ملخص المتتاليات

المتتالية	الدالة
n: الدليل	x: السابقة
u_n: الحد الذي دليله n	$f(x)$: صورة x
u_n: عبارة الحد العام	$f(x)=$: دستور الدالة

المتتالية العددية هي دالة تربط كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 بعنصر العدد الحقيقي u_n.
($u_n \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$)

المتتاليات الاعتيادية

ملاحظة:
* هناك فرق بين الدليل و الرتبة:
← إذا كانت u_n معرفة على $\mathbb{N}$ فإن:
الدليل = الرتبة + 1
← إذا كانت u_n معرفة على $\mathbb{N}^*$ فإن:
الدليل = الرتبة

* يمكن أن تولد متتالية بإعطاء جميع حدودها ولكنها لا تحقق BAC *

طرق توليدها:
- إعطاء عبارة الحد العام
- بإعطاء علاقة تراجعية

طرق دراسة إتجاه تغير متتالية:
- البرهان بالتراجع
- البرهان بالتزايد

Lyna Hanine Blk
ig : lynaa_iii

دراسة إتجاه تغير الدالة المرفقة

فقط إذا كانت u_n معرفة بعبارة العام

* $u_n = \frac{5n+1}{3n+4} \rightarrow f(x) = \frac{5x+1}{3x+4}$
* $u_{n+1} = \frac{4u_n+7}{3} \rightarrow f(x) = \frac{4x+7}{3}$

- المتتالية تتغير نفس إتجاه تغير الدالة المرفقة.

مقارنة بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1

أ) الحدود موجبة أي $u_n > 0$:
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow (u_n)$ متزايدة
- $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow (u_n)$ متناقصة
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Leftrightarrow (u_n)$ ثابتة

ب) الحدود سالبة أي $u_n < 0$:
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow (u_n)$ متناقصة
- $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow (u_n)$ متزايدة
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Leftrightarrow (u_n)$ ثابتة

دراسة إتجاه تغير متتالية

* إذا درس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n$
- بدالة n: حد عام
- بدالة u_n: علاقة تراجعية + الشرط

- إذا كان $u_{n+1} - u_n > 0$ فإن u_n متزايدة
- $u_{n+1} - u_n < 0$ " " متناقصة
- $u_{n+1} - u_n = 0$ " " ثابتة

تقريب المتتاليات

- متتالية ليست حسابية ولا هندسية + أسئلة المتتالية العددية
- متتالية عددية + متتالية مساعدة حسابية أو هندسية
- متتالية عددية + 3 أسئلة: 1) الطريقة 1 2) " 2 3) النهاية

1) الطريقة 1 ← حسابات
2) الطريقة 2 ← البرهان بالتراجع
3) النهاية ← جبرهنة الحصر

* يمكن استعمال البرهان بالتراجع في إتجاه تغير متتالية إذا أعطى إتجاه التغير في السؤال

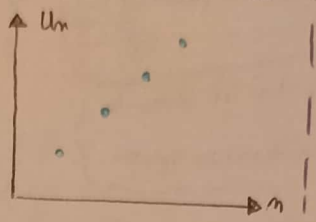
الطريقة -1-

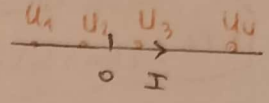
Scanné avec CamScanner

تمثيل متتالية عددية

• معرفة بحدها العام

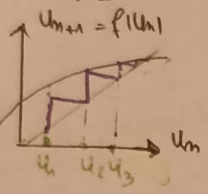
- يجب حساب الحدود قبل تمثيلها
  - على محور (I)
  - في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$



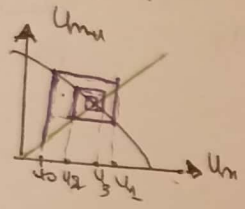


• معرفة بحدات تراجعية

- يجب حساب الحدود قبل تمثيلها
  - في محور فقط
    - المتتالية متزايدة
      - الدالة المرفقة متزايدة
      - المتتالية رتيبة



    - المتتالية متناقصة
      - الدالة المرفقة متناقصة
      - المتتالية غير رتيبة



المتتالية تكون كائنة في نفس نظام الدالة المرفقة مع $y=x$ (الحد الأول نفس المتتالية)

البرهان بالتراجع

المراحل

- **المرحلة 1: "التحقق"**
  - نتحقق من صحة الخاصية P_{n+1} من أجل $n=n_0$ (الحد يتعلق في السؤال) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)$
- **المرحلة 2: "الوراثة"**
  - نفرض أن الخاصية P_n صحيحة
  - نبرهن أن P_{n+1} صحيحة
  - نستنتج أن P_n صحيحة

ملاحظات

- للبرهان على الشرط الذي يستعمل في اتجاه نفي متتالية
- للبرهان على اتجاه نفي متتالية إذا كان محط اتجاهها.
- لمعرفة المجامع، الحاصل، المساويات..

مشاكل المرحلة 2 من البرهان بالتراجع

إذا عبارة (u_{n+1}) فيها أكثر من u_n:

- نرجعها u_n وحدة باستعمال القسمة الإقليدية أو التحليل..
- في البناء نخلي الدالة f فقط إذا أعطيتي الجزء I.
  - الدالة المرفقة متزايدة ← تعكس
  - الدالة المرفقة متناقصة ← تعكس
- نزيدها نرد = نبين $u_{n+1} - u_n$ وحطو..

طرق إثبات التقارب

- **1)** نحسب النهاية نجدها عدد: $\lim u_n = l$
- **2)** متزايدة ومحدودة من الأعلى.
- متناقصة ومحدودة من الأسفل.
- **3)** المتتاليتان متجاورتان.

Scanné avec CamScanner

حساب نهاية متتالية

نهاية متتالية تحسب عند $+\infty$ فقط ونكتب

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ أو $\lim u_n$

عبارة الحد العام

نحسب كما نحسبا في الدوال، لكن: يوجد أكبر أصعاب أكبر أهم

نستخرج العامل المشترك

$\lim_{n\to+\infty} a^n$

- $a>1$ ← $+\infty$
- $-1<a<1$ ← 0
- $a=-1$ ← ليس لها نهاية
- $a=1$ ← 1

عكس تراجعية

يجب أن نثبت أن (u_n) متقاربة ثم نحسب نهايتها:

$\lim u_n = \ell$ نعوض u_{n+1} و u_n بـ ℓ في العلاقة التراجعية و نجد ℓ المعادلة و نجد ℓ الذي يمثل النهاية.

المتتالية المتقاربة

عبارة الحد العام

1) نحسب النهاية $\lim u_n = \ell$

2) إذا كانت:

- (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى
- (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

عكس تراجعية

طريقة واحدة

- (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى
- (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

المتتالية المحدودة

- محدودة من الأعلى: $u_n < a$
- محدودة: $a < u_n < b$
- محدودة من الأسفل: $u_n > b$

ونثبت ذلك كما يلي

الحد العام

1) بين أن: $u_n > a$:

← ندرس إشارة الفرق $u_n - a$ نجده موجب.

أي: $u_n - a > 0 \Leftrightarrow u_n > a$

2) بين أن (u_n) محدودة:

← ندرس تغيرات الدالة المرفقة.

العكس التراجعية

الطريقة الوحيدة: بين أن $u_n > a$:

← البرهان بالتراجع.

Scanné avec CamScanner

المتتالية الحسابية

متتالية عددية ننتقل فيها من حد (u_n) إلى الحد الذي يليه (u_{n+1}) بإضافة نفس العدد الثابت الحقيقي العدد r (الأساس)

أي: $u_{n+1} = u_n + r$

تبيين أن المتتالية حسابية

نحسب $u_{n+1} - u_n$ نجد r

$u_{n+1} - u_n = r$ (ثابت)

اتجاه تغير متتالية حسابية

- $r > 0$ $\Leftrightarrow$ متزايدة تماما.
- $r < 0$ $\Leftrightarrow$ متناقصة تماما.
- $r = 0$ $\Leftrightarrow$ ثابتة.

نهاية متتالية حسابية

- $r > 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim u_n = +\infty$
- $r < 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim u_n = -\infty$
- $r = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim u_n = u_0$

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية

يحتوي $u_p + r$

$u_n = u_p + (n-p).r$

- $u_p = u_1$ ← $u_n = u_1 + (n-1).r$
- $u_p = u_0$ ← $u_n = u_0 + n.r$

مجموع حدود متتابعة S:

$S = \text{عدد الحدود} \cdot \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$

$S = n+1 \cdot \frac{u_0 + u_n}{2}$

الوسط الحسابي

a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية:

$2b = a + c$

ملاحظة:

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية يكون بالشكل $u_n = an + b$

↓

الأساس r

المتتالية الهندسية

هي متتالية عددية ننتقل فيها من حد u_n إلى الحد الذي يليه u_{n+1} بالضرب في نفس العدد الثابت الحقيقي q (الأساس)

أي: $u_{n+1} = u_n \cdot q$

تبيين أن المتتالية هندسية

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n ونجد q

$u_{n+1} = u_n \cdot q$

اتجاه تغير متتالية هـ.

- $q > 1$
  - $u_0 < 0$ ⇓ $\lim u_n = -\infty$
  - $u_0 > 0$ ⇓ $\lim u_n = +\infty$
- $-1 < q < 1$ ← $\lim u_n = 0$
- $q < -1$ ← النهاية ع.م.

نهاية متتالية هندسية

$q > 1$	$0 < q < 1$	$q < 0$
$u_0 > 0$ ↓ متزايدة	$u_0 > 0$ ↓ متناقصة	$u_0 > 0$ ↓ متزايدة
$u_0 < 0$ ↓ متناقصة	$u_0 < 0$ ↓ متزايدة	غير رتيبة

- $q = 1$ ← ثابتة
- $q = 0$ ← محدودة ابتداء من الحد 2
- $u_0 = 0$ ← محدودة

عبارة الحد العام لـ هـ.

يجب توفر u_p من الحدود و الأساس q ، القانون:

$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$

- $u_p = u_1$ ← $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
- $u_p = u_0$ ← $u_n = u_0 \cdot q^n$

خاصية الوسط الهندسي

a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية، تحقق

$b^2 = a \times c$

ملاحظة:

عبارة الحد العام لمتتالية هندسية يكون من الشكل: $u_n = q^n \times b$

مجموع حدود متتابعة S

$S = \text{عدد الحدود} \cdot \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$

$S = n+1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Scanné avec CamScanner

- حساب S_n بدلالة n :

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots$

طريقة التقطيب المجموع الأول

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$S_n = \frac{n}{n+1}$

المتتاليتان المتجاورتان

تذكير

← نقول أن (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت :

- لهما اتجاه تغير مختلفان
- تكون $\lim (u_n - v_n) = 0$ أي أن $\lim u_n = \lim v_n = l$

مثال : نعتبر المتتاليتان،

$u_n = \frac{2}{n}$

$v_n = -\frac{1}{n}$

• بين أنهما متجاورتان.

الحل :

• نبين أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان :

1) نبين أن (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية.

2) $\lim (u_n - v_n) = \lim (\frac{2}{n} + \frac{1}{n}) = \lim \frac{3}{n} = 0$

3) نستنتج أنهما متجاورتان.

إذا كانت (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

حساب حدود غير متعاقبة في متتالية :

الفرق بين حدين متتاليين	=	الحد الأول	+	(الفرق بين حدين متتاليين) × (عدد الحدود − 1)

الفرق بين حدين متتاليين

أفكار التمارين

• تعيين n حتى تكون u_n و v_n هندسية أو حسابية : مثل ماقبل أن المتتالية حسابية أو هندسية (القرينة أو س الأساس)

• تعيين اتجاه تغير (u_n) دون شرط : نحدد $u_{n+1} - u_n$ نحدد $v_{n+1} - v_n$ أي أن اتجاه تغير (u_n) من اتجاه تغير (v_n) (القرينة أو س الأساس)

• المجاميع بالتقطيب (القرينة رقم 4)

إثبات أن متتالية ليست حسابية :

← نحسب 3 حدود متتالية من المتتالية ثم نحسب :

الطريقة 1 : خاصية الوسط الحسابي فنجد : $2u_1 \neq u_0 + u_2$

الطريقة 2 : نحسب $u_1 - u_0$ و $u_2 - u_1$ نجد : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

إثبات أنها ليست هندسية

الطريقة 1 : الوسط الهندسي : $u_1^2 \neq u_0 \times u_2$

الطريقة 2 : نحسب $\frac{u_1}{u_0}$ و $\frac{u_2}{u_1}$ نجد $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

Constantes

Facteurs de conversi

Scanné avec CamScanner