نماذج لحلول امتحانات الأعوام السابقة

لمادة

الحسبان

لطلاب السنة الأولى بكالريوس هندسة

يناير 2017

Scanned by CamScanner

التخصص: .....
رقم الجلوس: .....

بسم الله الرحمن الرحيم
جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا
كلية الهندسة
قسم العلوم العامة والامتحانات

الإسم: .....

امتحانات ازالة الرسوب والبديل (الدورة الثانية) للعام الدراسي 2014/2013م

المادة: الحسبان
الفصل: الاول
الزمن: 3 ساعات
التاريخ: 2014/8/ 9

تعليمات هامة:-

1. اكتب اسمك و رقم جلوسك وتخصصك فى الأماكن المخصصة أعلاه.
2. سجل بهذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أى مسودات و لا يسمح بإستخدام اية ورقة إضافية خارجية بأية حالة من الأحوال.
3. **تأكد:** أسئلة هذا الإمتحان (5 اسئلة) و مطبوعة على (6 صفحات)
4. الدوائر و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأعمال التصحيح.

السؤال	درجة السؤال	الدرجة المتحصلة	امضاء المصحح
1	20		
2	20		
3	20		
4	20		
5	20		
المجموع	100		

السؤال الاول

1- لتكن $f(x) = \tanh x$

(i) أوجد $f(0)$

$= \tanh(0) = 0$ (2)

(ii) صنف الدالة من حيث انها زوجية أم فردية أو غير ذلك

$f(x) = \tanh x$

$f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x$

$-f(x) = -\tanh x$

$\therefore f(-x) = -f(x)$ الدالة فردية (2)

(iii) أوجد $f^{-1}(x)$

$y = \tanh x \Rightarrow x = \tanh y$

$y = f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x$ (2)

(iv) اوجد $f'(x)$

$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x}$

$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$ (2)

(v) عبر عن $f(x)$ في صورة دالة اسية

$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ (2)

$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Scanned by CamScanner

(vi) اشتق تعبيرا في صورة دالة لوغريثمية ل $f^{-1}(x)$

$y = \tanh^{-1} x \Rightarrow x = \tanh y$

$x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Rightarrow xe^{2y}+x = e^{2y}-1$

$\Leftrightarrow e^{2y}(x-1) = -(x+1)$

$e^{2y} = \frac{-(x+1)}{x-1} = \frac{x+1}{1-x}$

$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$

(2)

2- أثبت أن

$$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$$

L.H.S $\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\Rightarrow \frac{1+\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)}{1-\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)} = \frac{e^{2x}+1+e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Big/ \frac{e^{2x}+1-e^{2x}+1}{e^{2x}+1}$

$= \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$

(2)

3 - أوجد قيمة النهاية التالية

$$(i)\ \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh - \sin x\sinh - \cos x}{h}$

$h \to 0 \Rightarrow \cosh = 1$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x - \sin x\sinh - \cos x}{h}$

$= -\sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$

$= -\sin x$

(2)

$$(ii)\ \lim_{x\to\infty}(1-e^{-x})^{e^x}$

$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$

نفرض أن $n = e^x$

$x \to \infty \Leftarrow n \to \infty$ Since

$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n$

$= e^{-1} = \frac{1}{e}$

(2)

4- لجميع قيم n أثبت أن

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

نعلم أن $e^x = \cosh x + \sinh x$

$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx}$

$e^{nx} = \cosh nx + \sinh nx$

$\therefore (\cosh x + \sinh x)^n =$

$\cosh nx + \sinh nx$

(2)

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني

1- أوجد y' في الحالات التالية

(أ) $y = \tanh^{-1}(\sin x)$

$$y' = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec x$$

(5)

(ب) $y = \cos mx \cos nx$

$$y' = \cos mx(-n\sin nx) + \cos nx(-m\sin mx)$$

$$= -n\cos mx \sin nx - m\cos nx \sin mx$$

(5)

2- اذا كان $x^y = e^{x-y}$ أثبت أن

$$y' = \ln x/(1+\ln x)^2$$

باخذ اللوغريثم للمعادلة

$$y\ln x = (x-y)\ln e$$

$$y\ln x = x - y$$

$$y\ln x + y = x$$

$$y = \frac{x}{1+\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\ln x) - x\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} =$$

$$\frac{1+\ln x - 1}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$$\text{أي } \frac{dy}{dx} = \ln x/(1+\ln x)^2$$

(5)

3- أوجد النقاط على المنحني $y = x^2 - 3x + 2$ التي يكون عندها المماس معامدا للمستقيم $y = x$ والنقاط على المنحني $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 7$ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم $y = 2x$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3 \leftarrow y = x^2 - 3x + 2$ المنحنى

$\frac{dy}{dx} = 1 \leftarrow y = x$ المستقيم

شرط التعامد $m_1 m_2 = -1$

$(2x-3)\times 1 = -1$

$\Rightarrow x = 1$

عند $x = 1 \leftarrow y = 0$

النقطة $(1,0)$ هي النقطة التي عندها المماس معامد للمستقيم

$y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 7 \leftarrow$ المنحنى

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 10$

$\frac{dy}{dx} = 2 \leftarrow y = 2x$ المستقيم

شرط التوازي

$m_1 = m_2$

$6x^2 + 6x - 10 = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ أو $x = -2$

عند $y = 2, y = 23$

(5)

∴ النقاط $(1,2), (-2,23)$

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث

1- أوجد قيمة المجموع

$$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{48}+\cdots$$

يمكن كتابة المتسلسلة على صورة
المتسلسلة الأسية

$$=1+\frac{3}{2}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!}=e^{\frac{3}{2}}$$

(5)

2- بدون استخدام مفكوك ماكلورين أثبت أن

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

الطرف الأيسر
من تعريف دالة الجيب الزائدي

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad -(1)$$

نعلم أن

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

بالتعويض في (1) والاختصار

$$\sinh x=\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right]-\left[1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\right]}{2}$$

$$=\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}}{2}$$

$$=\frac{2\left[x+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right]}{2}$$

(5)

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

3- اجر كلا من التكاملات التالية

(أ) $\int\frac{\sin^3x+\cos^3x}{\cos^2x\sin^2x}\,dx$

$$=\int\left[\frac{\sin^3x}{\cos^2x\sin^2x}+\frac{\cos^3x}{\cos^2x\sin^2x}\right]dx$$

$$=\int\frac{\sin x}{\cos^2x}\,dx+\int\frac{\cos x}{\sin^2x}\,dx$$

$u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x\,dx$

$y=\sin x \Rightarrow dy=\cos x\,dx$

$$=-\int u^{-2}\,du+\int y^{-2}\,dy$$

$$=-u^{-1}-y^{-1}+c$$

$$=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}+c$$

(5)

(ب) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$

يكامل بالتعويض الذي يجعلنا نتخلص من الجذر

$u^2=x+1 \Rightarrow x=u^2-1$

$2u\,du=dx$

$$\therefore\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx=\int\frac{2u^2}{u^2-1}\,du=$$

$$2\int\frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du=2\left[\int du+\int\frac{du}{u^2-1}\right]$$

$$=2\left[u-\coth^{-1}u+c\right]$$

$$=2\sqrt{x+1}-\coth^{-1}\sqrt{x+1}+c$$

(5)

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع

1- احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ حيث m,n

اعداد صحيحة موجبة

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2}[\cos(m-n) - \cos(m+n)]\right] dx$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} & m \neq n \\ \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} & m = n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

5

(ب) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int_0^{\pi} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^{\pi} \frac{2\,dt}{t^2+2t+1}$$

5

(ج) $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

نكامل بالتعويض

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \left[\sqrt{u}\right]_1^2$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

5

2- اثبت أن

$$\int_a^b \frac{\ln x}{x} dx = \frac{b}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ln(ab)$$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int_a^b u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{(\ln b)^2 - (\ln a)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln b - \ln a)(\ln b + \ln a)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ln(ab)$$

5

Scanned by CamScanner

السؤال الخامس

1-(أ) استنتج صيغة الاختزال للتكامل $\int x^n e^{ax}\,dx$ حيث n عدد صحيح

موجب

$$I_n = \int x^n e^{ax}\,dx$$

$$u = x^n \Rightarrow du = n x^{n-1}\,dx$$

$$dv = e^{ax}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int e^{ax} x^{n-1}\,dx$$

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

(5)

(أ) اوجد قيمة التكامل المحدود في الفترة $[0,\infty)$ لقيم n المختلفة في (أ) ، $a = -1$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

صيغة التكامل

$$I_n\Big]_0^\infty = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + n I_{n-1}\Big]_0^\infty$$

$$= \left[n I_{n-1}\right]_0^\infty = \left[n(n-1) I_{n-2}\right]_0^\infty$$

2-احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_0^\infty x^8 e^{-x}\,dx$

$= 8!$

$= 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

(5)

(ب) $\int_0^\infty x^7 e^{-x}\,dx$

$= 7!$

$7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

(5)

مع امنياتي لكم بالتوفيق

Scanned by CamScanner

التخصص:..... رقم الجلوس:.....	جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا كلية الهندسة قسم العلوم العامة والامتحانات	الحل النموذجي الإسم:.....

الإمتحانات الفصلية (الدورة الاولي) للعام الدراسي 2015/2014م

المادة: الحسبان — الزمن: 3 ساعات

الفصل: الاول — التاريخ: 12 /2/ 2015

تعليمات هامة:-

1. اكتب اسمك و رقم جلوسك وتخصصك فى الأماكن المخصصة أعلاه.
2. سجل بهذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أى مسودات و لا يسمح بإستخدام اية ورقة إضافية خارجية بأية حالة من الأحوال.
3. تأكد: أسئلة هذا الإمتحان (5 اسئلة) و مطبوعة على (6 صفحات)
4. الدوائر و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأعمال التصحيح.

السؤال	درجة السؤال	الدرجة المتحصلة	إمضاء المصحح
1	20		
2	20		
3	20		
4	20		
5	20		
المجموع	100		

السؤال الاول

- تأكد من صحة الاجابة (الاجابة الخاطئة بسالب درجة)
- كل سؤال توجد به اجابة أو اجابات صحيحة ، اختر الاجابات الصحيحة
- اكتب حرف الاجابة الصحيحة داخل المستطيل

c

1- الدالة $f(x)=a^x$ تصنف علي انها

a فردية b زوجية c لازوجية ولافردية d كل ماورد خطا

b, c, d

2- المتطابقة $(\cosh x+\sinh x)$ تساوي

a e^{-x} b e^{x} c $\exp(x)$ d $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

d

3- قيمة $\sin(\arctan 1-\arccos(1/\sqrt{2}))$ تساوي :

a 1 b -1 c 1/2 d zero

Scanned by CamScanner

○ c,d

4- اذا كان $\sinh x = 3/4$ فان $\tanh x$ تساوي

3/5 d 0.6 c 5/4 b 5/3 a

○ d

5- المعامل التفاضلي الاول للدالة $\sec h^{-1}(\cos x)$ بالنسبة ل x هو

$-\sin x$ d $\cos x$ c $\sin x$ b $-\cos x$ a

○ a,d

6- اذا كان $x = a\cos 2t$, $y = b\sin^2 t$ حيث a,b ثوابت فان y'' تساوي

zero d $-b/a$ c $-a/b$ b ln1 a

○ d

7- اذا كان $f(x) = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$ فان $f'(x)$ يساوي

1/2 d 1 c صفر b $-1/2$ a

○ b

8- قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ اذا كان $a>0, a\neq 1$ تساوي

$\log e$ d $\log_e a$ c $\log_a e$ b $\ln a$ a

○ a,b,c,d

9- بدون ايجاد الجذور ، للدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ جذر (صفر) في الفترة

[0,2] d [2,4] c [−2,1] b [4,6] a

○ b,d

10- نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x}{x}$ تساوي

1 d ∞ c ln e b 0 a

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني

1- مستخدما قاعدة لايبنتز أوجد المعامل التفاضلي الرابع للدالة

$$D^4(x^3\sin x)=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\frac{d^k x^3}{dx^k}\frac{d^{4-k}\sin x}{dx^{4-k}}$$

$$=u\frac{d^4v}{dx^4}+\binom{4}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^3v}{dx^3}+\binom{4}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$+\binom{4}{3}\frac{d^3u}{dx^3}\frac{dv}{dx}+v\frac{d^4u}{dx^4}$$

$$\binom{4}{1}=\frac{4!}{3!1!}=4\ ,\ \binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$$

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!}=4$$

$$D^4(x^3\sin x)=x^3\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$12x^2\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)+36x\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+24\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

5

2- لاي قيم x تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$$ متباعدة

باستخدام اختبار دالمبير نجد

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|(n+1)x|$$

$$=\begin{cases}0 & \text{if } x=0\\ +\infty & \text{if } x\neq 0\end{cases}$$

∴ المتسلسلة متباعدة لجميع قيم $x=0$ عندما x لا تساوي الصفر

5

3- أثبت أن $\cos x=\cosh(ix)$ و $\sin x=-i\sinh(ix)$

من صيغة أويلر نجد أن

$$\left.\begin{aligned}\cos x&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{aligned}\right\}\ A$$

من تعريف الدوال الزائدية

$$\left.\begin{aligned}\cosh x&=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\ \sinh x&=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\end{aligned}\right\}\ B$$

من A و B نجد

$$\cos x=\cosh ix$$

$$\sin x=-i\sinh(ix)$$

5

4- اذا كان $x=a(\cos t+\ln\tan t/2)$ ، $y=a\sin t$ أثبت أن $y'=\tan t$

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t+\frac{a}{2}\frac{\sec^2 t/2}{\tan t/2}$$

$$=a\left[-\sin t+\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right]$$

$$=a\left[-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right]$$

$$=\frac{a\cos^2 t}{\sin t}$$

$$\frac{dy}{dt}=a\cos t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{a\cos t\cdot\sin t}{a\cos^2 t}$$

$$=\tan t$$

5

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث

1- أوجد z_{xy} عند النقطة (1,1) اذاكان

$$z = x^2 \tan^{-1} y/x$$

$$z_y = x^2\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$z_{xy} = \frac{3x^2[x^2+y^2] - 2x^3 x}{[x^2+y^2]^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4}{[x^2+y^2]^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2}{[x^2+y^2]^2}$$

$$z_{xy}\Big|_{(1,1)} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

5

2-اجر كلا من التكاملات التالية

(أ) $\int \frac{1+e^x}{e^x} dx$

$$= \int \left[\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x}\right] dx =$$

$$\int [e^{-x} + 1]\, dx =$$

$$-e^{-x} + x + c$$

5

(ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

يكامل بالتعويض

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \sin^{-1} u + c$$

$$= \sin^{-1}(\ln x) + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \sin^{-1}(\ln x) + c$$

5

(ج) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \sin^2 x}$

يكامل بالتعويض

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \sin^2 x} = \int \frac{du}{u+u^2}$$

يكامل بالكسور الجزئية

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}$$

$$1 = A(1+u) + Bu$$

$$= A + Au + Bu$$

$$1 = A + (A+B)u$$

$$A = 1 \;,\; A+B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$\therefore \int \frac{du}{u+u^2} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{1}{1+u}$$

$$= \ln u - \ln(1+u) + c$$

$$= \ln \sin x - \ln(1+\sin x) + c$$

5

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع

1- أثبت أن

$$\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ln(ab)$$

بالمقارنة بالتعويض

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$$= \int_a^b u\,du = \frac{u^2}{2}\Big]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\ln b)^2 - (\ln a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\ln b - \ln a)(\ln b + \ln a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\ln(ab)$$

5

2- احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

بالمقارنة بالتعويض

$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2+2t} = \int_0^{\pi/2} \frac{2dt}{(t+1)^2}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (t+1)^{-2}\,dt$$

$$= \frac{2(t+1)^{-1}}{-1}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-2}{1+t}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-2}{1+1} + \frac{2}{1+0} = -1+2 = 1$$

5

(ب) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx$

بالتكامل بالأجزاء

$$I_n = \int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} = -x^4 e^{-x}\Big]_0^{\infty} + 4I_3 = 4I_3$$

$I_3 = 3I_2$ ، $I_2 = 2I_1$ ، $I_1 = 1$

$$\therefore \int_0^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx = 4!$$

$= 4\times3\times2\times1$

$= 24$

5

(ج) $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin x\,dx$

بالتكامل بالتعويض

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int_1^0 e^u\,du$$

$$= -e^{\cos x}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= -\left[e^0 - e\right] =$$

$-1+e \Rightarrow e-1$

5

Scanned by CamScanner

السؤال الخامس

1-(أ) استنتج صيغة الاختزال للتكامل

$\int x^m (\ln x)^n \, dx$ حيث m, n اعداد

صحيحة موجبة

بكامل بالتجزئة

$u = (\ln x)^n \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx$

$dv = x^m dx \Rightarrow v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx$

$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1} dx$

$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$

(ب) اوجد $\int x^4 (\ln x)^3 dx$

$I_{4,3} = \frac{x^5}{5}(\ln x)^3 - \frac{3}{5} I_{4,2}$

$I_{4,2} = \frac{x^5}{5}(\ln x)^2 - \frac{2}{5} I_{4,1}$

$I_{4,1} = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{1}{5} I_4$

$I_4 = \frac{x^5}{5} + c$

5

2-احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

بكامل بالتعويض

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$= \int_e^{e^2} \frac{du}{u^3} = \int_e^{e^2} u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2}\Big]_e^{e^2}$

$= -\frac{1}{2u^2}\Big]_e^{e^2} =$

5

(ب) $\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta$

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} \frac{\pi}{2}$

$= \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \frac{\pi}{2}$

$= \frac{3\pi}{16}$

5

مع امنياتي لكم بالتوفيق

Scanned by CamScanner

التخصص:..... رقم الجلوس:.....	بسم الله الرحمن الرحيم جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا كلية الهندسة قسم العلوم العامة والامتحانات	الإسم:.....

امتحانات ازالة الرسوب والبديل (الدورة الثانية) للعام الدراسي 2015/2014م

المادة: الحسبان — الزمن: ٣ ساعات

الفصل: الأول — التاريخ: 2015/9/ 10

تعليمات هامة:-

1. اكتب اسمك و رقم جلوسك وتخصصك فى الأماكن المخصصة أعلاه.
2. سجل بهذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أى مسودات و لا يسمح بإستخدام اية ورقة إضافية خارجية بأية حالة من الأحوال.
3. تأكد: أسئلة هذا الإمتحان (5 اسئلة) و مطبوعة على (6 صفحات)
4. الدوائر و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأعمال التصحيح.

السؤال	درجة السؤال	الدرجة المتحصلة	امضاء المصحح
1	20		
2	20		
3	20		
4	20		
5	20		
المجموع	100		

السؤال الاول

- تأكد من صحة الاجابة
- كل سؤال توجد به اجابة أو اجابات صحيحة ، اختر الاجابات الصحيحة
- اكتب حرف الاجابة الصحيحة داخل المستطيل

1- اذا كان $f(x) = a\sin x$ فان $f^{-1}(x)$ هي — b

a $\sin^{-1} x$ b $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ c $\sin^{-1} a$ d $\sin^{-1}\frac{a}{x}$

2- المتطابقة $(1+\tanh x/1-\tanh x)$ تساوي — b

a e^{-2x} b e^{2x} c $\exp(-2x)$ d $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

3- القيمة الدقيقة ل $\cos 2\theta$ اذا كان $\sin\theta = \frac{1}{3}$ علما بان $0 < \theta < 90$ تساوي : — b

a 9 b 1/9 c -1/9 d -9

Scanned by CamScanner

c

c

c

d

d

d

a, d

14

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني

1- استنتج القاعدة العامة لايجاد المشتقة النونية للدالة

$$f(x) = \sin(ax+b)$$

$\frac{dy}{dx} = a\cos(ax+b) = a\sin(ax+b+\frac{\pi}{2})$

$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2\cos(ax+b+\frac{\pi}{2}) = a^2\sin(ax+b+2\frac{\pi}{2})$

$\frac{d^3y}{dx^3} = a^3\cos(ax+b+2\frac{\pi}{2}) = a^3\sin(ax+b+3\frac{\pi}{2})$

$\frac{d^ny}{dx^n} = a^n\sin(ax+b+n\frac{\pi}{2})$

(5)

2- أوجد قيمة حاصل جمع المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$= e - [e-1]$

$= e - e + 1$

$= 1$

(5)

3- اثبت أن $\sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$

$\sinh^2\frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2$

$= \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{4} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$

$= \frac{\cosh x - 1}{2}$

(5)

4- اذا كان $x = a(\cos t + \ln\tan t/2)$ ،

$y = a\sin t$ اثبت أن $y' = \tan t$

$\frac{dx}{dt} = -a\sin t + \frac{a}{2}\frac{\sec^2 t/2}{\tan\frac{t}{2}}$

$= a\left[-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right]$

$= a\left[-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right]$

$= \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$

$\frac{dy}{dt} = a\cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$

$= \frac{a\cos t \cdot \sin t}{a\cos^2 t}$

$= \tan t$

(5)

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث

1- اذا كان $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ اثبت ان

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$-\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= 0$$

(5)

2-اجر كلا من التكاملات التالية

(أ) $\int x e^{x^2} dx$

يطابق بالتعويض

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

(5)

(ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

يطابق بالتعويض

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \sin^{-1} u + c$$

$$= \sin^{-1}(\ln x) + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \sin^{-1}(\ln x) + c$$

(5)

(ج) $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx$

$$\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1-1+2\sin^2 x}{1+2\cos^2 x - 1} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \tan x - x + c$$

(5)

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع

1- أثبت أن

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نضع $u = \frac{1}{x+1}$ ومنها $x = \frac{1}{u} - 1$

$$dx = -\frac{1}{u^2}du$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2-1}}$$

$$= \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+1-1}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1-2u}} = \sqrt{1-2u}\Big]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{1-\frac{2}{3}} - \sqrt{1-\frac{2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(5)

2- احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

نضع $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+1)^{-2}\,dt$$

$$= \frac{2(t+1)^{-1}}{-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-2}{1+t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

(3) $\frac{x}{1+1} + \frac{2}{1+x} = \frac{1+2}{1+x} = \frac{1}{1}$

(ب) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

نضع $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - [-\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

(5)

(ج) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos t\,dt$

نضع $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t\,dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^1 u^2\,du$$

$$= \frac{u^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(5)

Scanned by CamScanner

السؤال الخامس

1-(أ) استنتج صيغة الاختزال للتكامل

$\int x^m (\ln x)^n dx$ حيث m, n اعداد صحيحة موجبة

نحل بالتكرار

$u = (\ln x)^n \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx$

$dv = x^m dx \Rightarrow v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x}(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx$

$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1} dx$

$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$

(5)

(ب) اوجد $\int x^3 (\ln x)^2 dx$

بالتعويض في الصيغة اعلاه

$I_{3,2} = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{2}{4} I_{3,1}$

$I_{3,1} = \frac{x^4}{4}(\ln x) - \frac{1}{4} I_{3,0}$

$I_{3,0} = \frac{x^4}{4} + c$

بالتعويض في $I_{3,1}$

(5)

2-احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

نحل بالتعويض

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$x = e \Rightarrow u = 1$

$x = e^2 \Rightarrow u = 2$

$\Rightarrow \int_1^2 \frac{du}{u^3} = \int_1^2 u^{-3} du = \left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^2$

$= -\left[\frac{1}{2u^2}\right]_1^2$

(5)

(ب) $\int_0^1 x \ln x dx$

بالتعويض بتكامل الجزء

$\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{4}$

(5)

مع امنياتي لكم بالتوفيق

Scanned by CamScanner

التخصص: ..... رقم الجلوس:	بسم الله الرحمن الرحيم جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا كلية الهندسة قسم العلوم العامة و الامتحانات	الإسم: .....

الامتحانات الفصلية (الدورة الاولي) للعام الدراسي 2016/2015م

المادة: الحسبان — الزمن: 3 ساعات

الفصل: الأول — التاريخ: 2016/3/ 3

تعليمات هامة:-

1. اكتب اسمك و رقم جلوسك وتخصصك فى الأماكن المخصصة أعلاه.
2. سجل بهذه الكراسة الإجابة عن جميع الأسئلة و أى مسودات و لا يسمح بإستخدام اية ورقة إضافية خارجية بأية حالة من الأحوال.
3. تأكد: أسئلة هذا الإمتحان (5 اسئلة) و مطبوعة على (6 صفحات)
4. الدوائر و الأشكال المرسومة على الهوامش مخصصة لأعمال التصحيح.

السؤال	درجة السؤال	الدرجة المتحصلة	امضاء المصحح
1	20		
2	20		
3	20		
4	20		
5	20		
المجموع	100		

السؤال الأول

1- اكمل الجدول التالي

الدالة	الصورة العامة (الرمز)	المجال	الدالة العكسية	تفاضل الدالة	تفاضل الدالة العكسية
الخطية	$y = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\bar{f}^1(x) = \frac{x-b}{a}$	a	$\frac{1}{a}$
الجيب	$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\bar{f}^1(x) = \sin^{-1} x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
جيب التمام	$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\bar{f}^1(x) = \cos^{-1} x$	$-\sin x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
الاسية	$y = a^x$	$\mathbb{R}$	$\bar{f}^1(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$
اللوغريثمية الطبيعية	$y = \log_e x$	$(0, \infty)$	$\bar{f}^1(x) = e^x$	$\frac{1}{x}$	e^x

2- قرب الي اربعة ارقام عشرية القيم التالية

(a) $\sec h(-2) = \frac{2}{e^{-2} + e^{2}}$ 0.2658

(b) $\sinh(4) = \frac{e^{4} - e^{-4}}{2}$ 27.2900

Scanned by CamScanner

(1) .....

(1) ..... $\frac{1}{2}$ = $\sin\frac{\pi}{6}$ ..... c $\sin(\arccos\sqrt{3}/2)$ (c)

3- كل سؤال توجد به أجابة أو اجابات صحيحة ، اختر الاجابات الصحيحة
• اكتب حرف الاجابة الصحيحة داخل القوسين

(1) b — 1- اي من الاعداد الاتية لاينتمي الى مجال الدالة $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ؟

zero d 2 c 3 b 1 a

(1) d — 2- اذا كانت $f(x)=\sqrt{x+1}, g(x)=4x$ فما قيمة $(f\circ g)(2)$ ؟

3 d $4\sqrt{3}$ c $\sqrt{3}$ b 8 a

(1) d — 3- المتطابقة $\cot x(\cot x+\tan x)$ تساوي

$\csc^2 x$ d $\cos^2 x$ c $\tan^2 x$ b $\sin^2 x$ a

(1) b — 4- قيمة نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ تساوي

e^{-1} d $1/e$ c e b $-1/e$ a

(1) b,d — 5- لاي قيم x تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ متقاربة ؟

$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ d $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ c $-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$ b $x\le-\frac{3}{2}$ a

(1) b,d — 6- قيمة $\lim_{x\to 0}\cot x.\frac{1}{\ln x}$ تساوي

$1/e$ d e c e^{-1} b 1 a

(1) b — 7- اي متطابقة تكافئ العبارة $\cos x\csc x/\tan x$

$\csc^2 x$ d $\cot x$ c $\cot^2 x$ b $\csc x$ a

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني

1- اذا كان $y = \ln x / x$ فاثبت أن

$y' = (2\ln x - 3)/x^3$

$y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow$

$xy = \ln x$ ——— ①

بتفاضل المعادلة ① بالنسبة لـ x

$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$

بضرب طرفي المعادلة في x

$x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$

من المعادلة ①

$xy = \ln x$

$x^2\frac{dy}{dx} + \ln x = 1$ ——— ②

بتفاضل المعادلة ② مرة أخرى

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}2x + \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow x^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

$\Rightarrow x^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2(1 - \ln x) + 1 = 0$

$\Rightarrow x^3\frac{d^2y}{dx^2} = -(2\ln x - 3)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$

(5)

2- اوجد قيمة حاصل جمع المتسلسلة

$\sum \frac{3n+2}{n!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3n}{n!} + \frac{2}{n!}\right]$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}\right] =$

$= 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$= 3\left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right] + 2\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\right]$

$= 3e + 2(e - 1) =$

$3e + 2e - 2 = 5e - 2$

(5)

3- اذا كان $y = a\cosh 3x$ فاثبت أن

$y' = 3y$ المطلوب

$y' = 3a\sinh 3x$

$y'' = 9a\cosh 3x$

$y'' - 9y = 9a\cosh 3x - 9a\cosh 3x$

$= 0$

$\therefore y'' - 9y = 0$

(5)

4- $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ اذا كان

$y' = -\tan t$ فاثبت

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t(-\sin t)$

$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}$

$= \frac{\sin t}{-\cos t}$

$= -\tan t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = -\tan t$

(5)

Scanned by CamScanner

$$\int \frac{e^{\tan^{-1}2x}\,dx}{1+4x^2} \quad (ii)$$

$u = \tan^{-1}2x \Rightarrow du = \frac{2}{1+4x^2}dx$

$\therefore \int \frac{e^{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2x}$

$\frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2x} + c$

$\therefore \int \frac{e^{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2x} + c$

(5)

$$\int \frac{3x+2}{x^2-5x+4}dx \quad (v)$$

$\frac{3x+2}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$

$3x+2 = A(x-4) + B(x-1)$

By comparing coefficients

$3 = A + B$

$2 = -4A - B$

$\therefore 5 = -3A \Rightarrow A = -\frac{5}{3}$

$B = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$

$\therefore \int \frac{3x+2}{x^2-5x+4}dx = \int \left[\frac{-\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{\frac{14}{3}}{x-4}\right]dx$

$= -\frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{14}{3}\int \frac{dx}{x-4}$

$= -\frac{5}{3}\ln(x-1) + \frac{14}{3}\ln(x-4) + c$

(5)

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} \quad (iii)$$

Let $x = \sec\theta \Rightarrow dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\therefore \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(\sec\theta+1)\sqrt{\sec^2\theta-1}}$

$= \int \frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(\sec\theta+1)\tan\theta} = \int \frac{\sec\theta\,d\theta}{\sec\theta+1}$

$= \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}d\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+1} = \int \frac{d\theta}{1+\cos\theta}$

$= \int \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$= \tan\frac{\theta}{2} + c = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} + c$

$\therefore \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c$

(5)

$$\int \sinh x \sec^2 x\,dx \quad (iv)$$

$= \int \sinh x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sinh x}{\cos^2 x}dx$

Let $u = \cosh x \Rightarrow du = \sinh x\,dx$

$= \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -u^{-1} + c = -\frac{1}{u} + c$

$= -\frac{1}{\cosh x} + c$

(5)

$\therefore \int \sinh x \sec^2 x\,dx = -\frac{1}{\cosh x} + c$

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع

1- اثبت أن

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin x+\cos x} = \frac{1}{2}\ln 3$$

بالتعويض $\tan\frac{x}{2}=t$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ [مع]

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$, $x=0 \Rightarrow t=0$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin x+\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{4t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left[\frac{1+4t+1-t^2}{1+t^2}\right]}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(2t+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

(5)

2- احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

بالتعويض

$u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx$

$$\int_0^1 x e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[e-1\right]$$

(5)

(ب) $\int_0^{\pi/2} e^{\cos t}\sin t\,dt$

بالتعويض

$u=\cos t \Rightarrow du=-\sin t\,dt$

$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$, $t=0 \Rightarrow u=1$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos t}\sin t\,dt = -\int_1^0 e^u\,du = -\left[e^u\right]_1^0$$

$$= e-1$$

(5)

(ج) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\cosh x}$

بالتعويض

$\tanh\frac{x}{2}=t$

$dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ [مع]

$\cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+\cosh x} = \int_0^{\infty}\frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int_0^{\infty}\frac{2}{2}\,dt = \int_0^{\infty} dt = t\Big]_0^{\infty} = \tanh\frac{x}{2}\Big]_0^{\infty}$$

$$= 1-0 = 1$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+\cosh x} = 1$$

(5)

Scanned by CamScanner

السؤال الخامس

1-(أ) استنتج صيغة الاختزال للتكامل $\int \cos^n x\,dx$ حيث n عدد صحيح

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

$$= \int \cos^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$I_n = I_{n-2} - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$dv = \cos^{n-2} x \sin x\,dx \Rightarrow v = -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1}$

$$\therefore \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx = -\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int \cos^n x\,dx$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n-1} + \frac{1}{n-1} I_n$$

$$I_n = I_{n-2} + \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n$$

$$\frac{n}{n} I_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(ب) استنتج قيمة التكامل المحدود في الفترة $[0, \pi/2]$ لقيم n المختلفة

$$\left[I_n\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\left[I_{n-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[I_n\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n-1}{n}\left[I_{n-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[I_n\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \cdots \frac{1}{2}\text{ or } I_1$$

$\frac{\pi}{2}$ إذا كان n عدد زوجي

I_1 إذا كان n عدد فردي

2-احسب قيمة التكاملات التالية

(أ) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$

بما أن n فردية

$$\left[I_5\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(5-1)(5-3)}{5(5-2)} \times 1$$

$$= \frac{4 \times 2}{5 \times 3} \times 1 = \frac{8}{15}$$

(ب) $\int_0^{\pi/6} \cos^4 3x\,dx$

بالتعويض في الصيغة أعلاه

$$\left[I_4\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{(4-1)(4-3)}{4(4-2)} \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{16}$$

مع امنياتي لكم بالتوفيق

Scanned by CamScanner