الوحدة الثالثة

العلاقات

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**119**
تمهيد	119
أهداف الوحدة	120
1. تعريف العلاقات	**121**
1.1 الأزواج المرتبة والضرب الديكارتي	121
2.1 العلاقة	124
3.1 تمثيل العلاقات باستخدام المخططات السهمية	129
4.1 التمثيل البياني للعلاقات	133
2. أنواع العلاقات وخواصها	**138**
1.2 العلاقة الانعكاسية	138
2.2 العلاقة المتماثلة	141
3.2 العلاقة الناقلة (المتعدية)	144
3. علاقة التكافؤ	**148**
4. التجزئة وصنوف التكافؤ	**154**
5. العلاقة العكسية	**163**
الخلاصة	**169**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**169**
إجابات التدريبات	**170**
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	**175**
مسرد المصطلحات	**180**
المراجع العربية والأجنبية	**182**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس، أهلاً بك في هذه الوحدة الثالثة من مقرر 151 رياضيات (1) الرياضيات الأساسية، وهذه الوحدة تتناول العلاقات.

في حياتنا اليومية كثيراً ما نتعامل مع عناصر مجموعات تربط بينها علاقات معينة، فكل يوم تقريباً نفتح دليل الهاتف لنجد مجموعة من الأشخاص وبجوارها أرقام هواتفهم، إن مثل هذا الارتباط بين اسم الشخص ورقم هاتفه مثلاً هو عبارة عن علاقة، وكثيراً ما نهتم برقم والأرقام التي تقسمه وغيرها من الأمور التي تتعلق بالعلاقات.

لهذا فإن من المفيد بل من الضروري عليك أن تفهم مفهوم العلاقات وكيفية تمثيلها، وهذا سنتناوله في هذه الوحدة.

ثم سنتعرف على أنواع العلاقات وخواص هذه العلاقات ومتى تعتبر العلاقة انعكاسية أو متماثلة أو ناقلة ومتى تعتبر علاقة تكافؤ.

وسنتعرف على التجزئة وصنوف التكافؤ، وبالنهاية سنتعرف على العلاقة العكسية.

أهلا بك مرة أخرى إلى هذه الوحدة، نأمل أن تفيد منها وأن تساهم معنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،

يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

- **تعرّف** العلاقات كمجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي.
- **تشرح** قاعدة علاقة محددة بمخطط سهمي، ترسم هذا المخطط السهمي.
- **تشرح** مجال العلاقة ومداها.
- **تشرح** أنواع العلاقات حسب الخواص التي تحققها.
- **تشرح** علاقة التجزئة وصنوف التكافؤ.
- **تميّز** العلاقة العكسية وإيجاد مجالها ومداها.

1. تعريف العلاقات

لدراسة العلاقات على المجموعات، لابد أولاً من دراسة الضرب الديكارتي للمجموعات، ومعرفة الأزواج المرتبة أولاً، فالعلاقة مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي.

1.1 الأزواج المرتبة والضرب الديكارتي

عند دراسة العلاقات وتمثيلها على المخططات لابد من معرفة الأزواج المرتبة Ordered Pairs.

فالزوج المرتب (x, y) يتكون من مركبتين X, y. بحيث تسمى المركبة الأولى بالمسقط الأول (First coordinate) وتسمى المركبة الثانية بالسقط الثاني (Second Coordinate) أما كلمة مرتب فتطلق على هذا الزوج لان (x, y) يختلف عن (y, x) فكل منهما إذا أردنا تمثيلها على المستوى الديكارتي كانت تعبر عن نقطة مختلفة. فالزوج المرتب (x, y) يكون المسقط الأول له $x \in A$ والمسقط الثاني $y \in B$.

بينما الزوج المرتب (y, x) يكون المسقط الأول $y \in A$ والمسقط الثاني $x \in B$.

تعريف:

الزوجان المرتبان (a, b) ، (x, y) يكونان متساويان، إذا وفقط إذا كانت:

$b = y$ وكذلك $a = x$

وبالرموز $(a, b) = (x, y) \leftrightarrow (a = x) \Lambda (b = y)$

تعريف:

لتكن A, B مجموعتين، الضرب الديكارتيCartesian Product للمجموعتين A,B يتكون من كل الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الأول لها عنصراً في A والمسقط الثاني عنصراً في B. يرمز للضرب الديكارتي $A \times B$.

أي أنه:

$A \times B = \{ (x, y)\ 1\ x \in A \text{ and } y \in B \}$

$B \times A = \{ (y, x)\ 1\ y \in B \text{ and } x \in A \}$

مثال:

لتكن $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$.

فأوجد كلاً من: 1. $A \times B$ 2. $B \times A$.

الحل:

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2) , (2,3)\}$

$B \times A = \{(2,1), (2,2), (3,1) , (3,2)\}$

انتبه -عزيزي الدارس- لوضع الفاصلة، بين الأزواج المرتبة فكل زوج عبارة عن عنصر في المجموعة، وعند كتابة قائمة العناصر لمجموعة نضع فاصلة للفصل بين العناصر.

مثال:

لتكن $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, d, e\}$ فأوجد كلاً مما يلي:

1. $A \times B$ 2. $B \times A$ 3. $A \times A$ 4. $B \times B$

الحل:

$A \times B = \{(a,b), (a,d), (a,e), (b,b), (b,d), (b,e), (c,b), (c,d), (c,e)\}$

$B \times A = \{(b,a), (b,b), (b,c), (d,a), (d,b), (d,c), (e,a), (e,b), (e,c)\}$

ولإيجاد $A \times A$ ستكون عناصر المسقط الأول من A وعناصر المسقط الثاني من A أيضاً.

$A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

$B \times B = \{(b,b), (b,d), (b,e), (d,b), (d,d), (d,e), (e,b), (e,d), (e,e)\}$

مثال:

لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 6, 9\}$ فأوجد كلاً مما يلي:

1. $A \times B$ 2. $B \times A$ 3. $A \times A$ 4. $B \times B$

الحل:

$$A \times B = \{(1,3), (1,6), (1,9), (2,3), (2,6), (2,9), (3,3), (3,6), (3,9), (4,3), (4,6), (4,9)\}$$

$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (9,1), (9,2), (9,3), (9,4)\}$$

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

$$B \times B = \{(3,3), (3,6), (3,9), (6,3), (6,6), (6,9), (9,3), (9,6), (9,9)\}$$

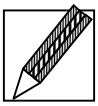
انظر إلى الأمثلة السابقة وحاول أن تجد علاقة بين عدد عناصر $A \times B$ وعدد عناصر كلاً من A و B .

إذا كانت المجموعتان A,B مجموعتان منتهيتان حيث أن عدد عناصر A هو n وعدد عناصر B هو m. فإن عدد عناصر $A \times B$ هو $n \times m$.

فإذا كان $a \in A$ فإن هناك m احتمال لاختيار المسقط الثاني للزوج المرتب الذي مسقطه الأول a وهذه الاحتمالات هي عدد عناصر B. وهناك n احتمال لاختيار المسقط الأول لهذا الزوج المرتب.

إذن عدد الأزواج المرتبة التي يمكن الحصول عليها هو $n \times m$.

تدريب (1)



1- لتكن $A = \{3, 5, 6\}$ ، $B = \{1, 2, 3\}$ فأوجد كلاً مما يلي:

1. $A \times B$ 2. $B \times A$ 3. $A \times A$ 4. $B \times B$

2- لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، $B = \{e, f, g, h, i, j\}$.

أوجد عدد عناصر $A \times B$ ، $B \times A$ ، $A \times A$ ، $B \times B$

(ملاحظة: أوجد عدد العناصر فقط من دون كتابة المجموعة)

2.1 العلاقة

تعريف:

العلاقة R (Relation) من المجموعة A إلى المجموعة B هي مجموعة جزئية من $A \times B$.
فإذا كان الزوج المرتب $(a,b) \in R$ فإننا نكتب aRb للدلالة على أن a لها علاقة مع b بواسطة R .
في الحالة التي تكون فيها المجموعتان A و B متساويتان ($A = B$) فإننا نسمي R علاقة معرفة على A .
تسمى المجموعة التي تتكون من كل المساقط الأولى للأزواج المرتبة التي تنتمي إلى R مجال العلاقة Domain .

$$Domain = \{a \in A \mid (a,b) \in R, \}$$

تسمى المجموعة التي تتكون من المساقط الثانية للأزواج المرتبة التي تنتمي إلى العلاقة R مدى العلاقة Range .

$$Range = \{b \in B \mid (a,b) \in R \}$$

إذن سيكون مجال العلاقة مجموعة جزئية من المجموعة A .
وسيكون المدى للعلاقة مجموعة جزئية من المجموعة B .

أبسط طريقة للتعبير عن العلاقة هي باستخدام الأزواج المرتبة بحيث يكون المسقط الأول له علاقة مع المسقط الثاني بواسطة R .

مثال:

لتكن {مصطفى، محمود، محمد، أحمد} = A تمثل مجموعة من الطلاب.

{101, 102, 103, 104} = B تمثل مجموعة من أرقام المواد ولتكن R علاقة من A إلى B ، ومكونة من الأزواج المرتبة (a,b) حيث a اسم الطالب وb رقم المادة التي يدرسها.

والعلاقة R ممثلة بمجموعة الأزواج المرتبة التالية:

{ (103، مصطفى)، (101، محمود)، (103، محمد) (102، محمد)، (101، أحمد) } = R .

بما أن الزوج المرتب R ∈ (101، محمود) إذن يمكننا القول أن R101 محمود أي أن محمود يدرس المادة 101.

ولكن بما أن الزوج المرتب R ∉ (103، محمود) إذن 103 R محمود أي أن محمود لا يدرس المادة 103.

لو أردنا تحديد المجال والمدى للعلاقة R في هذا المثال فإن:

المجال: مجموعة المساقط الأولى للأزواج المرتبة التي تنتمي للعلاقة R

={أحمد، محمود، محمد، مصطفى }.

المدى: مجموعة المساقط الثانية للأزواج المرتبة التي تنتمي للعلاقة R

={ 101، 102، 103}.

مثال:

لتكن A = {a, b, c, d} ، B = {c, e, g, h}، ولتكن R علاقة من A إلى B تمثلها مجموعة الأزواج المرتبة التالية:

R = {(a,c), (a,e), (b,c), (d,c)}

فهل الجمل التالية صحيحة؟

1. aRc 2. aRg

الحل:

1- بما أن الزوج المرتب $(a, c) \in R$ إذن a لها علاقة مع c أي أن aRc صحيحة.

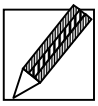
2- بما أن الزوج المرتب $(a, g) \notin R$ إذن a ليس لها علاقة مع g بواسطة R. اي أن aRg خاطئة و الصواب $a\not{R}g$.

والمجال للعلاقة R في المثال:

المجال = {d, b, a}.

المدى = {c, e} .

تدريب (2)



لتكن R علاقة من $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ إلى $B = \{1, 2, ..., 10\}$ ممثلة بمجموعة الأزواج المرتبة التالية:

$R = \{(1, 2), (3,4), (4,5), (2,9)\}$

حدد المجال والمدى للعلاقة R .

ومن الممكن أن نصف العلاقة بإعطاء القاعدة التي تربط بين مسقطي الأزواج المرتبة للعلاقة R.

مثال:

لتكن R علاقة من $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4\}$

حيث : $(a,b) \in R$ إذا كان a ضعف b .

$$R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a = 2b\}$$

فاكتب R كمجموعة من الأزواج المرتبة.

الحل:

ستتكون R من الأزواج المرتبة التي يكون فيها المسقط الأول ضعف المسقط الثاني، إذن:

$R = \{(2,1), (4,2), (6,3)\}$

المجال في هذا المثال ={ 2، 4، 6}.

المدى = {1، 2، 3}

مثال:

لتكن R علاقة من {4، 3، 2، 1} = A إلى {5، 4، 3} = B حيث $(a,b) \in R$ إذا كان a أصغر من b .

$R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B , a < b \}$

فمثل R كمجموعة من الأزواج المرتبة، وحدد المجال والمدى للعلاقة R.

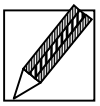
الحل:

$R = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

المجال ={ 1، 2، 3، 4}

المدى ={ 3، 4، 5}

تدريب (3)



لتكن R علاقة من {4، 3، 2، 1} = A إلى {5، 4، 3} = B .
حيث $(a, b) \in R$ إذا كان a أكبر أو يساوي b.
$R = \{ (a, b) \mid a \in A , b \in B, a \geq b \}$
فاكتب R كمجموعة من الأزواج المرتبة. وحدد المجال والمدى للعلاقة R.

مثال:

لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ولتكن R علاقة على A حيث $(a,b) \in R$ إذا كان $a + b = 5$ حيث $a, b \in A$

$$R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in A, a + b = 5 \}$$

فاكتب R كمجموعة من الأزواج المرتبة، وحدد المجال والمدى للعلاقة.

الحل:

$$R = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

المجال : {1، 2، 3، 4}.

المدى : {1، 2، 3، 4}.

مثال:

لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{ 0, 1, 2, ... \}$

حيث $(a, b) \in R$ إذا كان $a + b = 7$ حيث $a, b \in N$

$$R = \{(a,b) \mid a, b \in N, a + b = 7\}$$

فاكتب R كمجموعة من الأزواج المرتبة، وحدد المجال والمدى.

الحل:

$$R = \{(0, 7), (7, 0), (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

المجال = {0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7}.

المدى ={ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7} .

3.1 تمثيل العلاقات باستخدام المخططات السهمية

يمكن تمثيل العلاقات باستخدام المخططات السهمية بحيث نمثل العناصر في المجال والمجال المقابل للعلاقة بنقاط محاطة بأشكال مغلقة، ونعبر عن العلاقة بين العنصر في المجال والعنصر في المجال المقابل باستخدام السهم المنطلق من عنصر في المجال إلى العنصر في المجال المقابل الذي يرتبط معه من خلال العلاقة R.

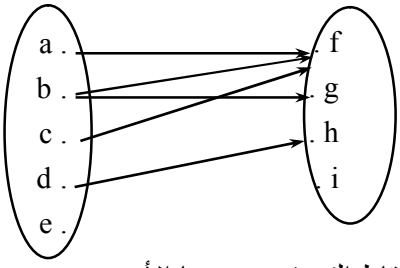
مثال:

لتكن $A = \{a, b, c, d, e\}$ ولتكن $B = \{f, g, h, i\}$.

ولتكن R علاقة من A إلى B ممثلة على النحو التالي:

$$R = \{(a,f), (b,f), (c,f), (d,h), (b,g)\}$$

يمكن تمثيل العلاقة R بالمخطط التالي:



المجال للعلاقة R هي النقاط التي تخرج منها الأسهم.

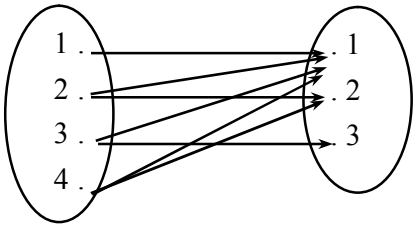
المدى للعلاقة R هي النقاط التي تتوجه إليها الأسهم.

في هذا المثال فإن المجال = $\{d, c, b, a\}$.

المدى = $\{h, g, f\}$.

مثال:

لتكن R علاقة من $A = \{1, 2, 3, 4\}$ إلى $B = \{1, 2, 3\}$ ممثلة بالمخطط السهمي التالي:



فأوجد R كمجموعة من الأزواج المرتبة؟ ثم أكتب قاعدة لهذه العلاقة.

الحل:

$R = \{(1,1), (2, 1), (2, 2), (3,3), (4,2), (4,1), (3,1)\}$

$(a,b) \in R$ إذا وفقط إذا a يقسم على b من دون باقي.

$R = \{(a,b) \mid a, b \in A$, a يقسم على b من دون باقي، }

مثال:

لتكن R علاقة من $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ إلى $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

حيث $(a, b) \in R$ إذا كان $a + b = 4$.

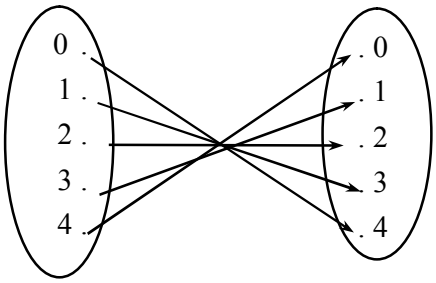
$R = \{(a, b) \mid a + b = 4 , a \in A, b \in B\}$

فارسم المخطط السهمي للعلاقة R وحدد المجال والمدى.

الحل:

$R = \{(0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$

والمخطط السهمي لها كالتالي:



المجال = {0، 1، 2، 3 ، 4 }.

المدى = {0، 1، 2، 3 ، 4 }.

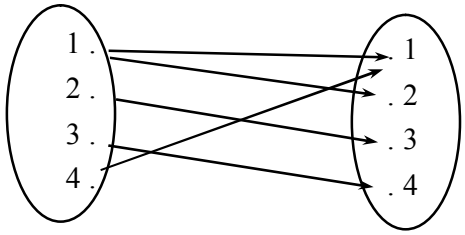
مثال:

لتكن R علاقة على A = {1, 2, 3, 4} حيث:

R = {(1,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,1)}

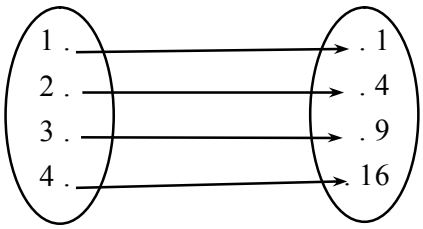
فارسم المخطط السهمي للعلاقة R .

الحل:



مثال:

لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية N = {0, 1, 2, ...} وكانت R ممثلة بالمخطط السهمي التالي:



فاكتب قاعدة للعلاقة R.

الحل:

$R = \{(a,b) \mid b = a^2 \ , a = 1, 2, 3, 4 \}$

تدريب (4)

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث :

$R = \{(a , b) \mid a = b + 1 \quad , b = 1, 2, 3, 4\}$

فارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة:

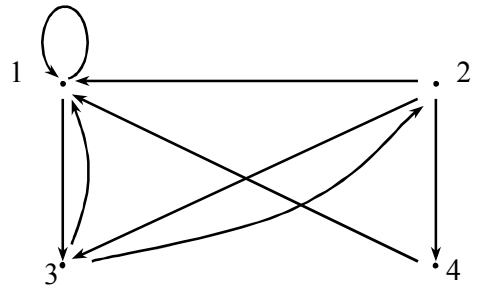
عندما تكون العلاقة معرفة على مجموعة منتهية فإنه يمكن رسم مخطط Digram لها كما هو موضح في الأمثلة التالية:

مثال:

R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$R = \{(1, 1), (1, 3), (2,1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

يمكن تمثيلها بمخطط على الشكل:

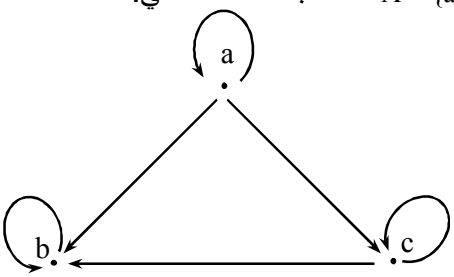


ملاحظة:

الزوج المرتب $(a, a) \in R$ يشير إلى أن هناك سهم من a إلى نفسه وهذا يسمى حلقة

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c\}$ ممثلة بالمخطط التالي:



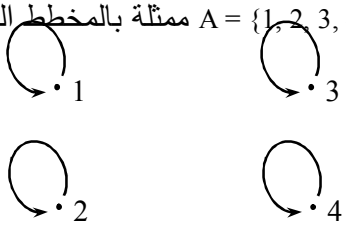
اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

الحل:

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (a,b), (c,b)\}$

تدريب (5)

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ممثلة بالمخطط التالي:



فاكتب الأزواج المرتبة التي تمثلها R ، واكتب قاعدة للعلاقة R .

4.1 التمثيل البياني للعلاقات

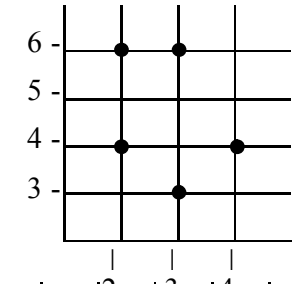
يمكن تمثيل العلاقة أيضاً على الشكل الإحداثي AXB وتكون العلاقة R من A إلى B تتكون من النقاط الموجودة على الشكل الإحداثي لـ AXB وكذلك تمثل العلاقة المعرفة على مجموعة A بالنقاط الموجودة على الشكل الإحداثي A X B .

مثال:

لتكن R علاقة من $A = \{2, 3, 4\}$ إلى $B = \{3, 4, 5, 6\}$ حيث $(a,b) \in R$ إذا كان a يقسم b .

$R = \{(2,4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$

R ممثلة على الشكل الإحداثي لـ AXB كما يلي:

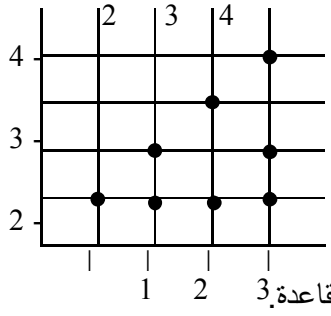


- 1, سم عدداً من المستقيمات الرأسية بعدد عناصر A .
- 1, سم عدد من المستقيمات الأفقية بعدد عناصر B .
- الأزواج المرتبة التي تنتمي للعلاقة تمثل نقاط على تقاطع المستقيم الرأسي والمستقيم العمودي.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$

وكانت R ممثلة بالشكل الإحداث AXA المجاور:



فأوجد مجموعة الأزواج المرتبة لـ R ، وأكتب R كقاعدة.

الحل:

$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$

وقاعدة العلاقة هي: $R = \{(a, b) \mid a, b \in A,$ { a يقسم على b من دون باقي

تدريب (6)

إذا كانت R علاقة من $A = \{1, 2, 3, 4\}$ إلى $B = \{1, 3, 5\}$.

حيث $(a, b) \in R$ إذا كان a أقل من b .

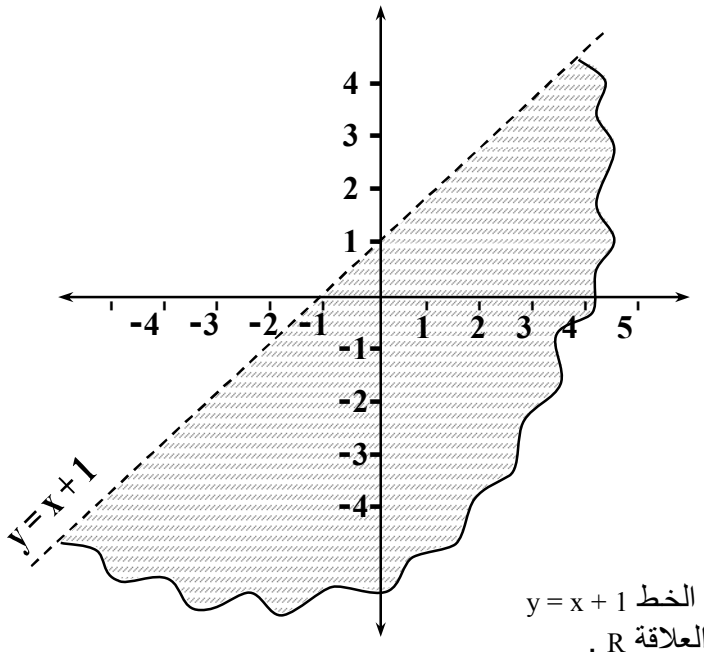
مثل العلاقة R على الشكل الإحداثي AXB بعد إيجاد الأزواج المرتبة للعلاقة R .

مثال:

لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية **R** حيث:

$R = \{ (x, y) \mid x, y$ ، عددان حقيقيان $y < x + 1\}$

هذه العلاقة تمثل على المستوى الإحداثي **RXR** وهكذا الشكل الإحداثي هو المستوى الديكارتي.



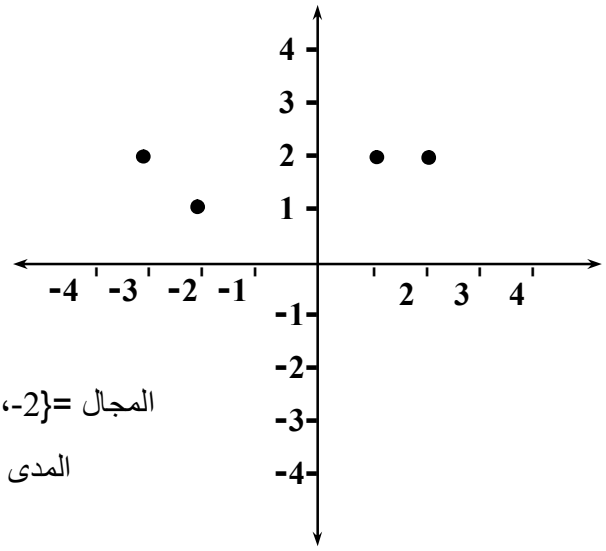
المنطقة الواقعة تحت الخط $y = x + 1$ هي النقاط التي تمثل العلاقة R .

مثال:

لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

$R = \{(-2, 1), (-3, 2), (1, 2), (2, 2)\}$

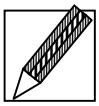
فمثل هذه العلاقة بيانياً، وحدد كلاً من المجال والمدى؟



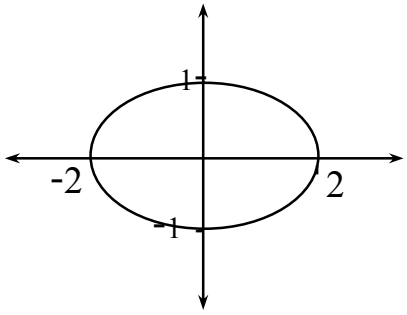
المجال ={2-، 3-، 1 ، 2}

المدى = {1، 2}

تدريب (7)



لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية وممثلة بالرسم البياني التالي:



حدد المجال والمدى لهذه العلاقة.

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1- لتكن R علاقة على $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

بحيث $(a, b) \in R$ إذا فقط إذا $a > b$.

1. أوجد $A \times A$.
2. أكتب مجموعة الأزواج المرتبة للعلاقة R .
3. مثل العلاقة R بمخطط.
4. حدد المجال والمدى.

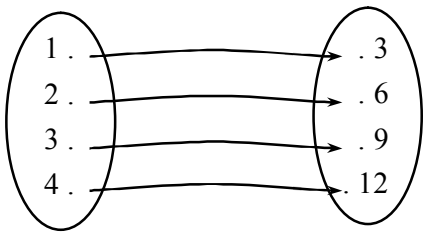
2- لتكن R علاقة على $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. مجموعة الأعداد الطبيعية، ولتكن R ممثلة على شكل أزواج مرتبة كالتالي:

$R = \{(0, 0), (1,1), (2, 8), (3, 27), (4, 64)\}$

1. أكتب القاعدة للعلاقة R .
2. حدد المجال والمدى.
3. مثل العلاقة بمخطط سهمي.

3- لتكن R علاقة على A معطاة بالمخطط السهمي التالي:

حيث : $A = \{1, 2, .., 12\}$.



حدد مجال ومدى العلاقة. حدد قاعدة العلاقة.

2. أنواع العلاقات وخواصها

العلاقات التي سنتناولها بالدراسة هنا هي العلاقات المعرفة على مجموعة واحدة أي أن العلاقة R ستكون مجموعة جزئية من A X A.

وسندرس العلاقات التي تتمتع بخاصية أو أكثر من الخواص التالية:

أ- خاصية الانعكاس Reflectivity .

ب- خاصية التماثل Symmetry .

جـ- الخاصية الناقلة (التعدي) Transitivity .

ويتم تصنيف العلاقات حسب الخاصية التي تتميز بها كالآتي:

1.2 العلاقة الانعكاسية Reflexive Relation

تعريف:

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة A ، تسمى R علاقة انعكاسية Reflexive Relation إذا وفقط إذا $(a, a) \in R$ لجميع العناصر $a \in A$.

أي أن العلاقة تسمى انعكاسية إذا فقط إذا aRa لكل $a \in A$ فكل عنصر في المجال A له علاقة مع نفسه.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ حيث أن R علاقة التساوي، أي:

$$R = \{(a, b) \mid a = b , a , b \in A\}$$

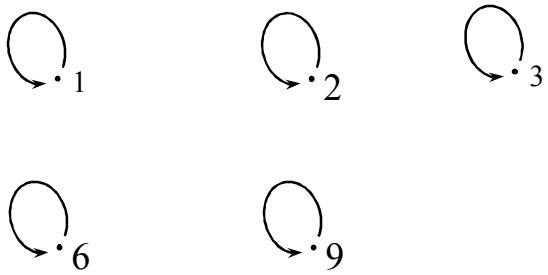
يمكن تمثيل R بكتابة الأزواج المرتبة كالتالي:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (6,6), (9,9)\}$$

لاحظ أن لكل a ينتمي لـ A فإن $(a, a) \in R$.

إذن العلاقة R هي علاقة انعكاسية.

والمخطط لهذه العلاقة هو:



لاحظ أن لكل عنصر في المجال فإن له حلقة loop في مخططه وهذا إشارة إلى أن هذه العلاقة انعكاسية.

مثال:

علاقة التساوي على مجموعة الأعداد الطبيعية هي علاقة انعكاسية وذلك لأن:

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

فكل عنصر يساوي نفسه.

ملاحظة

لتثبت أن علاقة ما انعكاسية على المجموعة A فإنه يجب أن تثبت أن كل عنصر $a \in A$ فإن $(a, a) \in R$.

بينما لتثبت أن علاقة ما ليست انعكاسية فيكفي أن تعطي مثالاً لعنصر محدّد ينتمي للمجال بحيث $a \in A$ ولكن $(a, a) \notin R$.

مثال:

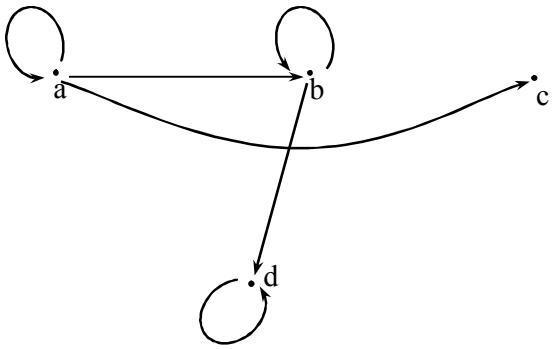
لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c, d\}$ حيث:

$R= \{(a, b), (a,a), (a,c), (b,d), (d,d), (b,b)\}$

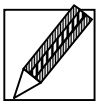
فهل R علاقة انعكاسية؟

$c \in A$ ولكن $(c,c) \notin R$ إذن R علاقة ليست انعكاسية.

وتمثل R بمخطط سهمي كالتالي: لاحظ أنه لا يوجد loop عند النقطة c .



تدريب (8)



لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث $(a, b) \in R$ إذا كان a أكبر من أو يساوي b . فهل العلاقة R انعكاسية؟

مثال:

لتكن R علاقة على A ، ولتكن S أيضاً علاقة على A . لو كانت كلاً من R و S علاقة انعكاسية.

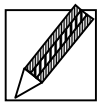
أثبت أن العلاقة $R \cap S$ هي علاقة انعكاسية على المجموعة A أيضاً.

الحل:

بما أن R علاقة انعكاسية فإن لكل عنصر ينتمي لـ A سيكون $(a, a) \in R$ ، وبما أن S علاقة انعكاسية فإن لكل عنصر a ينتمي للمجموعة A فإن $(a, a) \in S$.

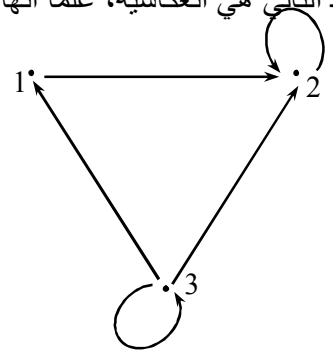
إذن سيكون $(a, a) \in R \cap S$ لكل $a \in A$ إذن $R \cap S$ علاقة انعكاسية.

تدريب (9)



1- لتكن العلاقة R معرفة على $A = \{5, 6, 7, 8\}$ ، فأعطي مثالاً على R بحيث تكون علاقة انعكاسية.

2- هل العلاقة الممثلة بالمخطط التالي هي انعكاسية، علماً أنها علاقة معرفة على $A = \{1, 2, 3\}$.



2.2 العلاقة المتماثلة Symmetric Relation

تعريف:

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة A ، تسمى R علاقة متماثلة Symmetric Relation على A إذا وفقط إذا $(a,b)\in R$ فإن $(b,a)\in R$ لكل $(a, b) \in R$

بمعنى آخر فإن R تسمى علاقة متماثلة إذا كان a له علاقة مع b فإن b له علاقة مع a .

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 3, 6, 9\}$ حيث أن R علاقة تساوي، أي أن:

$$R = \{(a, b) \mid a = b , a , b \in A\}$$

يمكن تمثيل العلاقة R بمجموعة من الأزواج المرتبة كالتالي:

$R = \{(1, 1), (3, 3), (6, 6), (9, 9)\}$

R علاقة متماثلة، لأنه إذا كان $a = b$ فإن $b = a$.

مثال:

لتكن R علاقة معرفة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 1), (1, 4)\}$

هل R علاقة متماثلة؟

الحل:

العلاقة R متماثلة، وذلك لأن عندما $(a, b) \in R$ فإن $(b, a) \in R$ وعندما $(a, b) \notin R$ فإن $(b, a) \notin R$ أيضاً.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{0, 2, 4, 6\}$ حيث:

$R = \{(0, 2), (4, 2), (6, 4), (2, 4), (4, 6)\}$

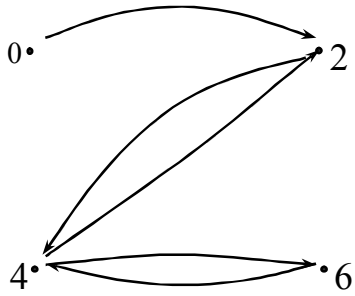
هل R علاقة متماثلة؟

الحل:

R ليست علاقة متماثلة لأن:

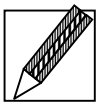
$(0, 2) \in R$ ولكن $(2, 0) \notin R$.

وتمثل العلاقة السابقة بالمخطط التالي:



لاحظ في المثال أنه يوجد سهم متجه من 0 إلى 2 ولكن لا يوجد سهم متجه من 2 إلى 0 مما يعني أن العلاقة ليست متماثلة.

تدريب (10)

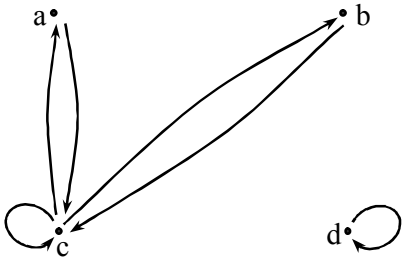


1- إذا كانت R علاقة على $A = \{0, 1, 2, 3\}$ حيث:

$R = \{(a, b) \mid a + b = 3 , a, b \in A\}|$

هل R علاقة متماثلة، ارسم مخطط للعلاقة R.

2. هل العلاقة الموضحة بالمخطط التالي علاقة متماثلة؟.



مثال:

لتكن R علاقة متماثلة على A، ولتكن S علاقة متماثلة على A فأثبت أن $R \cap S$ علاقة متماثلة.

الحل:

لتكن $(a, b) \in R \cap S$ ، إذن $(a, b) \in R$ و $(a, b) \in S$.

بمـا أن R و S علاقتـان متماثلتـان إذن $(b, a) \in R$ و $(b, a) \in S$ لـذلك فـإن $(b, a) \in R \cap S$.

إذن العلاقة $R \cap S$ علاقة متماثلة.

3.2 العلاقة الناقلة(العلاقة المتعدية) Transitive Relation

تعريف:

لتكن R علاقة على المجموعة A ، تسمى R علاقة ناقلة Transitive Relation إذا كان $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R$ فإن $(a, c) \in R$ لكل $a, b, c \in A$.

أي أن العلاقة تسمى علاقة ناقلة إذا كان $(b, c) \in R, (a, b) \in R$

تعني أن $(a, c) \in R$.

تسمى العلاقة الناقلة بعلاقة تعدي أيضاً.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث أن R علاقة معطاة بالأزواج المرتبة التالية.

$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

هل العلاقة R متعدية.

الحل:

العلاقة R متعدية، وذلك لأن:

$(1, 2) \in R, (2, 3) \in R \rightarrow (1, 3) \in R$

$(1, 2) \in R, (2, 4) \in R \rightarrow (1, 4) \in R$

$(1, 3) \in R, (3, 4) \in R \rightarrow (1, 4) \in R$

$(1, 4) \in R, (4, 4) \in R \rightarrow (1, 4) \in R$

$(2, 3) \in R, (3, 4) \in R \rightarrow (2, 4) \in R$

$(2, 4) \in R, (4, 4) \in R \rightarrow (2, 4) \in R$

$(3, 4) \in R, (4, 4) \in R \rightarrow (3, 4) \in R$

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c, d, e\}$ حيث:

$R = \{(a, b), (b, b), (a, c), (b, c)\}$

هل العلاقة R علاقة ناقلة.

الحل:

$(a, b) \in R , (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

$(a, b) \in R , (b, b) \in R \rightarrow (a, b) \in R$

$(b, b) \in R , (b, c) \in R \rightarrow (b, c) \in R$

إذن العلاقة R هي علاقة ناقلة.

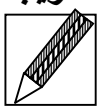
مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3\}$ حيث: $R = \{(1, 2), (3,1)\}$ هل R علاقة ناقلة؟

الحل:

العلاقة R هي علاقة ناقلة، فالشرط $(a, b) \in R$ و $(b ,c) \in R$ لم يتحقق.

تدريب (11)



1- لتكن R علاقة على $A = \{3, 6, 9, 12\}$ حيث:

$R = \{(3, 6), (6, 6), (9, 12), (12, 9), (9, 9)\}$.

هل R علاقة ناقلة؟

2- لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c, d\}$ حيث:

$R = \{(a, a), (b, b), (c,c), (d,d)\}$.

هل R علاقة ناقلة؟

مثال:

لتكن R علاقة ناقلة على A، ولتكن S علاقة ناقلة على A .

أثبت أن $R \cap S$ علاقة ناقلة على A .

الحل:

ليكن $(a, b) \in R \cap S$ و $(b, c) \in R \cap S$. إذن $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$.

وبما أن R علاقة ناقلة إذن $(a, c) \in R$. وبما أن S علاقة ناقلة إذن $(a, c) \in S$.

إذن $(a, c) \in R \cap S$. إذن $R \cap S$ علاقة ناقلة.

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1- لتكن R معرفة على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث:

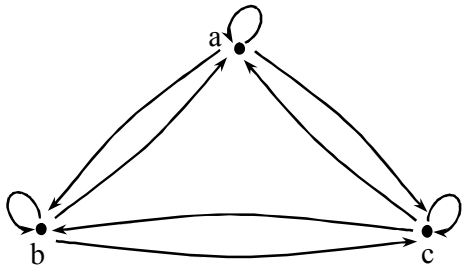
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (1, 4)\}$

حدد فيما إذا كانت R انعكاسية، متماثلة، ناقلة.

2- لتكن R معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث:$(a,b)\in R$إذا كان $a = b^2$ حدد فيما إذا كانت R انعكاسية، متماثلة، ناقلة.

3- إذا كانت S, R علاقتين معرفتين على $A = \{a, b, c\}$ وإذا كان كلاً من S, R علاقة ناقلة فأثبت خطأ ما يلي: $R \cup S$ علاقة ناقلة (بإعطاء مثال).

4- لتكن R معطاة بالمخطط التالي، حدد فيما إذا كانت R انعكاسية، متماثلة، ناقلة.



5- أعطي أمثلة لعلاقات على المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ بحيث تكون:

1. انعكاسية ومتماثلة وناقلة.
2. انعكاسية ومتماثلة وليست ناقلة.
3. ليست انعكاسية ومتماثلة وناقلة.

3. علاقة التكافؤ

لتكن R علاقة على المجموعة A ، تسمى R علاقة تكافؤ على A Equivalence Relation إذا كانت:

1- علاقة انعكاسية على A .

2- علاقة متماثلة على A .

3- علاقة ناقلة على A .

مثال:

لتكن العلاقة R معرفة على $A = \{a, b, c\}$ ، حيث:

$$R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (c, c), (b, a)\}$$

بيّن أن R علاقة تكافؤ.

الحل:

.1

$$a \in A \rightarrow (a, a) \in R$$

$$b \in A \rightarrow (b, b) \in R$$

$$c \in A \rightarrow (c, c) \in R$$

إذن R علاقة انعكاسية على A .

.2

$$(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

إذن R علاقة متماثلة على A .

.3

$(a, a) \in R , (a, b) \in R \rightarrow (a, b) \in R$

$(a, b) \in R , (b, b) \in R \rightarrow (a, b) \in R$

$(a, b) \in R , (b, a) \in R \rightarrow (a, a) \in R$

$(b, b) \in R , (b, a) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

إذن R علاقة ناقلة على A .

بما أن R علاقة انعكاسية ومتماثلة وناقلة على A إذن R علاقة تكافؤ.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ حيث: $a, b, \in A$ وباقي قسمة a على b يساوي صفر $R = \{(a, b) |$.

أي أن $(a, b) \in R$ إذا كان باقي قسمة a على b يساوي صفر.

هل R علاقة متكافئة؟

الحل:

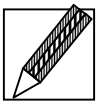
1- لكل عدد فإن حاصل قسمته على نفسه يساوي 1 والباقي صفر إذن R علاقة انعكاسية.

2- مثلاً: $(10, 2) \in R$ لأن باقي قسمة 10 على 2 يساوي 5 والباقي صفر ولكن $(2, 10) \notin R$ لأن باقي قسمة 2 على 10 لا يساوي صفر.

إذن العلاقة R ليست متماثلة.

بما أن R ليست متماثلة فلا يوجد ضرورة لأن تتحقق من الخاصية الناقلة فنحكم على R بأنها ليست علاقة تكافؤ.

تدريب (12)

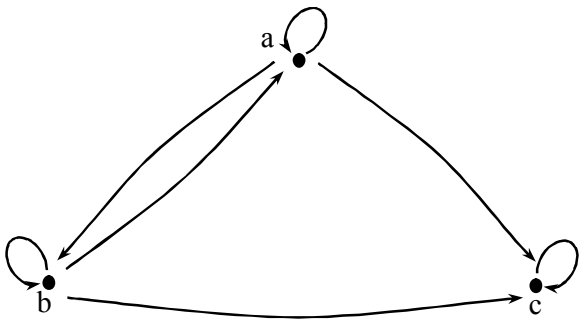


لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث :

$R = \{(1,1), (1,2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c\}$ بحيث R معطاة بالمخطط التالي.



أكتب الأزواج المرتبة التي تمثلها العلاقة R ، ثم حدد فيما إذا كانت R علاقة تكافؤ؟

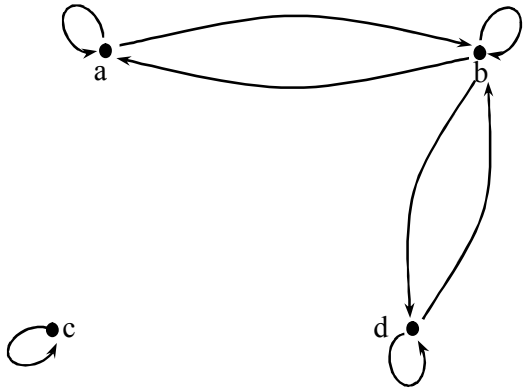
الحل:

$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$

1. العلاقة انعكاسية ، لأنه كل عنصر في A له علاقة مع نفسه.
2. العلاقة ليست متماثلة، لأن $(a, c) \in R$ ولكن $(c, a) \notin R$ إذن العلاقة ليست تكافؤ.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c, d\}$ بحيث R معطاة بالمخطط التالي:



من دون كتابة الأزواج المرتبة التي تمثلها، فقط من خلال المخطط حدد إذا كانت R علاقة تكافؤ؟

الحل:

1- بما أن لكل عنصر من عناصر المجال يوجد Loop، إذن العلاقة انعكاسية.

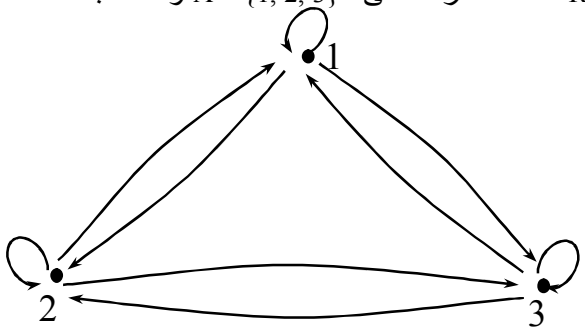
2- بما أن لكل سهم يصل بين نقطتين يوجد سهم بالاتجاه المعاكس يصل بين نفس النقطتين، إذن العلاقة متماثلة.

3- العلاقة ليست متعدية (ناقلة) لأنه $(a, b) \in R$ و $(b, d) \in R$ ولكن $(a, d) \notin R$ حيث لا يوجد سهم من a إلى d .

إذن العلاقة ليست تكافؤ.

تدريب (13)

لتكن R علاقة معرفة على $A = \{1, 2, 3\}$ وممثلة بالمخطط التالي:



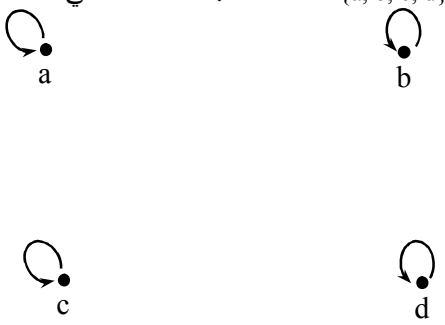
هل العلاقة علاقة تكافؤ؟

أسئلة التقويم الذاتي (3)

– لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots.\}$ حيث aRb تعني أن a يساوي b.

بيّن فيما إذا كانت علاقة التساوي علاقة تكافؤ.

2- لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c, d\}$ ممثلة بالمخطط التالي:



هل العلاقة R علاقة تكافؤ؟

3- لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث:

$R = \{(1, 1,), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

حدد فيما إذا كانت R علاقة تكافؤ.

4- لتكن R علاقة على $A = \{a, b, c, d\}$.

فأعطي مثالاً على:

1- علاقة تكافؤ على A .

2- علاقة ليست تكافؤ على A .

4. التجزئة وصفوف التكافؤ

Partition and equivalence classes

تعريف:

إذا كانت A مجموعة غير خالية، وكانت:

$T = \{A_1 , A_2..., A_n \}$

مجموعة عناصرها مجموعات جزئية غير خالية للمجموعة A ، فإن T تسمى تجزئة للمجموعة A Partition إذا وفقط إذا كان:

1) $A_n \cup \ldots \cup A_2 \cup A_1 = A$.

2) $\phi = A_d \cap A_n$ حيث d,r = 1، 2، 3، ..... ، n . وحيث $d \neq r$.

مثال:

A = {جميع سكان الأردن}

A_1 ={ سكان الأردن الذين تقل أعمارهم عن 18 سنة}

A_2 = {سكان الأردن الذين تزيد أعمارهم عن 18 سنة}

A_3 = {سكان الأردن الذين أعمارهم تساوي 18 سنة}

فهل $\{A_3 , A_2, A_1\}$ هي تجزئة للمجموعة A ؟

الحل:

بما أن:

1. $A \supset A_3 , A_2, A_1$ (مجموعات جزئية من A).
2. $\phi \neq A_3 , A_2, A_1$ (مجموعات غير خالية).
3. $\phi = A_3 \cap A_2 \cap A_1$ (مجموعات منفصلة).

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$ (اتحادهم يعطي المجموعة A).

إذن هي تجزئة للمجموعة A .

مثال:

لتكن $A = \{a, b, c, d\}$.

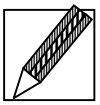
فإن $T = \{ \{a\}, \{b,c\}, \{d\} \}$ هي تجزئة للمجموعة A ، بين ذلك.

الحل:

1. $\{a\} \subseteq A$ ، $\{b, c\} \subseteq A$ ، $\{d\} \subseteq A$.
2. $\{a\} \neq \phi$، $\{b, c\} \neq \phi$، $\{d\} \neq \phi$.
3. $\{a\} \cup \{b, c\} \cup \{d\} = \{d, c, b, a\} = A$.
4. $\{a\} \cap \{b, c\} \cap \{d\} = \phi$.

إذن $\{ \{a\}, \{b,c\}, \{d\} \}$ هي تجزئة للمجموعة A .

تدريب (14)



لتكن المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ هل المجموعة $\{ \{1\}, \{2, 3\}, \{5\} \}$ تمثل تجزئة للمجموعة A ؟

مثال:

لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ أوجد كل التجزئيات الممكنة للمجموعة A .

الحل:

$T_1 = \{ \{1\}، \{2\}، \{3\} \}$.

$T_2 = \{ \{1، 2، 3\} \}$.

T_3 = { {1}، { 2، 3} }.

T_4 = { {2}، {1، 3} }.

T_5 = {{ 3}،{1، 2} }.

لاحظ أن كل مجموعة تحقق شروط التجزئة.

تعريف:

إذا كانت R علاقة تكافؤ على A. وكانت $a \in A$ فإن:

$$[a] = \{b \in A \mid bRa\}$$

[a] يسمى صنف تكافؤ equivalence class وممثل بالعنصر a .

والمجموعة: $S = \{ [a] \mid a \in A \}$

S : هي مجموعة صنوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R .

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3,1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

فأوجد صنوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R ؟

الحل:

يجب التأكد أولاً أن R علاقة تكافؤ على A قبل البدء بإيجاد صنوف التكافؤ.

(هذه العلاقة أثبتت أنها علاقة تكافؤ في التدريب (12)).

صنف التكافؤ [1] يحتوي على كل $b \in A$ حيث $(b, 1) \in R$.

نجد أن: $(3, 1) \in R$ ، $(2, 1) \in R$ ، $(1, 1) \in R$.

إذن :

$[1] = \{1, 2, 3\}$

صنف التكافؤ [2] يحتوي على كل $b \in A$ حيث $(b, 2) \in R$.

تجد أن: $(3, 2) \in R$ ، $(2, 2) \in R$ ، $(1, 2) \in R$

إذن :

$[2] = \{1, 2, 3\} = [1]$

صنف التكافؤ [3] يحتوي على كل $b \in A$ حيث $(b, 3) \in R$.

تجد أن: $(3, 3) \in R$ ، $(2, 3) \in R$ ، $(1, 3) \in R$

إذن :

$[3] = \{1, 2, 3\}$

صنف التكافؤ [4] يحتوي على كل $b \in A$ حيث $(b, 4) \in R$.

تجد أن : $(4, 4) \in R$

إذن :

$[4] = \{4\}$

إذن صنوف التكافؤ للعلاقة R هي:

$[1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\}$, $[4] = \{4\}$

نظرية:

لأي علاقة تكافؤ R على المجموعة غير الخالية A ، مجموعة صنوف التكافؤ S هي تجزئة Partition للمجموعة A .

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ حيث:

$(a, b) \in R$ إذا كان العدد 3 يقسم ناتج طرح $a - b$ ، فأوجد التجزئة للعلاقة R المكونة من صنوف التكافؤ؟

الحل:

$R = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 7), (7, 1), (2, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 4), (4, 7), (7, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

من الواضح أن R علاقة انعكاسية ومتماثلة وناقلة على A أي أن R علاقة تكافؤ على A .

$[1] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 1\} = \{1, 4, 7\}$

$[2] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 2\} = \{2, 5\}$

$[3] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 3\} = \{3, 6\}$

$[4] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 4\} = \{1, 4, 7\} = [1]$

$[5] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 5\} = \{2, 5\} = [2]$

$[6] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 6\} = \{3, 6\} = [3]$

$[7] = \{b \in A \mid 3 \text{ يقسم على } b - 7\} = \{1, 4, 7\} = [1]$

لاحظ أن:

$[1] = [4] = [7]$

$[2] = [5]$

$[3] = [6]$

إذن التجزئة للمجموعة A هي: $\{[1], [2], [3]\}$.

$\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$

وعلاقة التكافؤ هنا يعني أنه "لعناصر الصنف نفس الباقي عند القسمة على 3.

فمثلاً : للصنف [1] فإن باقي قسمة 1 على 3 يساوي 1
باقي قسمة 4 على 3 يساوي 1
باقي قسمة 7 على 3 يساوي 1

للصنف [2] فإن باقي قسمة 2 على 3 يساوي 2

باقي قسمة 5 على 3 يساوي 2

للصنف [3] فإن باقي قسمة 3 على 3 يساوي 0

باقي قسمة 6 على 3 يساوي 0 وهكذا.

لتكن T تجزئة للمجموعة A فهي مجموعة صنوف التكافؤ، حيث:

$T = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

لاحظ أن صنوف التكافؤ ينطبق عليها ما يلي:

1- $A_r \subset A$, $r = 1, 2, \ldots, n$

كل صنف تكافؤ هو مجموعة جزئية من (A)

2- $A_r \neq \phi$, $r = 1, 2, \ldots, n$

صنف التكافؤ ليس فارغاً ( )

3- $A_r \cap A_d = \phi$, d, $r = 1, 2, \ldots, n$, $d \neq r$

(صنوف التكافؤ منفصلة ولا يوجد بينها عناصر مشتركة).

4- $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$

اتحاد صنوف التكافؤ يعطي (A)

إذا كان $a, b \in A_m$ فإن 5- aRb

(إذا كان لدينا عنصران ينتميان إلى صنف تكافؤ واحد، فإن العنصر a له علاقة مع العنصر b).

إذا كان $a \in A_r$ ، $b \in A_d$ حيث $r \neq d$ فإن 6- $aR\not b$

(إذا كان لدينا عنصران ينتميان إلى صنفي تكافؤ مختلفين فإن العنصر a ليس له علاقة بالعنصر b من الصنف الآخر).

مثال:

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث:

R = {(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3),

فأوجد صنوف التكافؤ للعلاقة R ثم أكتب التجزئة المكونة من صنوف التكافؤ.

الحل:

[1] = {1, 3, 5}

[2] = { 2, 4}

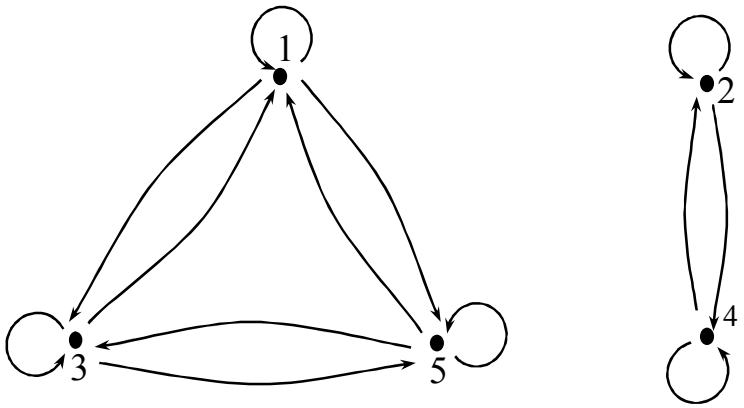
[3] = {1, 3, 5} = [1]

[4] = {2, 4}= [2]

[5] = {1, 3, 5} = [1] = [3]

إذن التجزئة T = {[1]، [2]} = {{5، 3، 1}، {4، 2}}.

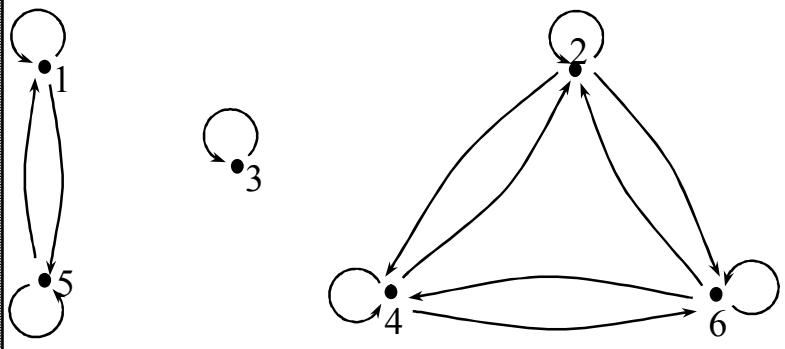
ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمي التالي:



بالنظر إلى هنا المخطط السهمي يبدو واضحاً أن العلاقة R علاقة تكافؤ كما يبدو واضحاً أن التجزئة باستخدام صنوف التكافؤ هي{ {4، 2}، {5، 3، 1}}.

تدريب (15)

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث R ممثلة بالمخطط السهمي التالي، فأوجد صنوف التكافؤ للعلاقة R .



أسئلة التقويم الذاتي (4)

1- حدد فيما إذا كانت كلاً من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة وإذا كانت خاطئة أذكر السبب.

أ- {{5، 3}، {2، 1}} . هي تجزئة للمجموعة {5، 4، 3، 2، 1}.

ب- { {1 ،2 ،3 }، { }}. هي تجزئة للمجموعة{ 1، 2، 3}.

جـ- { {2، 1}، { 2، 3}، {4}}. هي تجزئة للمجموعة {1، 2، 3، 4}.

د- {{1، 2، 3، 4}}. هي تجزئة للمجموعة {4، 3، 2، 1}.

هـ-{ {1}،{ 2، 3}، {4، 5}}. هي تجزئة للمجموعة{ 1، 2، 3، 4}

2- لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ أوجد جميع التجزيئات الممكنة للمجموعة A .

3- لتكن R علاقة تكافؤ على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث: $(a, b) \in R$ إذا كان $a = b$ فأوجد صنوف التكافؤ للعلاقة R ثم أوجد التجزئة للمجموعة A .

4- لتكن R علاقة تكافؤ على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث :

$R = \{(1,1),(2,2), (3,3),(4, 4), (5,5), (1, 5),(5, 1), (3,1, (1, 3),(5, 3),(3, 5)\}$

فأوجد صنوف التكافؤ للعلاقة R وأوجد التجزئة المكونة من صنوف التكافؤ.

5- لتكن R علاقة تكافؤ على $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ حيث: $(a, b) \in R$ إذا كان العدد 4 يقسم $a - b$ فأوجد صنوف التكافؤ التالية فقط:

1- [3] 2- [5] 3- [10]

5. العلاقة العكسية Inverse Relation

تعريف:

لتكن R علاقة من A إلى B، فإن العلاقة العكسية inverse Relation للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} ، وهي علاقة من B إلى A ، حيث:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R \}$$

مثال:

لتكن R علاقة $A = \{1, 2, 3\}$ إلى $B = \{4, 5\}$ حيث:

$$R = \{(1,4), (2,4), (3,5), (2, 5)\}$$

فإن:

$$R^{-1} = \{(4,1), (4,2), (5,3), (5,2)\}$$

أي أننا لإيجاد R^{-1} نقوم بتبديل المسقط الأول مكان المسقط الثاني، والمسقط الثاني مكان الأول في الأزواج التي تنتمي للعلاقة R .

مجال R = {3، 2، 1}

مدى R ={ 5، 4}

مجال R^{-1} ={ 5، 4}

مدى R^{-1} = {3، 2، 1}

مثال:

لتكن R علاقة من $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$(a,b) \in R$ إذا كان باقي قسمة a- b على 3 يساوي 0، فأوجد R^{-1} ثم حدد المجال والمدى.

الحل:

$R = \{(1,1), (1,4), (2,2), (5, 2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R^{-1} = \{(1,1), (4,1), (2,2), (2, 5), (3,3), (1,4), (4,4)\}$

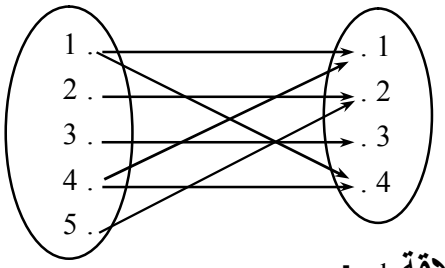
مجال R = {1، 2، 3، 4، 5}

مدى R = {1، 2، 3، 4}

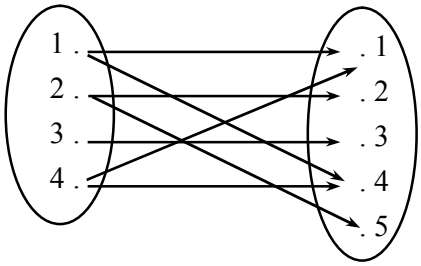
مجال R^{-1} = {1، 2، 3، 4}

مدى R^{-1} = {1، 2، 3، 4، 5}

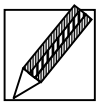
المخطط السهمي للعلاقة R :



المخطط السهمي للعلاقة R^{-1}:



تدريب (16)



لتكن R علاقة على A = {2, 4, 6} حيث: $(a,b) \in R$ إذا كان $a \leq b$.

فأوجد R^{-1} وحدد مجاله ومداه.

مثال:

لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4), (2, 1)\}$

لاحظ أن R علاقة انعكاسية على A .

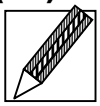
$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2)\}$

لاحظ أن R^{-1} علاقة انعكاسية على A أيضاً.

لاحظ أن:

إذا كانت R علاقة انعكاسية فإن R^{-1} علاقة انعكاسية أيضاً.

تدريب (17)



لتكن R علاقة على المجموعة A، أثبت أنه إذا كانت R علاقة انعكاسية فإن R^{-1} ستكون علاقة انعكاسية على المجموعة A .

مثال:

لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

حيث $(a, b) \in R$ إذا كان $a + b = 5$ فأوجد R^{-1}, R وحدد المجال والمدى للعلاقة R^{-1} .

$R = \{(1, 4), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (5, 0), (0, 5)\}$

$R^{-1} = \{(4, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (0, 5), (5, 0)\}$

مجال R^{-1} = مدى R = {0، 1، 2، 3، 4، 5}.

مدى R^{-1} = مجال R = {0، 1، 2، 3، 4، 5}.

لاحظ ما يلي:

- إذا كانت R متماثلة فإن R^{-1} أيضاً علاقة متماثلة.
- إذا كانت R علاقة متماثلة فإن $R = R^{-1}$.

مثال:

أثبت أنه إذا كانت R علاقة ناقلة على A فإن R^{-1} علاقة ناقلة على A أيضاً.

الحل:

افرض أن $(a, b) \in R^{-1}$ ، $(b, c) \in R^{-1}$.

أي أن $(b, a) \in R$ ، $(c, b) \in R$ حيث R ناقلة إذن (c,a) تنتمي إلى R.

لذلك فإن $(a, c) \in R^{-1}$.

وبهذا نكون أثبتنا أن $(a, b) \in R^{-1}$ و $(b, c) \in R^{-1}$ تعني أن $(a,c) \in R^{-1}$ أي أن R^{-1} ناقلة وهو المطلوب إثباته.

مثال:

لتكن R علاقة على A حيث $R = \{(1, 2) , (2, 3)\}$.

أوجد R^{-1} أوجد $R \cup R^{-1}$ ، $R \cap R^{-1}$.

الحل:

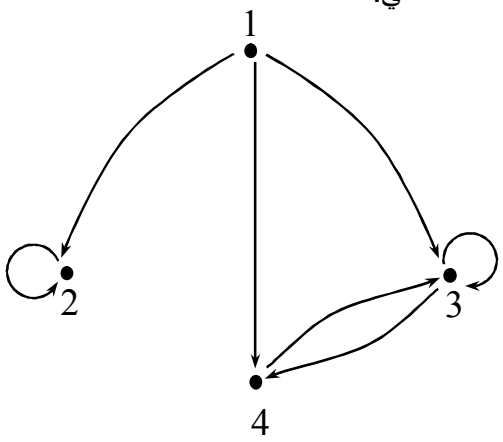
$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2)\}$

$R \cup R^{-1}$ $\{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

$R \cap R^{-1} = \phi$

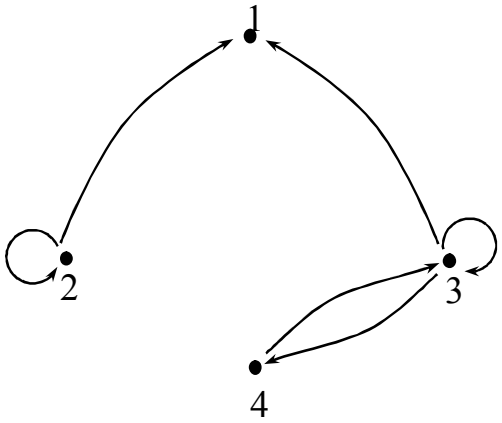
مثال:

لتكن R معطاة بالمخطط التالي:



أوجد R^{-1} وارسم لها مخطط.

الحل:



$R^{-1} = \{(2, 1), (2,2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 1)\}$

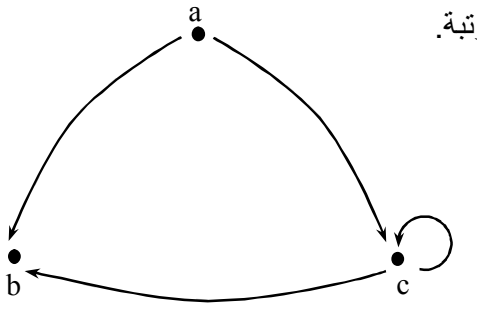
أسئلة التقويم الذاتي (5)

1- لتكن R علاقة على $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حيث:

$(a, b) \in R$ إذا كان $a + b \leq 4$

فأوجد R^{-1}, R ثم حدد المجال والمدى.

2- لتكن R معطاة بالمخطط التالي، أوجد R^{-1} كمجموعة من الأزواج المرتبة.



3- أثبت أن $R \cup R^{-1}$ علاقة متماثلة لأي علاقة R.

الخلاصة

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة، يفترض بك عزيزي الدارس أن تكون قد تعرفت على الضرب الديكارتي والعلاقات التي تعتبر مجموعة جزئية منه، ويفترض بك أن تكون قد تعلمت طريقة رسم العلاقة بمخطط سهمي، ومعرفة قاعدة العلاقة المحددة بمخطط سهمي، وبالتأكيد تحديد مجال العلاقة ومداها.

كما أنك تعرفت على الخواص التي تجعل العلاقات أنواعاً فهناك علاقات انعكاسية وعلاقات متماثلة وعلاقات ناقلة وكل نوع له خواصه وتطبيقاته كذلك درست علاقة التكافؤ: خصائصها وأمثلة عليها، وتعرفت على صنوف التكافؤ والتجزئة.

وبالنهاية تعرفت على العلاقة العكسية فكل ذلك مدعم بالأمثلة والاثباتات.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، تتناول الوحدة التالية موضوعا أساسيا آخر يتعلق بالرواسم والدوال، وهو موضوع يحتاج منك إلى بذل بعض الجهد على الورق من أجل إدراك أبعاده والتدرب على المفاهيم الواردة فيه.

نبدأ الوحدة بتعريف الدوال وكيفية التمثيل البياني للدالة، ثم ننتقل إلى أنواع الرواسم والدوال ونعرج على التناظر الأحادي والدالة العكسية، ونختم الوحدة بمجموعة من الدوال المهمة.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك، وأن تساهم في نقدها وتقويمها.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

.1

1- AXB = {(3,1), (3,2), (3,3), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3)}.

2- BXA= {(1,3), (1,5), (1,6), (2,3), (2,5), (2,6), (3,3), (3,5), (3,6) }

3- AXA = (3,3), (3,5), (3,6), (5,3), (5,5), (5,6), (6,3), (6,5), (6,6) }

4- BXB = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}

.2

عدد عناصر AXB = عدد عناصر A × عدد عناصر B

= 7 × 6 = 42 عنصر

عدد عناصر BXA = عدد عناصر B × عدد عناصر A

= 7 × 6 = 42 عنصر

عدد عناصر BXB = عدد عناصر B × عدد عناصر B

= 6 × 6 = 36 عنصر

عدد عناصر AXA = عدد عناصر A × عدد عناصر A

= 7 × 7 = 49 عنصر

تدريب (2)

المجال : { 1، 2، 3، 4}.

المدى: { 2، 4، 5، 9}.

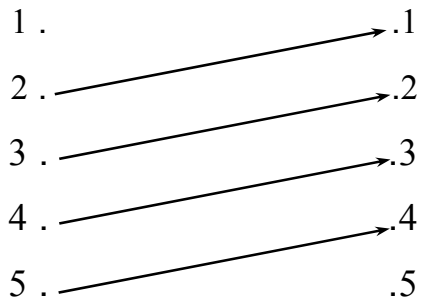
تدريب (3)

R = {(3, 3), (4, 3), (4, 4)}

المجال : { 3، 4}

المدى: { 3، 4}

تدريب (4)



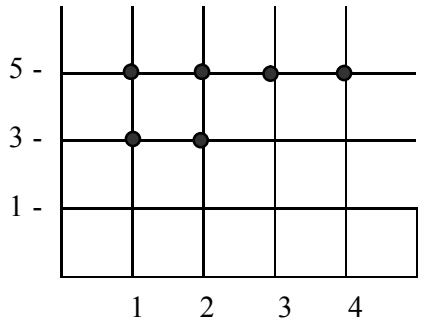
تدريب (5)

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}

R= {(a,b) | a = b , a, b ∈ A }

تدريب (6)

R= {(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)}



تدريب (7)

المجال هي النقاط على المحور السيني من 2- إلى 2 وتمثل بالفترة المغلقة

.[-2, 2]

المدى هو من 1- إلى 1 وتمثل بالفترة [1، 1-].

تدريب (8)

$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

بما أن كل عنصر a ينتمي لـ A فإن $(a, a) \in R$.

∴ R علاقة انعكاسية.

تدريب (9)

-1

$R1= \{(5,6), (5,5), (6,6), (6,7), (7,7)\}$

فهنا R1 علاقة انعكاسية.

$R2 = \{ (5,5), (6,6), (5,7)\}$

R2 علاقة ليست انعكاسية لأنه مثلاً $6 \in A$ بينما $(6, 6) \notin R$.

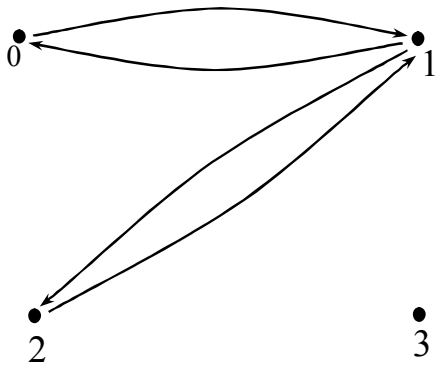
2- العلاقة ليست انعكاسية لأنه لا يوجد loop للعنصر 1 أي أن $1 \in A$ بينما $(1, 1) \notin R$.

تدريب (10)

-1

$R = \{(0,3), (3,0), (2,1), (1,2)\}$

العلاقة R علاقة متماثلة.



2- العلاقة متماثلة، لأن كل سهم يصل بين نقطتين يوجد سهم آخر يصل بين النقطتين بالاتجاه المعاكس.

تدريب (11)

1- العلاقة R ليست علاقة ناقلة لأن:

$(12, 12) \notin R$ ولكن $(12, 9) \in R, (9, 12) \in R$

2- R علاقة ناقلة.

تدريب (12)

العلاقة علاقة تكافؤ لأنها انعكاسية ومتماثلة وناقلة.

1- علاقة انعكاسية: لأنه لكل $a \in A$ فإنه $(a, a) \in R$.

2- علاقة متماثلة لأنه:

$(1, 2) \in R \rightarrow (2, 1) \in R$

$(1, 3) \in R \rightarrow (3, 1) \in R$

$(2, 3) \in R \rightarrow (3, 2) \in R$

3- علاقة ناقلة لأنه:

$(1, 2) \in R , (2, 3) \in R \rightarrow (1, 3) \in R$

$(1, 2) \in R , (2, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$

$(1, 3) \in R , (3, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$

$(1, 3) \in R , (3, 2) \in R \rightarrow (1, 2) \in R$

$(2, 3) \in R , (3, 1) \in R \rightarrow (2, 1) \in R$

$(2, 3) \in R , (3, 2) \in R \rightarrow (2, 2) \in R$

تدريب (13)

علاقة تكافؤ.

تدريب (14)

لا تمثل تجزئة لأنه{1} ∪ { 3، 2 }∪ {5} ≠{ 5، 4، 3، 2، 1} فالعنصر $4 \in A$ ولكنه $4 \notin$ $(\{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{5\})$.

تدريب (15)

$[1] = \{1, 5\}$

$[2] = \{2, 4, 6\}$

$[3] = \{3\}$

تدريب (16)

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (4,6), (6,6)\}$

$R^{-1} = \{(2,2), (4,2), (6,2), (4,4), (6,4), (6,6)\}$

مجال R^{-1} = { 2، 4، 6}

مدى R^{-1} = { 2، 4، 6}

تدريب (17):

بما أن R علاقة انعكاسية لكل $a \in A$ فإن $(a, a) \in R$.

وبما أن R^{-1} علاقة عكسية للعلاقة R إذن $(a, a) \in R^{-1}$ لكل $(a, a) \in R$.

إذن R^{-1} علاقة انعكاسية على المجموعة A.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

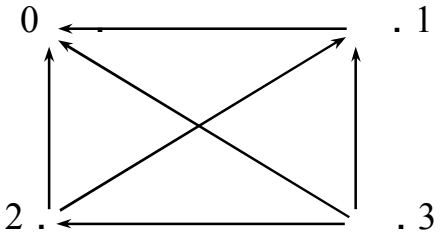
أسئلة (1)

.1

-1 $AXA = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

-2 $R = \{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2)\}$

-3



4- المجال =$\{ 1 ، 2 ، 3\}$

المدى =$\{ 0، 1، 2\}$

.2

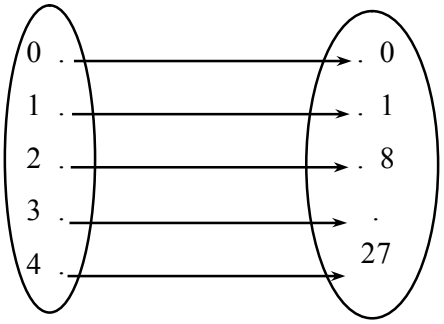
-1 $(a, b) \in R$ إذا وفقط إذا كان b مساوياً لمكعب a حيث $a = 0, 1, 2, 3, 4$.

$R = \{(a, b) \mid b = a^3 , a = 0, 1, 2, 3, 4\}$

2- المجال ={ 0، 1، 2، 3، 4}

المدى ={ 0، 1، 8، 27، 64}.

3-



3- المجال ={ 1، 2، 3، 4}

المدى ={ 3، 6، 9، 12}.

القاعدة : $R = \{(a, b) \mid a, b \in A, b = 3a \}$

أسئلة (2)

1- ليست انعكاسية $5 \in A$ ولكن $(5, 5) \notin R$.

متماثلة .

ناقلة.

2- ليست انعكاسية لأن $(2, 2) \notin R$ - مثلاً*-

ليست متماثلة لأن $(4, 2) \in R$ ولكن $(2, 4) \notin R$ - مثلاً -

ليست ناقلة لأن $(16, 4)$ و $(4, 2) \in R$ لكن $(16, 2) \notin R$ - مثلاً-

3- مثال: لتكن $R = \{(a, b)\}$ $S = \{(b, c)\}$ وكلاً من S, R.

علاقة ناقلة ولكن $R \cup S = \{(b, c), (a, b)\}$.

لاحظ أن $(b,c) \in R$ و $(a, b) \in R$ ولكن $(a, c) \notin R$.

4- العلاقة انعكاسية كل عنصر يوجد له سهم ينطلق منه إلى نفسه Loop.

العلاقة متماثلة: لأنه لكل سهم يصل بين عنصرين فإنه يوجد سهم آخر يصل بين النقطتين و بالاتجاه المعاكس.

العلاقة ناقلة: لأنه إذا وجد سهم يصل بين a إلى b ووجد سهم آخر يصل من b إلى c فإنه يوجد سهم يصل من a إلى c وهكذا...

-5

1. $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$
2. $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$
3. $R = \{(1,1), (2,2)\}$

أسئلة (3)

1- 1. لكل عدد طبيعي فإن العدد يساوي نفسه، $a = a$. أي
أنه لكل $a \in N$ فإن $(a, a) \in R$.
العلاقة انعكاسية

2. لكل عدد طبيعي إذا كان $a = b$ فإن $b = a$ أيضاً.
أي أنه إذا كان $(a, b) \in R$ فإن $(b, a) \in R$ أيضاً.
العلاقة متماثلة.

3. لكل عدد طبيعي إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$.
أي أنه إذا كان $(a, b) \in R$ $(b, c) \in R$ فإن $(a, c) \in R$ أيضاً.
العلاقة ناقلة (متعدية).

إذن علاقة التساوي على مجموعة الأعداد الطبيعية علاقة تكافؤ.

2- علاقة تكافؤ.

فكل عنصر في المجال له loop إذن العلاقة انعكاسية، ولا يوجد أي سهم يصل بين نقطتين إذن العلاقة متماثلة وناقلة.

3- علاقة تكافؤ.

4- 1. مثال : $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.

2. **مثال:** $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, d)\}$.

أسئلة (4)

1- أ. خاطئة : $\{1, 2\} \cup \{3, 5\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

ب. خاطئة : ϕ = { } مجموعة خالية.

جـ. خاطئة : $\{1, 2\} \cap \{3, 2\} \cap \{4\} = \{2\} \neq \phi$.

د. صحيحة.

هـ. خاطئة : $\{4, 5\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$ ليست مجموعة جزئية.

2- {{1، 2، 3، 4}}

{{1}، {2}، {3}، {4}}.

{{1، 2}، {3، 4}}.

{{1،3}، {2،4}}.

{{1،4}، {2، 3}}.

{{1}, {2 ، 4}، {3،4}}.

{ {2}{1، 3، 4}}.

{{3}, {1، 2، 4}}.

{{4}, {1، 2، 3}}.

3-

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

$[1] = \{1\}$

$[2] = \{2\}$

$[3] = \{3\}$

$[4] = \{4\}$

$[5] = \{5\}$

$T = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

4-

$[1] = \{1, 3, 5\}$

$[2] = \{2\}$

$[3] = \{1, 3, 5\} = [1]$

$[4] = \{4\}$

$[5] = \{1, 3, 5\} = [1] = [3]$

$T = \{ \{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4\}\}$

-5

$[3] = \{ b \in A \mid 4$ يقسم على $b - 3 \} = \{3, 7\}$

$[5] = \{ b \in A \mid 4$ يقسم على $b - 5 \} = \{1, 5, 9\}$

$[10] = \{ b \in A \mid 4$ يقسم على $b - 10 \} = \{2, 6, 10\}$

أسئلة (5)

1. $R= \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$

$R^{-1}=\{ (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,1), (1,3)\}$

مجال R^{-1} = مدى R = {1، 2، 3}.

مدى R^{-1} = مجال R = {1، 2، 3}.

2. $R^{-1}=\{(b, a), (c,a), (c, c), (b,c)\}$

3. ليكن $(a, b) \in R \cup R^{-1}$

لنفرض أن $(a, b) \in R$ فإن $(b, a) \in R^{-1}$

وبما أن العلاقة بين R و R^{-1} هي الاتحاد إذن $(b, a) \in R \cup R^{-1}$

إذن $R \cup R^{-1}$ هي علاقة متماثلة.

مسرد المصطلحات

- الضرب الديكارتي (Cartesian Product):

الضرب الديكارتي للمجموعتين A, B يتكون من كل الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الأول لها عنصراً في A والمسقط الثاني عنصراً في B . ويرمز له AXB.

- العلاقة (Relation):

العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B هي مجموعة جزئية من AXB.

- مجال العلاقة (Domain):

هي المجموعة التي تتكون من كل المساقط الأولى للأزواج المرتبة التي تنتمي للعلاقة R.

$$Damain = \{a \in A \mid (a, b) \in R \}$$

- مدى العلاقة (Range):

هي المجموعة التي تتكون من المساقط الثانية للأزواج المرتبة التي تنتمي للعلاقة R.

$$Range = \{b \in B \mid (a, b) \in R\}$$

- علاقة انعكاسية (Reflexive Relation):

العلاقة R على المجموعة A علاقة انعكاسية إذا كان $(a, a) \in R$ لجميع العناصر $a \in A$.

- علاقة متماثلة (Symmetric Relation):

العلاقة R على المجموعة A علاقة متماثلة إذا كان $(a, b) \in R$ فإن $(b, a) \in R$ لكل $(a, b) \in R$

- علاقة ناقلة (Transitive Relation):

العلاقة R على المجموعة A علاقة ناقلة إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ فإن $(a, c) \in R$.

- علاقة تكافؤ (Equivalence Relation) :

العلاقة R على المجموعة A علاقة تكافؤ إذا كانت R علاقة انعكاسية ومتماثلة وناقلة.

- التجزئة (Partition):

التجزئة للمجموعة A هي مجموعة عناصرها مجموعات جزئية من A بحيث تكون غير خالية، اتحاد المجموعات الجزئية يعطي A ، وتقاطعها المجموعة الخالية.

- صنف التكافؤ (Equivalence Class):

صنف التكافؤ الذي يحتوي a بواسطة علاقة تكافؤ R هو:

$$[a] = \{b \in A \mid bRa \}$$

- علاقة عكسية (Inverse Relation) :

لتكن R علاقة من A إلى B فإن العلاقة العكسية للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1}، وهي علاقة من B إلى A ، حيث:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R \}$$

المراجع العربية والأجنبية

1. محمود محمد كتكت، **نظريات المجموعات**. عمان: دار الفرقان، 1982، ص.ص. 92-108.
2. عبد الفتاح الشرقاوي، ونبيه عبد الغفار، ومحمود زناتي، وأحمد فرغلي، **الرياضيات الحديثة ومفاهيمها الأساسية**. بيروت: دار القلم، 1985، ص.ص. 125-157.
3. سيمور ليبشتر، ترجمة عمار صلاح الدين حامد، **نظرية الفئة وموضوعات مرتبطة بها**. عمان: الدار الدولية للنشر والتوزيع، ص.ص 181-147.

1. Larry J. Gerstein, **Introduction to Mathematical structures and Proofs**. Springer. PP 87-102.

2. Kenneth H. Rosen, **Discrete Mathematics and it's Applications**, NY: McGraw Hill Inc. 3rd, 1995. pp 355-380.

3. Richard Johnsonbaugh, **Discrete Mathematics**, Prentice Hall International, 4th edition , 1997.