2023-03-11

المتتاليات

المتتالية العددية

هي دالة ترفق بكل $n \in \mathbb{N}$ العدد الحقيقي u_n

n : دليل — الرتبة = الدليل + 1 $n \in \mathbb{N}$

u_0 : الحد و الدليل 0 — الحد = الدليل $n \in \mathbb{N}^*$

طرق توليد متتالية

- عبارة الحد العام: $u_n = 2n+1$
- علاقة ترجيعية: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
- جميع الحدود: $\{1; 2; 3; 4; \dots\}$

طرق دراسة اتجاه التغير

① إشارة $u_{n+1} - u_n$

- معرفة بدلالة الحد العام: بدلالة n
- معرفة بعلاقة ترجيعية: بدلالة u_n + الشرط

② نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1 + حسب إشارة الحدود

الحدود موجبة	الحدود سالبة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ⇔ (u_n) ثابتة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ⇔ (u_n) متزايدة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ⇔ (u_n) متناقصة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

في حالة الحدود مختلفة الإشارة: لا يمكن استعمال هذه الطريقة.

③ ندرس اتجاه تغير الدالة المرفقة

! ATTETION إذا أعطيت فقط (على المجال $[0; +\infty[$) ⇐ صالحة فقط عندما u_n بدلالة n

④ البرهان بالتراجع

يستعمل فقط إذا أعطيت النتيجة في السؤال

مثال: أثبت أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

نثبت أن $u_{n+1} - u_n > 0$ ⇐ $u_{n+1} > u_n$

تحاية متتالية

تحسب فقط بجوار $+\infty$ (على يمين جانبية $+\infty$)

كيفية حساب تحاية متتالية:

① عبارة الحد العام: تحسب التحاية كما تحسب في الدوال

مثال: $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n+5 = +\infty$

- هكاش حالات عدم تعيين في المتتاليات
- لا يمكن تطبيق قاعدة الكبير أمام في المتتاليات ⇒ أخرج عامل مشترك
- $\lim n^2 - 2n + 5 = \lim n\left(n - 2 + \frac{5}{n}\right) = +\infty$
- $\lim \frac{2n+5}{n+4} = \frac{\lim n\left(2 + \frac{5}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \ell$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n$:

- $a > 1$: $= +\infty$
- $-1 < a < 1$: $= 0$
- $a \leq -1$: غير محدودة
- $a = 1$: $= 1$

② علاقة ترجيعية (نحتفظ بحل وحيد)

نعلم أن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ: $\lim u_n = \lim u_{n+1} = \ell$

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

$\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \Rightarrow \ell = 4 \Rightarrow \lim u_n = 4$

③ باستعمال مبرهنة الحصر

(u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات، إذا كانت:

$\begin{cases} \lim v_n = \ell \\ \lim w_n = \ell \end{cases}$ و كانت: $v_n \leq u_n \leq w_n$

فمنه حسب مبرهنة الحصر $\lim u_n = \ell$

④ باستعمال مبرهنة المقارنة

الحد الأدنى الأكبر: إذا كانت $u_n \geq v_n$ و $\lim v_n = +\infty$ فإن $\lim u_n = +\infty$

الحد الأعلى الأصغر: إذا كانت $u_n \leq w_n$ و $\lim w_n = -\infty$ فإن $\lim u_n = -\infty$

Scanné avec CamScanner

المتتالية المتقاربة

- حصار: $\lim U_n = l$
- علاقة ترتيبية:
  - (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى
  - (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

المتتالية المحدودة

- $U_n < A$ محصورة من الأعلى بالعدد A
- $U_n > B$ محدودة من الأسفل
- $A < U_n < B$ محدودة

كيفية إثبات أن المتتالية محدودة

- البرهان بالتراجع: علاقة ترتيبية + الشرط
- إشارة الفرق $U_n - A$: حد عام + الشرط
- تغيرات الدالة المرفقة (القيمة الحدية): * حد عام * دون شرط

البرهان بالتراجع

مسلمة:

المرحلة 1: "التحقق"

تتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n = n_0$ مثلاً

المرحلة 2: "الوراثة"

نفرض أن: الخاصية $p(n)$ صحيحة

نبرهن أن: الخاصية $p(n+1)$ صحيحة

نص الاستنتاج: ($p(n+1)$ صحيحة وهذه $p(n)$ صحيحة وهذه سبب صحة الخاصية بالتراجع)

أقوال البرهان بالتراجع

- البناء: U_n واحدة
- القسمة الإقليدية: أكثر من U_n
- الدالة المرفقة: (مراحل التغير)
- حالة الجامع: إذا أعطيت نتيجة للجواب في السؤال.

المتتاليتان المتجاورتان

(U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

و $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

تمثيل متتالية

- بمرفقة بعد عام:
  1. نحسب الحدود
  2. نمثلها على محور (OI)
- بمرفقة بعلاقة ترتيبية:
  1. نجد الدالة المرفقة
  2. نرسم الدالة المرفقة
  3. نرسم المنصف الأول
  4. نسقط على يمين الدالة نترجع بالمنصف

تمييز نوعية من التمثيلات

- دروج: الدالة المرفقة متزايدة
- حلزوني: الدالة المرفقة متناقصة حدة

التخمين: متقاربة وغير تبعة

التخمين: متقاربة وتبعة

التخمين

- التقارب
- اتجاه التغير
  - غير رتيبة (حلزوني) متقاربة $U_0 U_1 U_2$
  - رتيبة
    - متزايدة $U_0 U_1 U_2$
    - متناقصة

في التخمين لا نبرر إجابة صحيحة بالتمثيل مثل نقد الخطأ

Scanné avec CamScanner

الوحدة الثانية المتتاليات العددية

المتتالية	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريفها	المتتالية (u_n) حسابية أساسها r يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + r$	المتتالية (u_n) هندسية أساسها q يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n \times q$
عبارة الحد العام u_n بدلالة n — إذا كان الحد الأول u_0	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
عبارة الحد العام u_n بدلالة n — إذا كان الحد الأول u_1	$u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_1 \times q^{n-1}$
العلاقة بين حدين $(u_p$ و $u_n)$	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
رتبة حد إذا كان الحد الأول u_0	رتبة الحد = دليل الحد+1	
رتبة حد إذا كان الحد الأول u_1	رتبة الحد = دليل الحد	
a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من المتتالية	$2b = a + c$ — b الوسط الحسابي للعددين a و c	$b^2 = a \times c$ — b الوسط الهندسي للعددين a و c
مج حدود متتابعة للمتتالية	$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
اتجاه تغير (u_n)	إذا كان $r = 0$ فإن (u_n) ثابتة. إذا كان $r > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما. إذا كان $r < 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما.	I) حدها الأول معدوم : (u_n) معدومة II) حدها الأول غير معدوم : 3 حالات 1- $q=0$: غير مستقرة (معدومة ابتداءا من الحد التالي) 2- $q<0$: (u_n) غير رتيبة. 3- $q>0$ $q=1$ ← (u_n) ثابتة (u_n) متزايدة { $q>1$ و $u_0>0$; $1>q>0$ و $u_0<0$ (u_n) متناقصة { $1>q>0$ و $u_0>0$; $q>1$ و $u_0<0$

Scanné avec CamScanner

أنواع الصيغ للحدود المتتالية

- متتالية حسابية
- متتالية هندسية
- متتالية قوى (مقلوب، جذر ..) لمتتالية حسابية أو هندسية
- متتالية جداء أو حاصل قسمة متتاليتين

متتالية حسابية

$S = \frac{n-p+1}{2}(U_p + U_n)$

متتالية هندسية

$S = U_p \times \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}$ $q \neq 1$

$S = U_p \times$ عدد الحدود $q = 1$

متتالية قوى (مقلوب، جذر ..) لمتتالية حسابية

1- نعرض عبارة T_n بدلالة U_n

2- إثبات أنها هندسية

3- تطبيق قانون مجموع

متتالية قوى (مقلوب، جذر ..) لمتتالية هندسية

1- نعرض عبارة T_n بدلالة U_n

2- إثبات أنها هندسية

3- تطبيق قانون مجموع

متتالية جداء أو حاصل قسمة متتاليتين

1- نعرض عبارة T_n بدلالة U_n

2- تبويب ما في المجموع / الجداء

3- تطبيق القانون

أنواع العبارات

عوامل متتالية هندسية

1- تعويض عبارة الحد العام للمتتالية U_n بدلالة U_0 و q

2- نجد كل الحدود

3- مجموع حسابية (S') $S = U_0^{\text{عدد الحدود}} \times q$

عوامل متتالية قوى (مقلوب، جذر ..) لـ U_n أو $\ln$ هندسية

1- تبسيطها (توحيد المقامات، جذور، عوامل $\ln$)

2- إعادة نفس الخطوات.

متتالية معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

المجموع

مثال: $U_n = 2 \times 3^n - U_{n+1} + 7$

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$S_n = [2\times 3^0 - 4\times 0 + 7] + [2\times 3^1 - 4\times 1 + 7] + \cdots + [2\times 3^n - 4n + 7]$

$= 2(3^0 + 3^1 + \cdots + 3^n) - 4(0 + 1 + \cdots + n) + 7(n+1)$

$= 2\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right) - 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 7(n+1)$

$= (3^{n+1} - 1) - 2n(n+1) + 7(n+1)$

$S_n = 3^{n+1} - 2n^2 + 5n + 6$

الجداء

مثال: $U_n = 2n3^{4n}$

$P_1 = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$

$P_1 = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$

$= [2\times 1\times 3^{4\times 1}] \times [2\times 2\times 3^{4\times 2}] \times \cdots \times [2n3^{4n}]$

$= 2^n (1\times 2\times \cdots \times n) \times 3^{4\times 1 + 4\times 2 + \cdots + 4n}$

$= 2^n \underbrace{n!}_{} \times 3^{4\,\frac{n(n+1)}{2}}$

$= 2^n\, n! \times 3^{2n(n+1)}$

$P_1 = 2^n\, n! \times 3^{2n(n+1)}$

1- نعوض عبارة الحد العام

2- تبسيطات ودقة ملاحظة

متتالية معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

المجموع

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}$

الجواب:

$S_3 = U_3 + U_4 + \cdots + U_n$

$S_3 = \left(\frac{3+2}{3-1} - \frac{3+1}{3-2}\right) + \left(\frac{4+2}{4-1} - \frac{4+1}{4-2}\right) + \cdots + \left(\frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}\right)$

← بعد تغيير ترتيب الحدود نجد:

$S_3 = \left(-\frac{4}{1} + \frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{n+1}{n-2} + \frac{n+2}{n-1}\right)$

← تغيير أماكن الأقواس

$S_3 = -\frac{4}{1} + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{6}{3} - \frac{6}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{n-2} - \frac{n+1}{n-2}\right) + \frac{n+2}{n-1}$

← يبقى الحد الأول والأخير فقط:

$S_3 = \frac{3(2-n)}{n-1}$

الجداء

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

الجواب:

$P_3 = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$

$= \frac{0+2}{0+1} \times \frac{1+2}{1+1} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2\times 3\times 4\times \cdots \times (n+2)}{1\times 2\times 3\times \cdots \times (n+1)}$

$P_3 = n+2$

متتالية معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

المجموع

$U_n = f(n) - f(n+1)$

$U_n = f(n+1) - f(n)$

الجداء

$U_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}$ أو $U_n = \frac{f(n)}{f(n+1)}$

مراجع تيليسكوبي لمتتالية معرفة بعدة حدود

المجموع

$U_n = f(U_{n+1}) - f(U_n)$

$U_n = f(U_n) - f(U_{n+1})$

الجداء

$U_n = \frac{f(U_{n+1})}{f(U_n)}$ أو $U_n = \frac{f(U_n)}{f(U_{n+1})}$

بنفس الطريقة

مراجع تيليسكوبي لمتتالية معرفة بدلالة دين لمتتالية أخرى

المجموع

مثال: $U_n = \ln(1 - \frac{2}{n})$

$P_2 = (U_0 - 2)(U_1 - 2) \times \cdots \times (U_n - 2)$

الجواب: 1- عبارة U_n بدلالة U_n

$\ln(U_n - 2) = U_n \Rightarrow \boxed{U_n - 2 = e^{U_n}}$

$P_2 = e^{U_0} \times e^{U_1} \times \cdots \times e^{U_n}$

$= e^{U_0 + U_1 + \cdots + U_n}$

$P_2 = e^{S'}$

الجداء

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

الجواب:

$P_3 = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$

$= \frac{0+2}{0+1} \times \frac{1+2}{1+1} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2\times 3\times 4\times \cdots \times (n+2)}{1\times 2\times 3\times \cdots \times (n+1)}$

$P_3 = n+2$

متتالية معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

المجموع

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}$

الجواب:

$S_3 = U_3 + U_4 + \cdots + U_n$

$S_3 = \left(\frac{3+2}{3-1} - \frac{3+1}{3-2}\right) + \left(\frac{4+2}{4-1} - \frac{4+1}{4-2}\right) + \cdots + \left(\frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}\right)$

← بعد تغيير ترتيب الحدود نجد:

$S_3 = \left(-\frac{4}{1} + \frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{n+1}{n-2} + \frac{n+2}{n-1}\right)$

← تغيير أماكن الأقواس

$S_3 = -\frac{4}{1} + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{6}{3} - \frac{6}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{n-2} - \frac{n+1}{n-2}\right) + \frac{n+2}{n-1}$

← يبقى الحد الأول والأخير فقط:

$S_3 = \frac{3(2-n)}{n-1}$

مراجع تيليسكوبي لمتتالية معرفة بدلالة دين لمتتالية أخرى

المجموع

مثال: $U_n = \ln(1 - \frac{2}{n})$

$P_2 = (U_0 - 2)(U_1 - 2) \times \cdots \times (U_n - 2)$

الجواب: 1- عبارة U_n بدلالة U_n

$\ln(U_n - 2) = U_n \Rightarrow \boxed{U_n - 2 = e^{U_n}}$

$P_2 = e^{U_0} \times e^{U_1} \times \cdots \times e^{U_n}$

$= e^{U_0 + U_1 + \cdots + U_n}$

$P_2 = e^{S'}$

الجداء

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

الجواب:

$P_3 = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$

$= \frac{0+2}{0+1} \times \frac{1+2}{1+1} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2\times 3\times 4\times \cdots \times (n+2)}{1\times 2\times 3\times \cdots \times (n+1)}$

$P_3 = n+2$

متتالية معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

المجموع

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}$

الجواب:

$S_3 = U_3 + U_4 + \cdots + U_n$

$S_3 = \left(\frac{3+2}{3-1} - \frac{3+1}{3-2}\right) + \left(\frac{4+2}{4-1} - \frac{4+1}{4-2}\right) + \cdots + \left(\frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}\right)$

← بعد تغيير ترتيب الحدود نجد:

$S_3 = \left(-\frac{4}{1} + \frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{n+1}{n-2} + \frac{n+2}{n-1}\right)$

← تغيير أماكن الأقواس

$S_3 = -\frac{4}{1} + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{6}{3} - \frac{6}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{n-2} - \frac{n+1}{n-2}\right) + \frac{n+2}{n-1}$

← يبقى الحد الأول والأخير فقط:

$S_3 = \frac{3(2-n)}{n-1}$

مراجع تيليسكوبي لمتتالية معرفة بدلالة دين لمتتالية أخرى

المجموع

مثال: $U_n = \ln(1 - \frac{2}{n})$

$P_2 = (U_0 - 2)(U_1 - 2) \times \cdots \times (U_n - 2)$

الجواب: 1- عبارة U_n بدلالة U_n

$\ln(U_n - 2) = U_n \Rightarrow \boxed{U_n - 2 = e^{U_n}}$

$P_2 = e^{U_0} \times e^{U_1} \times \cdots \times e^{U_n}$

$= e^{U_0 + U_1 + \cdots + U_n}$

$P_2 = e^{S'}$

الجداء

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

الجواب:

$P_3 = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$

$= \frac{0+2}{0+1} \times \frac{1+2}{1+1} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1}$

$= \frac{2\times 3\times 4\times \cdots \times (n+2)}{1\times 2\times 3\times \cdots \times (n+1)}$

$P_3 = n+2$

Scanné avec CamScanner

$$S = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$$

2 v_n متتالية معلومة الطبيعة وحدها يحيط v_n إذا كانت متتالية معلومة الطبيعة وحدها لتقريبها في المجموع.

$$S = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)$$

* نكتب كل الحدود بدلالة v_0:

$$S = \ln(v_0 \times q^0 \times v_0 \times q^1 \times v_0 \times q^2 \times \dots \times v_0 \times q^n)$$

$$S = \ln(v_0^{n+1} \times q^{1+2+3+\dots+n})$$ مجموع حدود متتالية حسابية متقهقرة

$$S = \ln(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n+1}{2}(n)})$$

2: نفس المجموع السابق

لكن على شكل $u_n = \ln(v_n)$ حسابية

هنا نطبق عادي مجموع متتالية حسابية.

2: $S = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ نطبق خواص $\ln$ فتحا

$$S = \ln\left(\frac{v_1}{v_0} \times \frac{v_2}{v_1} \times \frac{\quad}{v_2} \times \dots \times \frac{v_{n-1}}{\dots} \times \frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$S = \ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right) = \ln(v_n) - \ln(v_0)$$

فكرة مجموع:

$$v_n = e^{\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)}$$

$$S_n = v_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_n$$

v_n حدها

$$v_n = e^{\left[\ln 2 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]}$$

$$S_n = e^{\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 2 + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2\right]}$$

$$= e^{\left[\ln\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right) + (\ln 2)(n-1)\right]}$$ بعد التبسيط

$$S_n = e^{\ln\left(\frac{2^n}{n+1}\right)}$$

Scanné avec CamScanner

أفكار المجاميع والجداءات

عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1

مجموع حدود متتالية حسابية

$S_n = \text{عدد الحدود} \times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$ (في المجموع ... ")

مجموع حدود متتالية هندسية.

q = أساس $\quad S_n = \text{الحد الأول في المجموع} \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

نتائج هامة

1) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_p وأساسها q

$u_n = u_p \times q^n$

$(u_n)^\alpha$ متتالية هندسية حدها الأول u_p^α وأساسها q^α

$(u_n)^\alpha = u_p^\alpha \times (q^\alpha)^n$

مثال:

- $S_2 = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = u_0^2 \left(\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2}\right)$
- $S_3 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{q}}\right)$
- $S_4 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \dots + \sqrt{u_n} = \sqrt{u_0}\left(\frac{1-(\sqrt{q})^{n+1}}{1-\sqrt{q}}\right)$

حالة التعويض لـ $u_n = 1 \times 2^n$ و S_3 حيث:

- تحديد طبيعة المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)$:

$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{1\times 2^n} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\left(\frac{1}{u_n}\right)$ متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

$S_3 = 1\left(\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}\right)$

- $S_5 = \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_1^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2} = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{q^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{q^2}}\right)$

2) (u_n) و (v_n) متتاليتين هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب وحدهما الأول u_p و v_p

فإن $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$ وحدها الأول $\frac{u_p}{v_p}$ $\quad q_1 \neq q_2$

ملاحظة هامة جدا: إذا كان $q_1 = q_2$ تصبح $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متتالية ثابتة.

مجموع حدود متتالية ثابتة

$S_n = \text{الحد الأول} \times \text{عدد الحدود}$

مثال: (u_n) هندسية أساسها 2 و $u_0 = 1$

$S = 1 + \frac{u_0}{4} + \frac{u_2}{16} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$

حل التمرين:

$u_n = 1 \times 2^n$: معناه (u_n) هندسية أساسها 2.

4^n هندسية أساسها 4 وحدها الأول هو 1.

طبيعة المتتالية $\left(\frac{u_n}{4^n}\right)$:

$\frac{u_n}{4^n} = \frac{1\times 2^n}{1\times 4^n} = 1\times\left(\frac{2}{4}\right)^n = 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\left(\frac{u_n}{4^n}\right)$ هندسية حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$ ومنه

$S = 1\left(\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}\right)$

3) (u_n) و (v_n) متتاليتين هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب مع $q_1 \times q_2 \neq 1$ وحدهما الأول u_p و v_p

فإن $(u_n \times v_n)$ هندسية أساسها $q_1 \times q_2$ وحدها الأول $u_p \times v_p$

ملاحظة هامة جدا: إذا كان $q_1 \times q_2 = 1$ تصبح $u_n \times v_n$ متتالية ثابتة. (مثال $\frac{1}{2^n} \times 2^n$ متتالية ثابتة)

مثال: (u_n) هندسية $u_n = 1 \times 2^n$.

$S' = u_0 + 4u_1 + 16u_2 + \dots + 4^n u_n$

الحل: $\leftarrow$ u_n هندسية و 4^n هندسية

$\leftarrow$ نتيجة $4^n u_n$ هندسية أساسها 8 وحدها 1

$\leftarrow$ حساب المجموع.

Scanné avec CamScanner

قوانين هامة جدا:

المتتاليات التالية:

اجمع

$a+a+\dots+a = a \times$ عدد الحدود

الجداء

$a \times a \times \dots \times a = a^{\text{عدد الحدود}}$

في متتالية الحسابية الشهيرة

المجموع

$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

الجداء

$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$

في متتالية الهندسية الشهيرة

المجموع

$a \neq 1$

$a^0+a^1+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

الجداء

$a^0 \times a^1 \times a^2 \times \dots \times a^n = a^{0+1+\dots+n}$

$a^0 \times a^1 \times a^2 \times \dots \times a^n = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

الانتقال من متتالية حسابية إلى هندسية

(u_n) حسابية أساسها r وحدها الأول u_0.

فإن (e^{u_n}) هندسية أساسها $q=e^r$ وحدها الأول e^{u_0}

$p \in \mathbb{N}$ و e^{u_p}

مثال: $u_p = 2 + 3n$ حسابية (u_p)

$T = e^2 + e^5 + \dots + e^{u_n}$

الحل المعوذين:

طبيعة المتتالية e^{u_n}: لدينا e^{u_n}

$e^{u_n} = e^{3n} \times e^2 \Rightarrow (e^3)^n \times e^2$

و منه (v_n) هندسية أساسها e^3 وحدها الأول e^2

$T = e^2 \left(\frac{1-(e^3)^{n+1}}{1-e^3}\right)$

الانتقال من متتالية هندسية إلى الحسابية

(v_n) متتالية هندسية موجبة أساسها q وحدها الأول v_0.

فإن $(\ln(v_n))$ متتالية حسابية أساسها $r = \ln(q)$

و حدها الأول $\ln(v_p)$ مع $p \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$

مثال: $t_0 = 2$ وحدها الأول و 3 أساسها هندسية (t_n)

$\Sigma_1 = \ln(2) + \dots \ln(t_n)$

الحل:

طبيعة المتتالية $\ln(t_n)$:

$t_n = 2 \times 3^n$ منه t_n متتالية هندسية و

$\ln(t_n) = \ln(2 \times 3^n) = \ln(2) + \ln(3^n)$

$\ln(t_n) = \ln 2 + n \ln(3)$

$\ln 2$ أول حد من متتالية حسابية $\ln(t_n)$ منه و $\ln(3)$ أساسها و منه

$\Sigma_1 = \frac{n+1}{2}(\ln(2) + \ln(t_n))$

$= \frac{n+1}{2}(\ln 2 + \ln 2 + n \ln 3)$

$= \frac{n+1}{2}(\ln(2 \times 2 \times 3^n))$

$\Sigma_1 = \frac{n+1}{2}[\ln(4 \times 3^n)] = [\ln(4 \times 3^n)]^{\frac{n+1}{2}}$

ملاحظة: تعني الفاتحة بـ log:

$S = \log(v_0) + \log(v_1) + \dots + \log(v_n)$

$= \frac{\ln(v_0)}{\ln(10)} + \frac{\ln(v_1)}{\ln(10)} + \dots + \frac{\ln(v_n)}{\ln(10)}$

$S = \frac{1}{\ln(10)}[\ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)]$

Scanné avec CamScanner

برهان العلاقة الثلاثة:

العلاقة 1 : حسابيا : نبدأ من طرف U_{n+1}

العلاقة 2 : نبرهن بالتراجع

نحسب : $(U_n)_{n=0}^{n=n}$ فيها الاختزال

الخلاصة : برهنا الحصر .

Scanné avec CamScanner