب منها المتغير التابع عندما يقترب المتغير المستقل من قيمة معينة قرباً كافياً .

المراجع بالعربية

1. آيرز، فرانك (1974) : نظريات و مسائل في المصفوفات.
2. بلايت و روبرتسون (2000) : الجبر الخطي. (ج الملك سعود).
3. الدليمي و خضير و باقية (2000) : الرياضيات لطلبة الاقتصاد و العلوم الإدارية. (دار وائل– عمان)
4. سودان و السلمان و سرميتي (1884) : حساب التفاضل و التكامل. (جامعة الملك سعود)
5. عبدالفتاح عبدالمعطي محمد (2002) : مقرر أول في الجبر الخطي (جامعة الجزيرة) .
6. عثمان محمد المكي (1999) : الحسبان الأولي .(جامعة الخرطوم)
7. فرانك آيرز (1992) : حساب التفاضل و التكامل. (سلسلة شوم)
8. هب الريح و جهينة (1993) : الرياضيات و التفاضل و التكامل I و II . (جامعة التحدي)

المراجع بالإنجليزية

1. Glass, J.C. (1980) : An introduction to mathematical methods in Economics.(McGraw - Hill)
2. Hamilton, A.G. (1987): A first course in linear algebra with concurrent examples.(Cambridge)
3. Caunt, G.W. (1971): Elementary calculus .(Oxford)
4. Piskanov, N. (1974: Differential and integral calculus.(MIR)
5. Briggs,w and G.H. Brian(1969): Tutorial algebra.(University Tutorial)
6. Thomas, G. B. and R.L. Finny. (1982.) Calculus and analytic geometry.(Addison-Wesley)
7. Durell,C.V. and A. Robson.(1962) Elementary calculus.(Bell)
8. Anton, H.(1981) : : Calculus with analytic geometry. (Wiley).


الوحدة الخامسة
التفاضل
DIFFERENTIATION

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	143
أهداف الوحدة	144
1. المشتقة	145
1.1 مشتقة حاصل ضرب دالتين	149
2.1 مشتقة نسبة دالتين	151
3.1 مشتقة دالة الدالة	154
4.1 المشتقة العكسية	156
5.1 مشتقة الدالة المعلمية أوالوسيطية	157
6.1 مشتقة الدالة الضمنية	158
7.1المشتقات النمطية	159
8.1 المشتقات العليا	161
2. تطبيقات عامة للمشتقة	163
1.2 تطبيقات هندسية	163
2.2 التقريب	170
3.2 تطبيقات اقتصادية	172
3. الدوال متعددة المتغيرات	178
1.3 المشتقة الجزئية	179
2.3 النهايات العظمى والصغرى	182
الخلاصة	186
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	188
إجابات التدريبات	189
مسرد المصطلحات	195
المراجع	198

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس ،

مرحباً بك في الوحدة الخامسة من هذا المقرر وهي بعنوان **التفاضل** وهذه الوحدة تمثل الوحدة الثانية في علم الحسبان والذي يمثل الجزء الثاني في هذا الكتاب وقد بدأت الوحدة بتعريف المشتقة للدالة في متغير واحد وقد استخدمنا المبادئ الأولية (التعريف) لإيجاد المشتقة في بعض الأمثلة ثم تناولت الوحدة بعضاً من القوانين والنظريات التي جعلت من السهل جداً حل كثير من المسائل كما تطرقت الوحدة لكيفية إيجاد مشتقات دوال خاصة وإيجاد المشتقات العليا .

أيضاً قدمنا من خلال هذه الوحدة تعريفاً لميل المماس للدالة والذي هو عبارة عن مشتقة الدالة وعن طريق هذا الميل عرفنا كلاً من النهاية الصغرى والنهاية العظمى ونقطة الانقلاب وهي ماتعرف بالنقاط الحرجة .

ثم بعد ذلك تناولت الوحدة موضوع التطبيقات العملية للمشتقة في المجالات الهندسية و الاقتصادية . أيضاً في هذه الوحدة عرفنا الدوال متعددة المتغيرات ووضحنا معنى المشتقة الجزئية وكيفية إجراء الاشتقاق الجزئي لدالة ما بالنسبة لأي متغير من متغيراتها ثم قدمنا تعريفاً أوسع لموضوع النقاط الحرجة حيث رأينا أن هناك وضعاً رابعاً وهو ما يعرف بنقطة السرج إضافة إلى النهاية الصغرى والنهاية العظمى ونقطة الانقلاب .

تجد أيضاً في هذه الوحدة الكثير من الأمثلة والتدريبات وأسئلة التقويم الذاتي وذلك لكي تفهم هذه الوحدة كما ينبغي .

فمرحباً بك مرة أخرى في هذه الوحدة مع ترحيبنا التام بكل آرائك ومقترحاتك .

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

من المتوقع بعد دراستك لهذه الوحدة أن تصبح قادراً على أن:

(1) **تستخدم** مفهوم النهاية في إيجاد مشتقة دالة في متغير واحد .

(2) **تجد** المشتقة لكثير من أنواع الدوال .

(3) **تطبق** موضوع المشتقات في المسائل الهندسية .

(4) **تطبق** موضوع المشتقات في المسائل الاقتصادية .

(5) **تحدد** النقاط الحرجة للدالة في متغير واحد .

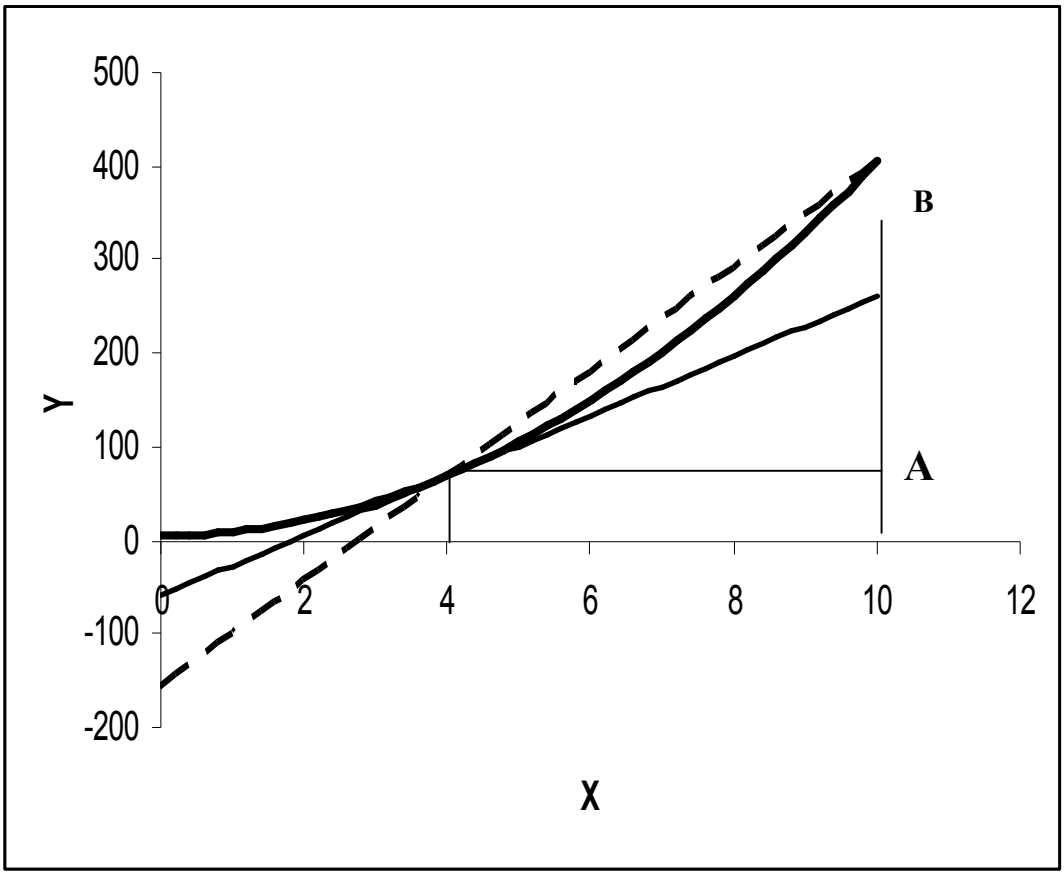
(6) **تقرب** قيمة المتغير التابع .

(7) **تجد** المشتقة الجزئية لدالة في متغيرين .

(8) **تحدد** النقاط الحرجة للدالة في متغيرين .

1. المشتقة Derivative

افرض أن y دالة فى x وافرض أنه عندما تزيد x بمقدار Δx تتغير y بمقدار صغير Δy وعندما يؤول Δx إلى الصفر فإن Δy يؤول إلى الصفر أيضاً. قد يكون أى من Δx و Δy موجبا أو سالبا. وبذلك عندما x تزيد إلى $(x+\Delta x)$ فإن y تزيد إلى $y(x+\Delta x)=y+\Delta y$.



مثال ذلك

افرض أن $y=2x^2+1$. فإذا زادت x بمقدار 0.1 فإن y تصبح

$$y + \Delta y = 2(x + 0.1)^2 + 1$$
$$= 2x^2 + 1 + (0.4x + 0.02)$$

أى أن $\Delta y = (y + \Delta y) - y = 0.4x + 0.02$.

فإذا كانت $x = 3$ وزادت بمقدار 0.1 فإن $\Delta y = 1.22$.

فى هذه الوحدة نريد أن نعرف نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما Δx تؤول إلى الصفر. أى نريد

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هذه النهاية، إن وجدت، تسمى مشتقة y بالنسبة لـ x ، ويرمز لها بالرمز

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x}$$

تجدر الإشارة إلى أن $\frac{dy}{dx}$ مجرد رمز وليس ناتج قسمة dy على dx. فى بعض الأحيان يرمز لهذه المشتقة بالرمز $y'(x)$ أو $D_x y$.

مثال:

افرض أن

$$Y = 2x + 3$$

أوجد مشتقة y بالنسبة لـ x.

الحل :

$$y = 2x + 3$$
$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x) + 3$$
$$\therefore \Delta y = 2\Delta x$$

بالطرح:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \quad 2 = 2$$

مثال :

جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = a\,x + b$ ، حيث a و b ثابتان.

الحل:

$$y = ax + b$$
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$$
$$= ax + b + a\Delta x$$
$$\therefore \Delta y = a.\Delta x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

مثال :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $a = y$ ، ثابت.

الحل:

$$y = a$$
$$y + \Delta y = a$$
$$\Delta y = 0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

أي

مشتقة الثابت تساوى الصفر

مثال :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = a\,x^2$.

الحل :

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$

$$= ax^2 + 2ax.\Delta x + a\Delta x^2$$

$$\therefore \mathrm{A}y = 2ax.\Delta x + a\Delta x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\mathrm{A}x \to 0} \frac{2ax.\Delta x + a\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= 2a.x + a.0 = \underline{\underline{a.2x}}$$

بالمثل يمكن برهان مشتقة $y = x^n$ تساوى $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

من خواص النهايات نلاحظ أن مشتقة مجموع (فرق) دالتين يساوى مجموع (فرق) مشتقتيهما.

مثال:

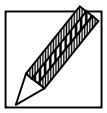
أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = a\,x^4 + b\,x^3 + cx^2$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = d\frac{\left(ax^4\right)}{dx} - d\frac{\left(bx^3\right)}{dx} + d\frac{\left(cx^2\right)}{dx}$$

$$\underline{\underline{= 4ax^3 - 3bx^2 + 2cx}}$$

تدريب (1) :



أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

a) $y = 2x^2 - 4x + 7.$ b) $y = x^3 - 7x^2 + 5x - 3.$

1.1 مشتقة حاصل ضرب دالتين Derivative of a Product

افرض أن $y = y_1.y_2$ حيث y_1, y_2 دالتان فى x ، ويراد $\frac{dy}{dx}$. عندما تزيد x بمقدار Δx فإن y تزيد بمقدار Δy ، y_1 تزيد بمقدار Δy_1 و y_2 تزيد بمقدار Δy_2 ، وكلها تؤول إلى الصفر عندما Δx تؤول إليه.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x}$$

$$y = y_1.y_2$$

$$\Delta y = (\Delta y_1.y_2 + y_1.\Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \ . \ y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} .. \Delta y_2 \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x}.y_2 + y_1 . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2$$

$$= \frac{dy_1}{dx}.y_2 . + y_{1.} \frac{dy_2}{dx} .$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

يساوى مشتقة الأولى فى الثانية زائدا الأولى في مشتقة الثانية.

مثال :

فاضل y بالنسبة لـ x إذا كانت

$$y = (x^2 + 4x - 3)(3x^3 + 2x + 1)$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+4x-3).(3x^3+2x+1)+(x^3+4x-3)\cdot\frac{d}{dx}(3x^3+2x+1)$$

$$= (2x + 4)(3x^3 + 2x + 1) + (x^2 + 4x - 3)(9x^2 + 2)$$

$$= 15x^4 + 48x^3 - 21x^2 + 18x - 2$$

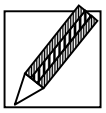
بالطبع يمكن ضرب الدالتين أولاً ثم نفاضل:

$$y = 3x^5 + 12x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\underline{15x^4 + 48x^3 - 21x^2 + 18x - 2}}$$

ملاحظة: فى بعض الاحيان تكون الطريقة الأولى هى الأسهل وفى أحيان أخرى يكون العكس.

تدريب (2) :



أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة الآتية :

$$y = (x + x^{-1})(x^2 + x^{-2})$$

2.1 مشتقة نسبة دالتين Quotient

افرض أن y_1 و y_2 دالتان فى x وأن $y = \frac{y_1}{y_2}$. افرض أن x تزيد بمقدار Δx ، تبعا لذلك تزيد y_1 و y_2 و y بالمقادير Δy_1 و Δy_2 و Δy على التوالى. إذا مشتقة y بالنسبة لـ x هى :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y_1 \to 0 \\ \Delta y_2 \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y_1 \to 0 \\ \Delta y_2 \to 0}} \left[\frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 \left(y_1 + \Delta y_1 \right) - y_1 (y_2 + .\Delta y_2)}{y_2 \cdot \Delta x \left(y_2 + \Delta y_2 \right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 \, \Delta y_1 - y_1 \Delta y_2}{y_2 \, \Delta x (\, y_2 + \Delta y_2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 \frac{\Delta y_1}{\Delta x} - y_1 . \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{y_2 \left(y_2 + \Delta y_2 \right)}$$

$$= \frac{y_2 \frac{dy_2}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}}{y^2 + 0}$$

مشتقة نسبة دالتين تساوى المقام فى مشتقة البسط ناقص البسط فى مشتقة المقام والناتج مقسوم على مربع المقام.

مثال:

فاضل $y = \frac{1}{ax+b}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax+b)\frac{d}{dx}1 - 1.\frac{d}{dx}(ax+b)}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{(ax+b).0 - 1.a}{(ax+b)^2} = \underline{\underline{\frac{-a}{(ax+b)^2}}}$$

مثال

فاضل

$$y = \frac{5-6x^3}{2x^2+3x}.$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2+3x)\frac{d}{dx}(5-6x^3) - (5-6x^3)\frac{d}{dx}(2x^2+3x)}{(2x^2+3x)}$$

$$= \frac{(2x^2+3x)(-18x^2) - (5-6x^3)(4x+3)}{(2x^2+3x)}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{12x^4+36x^3+20x+15}{(2x^2+3x)^2}}}$$

مثال:

فاضل : $y = \frac{1}{2x^3 + 3x}$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(2x^3 + 3x\right).\frac{d}{dx}(1) - 1.\frac{d}{dx}\left(2x^3 + 3x\right)}{\left(2x^3 + 3x\right)^2}$$

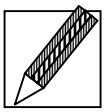
$$= \frac{\left(2x^3 + 3x\right).0 - 1.\left(6x^2 + 3\right)}{\left(2x^3 + 3x\right)^2} = \frac{-\left(6x^2 + 3\right)}{\left(2x^3 + 3x\right)^2}$$

بصفة عامة

مشتقة $\frac{1}{y(x)}$ تساوى $\frac{-\left(\frac{d\ y(x)}{dx}\right)}{[y(x)]^2}$.

أو مشتقة مقلوب الدالة = $\frac{-\text{ مشتقة الدالة}}{\text{مربع الدالة}}$.

تدريب (3) :



أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة الآتية :

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2x + 3}$$

3.1 مشتقة دالة الدالة Function of a Function

افرض أن z دالة فى y وأن y دالة فى x، ونريد $\frac{dz}{dx}$. نسمى z دالة في دالة فى x، أى $z = z(y(x))$.

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \left(\frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

أى مشتقة حاصل دالة دالة في x تساوى مشتقة الأولى بالنسبة للثانية × مشتقة الثانية بالنسبة لـ x.

مثال :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = (2x+1)^2 + 3(2x+1) + 5$$

الحل :

ضع

$$w = 2x+1$$

$$\therefore \quad y = w^2 + 3w + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = (2w + 3).2 = 4w + 6$$

$$= 4(2x + 1) + 6 = \underline{\underline{8x + 10}}$$

مثال :

أوجد $\frac{dz}{dx}$ إذا كان $y = x^4 \quad , z = 2y^2 + 3y - 1$.

الحل :

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 3 \quad , \frac{dy}{dx} = 4x^3$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} . \frac{dy}{dx} = \underline{\underline{4x^3(4y + 3)}}$$

ويمكن أن نعوض فى الإجابة هذه $y = x^4$ لنحصل على

$$\frac{dz}{dx} = 4x^3\left(4x^4 + 3\right) = \underline{\underline{16x^7 + 12x^3}}$$

ولكن هذا ليس ضرورياً إلا في حالات خاصة، مثلاً إذا أردنا قيمة المشتقة $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 3$.

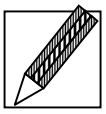
بالمثل لمشتقة دالة دالة الدالة:

$$w = w(z), z = z(y), y = y(x)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} . \frac{dy}{dx}$$

ولاحظ أن هذه النتيجة وكأننا نختصر فى الجانب الأيمن .

تدريب (4) :



جد $\frac{d\,y}{d\,x}$ إذا كان $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^4 + 5x$

4.1 المشتقة العكسية Inverse Derivative

افرض أن y دالة فى x ونريد $\frac{dx}{dy}$ ، فإن

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dx}} \qquad = \underline{\underline{\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)}}}$$

أي أن مشتقة x بالنسبة لـ y تساوى مقلوب مشتقة y بالنسبة لـ x.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)} \quad \text{أو} \quad \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

مثال :

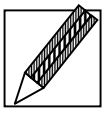
افرض أن $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$. أوجد $\frac{dx}{dy}$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 - 6x} = \underline{\underline{\frac{1}{6x(x-1)}}} .$$

تدريب (5) :



جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = 4x^3 - 5x + 1$

5.1 مشتقة الدالة المعلمية أوالوسيطية Parametric Functions

افرض أن x و y دالتان فى w، ونريد المشتقة $\frac{dy}{dx}$. يسمى المتغير w معلما أو وسيطا ، وتسمى العلاقة بين x و y علاقة وسيطية – أى تعتمد على متغير وسيط.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta w \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta w \to 0}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dw} \right)}{\left(\frac{dx}{dw} \right)}$$

مثال :

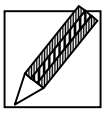
أوجد $\frac{dy}{dx}$ أذا كان :

$$y = 7t^2 - 3t + 1$$
$$x = 6t^3 + 2t^2 + t$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)} = \underline{\underline{\frac{14t - 3}{18t^2 + 4t + 1}}}$$

تدريب (6) :



أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

$y = 2at,\ x = at^2.$

6.1 مشتقة الدالة الضمنية Indirect Functions

افرض أن العلاقة بين x و y لم تعط بصورة صريحة بل فى شكل $f(x,y)=0$ ، ويراد إيجاد $\frac{dy}{dx}$. بالطبع إذا أمكن إيجاد y صراحة بدلالة x فيمكن بعد ذلك أن نفاضل بالنسبة لـ x؛ لكن هذا ليس ضرورياً وفى كثير من الأحيان غير ممكن. لذلك نفاضل حدود $f(x,y)$ بالنسبة ل xو y. عند التفاضل بالنسبة لـ y نستخدم قانوني مشتقة دالة الدالة وبالنسبة للحدود التي قيها المنغيران نستخدم قانون حاصل الضرب :

مثال :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $2x^3y^2+3xy^3-4xy=0$.

الحل :

بالنسبة للحد الأيسر :

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3y^2\right)=2\left[\left(\frac{d}{dx}x^3\right)y^2+x^3\frac{d(y^2)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right]$$

$$=2\left[3x^2y^2+x^3.2y.\frac{dy}{dx}\right]$$

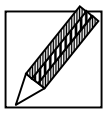
إلخ. إذا

$$\left(6x^2y^2+4x^3y\frac{dy}{dx}\right)+3\left(x.3y^2\frac{dy}{dx}+1.y^3\right)-4\left(x\frac{dy}{dx}+1.y\right)=0$$

$$=\left(6x^2y^2+3y^3-4y\right)+\frac{dy}{dx}\left(4x^3y+9xy^2-4x\right)=0$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\frac{dy}{dx}=-\frac{6x^2y^2+3y^3-4y}{4x^3+9xy^2-4x}}}$$

تدريب (7) :



أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة الآتية :

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 2y = 0$$

7.1المشتقات النمطية Standard Derivatives

الأمثلة السابقة فى الاشتقاق تصور الأشكال المختلفة للعلاقة بين متغيرين y و x ، وهى تتردد كثيرا فى المسائل ولذلك تسمى نمطية. هنالك أشكال آخرى ايضا ترد بكثرة فى المسائل. نورد هنا تلخيصا للمشتقات التى برهناها ونضيف إليها عددا من المشتقات النمطية دون الخوض فى البراهين:

$$y = x^n \qquad \frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1} \quad (n \neq 0)$$

$$z = y_1 + y_2, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$y = \frac{1}{z(x)}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{z^2}$$

$$z = \frac{y_1}{y_2} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}}{y_2^2}$$

$$z = y_1.y_2 \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dy_1}{dx}.y + \frac{dy_2}{dx}.y_1$$

$$y = \log_e x = \ln x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad e = \text{ثاب}$$

$$y = e^x \qquad \frac{dy}{dx} = e^x = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}$$

$$y = a^x \qquad \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

(الجيب) $\dfrac{d \sin x}{dx} = \cos x$ (جيب التمام)

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

(الظل) $\dfrac{d \tan x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (مربع القاطع)

$$\frac{d \sec x}{dx} = \sec x \cdot \tan x$$

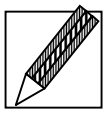
(قاطع التمام) $\dfrac{d \cos ec\, x}{dx} = -\cos ec\, x \cdot \cot x$

(ظل التمام) $\dfrac{d \cot x}{dx} = -\cos ec^2 x$

ملاحظة:

بما أن $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تسمى معدل الزيادة فى y التى تقابل زيادة صغيرة فى x.
الزيادة هنا قد تكون موجبة أو سالبة.

تدريب (8) :



أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

a) $y = \ln (4x^2 - 3x + 2)$
b) $y = 7 \sin (x^2 + 3)$.
c) $y = \tan^{-1} x$.

8.1 المشتقات العليا Higher Order Derivatives

افرض أن y دالة فى x . كما وجدنا $\frac{dy}{dx}$ معدل تغير y بالنسبة للتغير فى x فيمكن تعريف معدل تغير $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة للتغير فى x ؛ أى $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. يسمى هذا المعدل المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x ونرمز لها بالرمز $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

بالمثل المشتقة الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$

وهكذا.

مثال :

أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ و $\frac{d^3y}{dx3}$ إذا كانت $y = 2x^4 + 3x + \sin x$

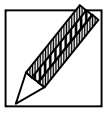
الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 3 + \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(8x^3 + 3 + \cos x\right) = \underline{\underline{24x^2 - \sin x}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(24x^2 - \sin x)}{dx} = \underline{\underline{48x - \cos x}}$$

تدريب (9) :



جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدوال الآتية :

a) $y = 3x^3 - 9x^2 + 7x + 3$

b) $2xy + y = 2.$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

$y = 2x^2 - 4x + 7.$

1. $x^2 + y^2 = 9.$
2. $y = R \cos x,\ y = R \sin x .$
3. $y = 7 \sin (x2 + 3).$
4. $y = \cot\text{-}1\ x .$.
5. $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
6. $y = e\text{-}(3x + 1)$
7. $y \cos 3x = x \sin 2y.$
8. $y = w2\ ,\ x = 2 \sin u\ ,\ u = x2\ ex$
9. $y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2x + 3}$
10. $5\ x + 4x^3 - 3y^5 + 2xy^2 + 7\ = 0.$
11. $x = \frac{t^2}{1+t}$. $y = \frac{t}{1+t}$

2) أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدوال الآتية :

1. $x^2 - y^2 = 1.$
2. $y = \sin x + \cos x.$
3. $y = e^{(2x+3)}.$
4. $y = 4w^2 + 1\ ,\ \ w = \sin x.$

2. تطبيقات عامة للمشتقة General Applications

1.2 تطبيقات هندسية Geometrical Applications

عزيزي الدارس هناك تطبيقات هندسية لمشتقة الدالة نذكر منها ما يلي مع تقديم بعض الأمثلة :

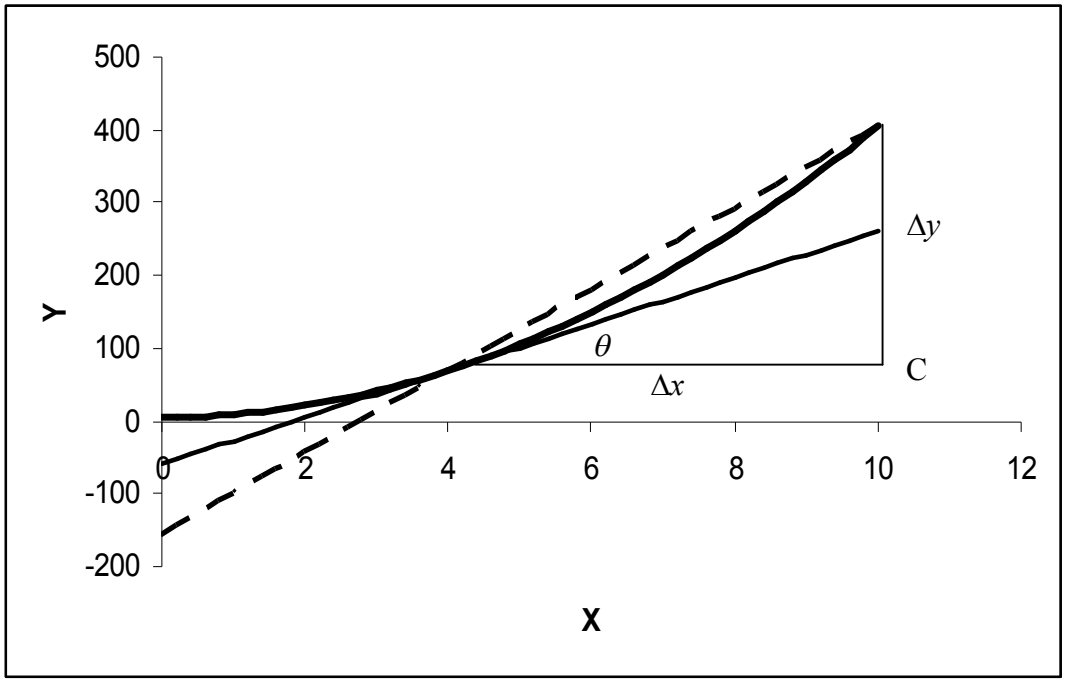
أ) ميل المنحنى : Slope of a curve

افرض أن y دالة فى x ، وافرض أننا بيّنا هذه العلاقة بالرسم البيانى. لنرى ما تعنيه $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة للمنحنى عند نقطة معينة A. من الشكل

$$A\ (x,y)\ \text{،}\quad B\ (x+\Delta x, y+\Delta x)\ \text{،}\quad C(x+\Delta x, y)$$

من مثلث CBA قائم الزاوية عند C ، ظا $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{BC}{AC}=\theta$. فإذا جعلنا $\Delta x \to 0$ فإن B تتحرك على المنحنى نحو A. و إذا أخذنا النهاية

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

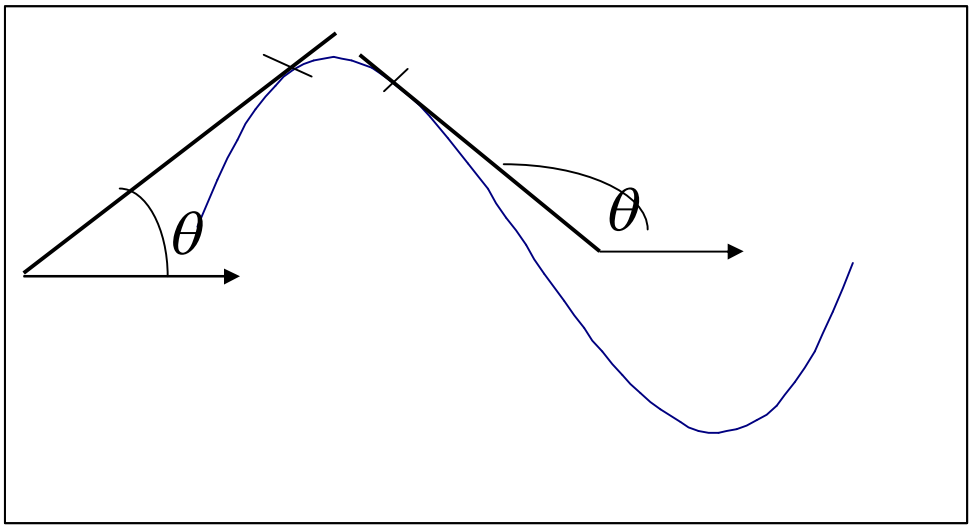


نجد أن AB يصبح مماسا (tangent) عند النقطة A . يسمى ظل الزاوية θ التى ينشؤها المماس مع الاتجاه السينى الموجب بميل المنحنى (slope) .

ميل المنحني = ظا θ

ميل المماس عند $\frac{dy}{dx} = \tan\theta = A$

وتكون قيمة هذه المشتقة موجبة إذا كان المنحنى صاعدا إلى اليمين و صفرا إذا كان المنحنى موازيا للمحور السينى و سالبا إذا كان المنحنى هابطا إلى اليمين.



مثال :

أوجد متى يكون المنحنى $y = x^2 - 4x + 9$ هابطا و صاعدا وموازيا للمحورالسيني.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad , \quad x > 2$$

$$< 0 \quad x < 2$$

$$= 0 \quad x = 2$$

أي يكون المنحنى صاعدا عندما $2 < x$ ، هابطا في المنطقة $X < 2$ ، و موازيا للسينى عند $x = 2$. يقال في هذه الحالة أن للمنحنى نهاية صغرى minimum عند A، حيث $\frac{dy}{dx} =$ صفر و قيمة $\frac{dy}{dx}$ تتحول من سالب قبلها إلى موجب بعدها.

(ب) القيم القصوى للدالة :

نسمي النقاط التي تتغير عندها إشارة ميل منحنى الدالة بالقيم القصوى فيقال إن للدالة نهاية عظمى عند نقطة x = a إذا كان الميل قبل a موجب وبعدها سالب ويقال إن للدالة نهاية صغرى عند a إذا كان الميل قبل a سالب وبعدها موجب ويقال إن للدالة نقطة انقلاب إذا لم يتغير الميل قبل a ولا بعد a ولكن فقط انقلب المماس من أعلى الدالة إلى فوقها أو العكس .

مثال :

أوجد متى يكون المنحنى

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$$

صاعدا، و هابطا و موازيا للمحور السينى.

الحل :

ميل المنحنى

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 36$$
$$= 6(x+2)(x-3)$$

وبذلك يكون الميل سالبا إذا كان $-2 < x < 3$ ، موجبا إذا x > 3 أو x < -2 ومساويا الصفر عندما x = −2 أو x = 3 .

3 = أو x = -2 . بالتالى يكون المنحنى صاعدا قبل $x = -2$ أو بعد $x = 3$ ، هابطا عندما $-2 < x < 3$ ، وموازيا للمحور السينى عند النقطتين $x = -2$ و $x = 3$.

لاحظ أن للمنحنى نهاية عظمى maximum عند x = -2 لأن الميل عندها يساوي الصفرو قبلها موجب و بعدها سالب؛ ونهاية صغرى minimum عند x = 3. وبذلك:

1) يكون المنحنى صاعدا عندما $\frac{dy}{dx} > 0$ ، و هابطا عندما $\frac{dy}{dx} < 0$.

2) عندما $\frac{dy}{dx} = 0$ يكون للمنحنى نهاية

(أ) عظمى إذا كان $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

(ب) صغرى إذا كان $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

وتكون النتيجة (2) هى الاختبار لمعرفة النهايات الصغرى والعظمى .

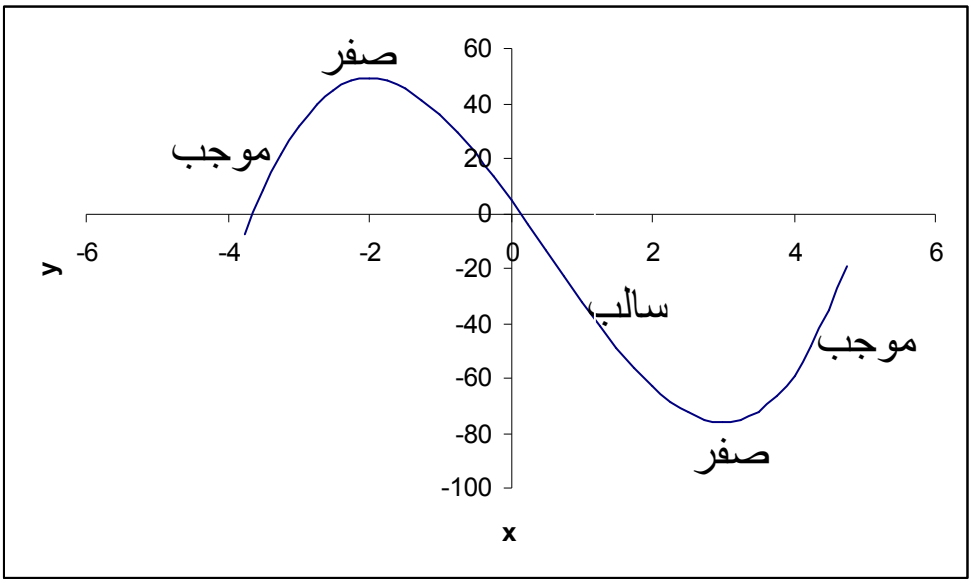
ماذا يحدث عندما تكون $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ؟ عند x = a ؟

فى الواقع هنالك 3 حالات:

أولاً : نهاية عظمى إذا كان $\frac{dy}{dx} > 0$ قبل $a = x$ و $\frac{dy}{dx} < 0$ بعد $a = x$.

ثانياً : نهاية صغرى إذا كان $\frac{dy}{dx} < 0$ قبل $a = x$ و $\frac{dy}{dx} > 0$ بعد $a = x$.

ثالثاً : نقطة انقلاب point of inflexion إذا لم تتغير إشارة $\frac{dy}{dx}$ قبل وبعد $a = x$. ويقصد بالانقلاب أن مماس المنحنى ينقلب من جانب المنحنى إلى الجانب الآخر.و عادة لاتكون نقطة الانقلاب ظاهرة إلا إذا أخذنا قيما قريبة جداً جداً من $a = x$.



علامات ميل منحنى الدالة $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

تدريب (10) :

أوجد متى يكون المنحنى

$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

هابطا و صاعدا و موازيا للمحور السيني.

مثال :

جد ميل المنحنى $y = 3x^2 + 2x - 1$ عندما $x = 1$ ، -1.

الحل :

الميل $\frac{dy}{dx} = 6x + 2$.

$$\frac{dy}{dx} = -4 \quad \Leftarrow \quad x = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \quad \Leftarrow \quad x = 1$$

∴ ميل المنحنى (4−) عندما $x = -1$ و 8 عندما $x = 1$.

مثال :

أوجد النقطة A ا لتى عندها يكون المماس للمنحنى $y = x^2 - 2x + 3$ موازيا لمحور X.

الحل :

$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$. الميل = الصفر عند x = 1. عندها $y = 1 - 2x + 3 = 2$ ، إذا النقطة هى $A(1,2)$.

مثال :

لدى طفل سلك طوله 300 مم. يريد أن يشكل منه مستطيلا. أوجد أبعاد المستطيل إذا أريد أن تكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل :

افرض أن طول المستقيم x مم. ∴ عرضه (x−150) مم، ومساحته $A = x(150-x)$

$$A = 150x - x^2$$

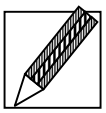
$$\frac{dA}{dx} = 150 - 2x \qquad \therefore$$

عند النهاية العظمى $\frac{dA}{dx} = 0$. أى $x = 75$ مم

وبالتالى العرض 75 مم أيضا. المشتقة الثانية :

$\frac{d^2A}{dx^2} = -2$. إذا النقطة نهاية عظمى. أى المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الشكل مربعا ضلعه 75 مم.

تدريب (11) :



أوجد النهايات العظمى و الصغرى و نقاط الانقلاب للمنحنيات الآتية :

a) $y = x^4 - 2x^2$. b) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

2.2 التقريب Approximation

افرض أن $y = f(x)$ ويراد تقدير الزيادة (النقصان) فى y [ونرمز لها بالرمز Δy (دلتا y) عندما x تزيد (أو تنقص) بمقدار صغير Δx. بالطبع الزيادة الحقيقية هى $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. يمكن تقريب هذه القيمة بالنظر لتعريف المشتقة:-

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وبما أن Δx صغيرجدا وبالتالى Δy كذلك فإننا يمكن اعتماد التقريب

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

وبالتالى $\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$.

مثال :

دائرة نصف قطرها 5 سم. قدر الزيادة الناتجة فى المساحة عندما نصف القطر يزيد بمقدار 0.2 . (a) . 0.1 (b) . 0.01 (c) وقارنها بالقيمة الحقيقية للزيادة.

الحل :

مساحة الدائرة $A = \pi r^2$ لذا $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$.

(a) $\Delta x = 0.2 : \Delta A \approx 2\pi r.\Delta r$

$= 2\pi \times 5 \times 0.2 = \underline{\underline{2\pi}}$

الزيادة الحقيقية هى $\pi_x 5.2^2 - \pi.5^2 = 2.04$

(b) $\Delta x = 0.1 : \Delta A \approx 2\pi_x 5_x 0.1 = \underline{\underline{\pi}}$

الزيادة الحقيقية = 1.01π الفرق = 0.01 %.

(c) $\Delta x = 0.01 : \Delta A \approx 2\pi_x 5_x 0.1 = \underline{\underline{0.1\pi}}$

الزيادة الحقيقية = 1.1001 الفرق = 0.1 %.

نلاحظ أنه كلما قاربت Δx الصفر فإن الفرق بين التقريب والقيمة الحقيقية يصغر.

مثال :

افرض أن $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

قدر الزيادة فى y عندما x تزيد من 3 إلى 3.1 .

الحل :

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$\therefore \Delta y \approx 6x(x-1).\Delta x$$

$$= 6 \times 3(3-1) \times 0.1 = \underline{\underline{3.6}}$$

3.2 تطبيقات اقتصادية

في مجال التجارة و الاقتصاد توجد عدة متغيرات تهم المنتج و المستهلك على السواء. فهناك الأسعار (prices) و كمية السلعة المعروضة (العرض supply) و الكمية التي يرغبها المستهلكون (الطلب demand) إضافة لتكلفة الإنتاج (cost) و العائد (return) و الربح (interest).

تنقسم الأسواق بصفة عامة إلى نوعين رئيسين (قد توجد بينهما ظلال رمادية) :

الأول : الاحتكار (monopoly) حيث يحتكر منتج واحد السلعة يستطيع التحكم في العرض و بذلك يتمكن من تحديد السعر الذي يريد ليحصل على أكبر عائد. وهذه الحالة تنطبق على منتجين قلة على اتفاق بينهم ، و بذلك يكونوا في حكم المنتج الواحد. و كمثال لهذا السوق عندنا سوق المشتقات البترولية.

الثاني : السوق الحر (free market) الذي فيه منتجون كثر لا يستطيع أي منهم السيطرة على الكميات المعروضة من السلعة و بالتالي الأسعار. فى هذا السوق السعر العالي يشجع المنتجين لزيادة إنتاجهم، و هذه الزيادة تؤثر سلباً في الأسعار بالنسبة للمنتجين فيضطرون لخفض السعر، وهكذا، حتى تستقر الكميات المعروضة و الطلب و بالتالي الأسعار إلى ما تسمى حالة الاتزان (equilibrium level) التي فيها العرض يساوي الطلب.

في ما يلي نعرف بعض الدلائل الاقتصادية (indexes) التي تري معدلات التغير في العرض و الطلب و السعر و التكلفة و الإيراد و الربح بالنسبة للتغيرات الصغيرة في الطلب ، تطبيقا لمفهوم المشتقة.

افرض أن الطلب Q_D العرض Q_S و السعر (Q_D)P و تكلفة الإنتاج (Q_D)C و العائد $R(Q_D) = P(Q_D).Q_D$ و بالتالي الربح $I(Q_D) = R(Q_D) - C(Q_D)$:

تعريف :

مرونة العرض price-supply elasticity : تعرف مرونة العرض بالنسبة للسعر، و يرمز لها بالرمز E_S ، كالآتي :

نسبة الزيادة في العرض %

نسبة الزيادة المقابلة في السعر %

$$E_s = \frac{\left(\frac{\Delta Q_S}{Q_S}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P}\frac{P}{Q_S} \quad ; \quad E_S \geq 0.$$

فإذا كانت الزيادتان صغيرتين ($\Delta P \rightarrow 0$, $\Delta Q \rightarrow 0$) فإن

$$E_D = \frac{P\, \mathrm{d}\, \mathrm{Q_d}}{P\, \mathrm{dp}}$$

أما إذا كانت الزيادتان كبيرتين فيستخدم متوسط السعرين و الكميتين في التعويض عن P و Q:

$E_S > 1$ تعني أن العرض مرن .

$E_S = 1$ تعني أن العرض واحدي.

$E_S < 1$ تعني أن العرض غير مرن.

تعريف :

مرونة الطلب السعرية price-demand elasticity :

تعرف مرونة الطلب بالنسبة للسعر كالآتي :

نسبة الزيادة في الطلب %

نسبة الزيادة المقابل في السعر %

و يرمز له بالرمز E_D. أي

$$E_D = \frac{\left(\frac{\Delta Q_D}{Q_D}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{\Delta Q_D}{\Delta P}\frac{P}{Q_D} \quad ; \quad E_D \geq 0 .$$

فإذا كان التغيران صغيرين ($\Delta P \to 0, \Delta Q_D \to 0$) فإن $E_S = \frac{P}{Q_d}\frac{dQ_d}{dp}$.

أما إذا كان التغيران كبيرين فيستخدم متوسط السعرين و الكميتين في التعويض عن P و Q:

$E_D > 1$ تعني أن الطلب مرن .

$E_D = 1$ تعني أن الطلب واحدي.

$E_D < 1$ تعني أن الطلب غير مرن.

مثال :

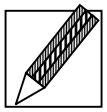
أوجد مرونتي العرض و الطلب إذا كانت زيادة السعر من 119 إلى 136 قابلتها زيادة في العرض من 12000 إلى 15000 و نقص في الطلب من 12000 إلى 11000 .

الحل :

$$\Delta P = 17, \qquad \overline{P} = 127.5,$$
$$\Delta Q_D = 1000, \quad \overline{Q_D} = 11500,$$
$$\Delta Q_S = 3000, \quad \overline{Q_S} = 13500$$
$$E_S = \left(\frac{3000}{13500}\right)\left(\frac{127,5}{17}\right) = \underline{\underline{1.67}} \ ,$$
$$E_D = \left(\frac{1000}{11500}\right)\left(\frac{127.5}{17}\right) = \underline{\underline{0.65}}$$

إذا العرض مرن إلا أن الطلب غير مرن.

تدريب (12) :



جد مرونتي العرض و الطلب إذا كانت زيادة السعر من 35 إلى 40 أدت إلى زيادة العرض من 700 إلى 800 و نقص في الطلب من 600 إلى 520.

تعريف

السعر الحدي marginal price :

هو معدل التغير في السعر بالنسبة للتغير في الطلب ، $\frac{d\,P(Q_D)}{d\,Q_D}$.

تعريف

الإيراد الحدي marginal return :

هو معدل التغير في الإيراد بالنسبة للتغير في الطلب ، $\frac{d\ R(Q_D)}{d\,Q_D}$.

تعريف

التكلفة الحدية marginal cost :

هو معدل التغير في التكلفة بالنسبة للتغير في الطلب $\frac{d\,C(Q_D)}{d\,Q_D}$.

تعريف

الربح الحدي marginal profit :

هو معدل التغير في الربح بالنسبة للتغير في الطلب $\frac{d[\ R(Q_D) - C(Q_D)]}{d\,Q_D}$.

تحسب هذه المعدلات عند آخر كمية. إذا لم تعط المقادير أعلاه في شكل دوال في الطلب، بل أعطيت المقادير في زمنين مختلفين فتستخدم متوسطاتها كما سبق..

مثال :

افرض أن العرض و الطلب معطيان بالمعادلتين الآتيتين :

$$Q_S = 400 + 12\,p + 2\,p^2$$

و $$Q_D = 1000 - 2\,p - p^{2}$$

على التوالي. جد

(أ) سعر و كمية حالة الاتزان.

(ب) مرونتي العرض و الطلب عند سعر الاتزان و السعر $p= 15$.

(جـ) السعرين الحديين للعرض و الطلب عند السعرين أعلاه.

الحل :

(أ) عند حالة الاتزان $Q_S = Q_D$. إذا

$$400 + 12\,p + 2\,p^2 = 1000 - 2\,p - p^2$$

$$3\,p^2 + 14\,p - 600 = 0.$$

إذا. $Q= 832$ و $p =12$.

(ب) $\frac{dQs}{dp} = 12 + 4\,p$.

مرونة العرض = $\frac{(12 + 4\,p)p}{400 + 12\,p + 2\,p2}$

= 86.54 عند p = 12 ، غير مرن.

= 104.85 عند p = 15 ، مرن.

$$\frac{dQ_D}{dp} = -2(1 + p)$$

مرونة الطلب = $\left|\frac{-2(1+p)p}{1000 - 2\,p - p^2}\right|$

= 37.50 % عند p = 12 ، غير مرن .

= 64.43 % عند p = 15 ، غير مرن .

(جـ) السعر الحدي للطلب (عند p = 12) = $\frac{dp}{dQ} = \frac{1}{\left(\frac{dQ}{dp}\right)}$

السعر الحدي = $\frac{dp}{dQ} = \frac{1}{\left(\frac{dQ}{dp}\right)}$.

السعر الحدي للطلب = $\frac{1}{\left(\frac{dQ}{dp}\right)}$ = $\frac{1}{12+4p}$

= $\frac{1}{60}$ = $\underline{\underline{0.0167}}$ عند p = 12.

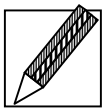
= $\frac{1}{72}$ = $\underline{\underline{0.0139}}$ عند p = 15 .

السعر الحدي للعرض = $\frac{1}{\left(\frac{dQ}{dp}\right)}$ = $\frac{1}{-2-2p}$

= $\frac{1}{-26}$ = $\underline{\underline{0.0385}}$ عند p = 12 .

= $\frac{1}{-32}$ = $\underline{\underline{0.0314}}$ عند p = 15. .

تدريب (13) :



افرض أن العرض و الطلب معطيان بالمعادلتين الآتيتين :

$Q_S = 600 + p + 3p^2$

و $Q_D = 1785 - 3p - 2p^{2}$

على التوالي. أوجد

(أ) سعر و كمية حالة الاتزان.

(ب) مرونتي العرض و الطلب عند سعر الاتزان و السعر p= 18 .

(جـ) السعرين الحديين للعرض و الطلب عند السعرين أعلاه.

3. الدوال متعددة المتغيرات Multivariate Function

في ما مضى تعرفنا على متغير y تابع لمتغير واحد x. يمكن أيضا أن يكون المتغير تابعا لأكثر من متغير واحد، مثلاً قد تكون y معرفة بدلالة X_1 و X_2 و X_3 .

تعريف :

الدالة متعددة المتغيرات هى دالة تعتمد على متغيرين أو أكثر. مثلاً مساحة مستطيل تعتمد على الطول والعرض

$$A = l\, w$$

وحجم متوازى المستطيلات يعتمد على الطول والعرض والارتفاع : $V = l\, w\, h$، وهكذا. وبينما كانت الدالة فى متغير واحد تمثل منحنى فإن الدالة فى متغيرين تمثل سطحا وفى أكثر من متغيرين تمثل ما يسمى سطحا فوقيا hyper plane وهو شكل تخيلى فقط لا يمكن رسمه. فى هذا البند سنهتم بالدوال فى متغيرين فقط، وسنرى كيف نشتقها وما معنى مشتقاتها.

1.3 المشتقة الجزئية Partial Derivative

افرض أن لدينا دالة :

$$z = f(x, y) \ .$$

تعريف :

المشتقة الجزئية هى ناتج تفاضل المتغير التابع z بالنسبة لأحد المتغيرين باعتبار المتغير الثانى ثابت.

عند ما نفاضل بالنسبة لـ x مثلاً نرمز للمشتقة بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$ وبالمثل التفاضل بالنسبة لـ y يعطى $\frac{\partial z}{\partial y}$. وكما يمكن التفاضل أكثر من مرة بالنسبة للدوال ذات المتغير الواحد، فيمكن هنا الاشتقاق مرتين أو ثلاث مرات الخ. لكن قد يكون الاشتقاق فى المرة الثانية بالنسبة لمتغير الاشتقاق الأول أو بالنسبة للمتغير الثانى:

$$z = f(x, y)$$

الاشتقاق الأول يعطى $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$

الاشتقاق الثانى يعطى $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ويمكن أن يبرهن أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

أى أن ترتيب الاشتقاق بالنسبة لـ x و y لايؤثر في الناتج.

مثال :

إذا كان $z = x^2 + 5xy - y^2 + 3y - x + 1$ ، أوجد المشتقات الأولى والثانية.

الحل :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 5y - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x - 2y + 3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right), = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + 5y - 1\right)) \quad = 5.$$

$$= \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), = \frac{\partial}{\partial x}((5x - 2y + 3) \ = 5)$$

لاحظنا فى حالة الدالة فى متغير واحد أن $\frac{dy}{dx}$ تمثل ميل المماس (الذى يسمى أيضا ميل المنحنى) عند النقطة العامة على المنحنى. وعندما نشتق الدالة $z = f(x, y)$ بالنسبة لـ x فهذا يعطينا ميل السطح فى اتجاه محور x ، والمشتقة بالنسبة لـ y تعطى الميل فى اتجاه محمور y .

مثال :

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ عند النقطة (1,3,0) = (x,y,z) على السطح

$$. z = x^2 - y^2 + 3xy - x$$

الحـل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 1 = 2 \times 1 + 3 \times 3 = \underline{\underline{11}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3x = 2 \times 3 + 3 \times 1 = \underline{\underline{-3}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \, , \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 \, , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

مثال :

أوجد المشتقات من الرتبتين الأولى و الثانية للسطح

$$z = x^4 + 3x^2y - 2x^2y^3 + x^2 - y + 2$$

عند النقطة $(2, -1, 19)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 6xy - 4xy^3 + 2x = 32 - 12 - 8 + 4 = 16$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 6x^2y^2 - 1 = -11$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 6y - 4y^3 + 2 = 40$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 12xy^2 = -12$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12x^2y = 48$$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



جد النهايات العظمى و الصغرى و نقاط الانقلاب للمنحنيات الآتية :

a) $y = x^3 - \frac{1}{4}x^4$.

b) $y = x4 - 4x + 17$.

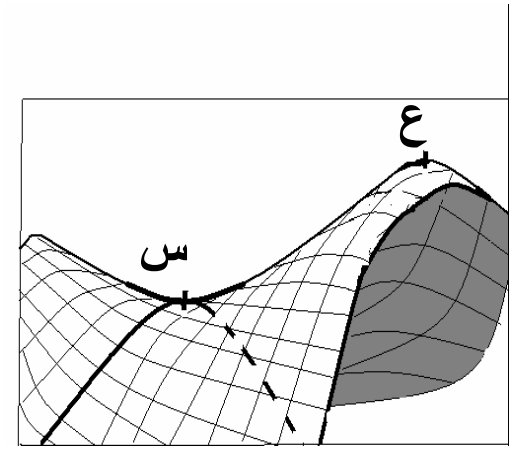
c) $y = (x - 2)^3$.

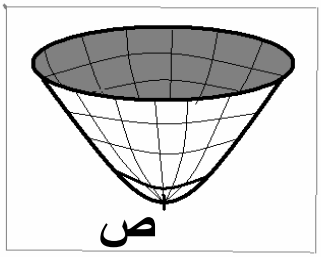
d) $y = x^4 - 6x^3 + 7x^2$.

e) $y = (x - 1)4$

2.3 النهايات العظمى والصغرى Maxima and Minima

كما فى الدوال فى المتغير الواحد، الدوال ذات المتغيرين لها نهايات عظمى وصغرى ونقاط انقلاب لكن توجد هنا حالة رابعة : تخيل أنك تسير فى منطقة جبلية. فإذا كنت فى قمة أحد الجبال وبدأت تسير فى أى اتجاه تجد نفسك تسير إلى أدنى. مثل هذه النقطة تسمى نهاية عظمى وإذا وقفت فى قاع حفرة فإنك إذا سرت فى أى اتجاه تجد نفسك متجها إلى أعلى. مثل هذا القاع يسمى نهاية صغرى. والآن تخيل أنك تريد أن تتخطى منطقة عالية بين جبلين عند أعلى نقطة فى المنطقة العالية وأنت مازلت بين الجبلين، الحركة فى اتجاه أي من الجبلين تأخذك إلى أعلى، والحركة فى اتجاه معامد تأخذك إلى أدنى، أى هذه النقطة نهاية صغرى فى اتجاه الجبلين ونهاية عظمى فى الاتجاه المتعامد معه. مثل هذه النقطة تسمى سرج Saddle point لأن المنطقة تشبه السرج.





ص : نهاية صغرى ع نهاية عظمى س نقطة سرج

نلخص هنا طريقة معرفة نوع النقطة الحرجة (عظمى ، صغرى، انقلاب) على السطح إن وجدت :

1) عند النقطة الحرجة يجب أن يكون $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = 0$.

2) افرض أن $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \alpha y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$.

- النقطة نهاية عظمى إذا كان $\Delta > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$.

- النقطة نهاية صغرى إذا كان $\Delta > 0$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$.

- النقطة سرج إذا كان $\Delta < 0$.

- الاختبار يفشل إذا كان $\Delta = 0$.

مثال :

اختبر الدوال الآتية للنقط الحرجة وبين أنواعها

$$(1) \quad z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6$$

$$(2) \quad z = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$$

$$(3) \quad z = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

الحل:

(1)
$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2x - 2 = 0 \\ z_y &= 2y + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\therefore x = 1 \\ &\therefore y = -2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= 2 \\ Z_{yy} &= 2 \\ Z_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ zxy & z_{yy} \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad Z_{xx} > 0.$$

$\therefore$ النقطة $(1,-2,1)$ نهاية صغرى.

(2)

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2 - 4x - 2y = 0 \\ z_y &= 2 - 2x - 2y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(x, y, z) = (0,1,4)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= -4 \\ Z_{yy} &= -2 \\ Z_{xy} &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \Delta = 4, \ Z_{xx} < 0$$

$\therefore$ $(0,1,4)$ نهاية عظمى.

(3)

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 3x^2 + 6x = 0 \\ z_y &= 3y^2 - 6y = 0 \end{aligned}\right\}$$

الحلول الآنية :

$$(x, y, z) = (0,0,-8), (-2,0,-4), (0,2,-12), (-2,2,-8)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= 6x + 6 \\ Z_{yy} &= 6y - 6 \\ Z_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = 36(x+1)(y-1)$$

النقطة	(0, 0, -8)	(0, 2, -12)	(-2, 0, -4)	(-2, 2, -8)
Z_{xx}	6	6	6 −	6 −
Δ	36 −	36	36	36 −
القرار	سرج	صغرى	عظمى	سرج

الخلاصة

والآن إذا قمنا بتلخيص لأهم ما جاء في هذه الوحدة تجد أن الوحدة عرفت لك المشتقة بأنها نهاية وتمثل في حقيقتها ميل المماس للدالة وأن هذا الميل يمكن أن يكون موجباً أو سالباً أو صفراً . ومن خلال هذه الوحدة بالتأكيد تكون قد عرفت النظريات الأساسية الآتية للاشتقاق وهي أن مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً ، وأن مشتقة جمع (طرح) دالتين تساوي جمع (طرح) مشتقتي الدالتين وأن مشتقة ضرب دالتين تساوي الدالة الأولى × مشتقة الثانية زائداً الدالة الثانية × مشتقة الأولى ، وأن مشتقة قسمة دالتين تساوي النسبة بين حاصل المقام × مشتقة البسط ناقصاً البسط في مشتقة المقام إلى مربع المقام أي إذا كان $y = \frac{u}{v}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

وقد عرفت أيضاً أنه من خلال هذه النظريات الأساسية للاشتقاق يمكنك إيجاد الكثير من المشتقات . أيضاً عرفت بأن نقطة النهاية الصغرى هي التي تتغير عندها إشارة الميل من سالب إلى موجب وأن النهاية العظمى تتغير عندها إشارة الميل من موجب إلى سالب وعرفت أيضاً ما تمثله النسب والمعدلات التالية :

مرونة العرض = نسبة الزيادة في العرض %

نسبة الزيادة المقابلة في السعر %

مرونة الطلب = نسبة الزيادة في الطلب %

نسبة الزيادة المقابل في السعر %

السعر الحدي = معدل التغير في السعر بالنسبة للتغير في الطلب .

الإيراد الحدي = معدل التغير في الإيراد بالنسبة للتغير في الطلب .

التكلفة الحدية = معدل التغير في التكلفة بالنسبة للتغير في الطلب .

الربح الحدي = معدل التغير في الربح بالنسبة للتغير في الطلب .

وفـي هـذه الوحـدة أيـضاً عرفـت الـدوال فـي متغيـرين وكيفيـة اشـتقاقها وقـد لاحظـت أنـه عنـد الاشتقاق بالنسبة لأحد المتغيرين فإن المتغير الآخر يعتبر ثابتاً .

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس

في الوحدة التالية ندرس موضوعا مهماً آخر في مجال الحسبان وهو التكامل. وعملية التكامل هي العملية العكسية للاشتقاق. أى عندما تكون لدينا مشتقة ونريد إيجاد الدالة الأصل.

وسندرس سوياً عددا من طرق التكامل في الحالات غير النمطية.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

a) $y = 2x^2 - 4x + 7$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 4$$

b) $y = x^3 - 7x^2 + 5x - 3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x + 5$$

تدريب (2)

$$y = (x + x^{-1}) + (x^2 + x^{-2})$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^{-2})(x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1})(2x - 2x^{-3})$$

تدريب (3)

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^3 + 2x + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - 2x + 3)(4x + 3) - (2x^2 + 3x - 5)(3x^2 - 2)}{(x^3 - 2x + 3)^2}$$

تدريب (4)

$$y = (x^3 + 2x^2 + 1)^4 + 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^3 + 2x^2 + 1)^3 (3x^2 + 4x) + 5$$

تدريب (5)

$$y = 4x^3 - 5x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 5$$

تدريب (6)

$$y = 2at$$

$$x = at^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\frac{dx}{dt} = 2at$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

تدريب (7)

$$x^2 + 4yx + 3y^2 + 6x + 2y = 0$$

$$2x + 4(x\frac{dy}{dx} + y) + 6y\frac{dy}{dx} + 6 + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 4x\frac{dy}{dx} + 4y + 6y\frac{dy}{dx} + 6 + \frac{2dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(4x + 6y + 2) = -2x - 4y - 6$$

$$= -2(x + 2y + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x + 2y + 3)}{2(2x + 3y + 1)}$$

$$= -\frac{x + 2y + 3}{2x + 3y + 1}$$

تدريب (8)

a) $y = \ln(4x^2 - 3x + 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x + 2}$$

b) $y = 7\sin(x^2 + 3)$

$$\frac{dy}{dx} = 7\cos(x^2 + 3) \times 2x$$
$$= 14x\cos(x^2 + 3)$$

c) $y = \tan^{-1}x$

$x = \tan y$

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{1}{\sec^2 y} = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

تدريب (9)

a) $y = 3x^3 - 9x^2 + 7x + 3$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 18x + 7$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 18$$

b) $2xy+y = 2$

$$2(x\frac{dy}{dx}+y)+\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x\frac{dy}{dx}+2y+\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(2x+1)=-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y}{2x+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\left[\frac{(2x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)-2y}{(2x+1)^2}\right]$$

$$=-2\left[\frac{-2y-2y}{(2x+1)^2}\right]=\frac{-8y}{(2x+1)^2}$$

تدريب (10)

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 36x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 12x - 36$$

$$= 6(x^2 - 2x - 6)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad = x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{7}$$

$$x = 1 - \sqrt{7} \quad \text{أو}$$

$$\frac{dy}{dx} > 0$$

المنحني صاعد في $x > 1+\sqrt{7}$ أو $x < 1-\sqrt{7}$

$$\frac{dy}{dx} < 0$$

المنحني هابط في $1-\sqrt{7} < x < 1+\sqrt{7}$

المنحنى يوازي المحور السيني عند النقطتين $1-\sqrt{7}$, $1+\sqrt{7}$

تدريب (11)

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$\frac{dy}{dx} = 0$$

عند $x = 3$ أو $x = -1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3} = 18 - 6 = 12 > 0$$

إذن النقطة (3 , -20) نهاية صغرى

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1} = -6 - 6 = -12 < 0$$

إذن النقطة (-1 , 12) نهاية كبرى

b) $y = x^4 - 2x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$

$$x = -1 \text{ أو } x = 1 \text{ أو } x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 4$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -4 < 0$$

إذن النقطة (0 , 0) نهاية عظمى

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 12 - 4 = 8 > 0$$

إذن النقطة (1- , 1) نهاية صغرى

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1} = 12 - 4 = 8 > 0$$

إذن النقطة (1- , 1-) نهاية صغرى

تدريب (12)

$$\Delta P = 5 \qquad \overline{P} = 37.5$$

$$\Delta Q_D = 80 \qquad \overline{Q}_D = 540$$

$$\Delta Q_S = 100 \qquad \overline{Q}_S = 750$$

$$E_S = \left(\frac{100}{750}\right)\left(\frac{37.5}{5}\right) = 1$$

$$E_D = \left(\frac{80}{540}\right)\left(\frac{37.5}{5}\right) = 1.11$$

إذن العرض واحدي والطلب مرن

مسرد المصطلحات

- **المشتقة Derivative :** مشتقة دالة هي عبارة عن معدل تغير الدالة .
- **مشتقة ضرب دالتين Derivative of A Product :**

وهي إذا كان $y = uv$ فإن $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

- **مشتقة قسمة دالتين Derivative of Quotient :**

وهي إذا كان إذا كان $y = \frac{u}{v}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

- **مشتقة دالة الدالة Derivative of Function of A Function :**

وهي إذا كانت y دالة في u و u دالة في x فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

- **المشتقة العكسية Inverse Derivative :** وهي إذا كان y دالة في x فإن المشتقة العكسية هي $\frac{dx}{dy}$
- **مشتقة الدالة المعلمية Parametric Derivative:** وهي إذا كان كل من x ، y دالتان في W فإن w يسمى معلماً وبالتالي يمكن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ بواسطة كل من $\frac{dy}{d\ w}$ ، $\frac{dx}{d\ w}$.

- **المشتقات النمطية Standard Derivative :** وهي المشتقات الرئيسية أو التي ترد بكثرة .
- **المشتقات العليا Higher Derivatives :**

وهي أن نجد من المشتقة الأولى مشتقة ثانية وثالثة ..... وهكذا .

- **تطبيقات عامة General Applications :** ونقصد هنا التطبيقات العملية عامة للمشتقة .
- **تطبيقات هندسية Geometrical Applications :**

ونقصد بها التطبيقات العملية في مجالات الهندسة

- **مماس Tangent :** وهو المستقيم الذي يمس منحنى الدالة في منطقة ما من مجالها .

- **ميل المماسSlope :**

وهو عبارة عن ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور X في الاتجاه الموجب .

- **النهاية العظمى Maximum** : وهي النقطة التي يتغير عندها الميل من موجب إلى سالب .
- **النهاية الصغرى Minimum** : وهي النقطة التي يتغير عندها الميل من سالب إلى موجب .
- **نقطة الانقلاب Point of Inflection :**

وهي النقطة التي ينقلب عندها المماس من أحد جانبي المنحنى إلى الجانب الآخر .

- **التقريب Approximation** : ونقصد به هنا هنا أن نقرب قيمة التغير في المتغير التابع إذا علمنا القيم الصغيرة التي يتغير بها المستقل .
- **السعر Price**
- **العرض Supply** : ويقصد به كمية السلع المعروضة .
- **الطلب Demand** : وهي الكمية التي يرغب فيها المستهلكون .
- **التكلفة Cost** : يقصد بها تكلفة الإنتاج .
- **العائد Return** : ونقصد به العائد من البيع .
- **الربح Interest**
- **الاحتكار monopoly**
- **السوق الحر Free Market**
- **حالة الاتزان equilibrium level :**

وهي الحالة التي تستقر عندها كلٌّ من الكميات المعروضة والكميات المطلوبة .

- **مرونة العرض Price- supply Elasticity :**

وهي حاصل قسمة نسبة الزيادة في العرض بالمائة على نسبة الزيادة المقابلة في السعر بالمائة .

- **مرونة الطلب السعرية Price- demand Elasticity :**

وهي حاصل قسمة نسبة الزيادة في الطلب بالمائة على نسبة الزيادة المقابلة في السعر بالمائة .

- **السعر الحدي Marginal Price :**

وهو معدل التغير في السعر بالنسبة للتغير في الطلب .

- **الايراد الحدي Marginal Return:**

وهو معدل التغير في الإيراد بالنسبة للتغير في الطلب .

- **الربح الحدي Marginal Profit :**

وهو معدل التغير في الربح بالنسبة للتغير في الطلب .

- **الدوال متعددة المتغيرات multivariate Functions :**

وهي أن تكون الدالة تابعة لأكثر من متغير .

- **المشتقة الجزئية Partial Derivative:**

وهي أن نفاضل الدالة بالنسبة لمتغير واحد وتعتبر المتغيرات الأخرى ثابتة .

- **نقطة السرج Saddle Point:**

وهي النقطة التي يكون عندها نهاية صغرى في اتجاه بينما لها نهاية عظمى في الاتجاه العمودي عليه وسميت بذلك لأن الدالة عندها تأخذ شكل السرج .

المراجع بالعربية

1. آيرز، فرانك (1974) : نظريات و مسائل في المصفوفات.
2. بلايت و روبرتسون (2000) : الجبر الخطي. (ج الملك سعود).
3. الدليمي و خضير و باقية (2000) : الرياضيات لطلبة الاقتصاد و العلوم الإدارية. (دار وائل– عمان)
4. سودان و السلمان و سرميتي (1884) : حساب التفاضل و التكامل. (جامعة الملك سعود)
5. عبدالفتاح عبدالمعطي محمد (2002) : مقرر أول في الجبر الخطي (جامعة الجزيرة) .
6. عثمان محمد المكي (1999) : الحسبان الأولي .(جامعة الخرطوم)
7. فرانك آيرز (1992) : حساب التفاضل و التكامل. (سلسلة شوم)
8. هب الريح و جهينة (1993) : الرياضيات و التفاضل و التكامل I و II . (جامعة التحدي)

المراجع بالإنجليزية

1. Glass, J.C. (1980) : An introduction to mathematical methods in Economics.(McGraw - Hill)
2. Hamilton, A.G. (1987): A first course in linear algebra with concurrent examples.(Cambridge)
3. Caunt, G.W. (1971): Elementary calculus .(Oxford)
4. Piskanov, N. (1974: Differential and integral calculus.(MIR)
5. Briggs,w and G.H. Brian(1969): Tutorial algebra.(University Tutorial)
6. Thomas, G. B. and R.L. Finny. (1982.) Calculus and analytic geometry.(Addison-Wesley)
7. Durell,C.V. and A. Robson.(1962) Elementary calculus.(Bell)
8. Anton, H.(1981) : : Calculus with analytic geometry. (Wiley).
9. Lipschutz, S.(1874) : Linear algebra.(Schaum series)


الوحدة السادسة
التكامل
INTEGRATION

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	201
تمهيد	201
أهداف الوحدة	202
1. التكامل غير المحدود	203
1.1 التكاملات النمطية	205
2.1 خواص التكامل	206
2. التكامل المحدود	208
1.2 المساحة تحت المنحنى	210
2.2 خواص التكامل المحدود	212
3. بعض طرق التكامل	214
1.3 التكامل بالتعويض	214
2.3 التكامل بالتجزئة	217
3.3 التكامل بالاختزال	219
4.3 التكامل بالكسور الجزئية	221
الخلاصة	225
إجابات التدريبات	226
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	231
مسرد المصطلحات	234
المراجع	235

المقدمة

تمهيد

نرحب بك عزيزي الدارس في الوحدة وهي الوحدة السادسة والأخيرة من هذا المقرر وعنوانها التكامل والذي هو عبارة عن عملية عكسية للتفاضل الذي درسناه في الوحدة الخامسة . بدأت الوحدة بتعريف التكامل حيث كان أولاً تعريف التكامل غير المحدود ثم توضيح وبرهان بعض صيغ التكاملات النمطية ، وذكرنا في هذه الوحدة أيضاً خواص التكامل والتي سوف تسهل علينا كثيراً من عمليات التكامل ، وفي موضوع التكامل المحدود عرفناه أولاً ثم وضحنا كيف يمكن حساب التكامل المحدود كما قدمنا موضوع المساحة تحت المنحنى كمثال لتطبيقات التكامل المحدود وكذلك وضحنا خواص التكامل المحدود .

أيضاً احتوت الوحدة على بعض من الطرق التي يمكن بها إجراء عمليات التكامل لحل كثير من المسائل فقد قدمت لك الوحدة طرق التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئة والتكامل بالاختزال والتكامل بالكسور الجزئية وقد تنوعت الأمثلة حتى يتسنى لك فهم واختيار الطريقة المناسبة لحل كل مسألة من مسائل التكامل .

أيضاً تضمنت الوحدة بين مواضيعها المختلفة الكثير من التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي التي ينبغي أن تقوم بحلها بنفسك ثم مراجعة الحل مع الحل الموجود في نهاية كل وحدة .

نرحب بك مرة أخرى وبجميع آرائك ومقترحاتك .

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

نأمل بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

(1) **تعرف** التكامل .

(2)**تميز** بين التكامل المحدود وغير المحدود .

(3)**تذكر** التكاملات النمطية .

(4)**تذكر** خواص التكامل .

(5)**تحسب** المساحة تحت المنحنى .

(6)**تذكر** طرق التكامل .

(7)**تختار** طريقة مناسبة لحل كل مسألة من مسائل التكامل .

1. التكامل غير المحدود

تعريف:

التكامل هو العملية العكسية للتفاضل. فإن كانت $Y = f(x)$ ومشتقة Y بالنسبة لـ X هي $\frac{dy}{dx} = g(x)$ فإن تكامل $g(x)$ يعطي $f(x)$ + ثابت والسبب في وجود هذا الثابت C أن كل الدوال التي تختلف عن بعضها بقيمة ثابتة تعطي نفس المشتقة. مثلاً إذا كانت

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 7$$
$$f_2(x) = x^2 + 2x - 4$$
$$f_3(x) = x^2 + 2x$$

فإن المشتقة في كل هذه الحالات هو $(2x + 2)$. تكامل دالة $g(x)$ بالنسبة لـ X يرمز له بالرمز $\int g(x)dx$

فإذا كان $\frac{d}{dx} f(x) = g(x)$

فإن $\int g(x)dx = f(x) + c$

تسمى $g(x)$ الدالة المكاملة (أو باختصار المكاملة integrand) ، ويسمى C ثابت التكامل constant of integration ، وقيمته اختيارية.

ملاحظة :

لاحظ أنه لا توجد حدود معينة في مجال الدالة لهذا التكامل وإنما هو مجرد إجراء لعملية التكامل بخلاف التكامل المحدود الذي يكون على فترة جزئية من مجال تعريف الدالة حيث تكون هناك بداية للفترة مثلاً x = a ونهاية مثلاً x = b كما سترى لاحقاً .

مثال :

كامل $6x^2 - 2x + 1$ بالنسبة لـ X .

الحل :

تذكر أنه عندما فاضلنا x^n كان الناتج nx^{n-1} ، لذلك عندما نريد التكامل x^m فإننا نزيد الأس بواحد ونقسم على الأس الجديد :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

$$\therefore \int (6x^2 - 2x + 1) dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$= 2x^3 - x^2 + x + c$$

مثال :

كامل $\int \sin x \, dx$

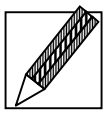
الحل :

تذكر من قائمة المشتقات النمطية أن

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\therefore \int \sin x \, dx = c - \cos x$$

تدريب (1) :



كامل :

$$\int (5 - 6x + x^2) dx$$

1.1 التكاملات النمطية Standard integrals

إليك التكاملات النمطية المقابلة للمشتقات التي درستها في الوحدة السابقة:-

$$\int x^{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x^{-n}\,dx = c + \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

$$\int a\ f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + c$$

($a =$ ثابت)

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{1}{\log_e a}\,a^{x} = \frac{1}{\ln a}\ a^{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = c - \cos x$$

$$\int \sec^2 x\ dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2\ x\,dx = c - \cot x$$

2.1 خواص التكامل Integration properties

a) $\int [f_1(x) \pm f_{2(x)}]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$

b) $\int a\ f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$; (a = ثابت)

c) $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

مثال :

كامل $\int 5x^3 + 2x - 3^x + \frac{1}{x}\,dx$

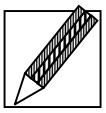
الحل :

التكامل يساوي:

$$5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\ln 3}3^x + \ln x + c$$

$$= \frac{5\ x^4}{4} + x^2 - \frac{1}{\ln 3}3^x + \ln x + c\ .$$

تدريب (2) :



كامل :

$(1) \int (5 - 6x - x^2)\,dx.$ $(2) \int 5^x\,dx$

مثال :

جد معادلة المنحنى الذي ميله 3x ويمر بالنقطة (2,2) .

الحل :

افرض أن المعادلة $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$\therefore \int 3x\ dx = \frac{3}{2}x^2 + c$$

المنحنى يمر بالنقطة (2,2)، إذا عوض x = y = 2 :

$$2 = \frac{3}{2}.2^2 + c = 6 + c$$

$$\underline{\underline{-4 = c}} \quad \therefore$$

إذا ∴معادلة المنحنى $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}x^2 - 4}}$.

مثال :

جد معادلة المنحنى الذي ميله $6x^2$ ويقاطع المحور السيني عند y = 5.

الحل :

$$y = \int 6x^2\ dx = 2x^3 + c$$.

يمر بالنقطة (0،5) ، $\therefore \quad 5 = c$

أى أن المعادلة هي $y = 2x^3 + 5$.

أسئلة تقويم ذاتي (1)



1. جد معادلة المنحنى الذي ميله $4x^3$ ويمر بالنقطة (1,5)
2. جد التكاملات الآتية :

$$\int (3x^3 - x + 1)\, dx$$

$$\int (\sin x + e^x)\, dx$$

$$\int (\cos x + \frac{3}{x})\, dx$$

2. التكامل المحدود Definite Integrals

تعريف :

التكامل المحدود للدالة f(x) بين a و b ، ويرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\, dx$ ، هو حاصل تكامل $f(x)$ ثم نعوض x = b ونطرح منه ناتج التعويض x = a .

مثال :

جد $I = \int_1^2 (3x^2 + 2x + 1)\, dx$.

الحل :

التكامل يعطي $\underline{x^3 + x^2 + x + c}$.

التعويض

$$14 + c = 8 + 4 + 2 + c \quad : \quad 2 = x$$
$$3 + c = 1 + 1 + 1 + c \quad : \quad 1 = x$$

الفرق $= \underline{\underline{11}}$

$$\therefore \int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx = \underline{\underline{11}}$$

نلاحظ أن ثابت التكامل C يختفي بالطرح. لذلك لا ضرورة على إضافته في حالة التكامل المحدود. إننا نكتب الناتج كما في المثال الآتي :

مثال :

جد $\int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} \cos \quad x \ dx$.

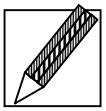
الحل :

$$\int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} \cos x \ dx = \left[\sin x\right]_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}}$$

$$= \sin \frac{\Pi}{4} - \sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

تدريب (3) :



جد :

$$\int_{-1}^{6} 5 - 6x + x^2 \ dx$$

1.2 المساحة تحت المنحنى Area Under Curve

تعريف :

تعـرف المـساحة تحـت المنحنـى $y = f(x)$ بانهـا المـساحة بـين المنحنـى والمحور السيني و العمودين عند نقطتي البداية والنهاية. بصفة عامة المساحة تحت المنحنى توجد بالتكامل .

ملاحظة :

إذا كان جزء من المنحنى تحت المحور السيني فإن المساحة تكون سالبة في هذا الجزء. لذلك إذا أريد إيجاد المساحة تحت المنحنى يجب التأكد عما إذا كان جزءاً منها أو كلها تحت المحور السيني؛ بالنسبة للجزء تحت محور x سيعطي مساحة سالبة، تغير علامتها وتضاف للمساحات الموجبة . بالطبع المساحة لا تكون سالبة أبدا.

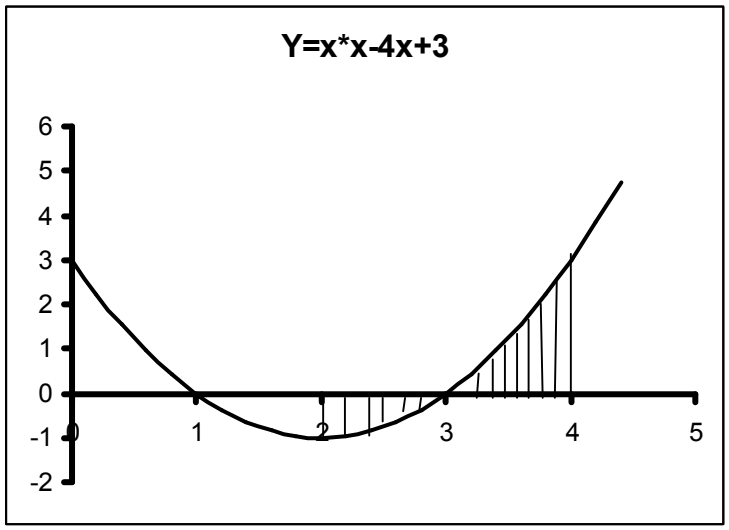
مثال :

جد المساحة تحت المنحنى $y = x^2 - 4x + 3$ بين $X = 2$ و $X = 4$.

الحل :

نضع y = صفر للتأكد عنا إذا كان المنحنى يقاطع المحور السيني بين $X = 2$و $X = 4$.

$$Y = X^2 - 4X + 3 = (X - 3)(X - 1) = 0$$



∴ الجزء بين بين $X=2$و $X=3$ تحت المحور السيني في هذه الحالة نكامل كل جزء على حدة :

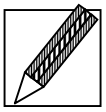
$$A=\left|\int_2^3\left(x^2-4x+3\right)dx\right|+\left|\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_2^3\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_3^4\right|$$

$$=\left|\left[0-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)\right|+\left|\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-(0)\right|$$

$$=\left|-\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{6}{3}=2 \text{ .}$$

تدريب (4) :



جد المساحة المحصورة بين المنحني و المحور السيني والنقطتين المعطاة في الحالات الآتية :

$y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=4$.

2.2 خواص التكامل المحدود

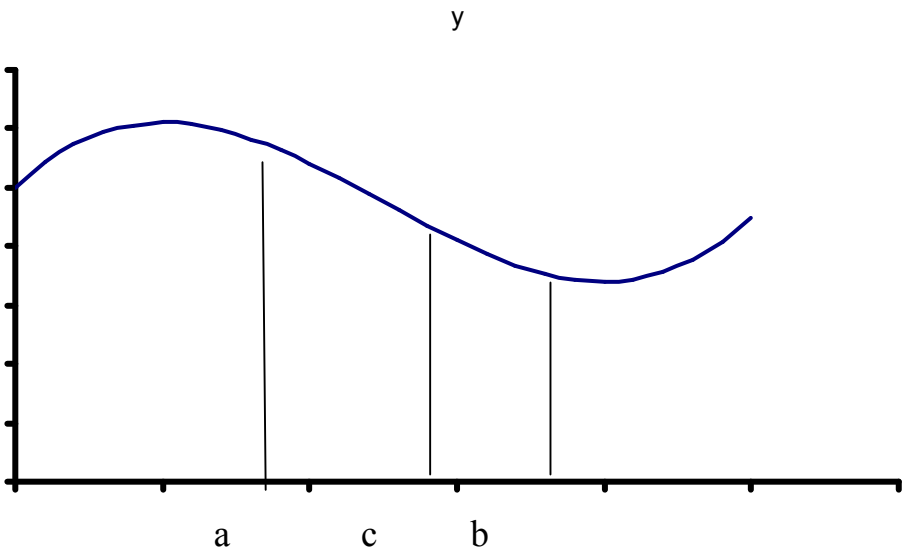
في ما يلي نلخص خواص التكامل المحدود :

a) $\int_a^b c\, f(x) = c\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

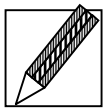
و لا يشترط أن تكون c بين a و b.



d) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

e) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تدريب (5) :



جد المساحة المحصورة بين المنحني و المحور السيني والنقطتين المعطاة في الحالات الآتية :

$y = x^3 - 4x \quad , \; x = -2 \; , \quad x = 2.$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



1) جد :

a) $\int_0^3 4x - x^2\,dx.$

b) $\int_{-2}^4 x^3 - 4x\,dx$

2) جد المساحة المحصورة بين المنحني و المحور السيني والنقطتين المعطاة في الحالات الآتية :

a) $y = 4x - x^2 \; , \; x = 2 \; , \quad x = 5.$

b) $y = 5 - 6x + x^2 \; , \; x = -1 \; , \quad x = 6.$

3. بعض طرق التكامل

عزيزي الدارس هنا ينبغي لنا أن نوضح لك أن التكامل يختلف عن التفاضل في أنه ليس له نظريات لإجرائه على ضرب أو قسمة دالتين أو غير ذلك ولكن هناك طرقاً يمكن أن نتبعها لإجراء عمليات التكامل حيث نختار الطريقة المناسبة لحل كل مسألة من مسائل التكامل كما يتضح لك ذلك من خلال هذا الموضوع (طرق التكامل) :

1.3 التكامل بالتعويض Integration by Substitution

لاحظنا في الوحدة السابقة أنه إذا كان $z = z(y)$ و $y = y(x)$ فإن $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

نستخدم هذه النتيجة في التكامل. إذا كانت الدالة المكاملة دالة في دالة مضروبة في مشتقة الثانية في الصورة $z\,(y\,(x))\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ فتكاملها بالنسبة لـ x يعطي الآتي :

$$\int z(y(x))\left(\frac{dy}{dx}.\,dx\right) = \int z(y)\,dy \;.$$

مثال :

كامل $\int \left[(x^2+3)^3 - 2(x^2+3)+1\right] 2x.\,dx$

الحل :

لاحظ أن 2x في المكاملة تساوي مشتقة القوس (x^2+3) . لذا ضع

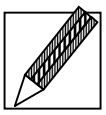
$$y = x^2+3 \qquad , \qquad \therefore \frac{dy}{dx}\,dx = 2x\,dx$$

$\therefore$ التكامل $\int \left[(x^2+3)^3 - 2(x^2+3)+1\right] 2x.\,dx$

$$= \int \left(y^3 - 2y + 1\right) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int \left(y^3 - 2y + 1\right) dy$$

$$= \frac{1}{4} y^4 + y^2 + y + c = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(x^2+3\right)^4 - \left(x^2+3\right)^2 + \left(x^2+3\right) + c}} \ .$$

تدريب (6) :



كامل :

$$\int (3x+4)^3 \ dx$$

مثال :

كامل : $(1) \quad \int \tan x \, dx. \qquad (2) \quad \int \cot x \, dx$

الحل :

ضع $\cos x = y$:

$$(1) \quad \int \tan x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{y} \left(-\frac{dy}{dx} \, dx\right) = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$= \ln y + c = \underline{\underline{\ln (\cos x) + C}}$$

$$(2) \quad \int \cot x \, dx = \int \frac{1}{\sin} \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \, dx\right) = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$= \ln y + c = \underline{\underline{\ln (\sin x) + C}}$$

مثال :

كامل $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

الحل :

ضع $a \sin \theta = x$ ، إذا

$dx = a \cos \theta \, d\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\cos\theta \, d\theta}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \underline{\underline{\sin^{-1} \frac{x}{a} + C}} .$$

مثال :

كامل $\int xe^{x^2} dx =$.

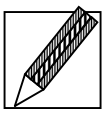
الحل :

ضع $x^2 = y \quad \Leftarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x$

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int e^y . \frac{dy}{dx} \, dx = \frac{1}{2}\int e^y \, dy$$

$$= \frac{1}{2} e^y + c = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + c}} .$$

تدريب (7) :



كامل :

$\int \cos 3x \sin 3x \, dx$. d

2.3 التكامل بالتجزئة Integration by Parts

نذكر أننا عند تفاضل حاصل ضرب دالتين حصلنا على النتيجة الآتية :

$$(1) \quad \frac{d}{dx}[u(x).v(x)] = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx}.v(x)$$

هذه النتيجة تستخدم في إيجاد بعض التكاملات عندما تكون المكاملة حاصل ضرب دالتين أحداهما مشتقة لدالة أخرى :-

من (1)
$$\frac{d}{dx}(u(x).v(x)) = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dx}.v(x)$$

$$\int u(x)\frac{dv(x)}{dx}.dx = \int \frac{d}{dx}[u(x).v(x)]dx - \int v(x)\frac{du(x)}{dx}dx$$

$$(2) \quad \therefore \int u(x)\,dv(x) = [u(x).v(x)] - \int v(x)\,du(x)$$

المعادلة (2) تسمى صيغة التكامل بالتجزئة.

مثال :

كامل $\int (2x^2 - x)e^x dx$.

الحل :

ضع

$$u = u(x) = 2x^2 - x$$

$$dv = e^x dx$$

$$\therefore v = \int e^x dx = e^x \,, du = (4x-1)\,dx$$

$$\therefore \int (2x^2 - x)e^x\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= (2x^2 - x)e^x - \int (4x-1)e^x\,dx$$

بالمثل ضع

$$u = 4x - 1 \ , \ dv = e^x dx$$

$$\therefore \ du = 4 \ dx \ , \ v = e^x$$

$$\int (4x - 1) e^x \ dx = (4x - 1) e^x - 4 \int e^x \ dx$$

$$= (4x - 1) e^x - 4 \ e^x + c$$

$$\therefore \int (4x^2 - x) e^x \ dx = (2x^2 - 1) e^x - \left[(4x - 1) e^x - 4 \ e^x + c \right]$$

$$= \underline{\underline{\left[(2x^2 - x) - (4x - 1) + 4 \right] e^x + c_0}}$$

نلاحظ هنا أن ثابت التكامل أضيف في المرحلة الأخيرة فقط .

مثال :

كامل $\int \sin\theta \ . \cos\theta \ \ d\theta$.

الحل :

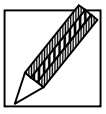
ضع $dv = \cos\theta \ . \ d\theta \ , u = \sin\theta$

$$\therefore \quad v = \sin \ \theta \ , \ du = \cos \ \theta \ \ d\theta$$

$$\therefore \int \sin\theta \cos\theta \ d\theta = \sin^2 \theta - \int \sin\theta \cos\theta \ d\theta$$

$$\therefore \ 2 \int \sin \ \theta \ \cos \ \theta \ d\theta \ = \ \sin^2 \theta$$

تدريب (8) :



كامل :

$$\int x \sin x \ dx.$$

3.3 التكامل بالاختزال Integration by Reduction Formula

في بعض مسائل التكامل تكون المكاملة حاصل ضرب دالتين إحداهما على الأقل تعتمد على دليل عددي. استخدام التجزئة يعطي دالة زائدا تكاملة من نفس الصيغة الرياضية للتكاملة الأم لكن بدليل أقل . مثلاً :

$$\int g_n(x)\ dx = h_n(x) + k_n \int g_{n-1}(x)\, dx \qquad (1)$$

فإذا رمزنا للجانب الأيسر بالرمز I_n فتكون (1) في الصورة :

$$I_n = h_n(x) + k_n\, I_{n-1} \quad . \qquad (2)$$

و بالتعويض ل I_{n-1} في (2) :

$$In = h_n(x) + k_n\, [\, h_{n-1} + k_{n-1}\, I_{n-2}].$$

ثم نكرر (2) في كل مرة على التكاملة اليمنى حتى نصل إلى I_0 التي تكامل مباشرة. المعادلة (2) تسمى صيغة الاختزال و هذه الطريقة طريقة التكامل بالاختزال.

مثال :

كامل : $\int x^5 e^x\, dx$

الحل :

لاحظ استخدام التجزية يعطى

$$\int x^5 e^x dx = g(x) - a\int x^4 e^x dx$$

والتكاملة فى الجانب الأيمن فى نفس صيغة التكاملة فى الجانب الأيسر لكن بأس أقل بواحد. ضع

$$I_n = \int x^n\ e^x\ dx$$

التكامل بالتجزئة يعطي :

$$I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - nI_{n-1} .$$

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1} \qquad (2)$$

$$= \{x^n - nx^{n-1} + n(n-1)[x^{n-2} e^x - (n-2)]\} I_{n-3} = x^n e^x - n[x^{n-1} e^x - (n-1)I_{n-2}]$$

.....

حتى يصل أس x إلى الصفر $I_0 = \int e^x dx$.

إذا $\int x^5 e^x dx = \underline{\underline{[x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120]e^x + C}}$.

في بعض الحالات نحتاج لتكرار التجزئة مرتين لنحصل على صيغة الاختزال، مثلا في بعض الدوال الدائرية.

أسئلة تقويم ذاتي (3)



1) كامل :

a) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{\sin x}}$.

b) $\int \cos^3 x \, dx.$

c) $\int \sin^5 x \, dx.$

2) أوجد :

$$\int_0^{\pi/6} \cos 3x \sin 3x \, dx .$$

4.3 التكامل بالكسور الجزئية Integration by Partial fractions

أفرض أننا نريد تكامل كسر جبري (algebraic fraction) في الصورة $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ،
حيث المقام قابل للتحليل. يمكن تبسيط التكامل بفك المكاملة (integrand) إلى مجموع كسور أبسط يسهل تكاملها:

1) إذا كانت درجة البسط تساوي أو تزيد عن درجة المقام اقسم أولا.

2) لكل عامل افترض له بسطا أقل بدرجة واحدة .

3) مقابل كل عامل من الدرجة الأولي (a+bx) افترض كسرا $\frac{A}{a+bx}$.

4) لكل عامل من الدرجة الأولي مربع $(a+bx)^2$ ضع كسرين $\frac{A}{a+bx}+\frac{B}{(a+bx)^2}$. وإذا مكعبا أضف كسرا ثالثا ، و هكذا.

5) لكل عامل من الدرجة الثانية افترص كسرا من الدرجة الأولى مع مراعاة (4). ... إ لخ. هذه الكسور تسمى جزئية.

6) اجمع الكسور الجزئية (و خارج القسمة إن وجد) ثم ضع البسط مطابقا ل P(x) .

7) عوض بقيم صغيرة مختلفة لتحصل على معادلات آنية ثم حلها . في هذا الاختيار يستحسن البدء بتلك التي تجعل العوامل أصفارا..

مثال :

كامل : $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

الحل :

المقام = (x-1)(x+1) .

إذا ضع $\frac{1}{x^2-1} \equiv [\frac{A}{X+1}+\frac{B}{X-1}]$

أي البسط $A(x-1) + B(x+1) \equiv 1$:

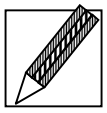
$X=1$: $0 + 2B = 1$ إذا $B = 0.5$

$X=-1$: $-2A + 0 = 1$ إذا $A = -0.5$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x-1) - \ln(x+1)] + \ln C = \underline{\underline{\ln[\, C\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}]}}.$$

تدريب (9) :



كامل :

$$\int \frac{9x-14}{x^2-3x+2}\, dx .$$

مثال :

كامل $\int \frac{8x^2-5x-5}{(2x^2-3x-1)(x+1)}\, dx$

الحل :

درجة البسط أقل من درجة المقام لا نحتاج لقسمة.

افرض أن $\frac{8x^2-5x-5}{(2x^2-3x-1)(x+1)} \equiv \frac{A+Bx}{2x^2-3x-1} + \frac{C}{x+1}$

$8x^2 - 5x - 5 \equiv (A + Bx)(x + 1) + C(2x^2 - 3x - 1)$

$X= -1$: $8 = 4C$,

$X=0$: $-5 = A - C$,

$X=1$: $-2 = 2A + 2B - 2C$

الحل الآني : $A = -3$, $B = 4$, $C = 2$.

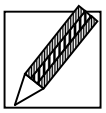
1

$$\therefore \int \frac{8x^2-5x-5}{(2x^2-3x-1)(x+1)}\,dx = \int \left[\frac{4X-3}{2X^2-3X-1}+\frac{2}{X+1}\right]dx$$

$$= \ln(2x^2-3x-1) + 2\ln(x+1) + \ln C$$

$$= \underline{\underline{\ln\left[C(2x2-3x-1)(x+1)^2\right]}}.$$

تدريب (10) :



كامل :

$$\int \frac{4x^2-x+1}{(3x^2+1)(x-1)}\,dx$$

مثال :

كامل $\int \frac{2x^3-8x^2+5x+17}{(x+3)^2(x-1)}\,dx$.

الحل :

درجة البسط تساوي درجة المقام = 3 ؛ إذا نقسم أولا :

$$\frac{(2x^3+16x^2+29x+17)}{x^3-7x^2+15x-9} = 2+\frac{6x^2+23x+35}{(x-1)(x+3)^2}$$

$$= 2+\frac{A}{X-1}+\frac{B}{X+3}+\frac{C}{(X+3)^2} \qquad \text{فرضا}$$

$$= 2+\frac{A(X+3)^2+B(X-1)(X+3)+C(X-1)}{(X-1)(X+3)^2}.$$

$\therefore$ $6X^2+23X+35 \equiv A(X+3)^2+B(X-1)(X+3)+C(X-1)$

$X=1$: $64 = 16A + 0 + 0$

$X=-3$: $20 = 0 + 0 - 4C$

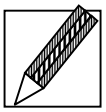
$X=0$: $35 = 9A - 3B - C$

الحل الآني : $A=4,\ B=2,\ C=-5.$

$$\int \frac{2x^3-8x^2+5x+17}{(x+3)^2(x-1)}\,dx = \int [\,2+\frac{4}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2}\,]\,dx$$

$$= \underline{\underline{2x+\ln[(x-1)^4(x+3)^2]++C}}\,.$$

تدريب (11) :



كامل :

$$\int \frac{x^2+5}{(x-4)(x-3)}$$

أسئلة تقويم ذاتي (4)



1) جد :

$$\int_0^{\pi/16} (1-\cos^3 4x)\sin 4x\;\;dx.$$

2) كامل :

a) $\int \frac{(5x-3)\,dx}{(x+1)(x-3)}.$

b) $\int \frac{(x^5-x^4-3x+5)\,dx}{(x^2+1)(1-x)^2}$

الخلاصة

في هذه الوحدة تم تعريف التكامل بأنه هو العملية العكسية للتفاضل ونوضح أن هناك نوعين من عمليات التكامل ، الأول التكامل غير المحدود وهو الذي يجرى دون مراعاة لحدود أو قيود معينة لمجاله ، أما الثاني وهو التكامل المحدود فيكون على فترة جزئية من مجال الدالة (من x = a إلى x = b) .

عرفنا أيضاً من خلال الوحدة أن تكامل جمع (طرح) دالتين يساوي جمع (طرح) تكاملي الدالتين ومن التكاملات النمطية عرفنا أن :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} + c \quad \text{و} \quad \int e^x dx = e^x + c \quad \text{و} \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\text{و} \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x \quad \text{و} \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \text{و} \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \text{و}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \quad \text{و} \quad \int \cos ec^2 x \, dx = -\cot x + c$$

ومن تطبيقات التكامل المحدود عرفت كيف تحسب المساحة تحت منحنى دالة ما ومن طرق التكامل عرفت كلاً من طرق التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئة والتكامل بالاختزال والتكامل بالكسور الجزئية .

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$$\int (5-6x+x^2)dx$$

$$= 5x-3x^2+\frac{x^3}{3}+c$$

تدريب (2)

$$\int (5-6x+x^2)dx \;=\; 5x-3x^2+\frac{x^3}{3}+c$$

$$\int 5^x dx = \frac{1}{\ln 5}5^x + c$$

تدريب (3)

$$\int_{-1}^{6}(5-6x+x^2)dx = \left[5x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{6}$$

$$= (30-108+72)-\left(-5-3-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\frac{1}{3}$$

تدريب (4)

$$A = \int_1^4 x^{-2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{4}\right)-(-1) = \frac{3}{4}$$

تدريب (5)

نجد أن الدالة $y = x^3-4x$ تكون فوق المحور x في الفترة (0 , 2-) وتحت المحور x في الفترة (2 , 0) لذلك نجري التكامل على فترتين وتكون

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$= |-4 + 8| + |4 - 8|$$

$$= 4 + 4 = 8$$

تدريب (6)

ضع $y = 3x + 4$ وتكون $dy = 3\,dx$

$$\int (3x + 4)^3 dx = \int \frac{y^3}{3}\, dy$$

$$= \frac{y^4}{3 \times 4} + c$$

$$= \frac{(3x + 4)^4}{12} + c$$

تدريب (7)

$$\int \cos\ 3x \sin 3x\ dx$$

ضع $y = \sin 3x$

ويكون $dy = 3\cos\ x\, dx$

$$\int \cos\ 3x \sin 3x\ dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\ (3\cos\ 3x)\ \ dx \qquad \therefore$$

$$= \frac{1}{3}\int y\, dy = \frac{y^2}{3x^2} + c = \frac{y^2}{6} + c$$

$$= \frac{\sin^2\ 3x}{6} + c$$

تدريب (8)

$$\int x \sin x \, dx$$

ضع $u = x$, $dv = \sin x \, dx$

$\therefore$ $du = dx$, $v = -\cos x$

ويكون

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x + c$$

تدريب (9)

$$\int \frac{9x-14}{x^2-3x+2} \, dx = \int \frac{9x-14}{(x-2)(x-1)} \, dx$$

$$= \int \frac{A}{x-2} \, dx + \int \frac{B}{x-1} \, dx$$

إذن

$$\frac{9x-14}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1) + B(x-2)}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{(A+B)x - A - 2B}{x^2-3x+2}$$

بمساواة المعاملات $A+B = 9$

$$-A-2B = -14$$

وبحل المعادلتين نحصل على $A = 4$

$B = 5$

ويكون

$$\int \frac{9x-14}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{4}{x-2}\,dx + \frac{5}{x-1}\,dx$$

$$= 4\ln|x-2| + 5\ln|x-1| + \ln c$$

$$= \ln\left[\, c(x-2)^4 (x-1)^5 \,\right]$$

تدريب (10)

$$\int \frac{4x^2 - x + 1}{(3x^2+1)(x-1)}\,dx$$

$$\frac{4x^2 - x + 1}{(3x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{3x^2+1} + \frac{c}{x-1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1) + c(3x^2+1)}{(3x^2+1)(x-1)}$$

$$4x^2 - x + 1 \equiv (Ax+B)(x-1) + c(3x^2+1)$$

$x = 1$: $4c = 4$

$x = 0$: $-B + c = 1$

$x = -1$: $2A - 2B + 4c = 6$

$$4x^2 - x + 1 \equiv (Ax+B)(x-1) + c(3x^2+1)$$

الحل الآني $A=1$, $B=0$, $c = 1$

$$\therefore \int \frac{4x^2 - x + 1}{(3x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{x}{3x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+1\right| + \ln\left|x-1\right| + \ln c$$

$$= \ln\left[c(x-1)\sqrt[6]{3x^2+1}\right]$$

تدريب (11)

$$\int \frac{x^2+5}{(x-4)(x-3)}\,dx$$

نقسم x^2+5 على $x^2-7x+12$ نحصل على

$$\frac{x^2+5}{x^2-7x+12} = 1 + \frac{7x-7}{(x-4)(x-3)}$$

ضع

$$\frac{7x-7}{(x-4)(x-3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3}$$

$$= \frac{(A+B)x - 3A - 4B}{(x-4)(x-3)}$$

$$7x - 7 \equiv (A+B)x - 3A - 4B$$

$$x = 0 \quad : \quad -3A - 4B = -7$$

$$x = 1 \quad : \quad -2A - 3B = 0$$

الحل الآني $A=21$ و $B=-14$

$$\int \frac{x^2+5}{(x-4)(x-3)}\,dx = \int \left(1 + \frac{7x-7}{(x-4)(x-3)}\right)dx$$

$$= x + 21\ln x - 4 - 14\ln x - 3 + \ln c$$

$$= x + \ln\left[\frac{c(x-4)^{21}}{(x-3)^{14}}\right]$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم (1)

$$\therefore \int \left(3x^3 - x + 1\right) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\int (\sin x + e^x)\, dx = -\cos x + e^x + c$$

$$\int \left(\cos x + \frac{3}{x}\right) dx = \sin x + 3 \ln x + c$$

تقويم (2)

$$A = \int_0^3 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= (18 - 9) = 9$$

المساحة

$$A = \left|\int_2^4 (4x - x^2)\,dx\right| + \left|\int_4^5 (4x - x^2)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4\right| + \left|\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^5\right|$$

$$= \left|(32 - \frac{64}{3}) - (8 - \frac{8}{3})\right| + \left|(50 - \frac{125}{3}) - (32 - \frac{64}{3})\right|$$

$$= 7\frac{2}{3}$$

تقويم (3)

a) $\int \sin^{-1/2} x \cos x \, dx$

ضع $y = \sin x$

$dy = \cos x \, dx$

$$\int \sin^{-1/2} x \cos x \, dx = \int y^{-1/2} \, dy$$
$$= 2y^{-1/2} + c$$
$$= 2\sqrt{\sin x} + c$$

b) $\int \cos^3 x \, dx$

$$= \int \cos^2 x \cos x \, dx$$
$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$
$$= \int \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

c) $\int \sin^2 x \, dx \, . \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$

$$= c - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$$

تقويم (4)

a) $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} \, dx$

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$
$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1)$$

$$x=-1 \quad : \quad -4A=-8$$
$$x=3 \quad : \quad 4B=12$$

الحل الآني $A=2$ و $B=3$

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx = \ln\left[c\,(x+1)^2(x-3)^3\right]$$

b) $\int \frac{\left(x^5-x^4-3x+5\right)dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$

بالقسمة المطولة نحصل على

$$\frac{x^5-x^4-3x+5}{(x^2+1)(x-1)^2} = x+1+\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

بالكسور الجزيئية

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}$$

$$-2x+4 = (Ax+B)(x-1)^2+C\left(x^2+1\right)(x-1)+D\left(x^2+1\right)$$
$$x=0 \quad : \quad B-C+D=4$$
$$x=1 \quad : \quad 4D=2$$
$$x=-1 \quad : \quad -4A+4B-4C+2D=6$$
$$x=2 \quad : \quad 2A+B+5C+5D=0$$

الحل الآني $A=2$, $B=1$, $C=-2$, $D=1$

$$\int \frac{x^5-x^4-3x+5}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2}+x^2+\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx-2\int\frac{dx}{(x-1)}$$
$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln\left[\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\right]+\tan^{-1}x-\frac{1}{(x-1)}+c$$

مسرد المصطلحات

- **الدالة المكاملة Integrated Function :**

وهي الدالة التي تنتج بعد إجراء عملية التكامل على دالة ما .

- **ثابت التكامل Constant of Integration :** قيمة اختيارية تضاف للدالة المكاملة .
- **التكاملات النمطية Standard Integrates :**

وهي صيغ معيارية للتكامل أي يمكن المقارنة بها عند حل المسائل .

- **خواص التكامل Integration Properties :**

ويقصد بها النظريات المطبقة في حل مسائل التكامل .

- **التكامل المحدود Definite Integration :**

ويقصد به التكامل المحصور في فترة معينة من مجال الدالة وليس على كل المجال .

- **المساحة تحت المنحنى Area under A curve :**

ويقصد بها المساحة المحصورة بين المحور x ومستقيمين عموديين عليه .

- **التكامل بالتعويض Integration by Substitution :**

وهو أن نعوض بدلالة عن دالة (يصعب علينا تكاملها) بدالة أخرى z أو u ..... إلخ .

- **التكامل بالتجزئة Integration by Parts :**

وهو أن نجزئ الدالة إلى ضرب دالتين أحداهما مشتقة لدالة ما والأخرى دالة مكاملة لمشتقة ما .

- **التكامل بالاختزال Integration by Reduction Formula :**

وهو أن نحصل بعد إجراء تكامل لدالة ما (مرتين) على دالة من نفس صيغة الدالة المكاملة .

- **الكسور الجزئية Partial Fractions :**

وهو أن نحول الدالة إلى مجموع أو فرق كسرين (دالتين كسريتين) ثم نكامل كل منهما .

المراجع بالعربية

1. آيرز، فرانك (1974) : نظريات و مسائل في المصفوفات.
2. بلايت و روبرتسون (2000) : الجبر الخطي. (ج الملك سعود).
3. الدليمي و خضير و باقية (2000) : الرياضيات لطلبة الاقتصاد و العلوم الإدارية. (دار وائل– عمان)
4. سودان و السلمان و سرميتي (1884) : حساب التفاضل و التكامل. (جامعة الملك سعود)
5. عبدالفتاح عبدالمعطي محمد (2002) : مقرر أول في الجبر الخطي (جامعة الجزيرة) .
6. عثمان محمد المكي (1999) : الحسبان الأولي .(جامعة الخرطوم)
7. فرانك آيرز (1992) : حساب التفاضل و التكامل. (سلسلة شوم)
8. هب الريح و جهينة (1993) : الرياضيات و التفاضل و التكامل I و II . (جامعة التحدي)

المراجع بالإنجليزية

1. Glass, J.C. (1980) : An Introduction to Mathematical Methods in Economics.(McGraw - Hill)
2. Hamilton, A.G. (1987): A First Course in Linear Algebra with Concurrent Examples.(Cambridge)
3. Caunt, G.W. (1971): Elementary Calculus .(Oxford)
4. Piskanov, N. (1974: Differential and Integral Calculus.(MIR)
5. Briggs,w and G.H. Brian(1969): Tutorial Algebra.(University Tutorial)
6. Thomas, G. B. and R.L. Finny. (1982.) Calculus and analytic geometry.(Addison-Wesley)
7. Durell,C.V. and A. Robson.(1962) Elementary Calculus.(Bell)
8. Anton, H.(1981) : : Calculus with Analytic Geometry. (Wiley).
9. Lipschutz, S.(1874) : Linear Algebra.(Schaum series)