

* النهايات *

① نهايات بعض الدوال المرجعية

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = 0^-$	الدالة مقبولة
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	الدالة جذر
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ مع n فردي	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	الدالة x^n $n \in \mathbb{N}^*$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

حالات عدم التعيين	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \times \infty$	$+\infty - \infty$
حالات يمكن التعيين	$\frac{\ell}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\ell}{\infty} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$
طرق الإزالة	⊖ بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يتوّل إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الكبر) درجة ⊖ بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يتوّل إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام ⊖ بالنسبة لدوال جذرية عندما x يتوّل إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x في معظم الحالات نضرب ونقسم في المرافق ⊖ عندما x يتوّل إلى x_c نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك			

③ مبرهنات في النهايات

مبرهنة التركيب	نعتبر u, v, f ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، ولكن a, b, c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$
مبرهنة الحصر	إذا كان: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
مبرهنة المقارنة	⊖ إذا كان: $f(x) \geq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ⊖ إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ⊖ إذا كان: $f(x) - \ell \leq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

④ نهايات الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

* المستقيمات المقاربة *

لتكن k دالة عددية و (C_r) التمثيل البينائي لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و منجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

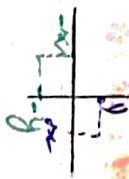
التمثيل البياني	التفسير الهندسي	النهاية
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$	أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = y_0$	أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$	أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

[illegible]

مثال = استنتاج معادلة المستقيم المقارن المثلثي

المعادلة الخطية

$$y = a(-x) + b$$



المعادلة الخطية

$$y = a(x) + b$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

- احتمال وجود صفاء، ب، كذا
- احتمال وجود صفاء مقارن

المرشحون المطابقين

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

حالة عمدة

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \sqrt{x}] = 0$$

صفاء

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \sqrt{x}] = 0$$

نموذج

يبدو أن القيمة المقترحة المقترحة

طريقة التقييم

نقطة على حساب عروق المجال

في كل مرة → حل مشكلة بولندي

طريقة التصحيح

نقطة على الآلة الحاسبة

MODE → 4 → TABLE

وتفصيلية؟

نقطة على الآلة الحاسبة

الجدول

يرتفع

x	f(x)
1	-1
1.1	-0.169
1.2	-0.499
1.3	0.099
1.4	
1.5	
...	
2	

• ومنه 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0

النهايات :

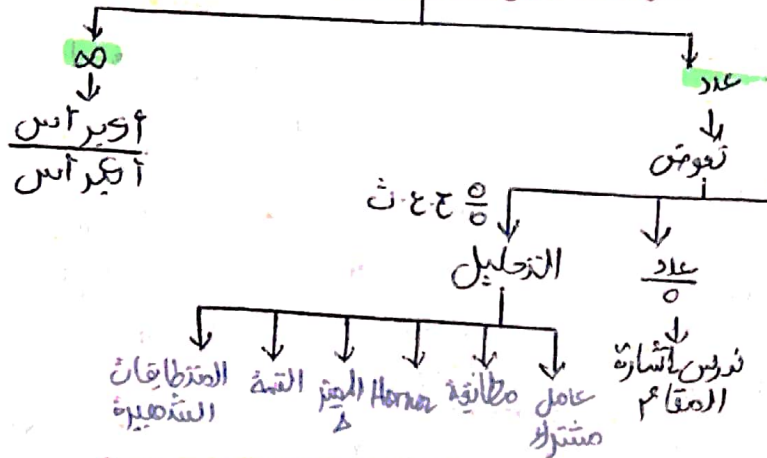
حالات خاصة - ليست ح.ع.ث

$$\frac{\infty}{\infty} = \infty ; \frac{\infty}{0} = \infty ; \frac{0}{\infty} = 0 ; \frac{0}{0} = 0 ; \frac{\infty}{0} = \infty ; \frac{0}{0} = 0 ; \frac{\infty}{\infty} = 0 ; \frac{0}{\infty} = 0$$

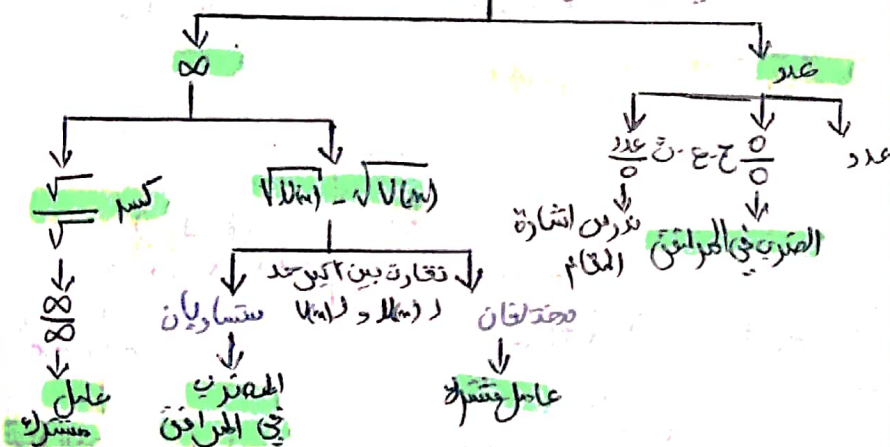
حالات عدم التعيين :

$$0 \cdot \infty ; \frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; +\infty - \infty$$

نهايات الدوال الناطقة :



نهايات الدوال الضعيفة = الدوال الجذرية



ATTENTION

← لكي تحسب تخرجي شيء من تحت الجذر

$$\sqrt{x^2} = |x| \begin{cases} |x| = x & x \rightarrow +\infty \\ |x| = -x & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

← قلنا "أكبر حد" $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^2+9}$

لازم نفس الأس $x^3 \neq x^2$ عامل مشترك

← المتأخرة تكون بين جذري الحدود

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+3} - \sqrt{4x^2}$$

المرافق $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$

← أغلب نهايات الدوال الجذرية تخرج عند
وصة ح.ع.ث و الأخرى ليست ح.ع.ث

النهايات باستخدام النهايات المشتقة :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x - 4} \quad \frac{0}{0} \quad \text{ح.ع.ث}$$

إزالة التعارض

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} \quad f(4) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

تحسب $f'(x)$ و $f'(x_0)$ مشتقة + تعويض

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x - 4} = \frac{4}{3}$$

صيانة
نشتعمله كذلك في الدوال
المثلثية

لأنس النهايات

الشهيرة للدوال المثلثية
في ورقة الملصق

تحسب $f'(x)$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+9})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}$$

$$f'(4) = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x - 4} = \frac{4}{5}$$

صيانة

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2} \quad \frac{0}{0} \quad \text{ح.ع.ث}$$

بأخذ $f(x) = \sqrt{2x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$

$$f(4) = 3 \quad g(4) = 2$$

يصبح لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{g(x) - g(4)} = \frac{f'(4)}{g'(4)}$$

الاستمرارية: منها

على مجال I

تكون الدالة مستمرة على مجال $[a, b]$ إذا وفقط كانت مستمرة عند كل قيمة من هذا المجال

- مجموع دالتين مستمرتين = دالة مستمرة
- مربي دالتين مستمرتين = دالة مستمرة
- حاصل قسمة دالتين مستمرتين = دالة مستمرة

- كل الدوال المقررة هي دوال مستمرة على مجالها تقريبا
 ما عدا بعض الاستثناءات = دوال كثيرات الحدود، $\ln x$ ، e^x ، $\sin$ ، $\cos$

التفسير الهندسي

تكون الدالة f مستمرة على المجال I إذا أمكننا رسم مستطاف البياني على هذا المجال دون رفع القلم

عند نقطة x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

شكل الدالة معرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + 1 - 3 & x < 2 \end{cases}$$

هل f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل: ندرس استمرارية f عند

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ f(2) = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \\ \text{وهذا ليس مستمرة} \\ \text{على } \mathbb{R} \end{matrix}$$

مبرهنة القيم المتوسطة

$$f(a) = 0$$

تقبل في المجال $[a, b]$

على الأقل ولا

$$f \text{ مستمرة على } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0$$

حالة وحيدة

$$f \text{ مستمرة على } [a, b] \\ f \text{ رتيبة على } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0$$

$$f(a) = k \quad (k \neq 0)$$

تقبل في المجال $[a, b]$

على الأقل ولا

$$f \text{ مستمرة على } [a, b] \\ f \text{ رتيبة على } [a, b] \\ f(a) \neq f(b)$$

حالة وحيدة

$$f \text{ مستمرة على } [a, b] \\ f \text{ رتيبة على } [a, b] \\ f(a) \neq f(b)$$

سؤال: بين أن $f(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ وحيدة على $\mathbb{R}$

نعم تحقق أن $a < x < b$

نطبق ١، ٢، ٣ على $\mathbb{R}$ [خو منطوق الجداء = يكون مائة في]

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow 0 \in]-\infty; +\infty[$$

الذوقن = نطبق خذنا منطوق الجداء

التفسير الهندسي

المستقيم $y = k$ / $y = 1$ / محامل محور الفواصل يقطع (k) في نقطة وحيدة على الأقل / نقطة وحيدة فامد لها $x \in [a, b]$

ملاحظات عامة

البيان التحصيلية تكون كالآتي في $\mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \quad a < x < b$$

الاستمرارية مستمرة على $[a, b]$ لأنها مرسومة / صواب / إحداهما قسمة دوال مستمرة / دالة كثير حدود / الرتبة f متناقصة تماما / متزايدة قلما على المجال $[a, b]$ ومنه ذهبن رتيبة على هذا المجال الجداء $f(a) \approx f(b) \approx$

$$f(a) \times f(b) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة الحالة

$$f(x) = 0 \quad \text{تقبل على } \mathbb{R} \text{ وحيدة } x$$

$$a < x < b$$

يجب ذكر نوع الرتبة وحساب الحدود

مادون محور "الاشتقاقية"

مشتقات دوال مركبة:

$\sqrt{u}$ $u>0$	$\frac{1}{u^n}$ $u \neq 0$	u^n	$u \circ v$	$f(u)$
$\frac{u}{\pm v}$	$-\frac{u u'}{u^{n+1}}$	$n u^{n-1} u'$	$v' \times u' \circ v$	$f'(u)$

نوعية:

- الدوال وثيرات الحدود والدوال العنصرية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- صائر لا ليست من الدوال الصماء قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

4) تطبيقات الاشتقاقية

1) اتجاه تغير الدالة f :

- $f'(x) > 0$ ← متزايدة كلما $f(x) = 0$ ← ثابتة
- $f'(x) < 0$ ← متناقصة كلما

2) القيمة الحدية الصغرى والكبرى:

إذا انقضت $f(x)$ عند x_0 وعينت إشارتها

$f'(x)$	x_0	$f'(x)$
$+$	$-$	$+$

قيمة حدية صغرى عند x_0 قيمة حدية عظمى عند x_0

3) نقطة الانعطاف: نصير 3 طرق

- 1) $f'(x)$ تتغير عند x_0 ولا تغير إشارتها عند النقطة ذات العلامة x_0 وتغير وقعته النسبية
- 2) $f'(x)$ تتغير عند x_0 وتغير إشارتها عند النقطة ذات العلامة x_0 وتغير وقعته النسبية
- 3) $f'(x)$ تتغير عند x_0 ولا تغير إشارتها عند النقطة ذات العلامة x_0 وتغير وقعته النسبية

5) التقريب التاليفي

أحسن تقريبن تاليفي لعددن f عند نقطة a هو المماس (T)

$$f(x+h) \approx f'(x_0)h + f(x_0) \quad f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

لوضع $x = x_0 + h$

6) الرقابة التفاضلية

$$f' \leftarrow \frac{df}{dx} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f'' \leftarrow \frac{d^2f}{dx^2} \quad dy = f'(x) \cdot dx$$

7) الاشتقاقية والاستمرارية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإنها

مستمرة على هذا المجال

← العكس ليس دائما صحيحا مثلا: الدالة $f(x) = |x|$

مستمرة عند 0 لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0.

← إذا f غير مستمرة عند x_0 فإنها غير قابلة للاشتقاق عند x_0

1) تعريف العدد المشتق

$$\lim_{m \rightarrow m_0} \frac{f(m) - f(m_0)}{m - m_0} = l = f'(m_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

العدد المشتق ← السرعة اللحظية ← ميل المماس عند x_0
عند $x_0 = a$ في المشتق عند $x_0 = a$ ميل المماس

سؤال: ادرس قابلية الاشتقاق عند $x_0 = a$.
ATTENTION: تروحي تشتتي!

الاجابة:

- 1) التردد من الدالة متفرقة عند $x_0 = a$
- 2) ازالة القيمة المطلقة في مسألة وجودها
- 3) تستدعي قانون العدد المشتق (تجرب من x_0)
- 4) نقول اذا ما كانت الدالة قابلة للاشتقاق أولا.

بيانيا: نصير حالتين: حساب $f'(a)$
حساس مائل ← حساس 9 قتي
↓
 $f'(a) = 0$ خوف قسيتين
من قسيتين

قبل الحساب نقول الجملة: $f'(a)$ هو معمل توجب
الحساس عند النقطة $x_0 = a$

2) مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
$a \in \mathbb{R}$ حيث a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

3) العمليات على الدوال المشتقة

الدالة	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{v}$	$u \times v$	au	$u \pm v$
الدالة المشتقة	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$u'v + v'u$	au'	$u' \pm v'$

ATTENTION

ATTENTION: تتساوى الناتج

ملحوظة (1): صيغة أخرى لقانون قابلية الاشتقاق: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ملحوظة (2): معادلتا نصفى المماسين التي نكتبها في الحالة (4) عند النقطة الزاوية هما:

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\ f'_d(x_0) = l_2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = f'_g(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\ f'_g(x_0) = l_1 \end{cases}$$

3) المماس : السؤال وطريقة الإجابة عليه

السؤال	كيفية البحث عن الفاصلة x_0 لكتابة معادلة المماس
1	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0
2	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0
3	بين أنه يوجد مماس ، للمنحنى (C_f) ميله a (أو معامل توجيهه) يساوي a
4	بين أنه يوجد مماس ، للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$
5	بين أنه يوجد مماس ، للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$
6	بين أنه يوجد مماس ، للمنحنى (C_f) يشمل النقطة $M(a, b)$

ملحوظة: في الحالات (3) (4) (5) (6) عدد الحلول يدل على عدد المماسات وإذا لم تقبل المعادلة حل يعني لا يوجد مماس

مماس مشترك بين منحنيتين (f) و (g)

$$f'(x_0) = g'(x_0) \quad | \quad f(x_0) = g(x_0)$$

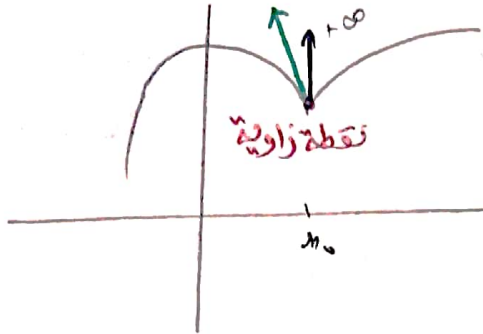
المواهب تحدد التحريبات والممارسة، وليس القدرات الذاتية، وعليه ننصح الطالب بالممارسة المنزلية

2) الاشتقاق والتفسير الهندسي

النهاية	قابلية الاشتقاق	التفسير الهندسي
1	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \neq 0$	f ق عند x_0 (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامل توجيهه (الميل) l
2	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$	f ق عند x_0 (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ أفقي معادلته: $y = f(x_0)$
3	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$	f غير ق عند x_0 (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ عمودي معادلته: $x = x_0$
4	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \in \mathbb{R}$ $l_1 \neq l_2, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$	f ق على يمين وعلى يسار x_0 لكن (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصفى مماسين وتسمى النقطة $A(x_0; f(x_0))$ زاوية للمنحنى (C_f)
5	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$ أو العكس	f ق على يمين x_0 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصفى مماسين وتسمى النقطة $A(x_0; f(x_0))$ زاوية للمنحنى (C_f) f غير ق على يسار x_0 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصفى مماسين وتسمى النقطة $A(x_0; f(x_0))$ زاوية للمنحنى (C_f)
6	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ بحيث النهايتين معا $+\infty$ أو $-\infty$	f غير ق على يمين وعلى يسار x_0 (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موازيا لحامل محور الترتيب (عمودي) f غير ق عند x_0 معادلته: $x = x_0$ وتسمى النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)
7	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ بحيث إحدى النهايتين $+\infty$ والأخرى $-\infty$	f غير ق على يمين وعلى يسار x_0 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس موازيا لحامل محور الترتيب (عمودي) f غير ق عند x_0 معادلته: $x = x_0$ وتسمى النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة رجوع للمنحنى (C_f)

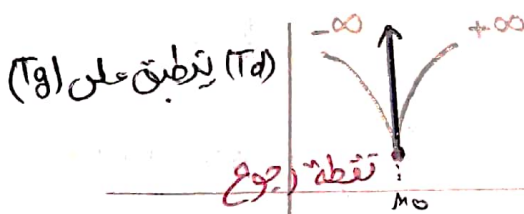
المواهب تحدد التحريبات والممارسة، وليس القدرات الذاتية، وعليه ننصح الطالب بالممارسة المنزلية

لـ f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 ، لأن f يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات القاملة x_0 .
 من اليسار مماسل توجيهه $f'_-(x_0)$
 من اليمين، مماسل توجيهه $f'_+(x_0)$
 وتتشكل في النقطة $(x_0; f(x_0))$ نقطة زاوية .



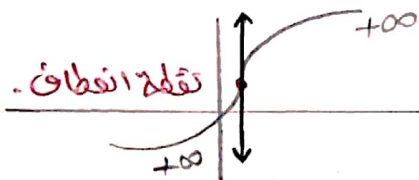
②

لـ f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 لأن f يقبل عند النقطة ذات القاملة x_0 نصفي مماسين من اليسار، مماسل توجيهه $f'_-(x_0)$ من اليمين، مماسل توجيهه $f'_+(x_0)$ وتتشكل في النقطة $(x_0; f(x_0))$ نقطة زاوية .



③

لـ f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 لأن f يقبل عند النقطة ذات القاملة x_0 نصفي مماسين عمودي معا لئلا $x = x_0$ وتتشكل في النقطة $(x_0; f(x_0))$ نقطة روج .



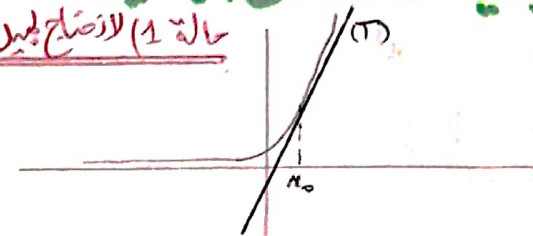
④

لـ f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 لأن f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات القاملة x_0 معادلة $x = x_0$ وتتشكل في النقطة $(x_0; f(x_0))$ نقطة انقطاع .

الحالات التي يكون فيها دالة f في $x_0 = a$ غير معرفة عند $x_0 = a$
 ① إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$
 ② إذا كانت $f'_-(a) \neq f'_+(a)$
 ③ إذا كانت غير مستمرة عند $x_0 = a$

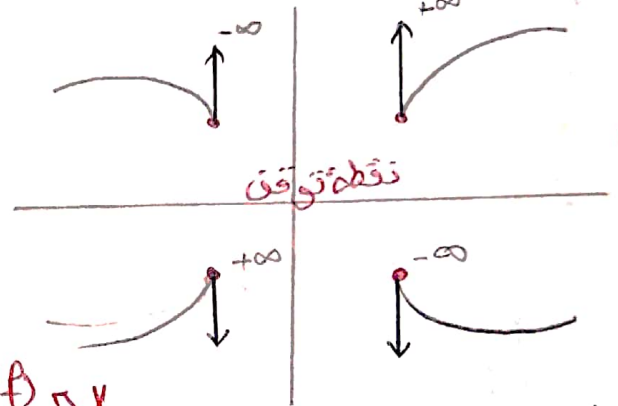
تابعية الاشتقاق بانياء

حالة (1) لا تحتاج لمين وليس



⑤

لـ f قابلة للاشتقاق عند x_0 لأن f يقبل مماسا عند النقطة ذات القاملة x_0 مماسل توجيهه $f'(x_0)$



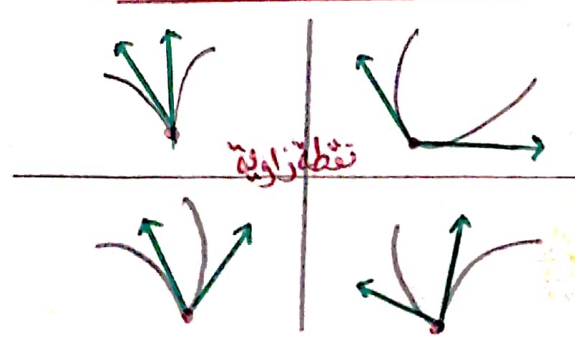
⑥

لـ f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 لأن f يقبل مماسا عمودي عند النقطة ذات القاملة x_0 .

ملحظة هامة :

- اتجاه السهم ليس له علاقة بإشارة ∞ ، السهم يتبع المتحدد
- إشارة ∞ تُحدد من اتجاه تغير الدالة :
 متزايدة $\leftarrow -\infty$ متناقصة $\leftarrow +\infty$

حالة (2) تحتاج لمين وليس :



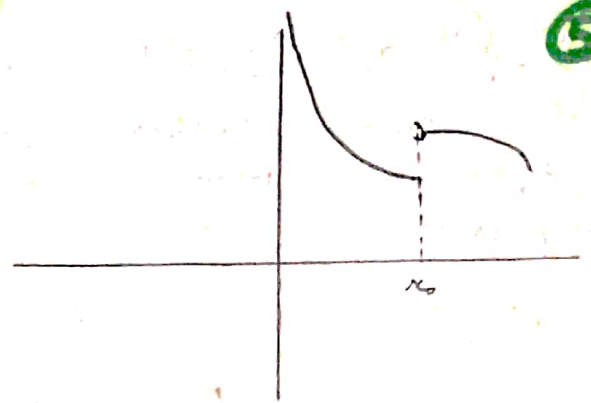
⑦

ادرس تغيرات f

- 1- مجموعة التعريف
- 2- النهايات
- 3- النهاية المشتقة
- 4- المشتقة
- 5- المشتقات
- 6- جدول التغيرات

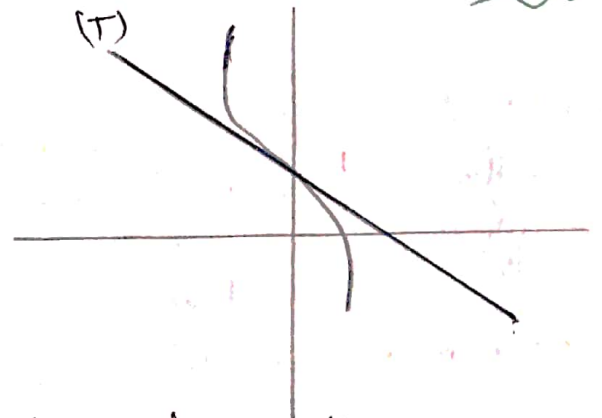
$$f(x) = \tan x \quad \text{اشتقاق} \quad f'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$



f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 لأنها غير مستمرة عند x_0 .

فكرة



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0) = 0$$

نقطة انعطاف

*** شفعية دالة - مركز تناظر و محور تناظر ***

① شفعية دالة

التعريف	التفسير الهندسي	التفصيل البياني
دالة زوجية يعني من أجل كل : $-x \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(-x) = f(x)$	(C_f) يقبل محور التناظر كمحور تناظر	
دالة فردية يعني من أجل كل : $-x \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(-x) = -f(x)$	(C_f) يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر	

② مركز تناظر و محور تناظر دالة

التعريف	التفصيل البياني
$\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $(2\alpha - x) \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	
$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $(2\alpha - x) \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) = f(x)$	

مديان شريطة 1.

*** الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ***

(C_f) التمثيل البياني للدالة f و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ و $g(x)$ و $g(x)$

الوضعية النسبية	إشارة الفرق $f(x) - y$
(C_f) يقع فوق (Δ)	$f(x) - y > 0$
(C_f) يقع تحت (Δ)	$f(x) - y < 0$
(C_f) و (Δ) يتقاطعان	$f(x) - y = 0$

① طمس الفرق بينهم ولا يفيد
② إشارة الفرق يفيد ويوجب المصنف
③ يقطع
④ ينحرف عن خط إيمان

355

*** إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ***

ليكن (C_f) و (C_g) منحنين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

الدالة	التفصيل البياني
$f(x) = g(x) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$ بمقدار b
$f(x) = g(x + a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{i}$ بمقدار a
$f(x) = g(x + a) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a; b)$
$f(x) = -g(x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x) = g(-x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور التناظر
$f(x) = -g(-x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x) = g(x)$	إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) إذا كان $x \leq 0$ فإن $f(x) = g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسم في المجال الموجب بالنسبة لمحور التناظر (f دالة زوجية)
$f(x) = g(x) $	إذا كان $g(x) \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) إذا كان $g(x) \leq 0$ فإن $f(x) = -g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

$g(x) = -[1 + f(x-1)] \Leftarrow g(x) = -1 - f(x-1)$
نترصد (C_f) دبتشعاع $\vec{k}(\frac{1}{1})$ ، ثم الجيء المحصل عليه تناظره بالنسبة إحامل محور الفواصل.

$f(x+a) + b$ لتطبيق $g(x) = e^{-x} + 2$
المتضمن $x \rightarrow e^{-x}$ هو نظير مدتن الدالة $e^x \rightarrow x$ بالنسبة لمحور التناظر
ثم المتضمن (g) هو صورة مدتن الدالة $e^x \rightarrow x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{k}(\frac{0}{1})$

$$h(x) = |g(x-1) - 2|$$

تخرج من أجل $x \in \mathbb{R}$: $K(x) = g(x-1) - 2$

وبالتالي (K) هو صورة (g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{k}(\frac{1}{1})$

$$h(x) = |K(x)| \quad x \in \mathbb{R}$$

منهجية الحماية - سؤال "كيفية الإنشاء"

1. نكتب h دون من القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{تحويل} \\ -f(x) & \text{متناظر} \end{cases}$$

2. إذا $x > 0$: $h(x) = f(x)$ ومنه ...
إذا $x < 0$: $h(x) = -f(x)$ ومنه ...

التركيب



التركيب الداخلي (inner composition)

نوع	مثال
داخلي	$f(g(x))$
خارجي	$f(x)$

مثال: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$
 التركيب الداخلي: $f(g(x)) = (x+1)^2 + 1$
 التركيب الخارجي: $f(x) = x^2 + 1$

نوع	مثال
داخلي	$f(g(x))$
خارجي	$f(x)$

نقطة من إشارة $f(x)$
 - نخرج كل x في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$
 - نكتبها في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$
 - نكتبها في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$
 - نكتبها في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$

$f(x) = \frac{1}{x}$
 $f(1) = 1$
 $f(2) = \frac{1}{2}$
 $f(3) = \frac{1}{3}$

نقطة من إشارة $f(x)$
 - نخرج كل x في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$
 - نكتبها في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$
 - نكتبها في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$
 - نكتبها في $f(x)$ ونجدها في $g(x)$

مثال: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$
 التركيب الداخلي: $f(g(x)) = (x+1)^2 + 1$
 التركيب الخارجي: $f(x) = x^2 + 1$

نقطة الدوران

$f(x) = mx + p$
 $f(1) = m + p$
 $f(2) = 2m + p$
 $f(3) = 3m + p$

المشتقة الدالية



حرة: $f(x) = x^2 + 1$
 صلبة: $f(x) = x^2 + 1$
 مقيدة: $f(x) = x^2 + 1$

1. مشتقة $f(x)$ هي $f'(x)$
 2. مشتقة $f(x)$ هي $f'(x)$
 3. مشتقة $f(x)$ هي $f'(x)$
 4. مشتقة $f(x)$ هي $f'(x)$

نقطة الدوران: $f(x) = x^2 + 1$
 نقطة الدوران: $f(x) = x^2 + 1$
 نقطة الدوران: $f(x) = x^2 + 1$

نقطة الدوران: $f(x) = x^2 + 1$
 نقطة الدوران: $f(x) = x^2 + 1$
 نقطة الدوران: $f(x) = x^2 + 1$

$f(x) = x^2 + 1$	$f'(x) = 2x$	$f''(x) = 2$	$f'''(x) = 0$
$f(x) = x^3 + 1$	$f'(x) = 3x^2$	$f''(x) = 6x$	$f'''(x) = 6$
$f(x) = x^4 + 1$	$f'(x) = 4x^3$	$f''(x) = 12x^2$	$f'''(x) = 24x$
$f(x) = x^5 + 1$	$f'(x) = 5x^4$	$f''(x) = 20x^3$	$f'''(x) = 60x^2$
$f(x) = x^6 + 1$	$f'(x) = 6x^5$	$f''(x) = 30x^4$	$f'''(x) = 120x^3$
$f(x) = x^7 + 1$	$f'(x) = 7x^6$	$f''(x) = 42x^5$	$f'''(x) = 210x^4$
$f(x) = x^8 + 1$	$f'(x) = 8x^7$	$f''(x) = 56x^6$	$f'''(x) = 336x^5$
$f(x) = x^9 + 1$	$f'(x) = 9x^8$	$f''(x) = 72x^7$	$f'''(x) = 504x^6$
$f(x) = x^{10} + 1$	$f'(x) = 10x^9$	$f''(x) = 90x^8$	$f'''(x) = 720x^7$

ملخص الدالة الأسية

(1) الإشارة

$$f(x) = a e^{ax+B} + c$$

شواهد حقيقية غير مدرجة

الحالة 01: $a > 0, c > 0$ الحالة 02: $a < 0, c < 0$

n	$-\infty$	$+\infty$
f(n)	-	-

n	$-\infty$	$+\infty$
f(n)	+	+

الحالة 03: $a > 0, c < 0$ ومقلتان في الإشارة

أولاً: فصل الصارفة $a e^{ax+B} + c = 0$ ، فتجد الم

ثانياً:

n	$-\infty$	m_0	$+\infty$
f(n)	اقل	عكس	اقل

(2) الاشتقاقية

$$(e^n)' = e^n \quad [e^{u(n)}]' = u'(n) e^{u(n)}$$

$$(e^{-n})' = -e^{-n} \quad * n e^n = (n+1) e^n$$

$$(e)' = 0 \quad * (e^n)' = e \quad * (e^n)' = 2e^x$$

(3) النهايات الأسية

النهايات المقارن: $e^n \gg n^n \gg n \gg \sqrt{n} \gg \ln n$

e^x أسرع الدوال بنمو $\rightarrow +\infty$ فقط

النهايات المتصغيرة:

$$1) \lim_{n \rightarrow -\infty} e^n = 0^+$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^n} = +\infty$$

$$\lim_{u(n) \rightarrow +\infty} \frac{e^{u(n)}}{[u(n)]^n} = +\infty$$

$$4) \lim_{n \rightarrow -\infty} n e^n = 0^- ; \lim_{n \rightarrow -\infty} n^n e^n = 0^+$$

$$\lim_{u(n) \rightarrow -\infty} [u(n)]^n e^{u(n)} = 0$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$$

$$\lim_{u(n) \rightarrow 0} \frac{e^{u(n)} - 1}{u(n)} = 1$$

تعريف: هي دالة القرون الوحيدة التي تحقق الشرطين

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}$$

(2) خواص الأسية

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

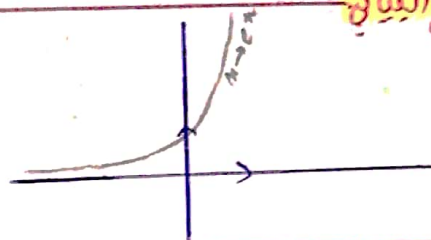
$$e^n > 0$$

$$e^{-n} > 0$$

$$e^1 = e \approx 2,71$$

$$e^0 = 1$$

(3) التمثيل البياني



(4) المقارنات الأسية

$$\begin{aligned} 1) e^x &= e^y \text{ معناه } x=y \\ 2) e^x &= a \text{ معناه } x = \ln a \\ S &= \emptyset \text{ مستحيلة الحل} \end{aligned}$$

تبديل المتغير $\rightarrow$ النسبة بين طرفي معادلة

ملاحظة: عند فصل تبدل المتغير، فتكون في e^x والنزول في $e^{\frac{1}{x}}$ وتكون المقامات

(5) المقارنات الأسية

$$\begin{aligned} 1) e^x < e^y \text{ معناه } x < y \\ 2) e^x > e^y \text{ معناه } x > y \\ 3) e^x > a \text{ معناه } x > \ln a \\ S &= \mathbb{R} \text{ موقعة دوما} \\ 4) e^x < a \text{ معناه } x < \ln a \\ S &= \emptyset \text{ مستحيلة الحل} \end{aligned}$$

تبديل المتغير + التمثيل

غالباً في إثبات مساواة أسية = تفرد e^x
 لكل مشترك + افتزال
 عند نزاع e^x من توس فيه e^x تدقق
 e^n وليس e^1 حذار
 غالباً الأسية تكون معرفة على $\mathbb{R}$ معاً
 الحالات مثل $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$

ملخص الدالة $\ln$:

(1) **التعريف:** اللوغاريتم النسيبي هو لوغاريتم

أساسه e

$$\begin{cases} \ln a = b \\ \Leftrightarrow e^b = a \end{cases}$$

الدالة اللوغاريتم النسيبي:

$$f(x) = \ln x$$

$$D_f =]0; +\infty[$$

(2) **مجموعة التعريف:**



$$\ln [U(x)] \leftarrow U(x) > 0$$

$$\ln |U(x)| \leftarrow U(x) \neq 0$$

$$\ln (U(x))^2 \leftarrow U(x) \neq 0$$

$$\ln \sqrt{U(x)} \leftarrow U(x) \neq 0$$

(3) **خواص:**

$$\ln(x \cdot y) = \ln |x| + \ln |y|$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln |x| - \ln |y|$$

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$$

$$\ln x^n = \begin{cases} = n \ln |x| \\ = n \ln x \end{cases}$$

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

تنسيبية
البيان
"ن" زوجي
"ن" فردي

(4) **التفصيل البياني**

الدالتان $x \rightarrow \ln x$ و $x \rightarrow e^x$

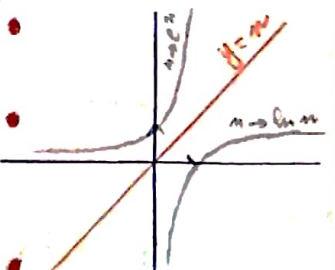
هما دالتان متعاكستان

كل دالتان متعاكستان

متحصلات البياني متناظرتان

بالنسبة للمضيق الأول $y = x$

$$\ln e^x = x \quad ; \quad e^{\ln x} = x$$



$$x \rightarrow e^x$$

$$\mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

$$\ln e = 1$$

$$x \rightarrow \ln x$$

$$]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$e^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

(5) **المعادلات اللوغاريتمية**

(1) إيجاد مجموعة التعريف أو

$$x = y \quad \ln x = \ln y$$

$$x = e^a \quad \ln x = a$$

تبدل المتغير

(3) تأخذ نقط الطل التي تنتمي لـ

(6) **المقاربات اللوغاريتمية**

(1) إيجاد مجموعة التعريف

$$x > y \quad \ln x > \ln y$$

$$x < y \quad \ln x < \ln y$$

$$x > e^a \quad \ln x > a$$

$$x < e^a \quad \ln x < a$$

تبدل المتغير + التفصيل

(3) تأخذ فقط الحلول التي تنتمي لـ

ملحوظة هامة جداً

$$\ln x^2 \neq (\ln x)^2 \quad ; \quad \ln^2 x = (\ln x)^2$$

تنسيبية القيمة المطلقة

$$\ln x^4 + \ln x^2 - 3 = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}^+$$

$$\ln x^4 + \ln x^2 - 3 = 0$$

$$\ln x^6 = 3$$

$$6 \ln |x| = 3$$

$$\ln |x| = \frac{3}{6}$$

$$\ln |x| = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{1/2}$$

$$x = -e^{1/2}$$

$$S = \{e^{1/2}, -e^{1/2}\}$$

افترى!

(7) **دراسة الإشارة**

تأخذ ما يلي

صايد اقل من ليس درجة

$$f(x) = \ln [U(x)]$$

يؤخذ دراسة الإشارة

$$[U(x) - 1]$$

دون اجمال

صايد اقل من درجة

$$f(x) = a \ln (x+B) + c$$

أولاً فعل للمعادلة

$$f(x) = 0$$

غير اقل

x	x_0	نقطة
$f(x)$	عكس	اقل

(8) **الاشتقاق**

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad ; \quad [\ln (U(x))]' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$[\ln |x|]' = \frac{1}{x} \quad ; \quad [\ln |U(x)|]' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

ملحوظة: يجب ايجاد تطبيق الخصائص الاشتقاق

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right) = \ln |x+3| - \ln |x+5| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln(1 + \frac{2}{n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{2 \ln x}{n} + \ln(1 + \frac{2}{n}))}{2 + \frac{1}{n}} = 0$$

$$\text{Ex 49} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+3} \cdot \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} = 0$$

$$\text{Ex 49} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{n} = \frac{1}{n} + \frac{\ln x}{n} = 0$$

$$\text{Ex 58} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)}{(n^{\frac{1}{3}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)}{(x^{\frac{1}{3}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0$$

0x∞

$$\text{Ex 102} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} (1+y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1+y}{y} = 1$$

$$\text{Ex 102} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\frac{n+1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n (\ln(n+1) - \ln n) = 0$$

نضيق النهايتين الشهيرتين $\frac{0}{0}$

$$\text{Ex 102} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ex 102} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2 - n + 1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2 - n + 1)}{n^2 - n} \times \frac{n^2 - n}{n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{t+1}{t} \times \frac{n(n-1)}{n} = -1$$

$$\text{Ex 103} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} \times \frac{1}{n} = +\infty$$

اللوغاريتم ذو الأساس الكليسي

تحويل: $a^b = x \Rightarrow \log_a x = b$ معناه $(a^b = x)$ نفس فرانس a $\log$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

الانتقال من الأساس 10 إلى الأساس e
اللوغاريتم ذو الأساس 10 ← لوغاريتم عشوائي
اللوغاريتم ذو الأساس e ← لوغاريتم طبيعي

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log(10) = 1 \quad \log(1) = 0$$

$$n \leq \log x \leq n+1 \Rightarrow 10^n \leq x < 10^{n+1}$$

النهايات اللوغاريتمية

التزايد المقارن:

$$e^n \gg n^n \gg n \gg \sqrt{n} \gg \ln n$$

النهايات الشبهية:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 0} \ln n = -\infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0^+ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^h} = 0^+$$

$$\lim_{U(n) \rightarrow +\infty} \frac{\ln U(n)}{[U(n)]^h} = 0^+$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0} n \ln n = 0^- \quad \lim_{n \rightarrow 0} n^h \ln n = 0^-$$

$$\lim_{U(n) \rightarrow 0} [U(n) \ln U(n)] = 0^-$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n}{n-1} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(n+1)}{n} = 1$$

$$\lim_{U(n) \rightarrow 1} \frac{\ln U(n)}{U(n)-1} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{U(n) \rightarrow 0} \frac{\ln U(n)+1}{U(n)} = 1$$

إزالة حالات عدم التحديد

$\infty - \infty$ ← استخراج عامل مشترك (إذا كانت

$\ln u - \ln v$ فتستعمل القواعد أو

$$\text{Ex 18} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - \ln n + 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x - 1 + \frac{5}{\ln x}) = +\infty$$

$\frac{\infty}{\infty}$ ← استخراج عامل مشترك خارج أو داخل $\ln$

أو تبديل المتغير $\frac{\ln t}{t}$

$$\text{Ex 18} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n-3)^2}{n-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln \frac{n-3}{n-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln \frac{(-n+3)}{(-n+3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln \frac{(-n+3)}{(-n+3)} = 0$$

$$\text{Ex 18} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2+3)}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2) + \ln \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln n + \ln \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) = +\infty$$