ملخص الدوال العددية

1. تغيرات دالة معرفة على مجال :

- f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$:

- f متزايدة تماما على I يعني :

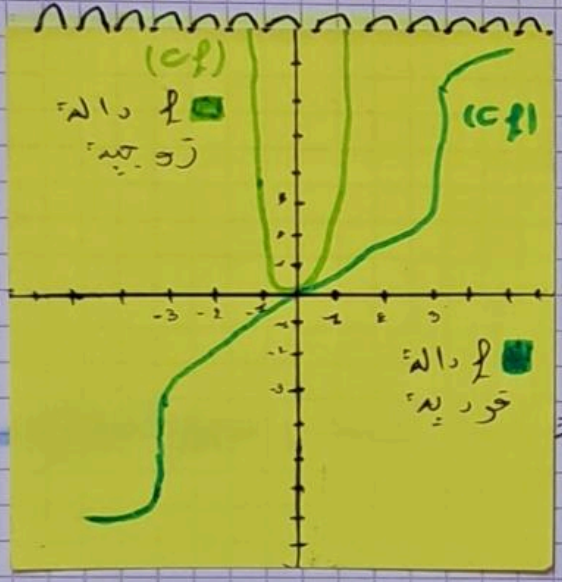
إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$

- f متناقصة تماما على I يعني :

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$

- f ثابتة على I يعني :

إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$



2. شفعية دالة معرفة على D :

- نقول أن f دالة زوجية إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى الصفر وكان لكل x من D : $f(-x) = f(x)$

- نقول أن f دالة فردية إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى الصفر وكان لكل x من D : $f(-x) = -f(x)$

3. الدالة التآلفية :

• تسمى دالة تآلفية كل دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان

إذا كان

$a \neq 0 \neq b$

• تكون الدالة تآلفية حيث a هو معامل x الذي يضرب فيه x و b هو صورة 0 بالدالة f

• مثال :
$f(x)=2x-3$
$a=2$ ، $b=-3$
$f(0)=-3$

$b=0$

• الدالة $f(x)=ax$ هي دالة خطية ذات معامل التوجيه a

• مثال :
$g(x)=4x$
$a=4$

$a=0$

• الدالة $f(x)=b$ هي دالة ثابتة

• مثال :
$L(x)=90$
L دالة ثابتة حيث عند التزايد 90 ترسم خط عمودي على محور التراتيب

ملاحظة : Note :

• في رسم الدالة التآلفية نستعمل جدول مساعد لتسهيل ويكون على الصورة

ب. الخاصية المميزة للدوال التآلفية :

• تكون الدالة f تآلفية إذا وفقط إذا، من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_0 النسبة $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ثابتة (تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير)

يمكن حساب معامل التوجيه بهذا الخاتون

• إشارة الثغير a • حسب إشارة معامل التوجيه a

• إذا كان $a<0$ فإن الدالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

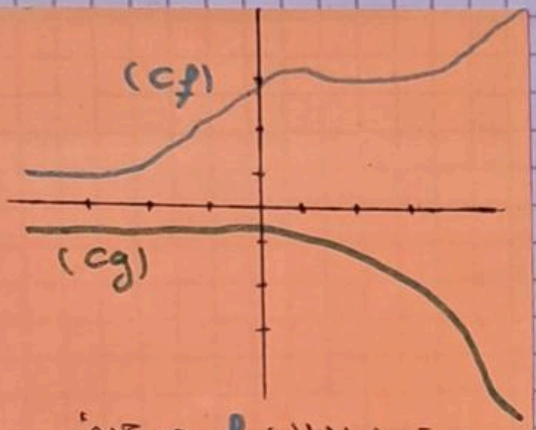
• إذا كان $a>0$ فإن الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

4 . إشارة دالة :

• f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• تكون دالة f موجبة على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع فوق محور الفواصل

• تكون دالة f منعدمة على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع تحت محور الفواصل



• إشارة الدالة f موجبة

• إشارة الدالة g سالبة

5 . مركز تناظر :

• $A(\alpha,\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

$$f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$$

الشرط $(2\alpha - x) \in D_f$ ، $x \in D_f$

5 . محور التناظر :

الشرط $(2a-x) \in D_f$ ، $x \in D_f$

• المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C_f) معناه :

$$f(2a - x) = f(x)$$

$$f(a - x) = f(a + x)$$

• حالة خاصة :

• كان محور التناظر لو كان $a = 0$ فتصبح

$$f(-x) = f(x)$$

• ويسمى كذلك الدالة الزوجية ويكون محور التراتيب هو محور التناظر

• حالة خاصة :

• كان مركز تناظر إذا كان $\alpha = \beta = 0$

• تصبح العلاقة $f(x) = -f(-x)$ أي أن الدالة فردية معناه (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ

6. الاستخاذة :

• تكون الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \qquad (l \neq \infty)$$

• l : هو العدد المشتق

أو،

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

• معادلة المماس :

$$T = y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

• الإشتقاق :

الدالة	مشتقتها	مجال التعريف
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$ $\left[\frac{k}{u}\right]'$	$-\frac{(x)'}{x^2} = \frac{-ku'}{u^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) \geq 0$ $\sqrt{x} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f(x) > 0$	$\mathbb{R}^+$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

• عمليات على المشتقات :

$$(u+v)' = u' + v' \Longrightarrow \big((2x+3)+(3x^2+2)\big)' = (2x+6x)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Longrightarrow \big((2x+3)\cdot(3x^2+2)\big)' = 2\cdot(3x^2+2)+(6x)\cdot(2x+3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \Longrightarrow \left(\frac{2x+3}{3x^2+2}\right)' = \frac{2x\cdot(3x^2+2) - 6x\cdot(2x+3)}{(3x^2+2)^2}$$

$$(f^n)' = n f^{n-1} \cdot f' \Longrightarrow \big((3x^2+5x-1)^3\big) = 3(3x^2+5x-1)^2 \cdot (6x+5)$$

$$\big(f(g(x))\big)' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \Longrightarrow \big(\sin(3x^2+2-1)\big)' = (6x+1)\cdot\cos(3x^2+2-1)$$

• حلول كثير الحدود :

حل معادلات من الدرجة الأولى

- حلها
  - $ax+b=0$
  - المعالم في طرف والمجاهيل في آخر
  - $ax = -b$
  - $x = \frac{-b}{a}$
- إشارتها
  - لدينا حل المعادلة : $x = \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$	عكس إشارة (a)	ϕ	إشارة (a)		

Study

• حل معادلة من الدرجة الثانية ax^2+bx+c

حساب المميز Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$

حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$:

نقبل حلين هما :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad و \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

تحليل ax^2+bx+c :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

إشارتها :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	نفس إشارة a		0	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

$\Delta = 0$

حل المعادلة ax^2+bx+c :

نقبل حل مضاعف :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

تحليل ax^2+bx+c :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

إشارتها :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$	نفس إشارة a		0	نفس إشارة a	

$\Delta < 0$:

إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلول و لا يمكن تحليلها

• حالات خاصة :

• إذا كان $a+b+c=0$ معناه :

$$x_1 = 1 \quad و \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

• إذا كان $a+c=b$ معناه :

$$x_1 = -1 \quad و \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

حل المعادلة من الدرجة الثالثة

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$

• f كثير الحدود من الدرجة الثالثة و α جذر له ($f(\alpha)=0$) فإنه يوجد كثير حدود g درجته 2 حيث :

$$f(x)=(x-\alpha)\,g(x)$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha}$$

• إذا : $a-b+c=0$

• إذا قسمنا وجدنا الباقي نكون المعادلة كالآتي :

$$f(x)=\text{الحاصل}+\frac{\text{الباقي}}{\text{القاسم}}$$

مثال : $f(x)=2x^3-5x+3=0$ ، $f(x)$ جذر 1 .

$$f(x)=(x-1)(g(x))$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{(x-1)}$$

$2x^3-5x+3$	$x-1$
$-2x^3+2x^2-5x+3$	$2x^2+2x-3$
$2x^2-5x+3$	
$-2x^2+2x$	
$-3x+3$	
$+3x-3$	
0	

$$(x-1)(2x^2+2x-3)=0$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2x^2+2x-3=0 \Rightarrow \Delta=4-4(2)(-3)=28 \end{cases}$$

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{28}}{4}=+0,82$$

$$x_2=\frac{-2-\sqrt{28}}{4}=-1,82$$

x	$-\infty$		$-1,9$		$0,8$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

• حساب النهايات والتفسير البياني

النهايات عند

• عندما تؤول إلى عدد تتوقف العمليات معها كانت الدالة

كثير الحدود عند ∞

نهاية أكبر حد

دالة ناطقة ∞/∞

ن. أكبر حد على أكبر حد

• إحسنا عند عدم وجدناه في المقام فنحسب إشارة المقام ثم حرف الاستراحة

الدالة الجذرية

إذا وجدنا حالة عدم تعيين

• نفشتن ثم نقوم

• المتابعة على المتشعبة

• الضرب في المرافق

• التفسيرات البيانية :

• إذا كان : $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$

⟸ معناه يوجد مستقيم مقارب أفقي (//)

معادلته $y = a$

• إذا كان : $\lim_{x \to b^+} f(x) = \infty$

⟸ معناه يوجد مستقيم مقارب عمودي (//)

معادلته $x = b$

• إذا كان : $\lim_{|x| \to \infty} f(x) - y = 0$

⟸ معناه C_f يقبل مستقيم مائل معادلته y

بجوار $+\infty$ و $-\infty$

• حالات عدم تعيين 4/4

$\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$ / $0.\infty$ / $+\infty-\infty$

• خواص :

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ ، $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

ملخص المتتاليات القياسية

1. خواص القوى:

- $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m.n}$

$((2)^3)^4 = 2^{3.4} = 2^{12}$

- $(a.b)^n = a^n . b^n$
- $6^n = (3.2)^n$

$(a \neq 0)$ • $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

- $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- $2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{2^n}{2^n} \frac{3^n}{} = 3^n$
- $6^{-n} = \frac{1}{6^n}$

2. خواص الكسور:

- $\frac{a}{b} = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

$\frac{\frac{x}{3}}{4} = \frac{x}{3 \times 4} = \frac{x}{12}$

- $\frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

3. خواص الجذور:

- $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \sqrt{b}$

a) 0
b) 0
a . b من نفس الاشارة:

$\sqrt{(-3)(-5)} = \sqrt{|-3|} \sqrt{|-5|}$

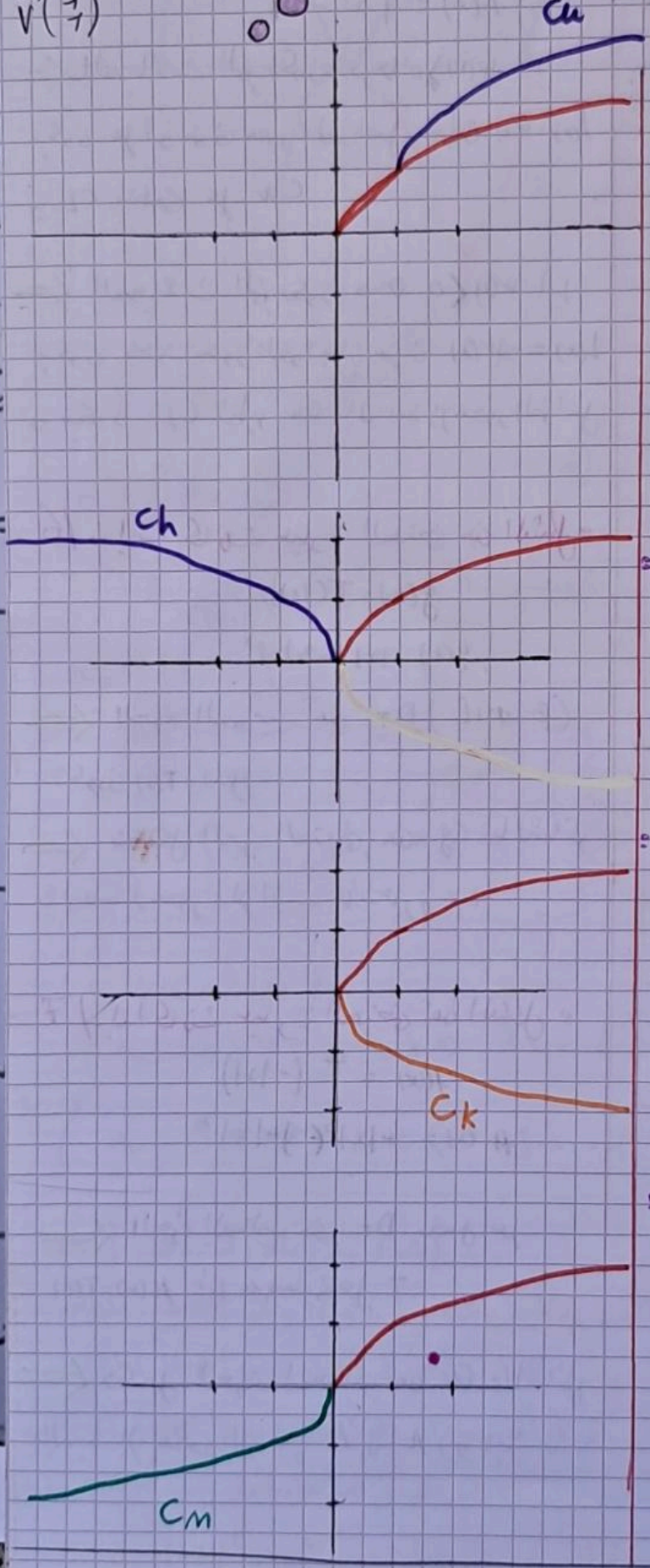
4. خواص القيمة المطلقة:

- $|a-b| = |b-a|$
- $\sqrt{|x-1|^2} = |x-1|$ → اذا لم تعلم اشارتها
- $|a| \cdot |b| = |a.b|$ • $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a| + |b| \neq |a+b|$

إستنتاج رسم المنحنيات إنطلاقا من منحنى

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$f(x) = \sqrt{x}$



1/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل :

$u(x) = f(x+a) + b$

⟸ نستنتج C_u من C_f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$

$u(x) = \underset{b}{1} + \sqrt{x - \underset{a}{1}}$

2/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل:

$h(x) = f(-x) \rightarrow h(x) = \sqrt{-x}$

⟸ C_h هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب

3/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل :

$k(x) = -f(x) \rightarrow k(x) = -\sqrt{x}$

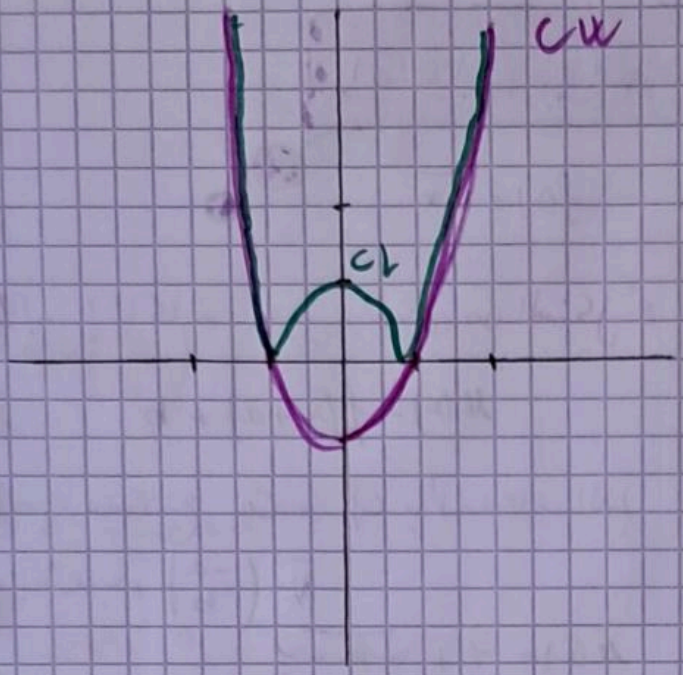
⟸ C_k هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

4/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل :

$M(x) = -\sqrt{(-x)} = -f(-x)$

⟸ C_M هو نظير C_f بالنسبة لـ Δ المبدأ

$W(x) = x^2 - 1$



5/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل:

$$L(x) = |W(x)|$$

$$L(x) = |x^2 - 1|$$

⟸ المجالات التي يكون فيها $W(x) \geq 0$ أي يكون على أو فوق محور الفواصل فإن $L(x) = W(x)$ و C_L ينطبق على C_W

⟸ المجالات التي يكون فيها $W(x) < 0$ أي يكون تحت محور الفواصل فإن $L(x) = -W(x)$ و يكون C_L نظير C_W بالنسبة إلى محور الفواصل

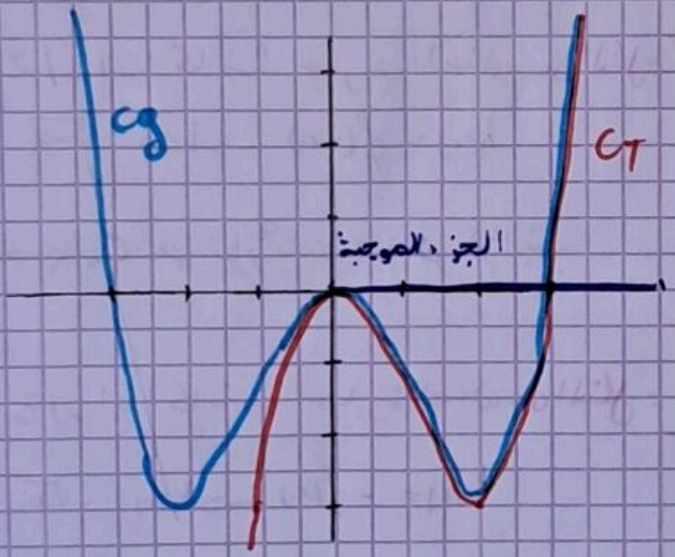
6/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل:

$$g(x) = T(|x|)$$

$$g(x) = |x|^3 - 3|x|^2$$

⟸ الجزء الموجب من D_T $([0, +\infty[)$ يكون $g(x) = T(x)$

⟸ نكمل الجزء المتبقي من C_g بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنها زوجية



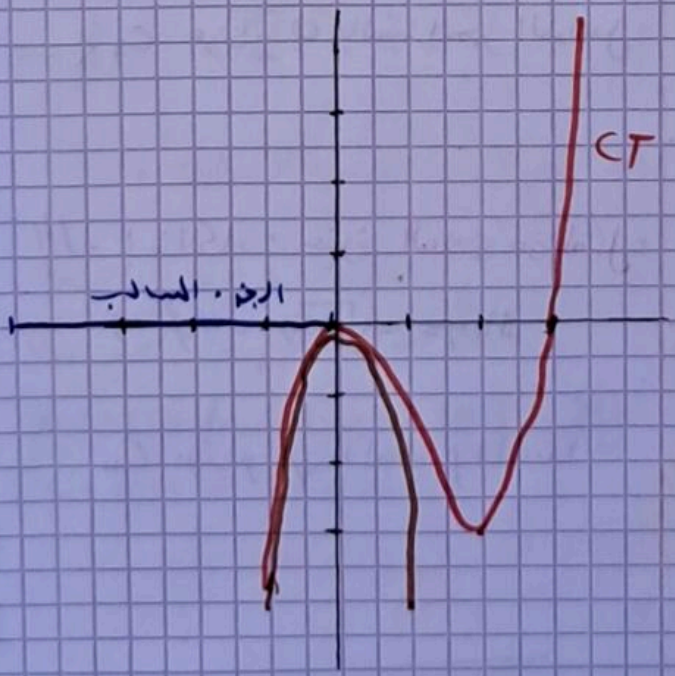
7/ إذا كانت عبارة المنحنى من الشكل:

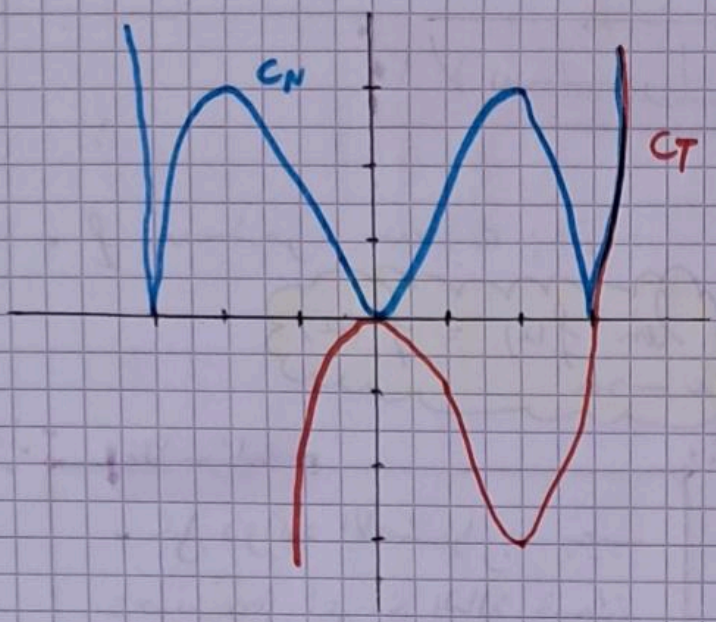
$$h(x) = T(-|x|)$$

$$h(x) = -|x|^3 + 3|x|^2$$

⟸ الجزء السالب من D_T نحصل على $h(x) = T(x)$ أي h ينطبق على T

⟸ نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن h زوجية





8. إذا كانت عبارة العنصر من الشكل:

$$N(x) = |T(|x|)|$$

← أولا في الجزء الموجب من D_T هل كان فوق محور xx' يشرك و من كان تحته يناظر بالنسبة الى xx'

← ثانيا بما أن N زوجية فنكمل رسم الجزء السالب بالتناظر بالنسبة الى المستقيم

القيمة المطلقة

نعرف:

$$|x| = \begin{cases} -x \\ x \end{cases}$$

حل معادلات ومتراجحات:

$|x| = a$ موجب.

معناه: $x = -a$ أو $x = a$

مثال:

$|2x-3| = 7$

$$x = \begin{cases} 2x-3 = 7 \Rightarrow x = 5 \\ 2x-3 = -7 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$|x| < a$ موجب.

معناه: $-a < x < a$

مثال:

$|2x-3| \leqslant 7$

$-7 \leqslant 2x-3 \leqslant 7$

بإضافة 3:

$-4 \leqslant 2x \leqslant 10$

بالقسمة 2:

$-2 \leqslant x \leqslant 5$

$S = [-2, 5]$

$|x| > a$ موجب.

$x < -a$ أو $x > a$

مثال:

$|2x-3| > 7$

$$x \begin{cases} 2x-3 > 7 \Rightarrow x > 5 &]5, +\infty[\\ 2x-3 < -7 \Rightarrow x < -2 &]-\infty, -2[\end{cases}$$

$S =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$

- كتابة عبارة دون رمز القيمة المطلقة
- برهنة إشارة العبارة في المجال المعطى
- تزيل القيمة المطلقة عليها في المجال المناسب
- وتغيير ما بداخل قيمة المطلقة إلى (-)

$|-x| = |x|$ (إثبات الزوجية) $(-x)^2 = x^2$

الاستمرارية

• f مستمرة عند a يعني:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

• ملاحظة:

• قبل دراسة الاستمرارية يجب تحديد مجال تعريف الدالة فيمكن أن يطلب منك دراسة استمرارية لنقطة خارج مجال تعريفها وعادة ستتنبه بأنها غير مستمرة عندها

• تكون الدالة f مستمرة على المجال I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من قيم هذا المجال

• التفسير البياني:

• f مستمرة على I أي يمكن رسمها على I دون رفع القلم (اليد)

• مبرهنة القيم المتوسطة:

• إذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

- يوجد على الأقل عدد c من هذا المجال حيث $f(c) = k$

• حالة خاصة:

• إذا كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان $f(a) \cdot f(b) < 0$ يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ حيث: $f(c) = 0$

• إذا كانت f رتيبة تماما فإن c وحيدة

الدالة الأسية $\exp = e^x$

تعريف:

- توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f(0)=1 \Rightarrow f'(x)=f(x)$

ترمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp"

وتسمى الدالة الأسية $f(x)=e^x$

$e \approx 2,7182$

النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad e^{+\infty} = +\infty$$

خواصها:

- $e^x > 0 \Leftarrow$ موجبة على $\mathbb{R}$ دائما
- معرفة على $\mathbb{R}$
- متزايدة تماما

إشارة الجداء و التغير:

$$f'(x) = (ex)' = e^x > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
e^x	0	↗	$+\infty$

قواعد الحساب:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad ; \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

دراسة دالة أسية:

- من أجل كل عددين a و b:

$a=b \Leftarrow e^a = e^b$.

$b < a \Leftarrow e^b < e^a$.

$x > 0 \Leftarrow e^x > 1$.

$x < 0 \Leftarrow 0 < e^x < 1$.

$e^0 = 1$

الاشتقاق:

$$(e^{u(x)})' = u' e^u$$

النهايات (النزاعة المقارنة):

$\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0$ تكون إشارة 0 حسب n عند $+\infty$ فإذا كان فردي 0^- وإذا كان زوجي 0^+

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \Leftarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

الحالة العكسية:

$$\frac{1}{\infty}=0 \Leftarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0^+$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^{nx}-1}{x}=n$$

طريقة وراسة جبارة من الشكل

$$ae^{2x}+be^x+c$$

- أولا نضع $e^x=X$
- فنصبح aX^2+bX+c
- نبحث فيما X الذي ينعدم إن كانت
- نمثل جدول
- نضع e^x في سطر ثالث الجدول

$$e^x=x_1 \quad ، \quad e^x=x_2$$

- مع ترتيب الشروط
- ثم نضع جدول إشارة بشكل عادي حيث إشارة تكون بالعكس
في ما خلال المستطيل ae^x

- ويمكن تحليل العبارة:

$$=a(e^x-x_2)(e^x-x_1)$$

الدالة اللوغارتمية (ln)

تعاريف

1- الدالة اللوغارتمية:

- نسمي الدالة اللوغارتمية النيبيرية "الدالة التي ترمز إليها بالرمز "ln" والتي تأخذ بكل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln(x)$

2- اللوغارتم لعدد a:

- من أجل كل عدد حقيقي a من $]0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$
يسمى هذا العدد اللوغارتم النيبيري للعدد a ونرمز إليه بـ "ln a"

$\ln(1) = 0$ ، $\ln(e) = 1$

$\ln(3) = 1,09$ ، $\ln(0,5) = -0,69$

نتائج:

- الدالة اللوغارتم متزايدة تماما على $]0,+\infty[$
- يكون $\ln a$ معرف فقط إذا كان a موجب تماما

من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $y > 0$:

$e^x = y \Rightarrow x = \ln y$

$e^{\ln x} = x \quad x > 0$

$e^{\ln x} = x \quad x \in \mathbb{R}$

$\ln x = y \Rightarrow x = e^y$

خواص:

من أجل a و b من $]0,+\infty[$

$a = b \iff \ln a = \ln b$

$a < b \iff \ln a < \ln b$

$\ln a > 0 \iff a > 1$

$\ln a = 0 \iff a = 1$

$\ln a < 0 \iff 0 < a < 1$

خواص الحساب:

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
4. $\ln a^n = n \ln a$
5. $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

النهايات:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

الدالة اللوغارتمية عكس الدالة الأسية

حساب النهايات (التزايد المقارن)

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \Longrightarrow \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \Longrightarrow \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0^- \Longrightarrow \lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

بعض النهايات التي تشكل العدد المشتق:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \Rightarrow \ln'(1) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{0+1} = 1$$

- مجال تعريف $\ln$ هو كل ما داخل الدالة $\ln$ موجب تماما

$$\mathbb{R} = \{x > 0\}$$ كل $\ln(x)$ لما

الإشتقاق:

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

حيث $u(x) > 0$ وهنا الإشارة هي إشارة u'

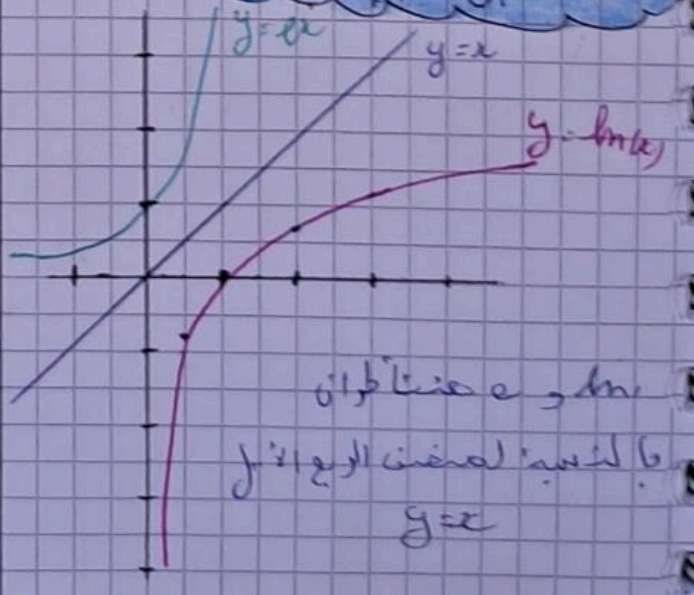
جدول تغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

إشارة $\ln$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

التمثيل البياني:



$\ln$ و e متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول $y = x$

تركيب الدوال

$h(x) = f(e^x)$ نشكل جدول تغيرات h حيث

1- حساب النهايات

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(e^x) \Rightarrow e^{-\infty} = 0 \overset{\text{لأن}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

حسب $f(0)$ ..

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) \Rightarrow e^{+\infty} = +\infty \overset{\text{لأن}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

نفس طريقة جدول تغيرات f

2- المشتقة

$h'(x) = e^x f'(e^x) = \underset{\text{مشتق داخلي}}{U'} \underset{\text{مشتق الأصل}}{f'(U)}$

- إشارة h' من إشارة f'

لدينا $f'(x) \geq 0$ لما $x \geq 2$

نعوض x بـ e^x: $f'(e^x) \geq 0$ لما $e^x \geq 2 \Leftarrow x \geq \ln 2$

الشكل الأول :

$f(x) = m$

$m \in \mathbb{R}$ $m \in]-\infty, +\infty[$

$f(x) = m$ ، C_f ، $y = m$

- عند حلول هذه المعادلة نرسم
- كم مرة يتقاطع C_f مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$
- يتقاطع في نقاط (تواصل)

- ملاحظة :

$f(x) = |m|$

- تنطلق المتباينة من 0 إلى $+\infty$

لأن $|m| \geq 0$

$|m| = 0$ ① المعادلة ... $m = 0$

... ②

$a > 0$ $a < |x| < b$

$x \in]-b, a[\cup]a, b[$

$|m + c| \geq 0$

$a < |x + c| < b$

$x + c \in]-b, -a[\cup]a, b[$

$-b < x + c < -a$

$-b - c < x < -a - c$

$a < x + c < b$

$a - c < x < b - c$

$|x + 1| = 3$

$x + 1 = -3$ أو $x + 1 = 3$

$x = -4$ $x = 2$

$|x - 1| > 1$

$x - 1 \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$x - 1 < -1$ أو $x - 1 > 1$

$a < m^2 < b$

$\sqrt{a} < \sqrt{m^2} < \sqrt{b}$

$\sqrt{a} < |m| < \sqrt{b}$

$m \in]-\sqrt{b}, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$

$a < \sqrt{m} < b$

$a^2 < m < b^2$

(ليس $b-$ و a لأن هما داخل الجذر ودوما موجبا)

$f(x) = ax + m$: الشكل الثاني .

$f(x) = 2x + m$

(C_f $y = kx + m$)

(أ) حلولها هي فواصل نقط تقاطع C_f مع المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + m$ إذا هي مناقشة أخيرة !

$|x| < a$

$x \in]-a, a[$

$|x| > a$

$x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$

$|x| = a$

$x = a$ أي $x = -a$

$|kx| \leqslant a$

$[kx]^2 \leqslant a^2$

الشكل الثالث : $f(x)=mx+b$

$f(x)=\underbrace{m}x+\underbrace{1}$

f : C_f — m : الميل — 1 : نقطة تقاطع مع محور التراتيب

- حلولها هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=mx+1$

1- ناقش مناقشة بيانية

فكرة :

$y=2mx-m$

معرفة النقطة $A(x_0,y_0)$ التي تشمل $2mx-m$

$y=m(2x-1)$

$m(2x-1)-y=0$

$\begin{cases} 2x-1=0 & x=\frac{1}{2} \\ y=0 & y=0 \end{cases}$

$A\left(\frac{1}{2},0\right)$

ومنه جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة $A(\frac{1}{2},0)$

- مثال آخر :

$f(x)=mx-1$

$A(x_0,y_0)$

$y_0=mx_0-1$

$mx_0-1-y_0=0$

x_0 لا تحوي m

طرق تبيان $f(x) = \alpha$

1- نلاحظ العبارة المعطاة (الأس) إذا إحتلفت نجده في $y(\alpha)$

الطرق المتبعة

- $f(\alpha) - [\text{العبارة}] = 0$ — الفلسفة الإقليدية (الأس) — التوكيك العباسي (إخراج النيبر أعلام بهذا النمط الإختزالي)
- $f(\alpha) = [\text{العبارة}]$ ثم نجد الوسيطين والطرفين فنجد عبارة $y(\alpha) = 0$ إذن محققة

الحذر من إشارة الناقص

طرق إزالة حالة عدم تعيين

- الإختزال: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
  $= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$
- المرافق: $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 2}$
  $\lim_{x \to 2} \frac{[\sqrt{x+3} - 2][\sqrt{x+3} + 2]}{(x-2)[\sqrt{x+3} + 2]}$
  $\frac{(x+3-4)}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$
- العدد المشتق: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
  $f(x) = e^x = f'(x)$
  $f'(0) = 1$
- العامل المشترك

أمثلة

أسئلة معادلة المماس

أكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

يمس المنحنى في نقطتين ويشمل النقطة $A(0,1)$

نعوض x بـ 0 و y بـ 1

$1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

نجد الحلول ثم نعوضها في معادلة المماس

ذات الترتيبة y_0

$f(x) = y_0$

مثلا نجد الحل: x_0

$f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

مماس يوازي (Δ)

$\Delta: y = x$

نحل المعادلة

$f(x) = y' = 1$

نجد الحل مثلا 4

$f'(4)(x-4) + f(4)$

معامل توجيهه 4

$f'(x) = 4$

نجد x_0 فنعوض في العبارة

العامل المشترك (Δ)

$y = 2x + 7$

$f(x)(2) = -1$

نجد x نعوض

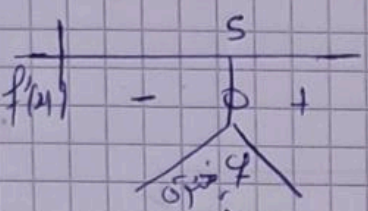
$f'(x_0) = \dots$

نقطة إنعطاف

المستقيمة الثانية تنعدم وتغير إشارتها
$A(\text{الفاصلة}, f(\text{الفاصلة}))$
نقطة إنعطاف

المستقيمة الأولى تنعدم وتغير إشارتها
$A(\text{الحل}, f(\text{الحل}))$
نقطة إنعطاف

$y = f'(s)(x-s) + f(s)$
وضعية المنحنى مع مماسه



$A(s, f(s))$ نقطة إنعطاف

$$1 - \ln(x)^2 = 0 \Rightarrow (1 - \ln x)(1 + \ln x) = 0$$

$x = e$
$x = e^{-1}$

في حالة لم نجد الطالب المقارنة نعوض بأحد الحلول المحصل عليها ونستنتج حسب العبارة وبنفس الطريقة نشاور.

$$y'' + 3y' + b = 0$$

A, c, B

$f(A) = +3|A'| + b = 0$

المتتاليات العددية والبرهان بالتراجع

- هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، ونرمز U_n ونسمى عبارة الحد العام.
- U_n هو الحد الذي دليله n ويسمى الحد العام للمتتالية (U_n)

- **إيجاد رتبة حد ما (عدد الحدود):**

لمعرفة رتبة حد U_b بالنسبة لحد U_a هو العدد: $b-a+1$

$b \geq a$

⇐ في حساب عدد الحدود للمتتالية U_b هو الحد الأخير وما هو الحد الأول

- **طرق توليد متتالية:**

- **الطريقة الأولى:**

- توليد متتالية عددية بالحد العام:
- نعطى عبارة الحد العام بدلالة n ولحساب U_{n_0} نعوض n في العبارة.

مثال:

$U_n = 6n + 3$

حساب U_2: $U_2 = 6(2)+3 = 9$

- توليد متتالية بعلاقة تراجعية:
- المتتالية U معرفة بحدها الأول U_n والعلاقة $U_{n+1} = f(U_n)$ تسمى متتالية تراجعية تسمح هذه العلاقة بحساب U_{n+1} إذا علم U_n

إذا لإيجاد حد ما يجب معرفة قيمة الحد الذي قبله (الرجوع إلى الوراء لأنها تراجعية)

مثال:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$$

حساب U_1: $U_1 = U_0 \times 3 = 3$

حساب U_2: $U_2 = U_1 \times 3 = 9$

- **مصطلحات:**
- (U_n) و U تسمى متتالية
- U_n ⇐ عبارة الحد العام
- n ⇐ دليل
- S ⇐ مجموع

• إتجاه تغير متتالية :

ط 1 : دراسة إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

• إذا كان $U_{n+1} \geq U_n \Leftarrow U_{n+1}-U_n \geq 0$ المتتالية متزايدة (رتيبة)

• إذا كان $U_{n+1} \leq U_n \Leftarrow U_{n+1}-U_n \leq 0$ المتتالية متناقصة (رتيبة)

• إذا كان $U_{n+1}=U_n \Leftarrow U_{n+1}-U_n=0$ المتتالية ثابتة (رتيبة)

ط 2 : (U_n) معرفة بدلالة n بـ $U_n=f(n)$

• إذا كانت f متزايدة على المجال $[a,+\infty[$ فإن (U_n) متزايدة

• " " f متناقصة " " $[a,+\infty[$ فإن (U_n) متناقصة

• " " f ثابتة " " " " U_n "

$\Leftarrow$ العكس غير صحيح

ط 3 : نستعمل إذا كانت حدود المتتالية موجبة :

• إذا كان $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ فإن (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

• إذا كان $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ فإن (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• إذا كان $\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$ فإن (U_n) ثابتة على $\mathbb{N}$

• ملاحظة :

إذا كانت (U_n) معرفة بعلاقة تراجعية ، نرسم فنستخرج عبارة U_{n+1} بدلالة U_n يكون أعطانا حصراً U_n مثلا (U_n) حادة أصغر وأغير في اختيار الحصر حسب العبارة وفي الأخير نحقق النتيجة

• المتتالية المحدودة :

- (U_n) محدودة من الأعلى $\Leftarrow$ $U_n \leqslant A$ $\Leftarrow$ A عنصر حاصر من الأعلى
- (U_n) محدودة من الأسفل $\Leftarrow$ $U_n \geqslant B$ $\Leftarrow$ B عنصر حاصر من الأسفل
- (U_n) محدودة $\Leftarrow$ إذا محدودة من الأعلى والأسفل $\Leftarrow$ $B \leqslant U_n \leqslant A$

$\Leftarrow$ A حاصر من الأعلى و B حاصر من الأسفل

ملاحظة :

$U_n \leqslant A$ و (U_n) متزايدة $\Leftarrow$ (U_n) متقاربة $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = A$

$U_n \geqslant B$ و (U_n) متناقصة $\Leftarrow$ (U_n) متقاربة $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = B$

• نهاية المتتالية :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n$$

- ℓ $\Leftarrow$ (U_n) متقاربة
- ∞ $\Leftarrow$ (U_n) متباعدة

- (U_n) معرفة كما يلي $U_n = f(n)$ حيث f معرفة على D_{U_n}
- إذا كانت $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \ell$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$
- إذا كانت $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \pm\infty$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty$

• التقارب و التباعد :

• (U_n) متقاربة :

• $\lim U_n = l$ ← متقاربة نحو l

• (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى

• (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

• (U_n) متباعدة :

• $\lim U_n = \pm\infty$ ← متباعدة نحو $\pm\infty$

• نهاية U_n غير موجودة

• الإستدلال بالتراجع :

• لبرهان على خاصية $P(n)$ متعلقة بـ n نتبع مايلي :

① - المرحلة الأولى (التحقق) :

• نتحقق من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$

② - م ع (الوراثية، الإنتقالية) :

• نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $P(n)$ (فرضية التراجع)

• نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

③ - م ع (الاستنتاج) :

• ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n الخاصية صحيحة

⟸ جميع المراحل مهمة وضرورية

المتتالية الحسابية

• تعريف : (U_n) متتالية حسابية أساسها r

معناه :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

← إذا طلب إليك أن تبين أن متتالية حسابية برهن أن

$U_{n+1} - U_n = r$ (مقدار ثابت)

• العلاقة بين الحدين : $n \geq p$

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

$p=0$ ← $U_n = U_0 + nr$ (ع. الحد العام)

$p=1$ ← $U_n = U_1 + (n-1)r$

مثال : حساب U_4 :

$$U_4 = U_2 + (4-2)r$$

$$U_4 = U_2 + 3r$$

• عبارة مجموع :

$$S = \frac{\text{عدد الحدود} \times (\text{عبارة الحد الأول} + \text{عبارة الحد الأخير})}{2}$$

مثال :

$$S = \frac{(n-n_0+1) \times (U_{n_0} + U_n)}{2}$$

• الوسط الحسابي : a, b, c حدود متعاقبة

b : وسط حسابي

$$2b = a + c$$

$$\Leftrightarrow \{2U_n = U_{n-1} + U_{n+1}\}$$

المتتالية الهندسية

• تعريف : (V_n) هندسية أساسها q (غير معدوم)

معناه :

$$V_{n+1} = V_n \times q$$

← إذا طلب إليك أن تبين أن هندسية فبرهن أن

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ أي $V_{n+1} = V_n \times q$

• العلاقة بين الحدين : $n \geq p$

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

$p=0$ ← $V_n = V_0 \times q^n$ (عبارة الحد العام)

$p=1$ ← $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

• مثال حساب V_4 :

$$V_4 = V_2 \times q^3$$

• عبارة مجموع :

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$$

مثال :

$$S = V_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

• الوسط الهندسي : a, b, c حدود متعاقبة

b وسط هندسي :

$$b^2 = a \times c$$

$$\Leftrightarrow \{V_n^2 = V_{n-1} \times V_{n+1}\}$$

• إتجاه تغير (U_n) حسابية

• (U_n) حسابية أساسها r

• $r>0$ ← (U_n) متزايدة

• $r<0$ ← (U_n) متناقصة

• $r=0$ ← (U_n) ثابتة

• نهاية متتالية حسابية

• (U_n) حسابية أساسها r

1. $r>0$ ← $\lim U_n = +\infty$ ← متباعدة

2. $r<0$ ← $\lim U_n = -\infty$ ← متباعدة

3. $r=0$ ← $\lim U_n = U_0$ ← متقاربة

• إتجاه تغير (V_n) هندسية

• (V_n) متتالية هندسية أساسها q

• الحالة الأولى $q>1$

• إذا كان $V_0>0$ (V_n) متزايدة

• إذا كان $V_0<0$ (V_n) متناقصة

• الحالة الثانية: $q=1$

• (V_n) ثابتة

• الحالة الثالثة: $0<q<1$

• إذا كان $V_0<0$ (V_n) متناقصة

• إذا كان $V_0>0$ (V_n) متزايدة

• الحالة الرابعة: $q<0$

ليست رتيبة لا يمكن دراستها

• نهاية متتالية هندسية

• إذا كان $q>1$ فإن $\lim q^n = +\infty$

• إذا كان $V_{n_0}>0$ فإن $\lim V_n = +\infty$

• إذا كان $V_{n_0}<0$ فإن $\lim V_n = -\infty$

• إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim q^n = 0$

• ومنه $\lim V_n = 0$ (متقاربة)

• إذا كان $q \leq -1$

• النهاية غير موجودة (متباعدة)

منهجية البرهان على بعض المتراجحات

1) نبدأ التبسيط من الجزء الأيسر للمتراجحة

2) وصولا للعبارة شبيه الجزء الأيمن

3) إذهب للبرهان بالتراجع و ظهر الكسر (ليس، انصاكس) وأمزيا في العبارة المعدلة (اليسار) طرق بطرق . فتظهر الطرق الأيسر المعدل نعوضه بطرق الأيسر الأعلى وتكون برهنت عليها

مثال:

$U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+2}$ و $1 \leq U_n \leq 2$ لدينا

برهن أن

$|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|U_n - 2|$

$|U_{n+1} - 2| = \left|\frac{4U_n - 2U_n - 4}{U_n+2}\right|$ (1)

$|U_{n+1} - 2| = \left|\frac{2U_n - 4}{U_n+2}\right| \Rightarrow = 2\left|\frac{U_n - 2}{U_n+2}\right|$ (2) ينقص قليلا

(1) لدينا $1 \leq U_n \leq 2$ $\Rightarrow 3 \leq U_{n+2} \leq 4$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{U_{n+2}} \leq \frac{1}{3}$ ضرب في $2|U_n - 2|$ $\left(\times \frac{2}{4}|U_n - 2|\right) \leq \frac{2|U_n-2|}{U_n+2} \leq \frac{2|U_n-4|}{3}$

لدينا نفسه هو $|U_{n+1} - 2|$ و منه

$|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2|U_n - 2|}{3}$

طريقة الاستقراء (غالبا تكون في حالة طلب أن u_n

مثال:

$$|u_{n+1}-2| \leq \frac{2}{3}|u_n-2|$$

$$\begin{cases} n=0 : |u_1-2| \leq \frac{2}{3}|u_0-2| \\ n=1 : |u_2-2| \leq \frac{2}{3}|u_1-2| \\ \vdots \\ n-1 \quad |u_n-2| \leq \frac{2}{3}|u_{n-1}-2| \end{cases}$$

$$|u_n-2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-2|$$

$$\frac{|u_0-2|}{2}$$

: نكتب u_n بدلالة

$$(u_{n+1})e^{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(u_{n+1})$$

$$e^{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$ نبرهن أن

نعتبر طرفا ثانيا (u_{n+1})

$$(u_{n+1})e^{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(u_{n+1})$$

(وهذا صحيح)

ملاحظة:

محور الاحتمالات لم أضع له ملخص لسهولته راجعت فقط من دفتر القسم

ما يجب أن يعرف

الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال :

تعريف: f دالة معرفة على مجال I. نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f. من أجل كل x من I لدينا : $F'(x)=f(x)$

نتيجة: الدالة الأصلية لدالة على مجال ليست وحيدة.

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة :

خواص: * إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

$f(x)$ $F(x)$ $I =$

$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$ $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$ $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$
$\ln x$	$x\ln x - x + c$	$]0;+\infty[$
$a \in \mathbb{R}$ ، $\ln(x-a)$	$(x-a)\ln(x-a)-x+c$	$]a;+\infty[$

2. خواص: u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

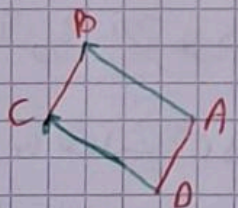
الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'e^u$	e^u	
$(n \in \mathbb{N}^*)$ $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	من أجل كل x من I، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) \neq 0$
$(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$ $\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) > 0$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

1. نشاط

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2=-1$

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ونرمز له $Re(z)$
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ونرمز له $Im(z)$
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف، تخيلي محض، تخيلي بحت
- $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$ (صرف و حقيقي في نفس الوقت)
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري
- لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي z_B-z_A
- يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$



2. مرافق العدد المركب

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ← العدد المركب $x-iy$ يسمى مرافق العدد z ونرمز له بـ $\overline{z}$

- خواصه:

$$\overline{\overline{z}}=z \qquad z+\overline{z}=2Re(z) \qquad z-\overline{z}=2iIm(z)$$

$$z+\overline{z}=2x \qquad z-\overline{z}=2iy$$

$$z\overline{z}=(Re(z))^2+(Im(z))^2$$

$$z\overline{z}=x^2+y^2$$

• الطويلة لعدد مركب :

$z = x + iy$ طويلته $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

خواص :

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|-z| = |z|$.
- $|z' \cdot z| = |z'| \cdot |z|$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$.
- $|z^n| = |z|^n$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. (المتباينة الثلاثية).

البرهان: مباشر .

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$.

النقط ABC تنتمي الى الدائرة (Γ) مركزها z_i ونصف قطرها عدد $|z_A - z_i| = |z_B - z_i| = |z_C - z_i|$

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة (Γ)

• طريقة أولى : نحسب (الطويلة)

$|z_A| = 2$ ، $|z_B| = 2$ ، $|z_C| = 2$

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

نستنتج أن النقط A B C تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 2$

ومنه ABC قائم

• الطويلة ومحمورة الوتر :

A ، B ، M تنتمي لنفس الدائرة z_A ، z_B ، z_m

$|z_m - z_A| = |z_m - z_B|$ أي :

$MA = MB$ بحيث الطول

أي أن M تنتمي الى محور القطعة المستقيمة [AB]

• لدينا $|z_m - z_A| = 4$ هذا يعني أن

$AM = 4$ أي النقطة M تنتمي الى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 4 .

⇐ في المثلث إذا كان طول ضلعين متقايسان فهو متقايس الأضلاع

• لاحقة شعاع $\overrightarrow{AB}$ (الشكل العربي للشعاع)

B لاحقة z_B و A لاحقة z_A

$z_B - z_A$ هي لاحقة $\overrightarrow{AB}$

• لاحقة مجموع :

$\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$ مرجح G

$\frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ لاحقة G هي :

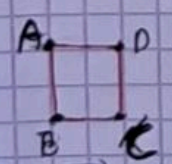
• لاحقة مركز ثقل المثلث :

ABC مثلث

لاحقة مركز ثقل المثلث هي z_H حيث

$z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

لدينا :



ABDC يكون الرباعي متوازي أضلاع إذا

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow z_C - z_D = z_B - z_A$

الشكل الجبري : $z = x + iy$ $\quad |z| = r \; , \; \arg(z) = \theta$

الشكل المثلثي : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
$|z|$ ↩ $\arg(z)$

الشكل الأسي : $z = r e^{i\theta} = [r, \theta]$

$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \times e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

خاصية الـ ln :

طبيعة المثلث :

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r, \pm\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ ABC مثلث قائم في A

$\hookrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 90°$

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

$AC = AB \Leftarrow \dfrac{|AC|}{|AB|} = 1$ لأن

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm\dfrac{\pi}{3}\right] \Rightarrow$ ABC مثلث متقايس الأضلاع

$\therefore (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 60°$

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow$ ABC مثلث متساوي الساقين

قائم في C
قائم في B

$(\theta \neq \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{3})$

$\arg\left(\dfrac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \pi$
معناه $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$
معناه النقط A, B, M على استقامة!

خواص مهمة في حساب و شرح !!!

$$Z = [\cos\theta + i\sin\theta]^n$$

$$Z = [\cos n\theta + i\sin n\theta]$$

$$\arg(l) = n\theta = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg|l| =$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$

التحويلات النقطية

- الدوران:

$a \in \mathbb{C}$

$|a| = 1$

$Z' = iZ + b$

$\arg(a) = \frac{\pi}{2}$ دوران بزاوية

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ مركزه

مثال:

$Z' = -iZ + 2$

$|-i| = 1$

$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ دوران بزاوية

$Z_\Omega = \frac{2}{1+i}$ مركزه

M' صورة M

$|a| = 1$

$\arg(a) = \theta$ حيث θ زاوية

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ مركزه

Ω نقطة ثابتة لـ a عدد مركب

يمكن كتابة هذا التحويل على الشكل التالي وتسمى الكتابة المختلطة:

$Z' - Z_\Omega = K e^{i\theta}(Z - Z_\Omega)$

K و θ الدوران يساوي Z

التحويلات النقطية

$Z' = aZ + b$

- التحاكي:

$a \in \mathbb{R} - \{1\}$

$Z' = aZ + b$

(S) هو تحاكي نسبته $k = a$

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ مركزه

مثال:

$Z' = 3Z - 5i$

(S) تحاكي نسبته $k = 3$

$Z_\Omega = \frac{-5i}{1-3} = \frac{-5i}{-2i}$ مركزه

$Z_\Omega = \frac{5}{2}i$

$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$ $\quad |Z' - Z_\Omega| = a|Z - Z_\Omega|$ $\quad \Omega M' = a\,\Omega M$

$a \in \mathbb{R} - \{1\}$

التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته a

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$

Z' لحق M' و Z لحق M

- الإنسحاب:

$a = 1$

$Z' = Z + b$

(S) هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{U}(b)$

مثال: $Z' = Z + 3 - i$

(S) هو الإنسحاب الذي شعاعه

$\vec{U}(3 - i)$ أو $\vec{U}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

التشابهات

$a \in \mathbb{C}$

$|a| \neq 1$

$Z' = (1+i)Z + b$

- تشابه:

مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$

نسبته $|a|$

زاويته $\arg(a)$

مثال:

$Z' = (1+i)Z + 3$

مركزه $\frac{3}{1-1-i} = -3i$

نسبته $|1+i| = \sqrt{2}$

زاويته $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

M ، لاحقة Z

- ما - عين مجموعة النقط M.

$$Z = Z_0 + Ke^{i\theta}$$ ∴ التعبير من الشكل هذا يساوي

θ متغير، K ثابت

$Z = 1+3i + 2e^{i\theta}$

M مجموعة النقط M هي أثر دائرة مركزها $Z_0 = 1+3i$ وشعاعها $K = 2$

K متغير، θ ثابت

$Z = 1+3i + Ke^{i\frac{\pi}{3}}$

$K \in \mathbb{R}$ كل

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مبدأه $Z_0 = 1+3i$ أي $A = 1+3i$ وحامل بزاوية $\frac{\pi}{3}$

$[AM] - \{A\}$

$K \in \mathbb{R}$ مستقيم مبدأه Z_A وشعاعه $\arg(\frac{\pi}{3})$

$$Z = re^{i\theta}$$

$$Z^n = r^n e^{i\theta n} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$ حسب طبيعي

- Z^n حقيقي: $n\theta = K\pi$
- Z^n تخيلي صرف: $n\theta = \frac{\pi}{2} + K\pi$
- Z^n موجب: $n\theta = 2K\pi$
- Z^n سالب: $n\theta = 2K\pi + \pi$

- كتابة الشكل الأسي من الشكل الجبري

$S = Se^{i0\pi}$

$-S = Se^{i\pi}$

$Si = Se^{i\pi/2}$

$-Si = Se^{-i\pi/2}$

$-e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

$(r = 1 - 1)$ الأعداد لديها سالبة ومنه

$-1 = e^{i\pi}$

$e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dots$