I- الدوال الأصلية :

1- مثال : لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=Arc\tan\left(x^2+1\right)$.

ولتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$

أ- أحسب $F'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- لتكن G دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $G(x)=Arc\tan\left(x^2+1\right)+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أحسب $G'(x)$. ماذا تستنتج؟

جـ- حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق : $G(0)=\pi$.

الحل :

أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $F'(x)=\left(Arc\tan\left(x^2+1\right)\right)'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{1+\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}=f(x)$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $G'(x)=\left(Arc\tan\left(x^2+1\right)+\alpha\right)'=\left(F(x)+\alpha\right)'=F'(x)=f(x)$.

جـ- لدينا $F'(x)=f(x)$: $\forall x\in\mathbb{R}$. نقول إن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لتكن G دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. إذن :

$$\forall x\in\mathbb{R} \ : \ \left(G-F\right)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ومنه فإن : $G(x)-F(x)=\alpha$: $\forall x\in\mathbb{R}$ / $\exists\alpha\in\mathbb{R}$.

أي : $G(x)=F(x)+\alpha$: $\forall x\in\mathbb{R}$ / $\exists\alpha\in\mathbb{R}$.

وبما أن : $G(0)=\pi$ ، فإن : $F(0)+\alpha=\pi$ ، وبناءا عليه نجد :

$$Arc\tan(1)+\alpha=\pi\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{3\pi}{4}}$$.

وبالتالي فإن الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق : $G(0)=\pi$ هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$\begin{array}{rcl} G \ : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Arc\tan\left(x^2+1\right)+\dfrac{3\pi}{4} \end{array}$$

2- أ- تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول إن F دالة أصلية للدالة f على I ؛
إذا كانت F قابلة للإشتقاق على I وكان لكل x من I : $F'(x)=x$

ملاحظة : إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على مجال I ، فإن f دالة دالة متصلة على المجال I .

ب- مثال : 1- حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=x \quad (a \qquad ; \qquad f(x)=x^2+1 \quad (b$$

$$f(x)=7x^4 \quad (c \qquad ; \qquad f(x)=-5x^3+8x+\sqrt{2} \quad (d$$

2- حدد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ مع : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

3- أ- خاصية مقبولة :

كل دالة متصلة على مجال I ؛ تقبل دالة أصلية على المجال I .

ب- ملاحظة :

لتكن f دالة متصلة على مجال I ولتكن F دالة أصلية لها على I . الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال G المعرفة على I بما يلي :
$\forall x \in I \quad : \quad G(x)=F(x)+\alpha$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$.

جـ- خاصية :

لتكن f دالة متصلة على مجال I ولتكن F دالة أصلية لها على I ؛ وليكن $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$.
توجد دالة **أصلية وحيدة** G للدالة f على المجال I بحيث : $G(x_0)=y_0$.

د- مثال1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=3x^2-4x-5$.
1- حدد الدوال الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$.
2- حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق : $G(1)=9$.

مثال 2 : حدد دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto f(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

مثال 3 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[-1,8[$ بما يلي :
$f(x)=\dfrac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$.
1- بين أن : $\forall x \in I \quad : \quad f(x)=2x-\dfrac{3}{(x+2)^2}$.
2- أ- استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال I .
ب- حدد الدالة الأصلية G للدالة f على المجال I التي تحقق $G(0)=2$.

4. جدول للدوال الأصلية للدوال الاعتيادية : (أنظر المطبوع المرفق)

II- دالة اللوغاريتم النبيري : Logarithme Népérien :

1- تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ويرمز لها بالرمز $\ln$ أو Log .

ملاحظتين : أ- يكون $\ln x$ معرفا إذا وفقط إذا كان $x>0$. ب- $\boxed{\ln 1=0}$.

2- خاصيات :

أ- خاصية أساسية : $\boxed{\forall a \in]0,+\infty[\ , \ \forall b \in]0,+\infty[\ : \ \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)}$

برهان : ليكن $a>0$ و $b>0$. نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :
$\forall x \in]0,+\infty[\ : \ F(x)=\ln(ax)$
لدينا : $x \mapsto ax$ دالة حدودية ، فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالأخص على المجال $]0,+\infty[$.
ولدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\ : \ ax>0$ و $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.
إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ : \ F'(x)=\left(\ln(ax)\right)'=(ax)'\times ln'(ax)=a\times\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$$

ومنه فإن : $\left(F-\ln\right)'(x)=F'(x)-ln'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$: $\forall x \in]0,+\infty[$.

إذن يوجد عدد حقيقي α بحيث : $F(x)-\ln(x)=\alpha$: $\forall x \in]0,+\infty[$.

وبما أن : $F(1)=\ln(a)$ ، فإن : $\alpha=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)$.

وبهذا نجد : $F(x)-\ln(x)=\ln(a)$: $\forall x \in]0,+\infty[$.

أي : $\ln(ax)-\ln(x)=\ln(a)$: $\forall x \in]0,+\infty[$.

وبالتالي فإن : $\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$: $\forall x \in]0,+\infty[$. نضع $x=b$ ، فنجد :

$$\boxed{\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)}$$

تمرين تطبيقي : ليكن a و b من $]0,+\infty[$. بين أن :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a \quad (i \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \quad (ii \quad ; \quad \ln\left(a^2\right)=2\ln a \quad (iii$$

ب- نتائج :

1. لكل a و b من $]0,+\infty[$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ؛ لدينا : $\boxed{\ln(ab)=\ln a+\ln b}$ ، $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a}$ ، $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b}$ ، $\boxed{\ln\left(a^n\right)=n\ln a}$

2. لكل $r \in \mathbb{Q}$ ولكل $a \in]0,+\infty[$ ؛ لدينا : $\boxed{\ln\left(a^r\right)=r\ln a}$.

مثال : نضع : $a=\ln 2$ و $b=\ln 5$.

1. حدد بدلالة a و b ما يلي :

$$\ln\left(\frac{4}{125}\right) \quad (ii \quad ; \quad \ln 10 \quad (i$$

$$\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \quad (iv \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{5}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (iii$$

2. حدد بدلالة a و b ما يلي : $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$ و $\ln\left(\sqrt[3]{100}\right)$.

3- دراسة الدالة ln :

أ- النهايات : مجموعة تعريف الدالة ln هي : $D_{\ln}=]0,+\infty[$.

لنبين أن الدالة ln لا تقبل نهاية منتهية عند الانهاية : بالخلف ، نفترض أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=l$

حيث $l \in \mathbb{R}$. نعلم أن : $\ln(2x)=\ln(2)+\ln(x)$ ، عندما يؤول x ، نجد : $l=\ln(2)+l$

إذن : $\ln(2)=0$ وهذا تناقض . إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$ غير منتهية ...

خاصية مقبولة : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$

استنتاج : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$

نضع $t = \dfrac{1}{x}$. إذن $x \to 0^+$ $\Leftrightarrow$ $t \to +\infty$ ومنه فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{t\to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty} -\ln t = -\infty$

ب- رتابة الدالة ln :

نعلم أن الدالة ln قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا : $ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$: $\forall x \in]0,+\infty[$.

إذن ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ؛ وبما أن ln متصلة على $]0,+\infty[$ فإنها تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال : $\mathbb{R}$. $\left(\ln\left(]0,+\infty[\right) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x , \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x\right[= \mathbb{R}\right)$.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ومنه فإن : **ملاحظة 1 :**

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall y \in]0,+\infty[$:

$\boxed{\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y}$; $\boxed{\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y}$

ملاحظة 2 :

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall y \in]0,+\infty[$:

$\boxed{\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1}$; $\boxed{\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1}$; $\boxed{\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1}$

ملاحظة 3 :

المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,+\infty[$ يرمز له بالرمز e . $(\ln e = 1)$. e عدد حقيقي لا جذري بحيث : $e \simeq 2,718$

مثال 1 : 1. حدد إشارة الأعداد التالية : $\ln(0,99)$; $\ln\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$; $\ln\left(\sqrt{2}\right)$.

2. نعتبر المعادلة $\ln(x-2)+\ln(x-3) = 0$: (E) .

أ- حدد $\mathscr{D}$ مجموعة تعريف المعادلة (E) .

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) .

جـ- استنتج ، في $\mathbb{R}$ ، مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(x-2)+\ln(x-3) > 0$.

مثال 2 : حدد إشارة العدد الحقيقي $(x-2)\ln(x-1)$ حيث $x \in]1,+\infty[$.

جـ- الفروع اللانهائية :

i) نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. إذن $(\mathscr{C}_{\ln})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=0}$.

ii) خاصية: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0}$

برهان : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f:x\mapsto x-\ln x$

لدينا : $\mathscr{D}_f=]0,+\infty[$ و $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$: $\forall x\in]0,+\infty[$.

إشارة $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة البسط $x-1$. ومنه نجد :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

إذن 1 قيمة دنيا مطلقة للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

ومنه فإن : $f(t)\geq 1$: $\forall t\in]0,+\infty[$. أي : $\ln(t)-t\geq 1>0$: $\forall t\in]0,+\infty[$.

وبالتالي فإن : $\ln(t)\geq t$: $\forall t\in]0,+\infty[$. و من أجل $t=\sqrt{x}$ ، نجد :

$$\ln\left(\sqrt{x}\right)\geq\sqrt{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln x\geq\sqrt{x}\Rightarrow\frac{\ln x}{x}\geq\frac{2}{\sqrt{x}}\quad:\ \forall x\in]0,+\infty[$$

ومنه نستنتج أن : $\boxed{\forall x\in]1,+\infty[\ :\ 0\leq\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$.

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ ، فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

ومنه نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ ؛ اتجاهه محور الأفاصيل .

د- تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$: لدينا : $\ln n''(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}<0$: $\forall x\in]0,+\infty[$.

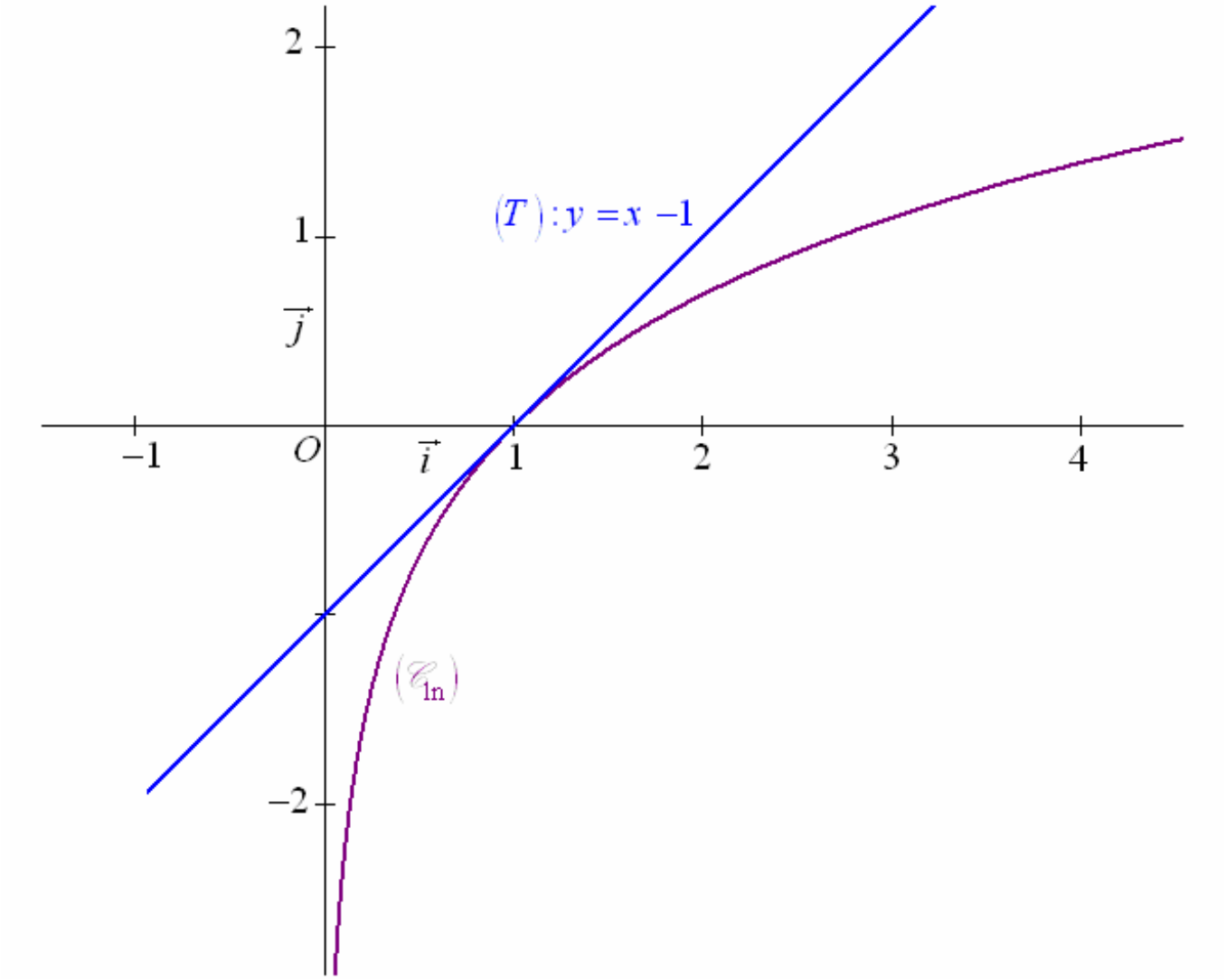
إذن تقعر $(\mathscr{C}_{\ln})$ موجه نحو الأراتيب السالبة .

هـ- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$:

لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_{\ln})$ في النقطة التي أفصولها 1 هي:

$$y=ln'(1)(x-1)+\ln 1$$

أي : $\boxed{y=x-1}$. لأن : $ln'(1)=1$ و $\ln(1)=0$.



ملاحظة : على المجال $]0,+\infty[$ ؛ لدينا $(\mathscr{C}_{\ln})$ يوجد تحت المماس (T) . إذن :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\quad ; \quad \ln x \leq x - 1}$$.

4- نهايات هامة :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0} \quad ; \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \quad ; \quad \boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

برهان :

نضع : $t = \frac{1}{x}$. إذن : $t \underset{x \to 0^+}{\to} +\infty$.

و منه فإن : $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0$.

لدينا : $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$.

نضع : $t = x - 1$. إذن : $t \underset{x \to 1}{\to} 0$

و منه فإن : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$.

تمرين تطبيقي : أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3\ln x$ (a ; $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)^2+\ln x$ (b ; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-\ln x}{\ln x}$ (c ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x}$ (d

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}+\ln x$ (e ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(1+x^2)$ (f ; $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x$ (g ; $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x$ (h

$\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2$ (i ; $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^3$ (j ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ (k ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3}$ (l

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ (m ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$ (n ; $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(1+\ln x)}{x^2-1}$ (o ; $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\tan x)}$ (p

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ (q ; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x}$ (r ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(x^2)$ (s .

III- المشتقة اللوغاريتمية :

1- خاصية :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق ولا تنعدم على مجال I .

لدينا : $\forall x\in I \quad : \quad \left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

2- تعريف :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق ولا تنعدم على مجال I .

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

تمرين تطبيقي 1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

1- حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

2- أحسب نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathscr{D}_f$ ؛ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathscr{D}_f$.

4- أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5- أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ثم حدد نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

6- أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

الجواب :

1. ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $x\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right|>0$ و $x\neq0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\neq0$ و $x\neq0$

$\Leftrightarrow x\neq1$ و $x\neq0$

إذن : $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}-\{0,1\}=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

2. لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|=\ln1=\boxed{0}$.

و بوضع $t=\left|\frac{x-1}{x}\right|$ ، نجد $x\to1$ و $t\to0^+$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=\lim\limits_{t\to0^+}\ln(t)=\boxed{-\infty}$.

ولدينا : $t \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) = \boxed{+\infty}$.

3. ليكن $x \in \mathscr{D}_f$ ؛ لدينا :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)'}{\dfrac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\dfrac{x^2}{x-1}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{x(x-1)} = \boxed{\frac{-(x+1)(x-2)}{x(x-1)}}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	0

4. تحديد الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$:

- ✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \boxed{0}$. إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = 0$.
- ✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$.
- ✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 1$.

5. ليكن $x \in \mathscr{D}_f$. لدينا :

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2+x+2}{x(x-1)}\right)' = \frac{\left(-x^2+x+2\right)'\left(x(x-1)\right) - \left(-x^2+x+2\right)\left(x(x-1)\right)'}{\left(x(x-1)\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+1)\left(x(x-1)\right) - \left(-x^2+x+2\right)(x-1+x)}{\left(x(x-1)\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-(2x-1)\left(x(x-1)\right) - \left(-x^2+x+2\right)(2x-1)}{\left(x(x-1)\right)^2}$$

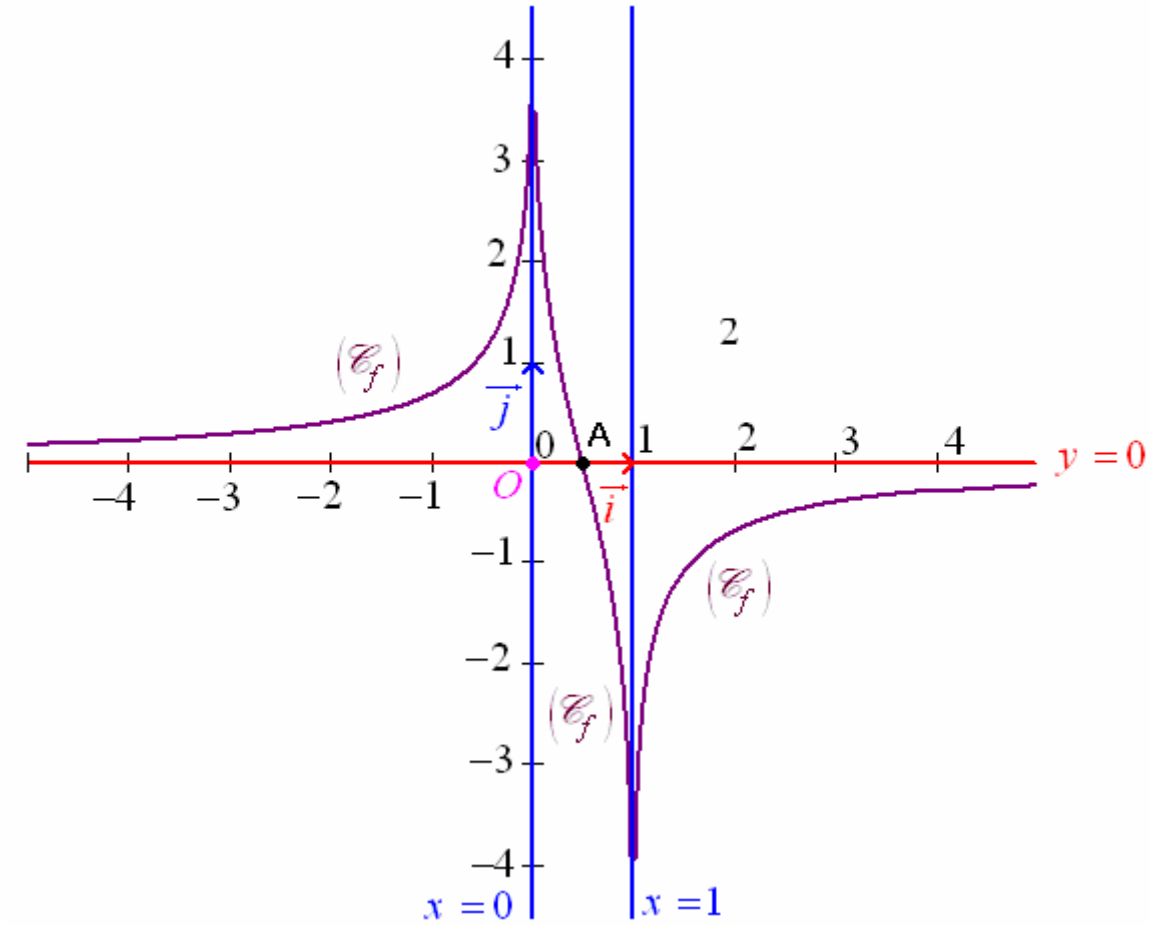
$$f''(x) = \frac{(2x-1)\left(-x^2+x+x^2-x-2\right)}{\left(x(x-1)\right)^2} = \boxed{\frac{-2(2x-1)}{\left(x(x-1)\right)^2}}$$

إشارة $f''(x)$ على $\mathscr{D}_f$ هي إشارة $1-2x$ ، ومنه نستنتج أن :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$	$(\mathscr{C}_f)$ مقعر		$(\mathscr{C}_f)$ مقعر	A	$(\mathscr{C}_f)$ محدب		$(\mathscr{C}_f)$ محدب		

وبالتالي فإن النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

6. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$:



تمرين تطبيقي 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^3\right) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

1. أ- بين أن f متصلة في 0 .
   ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 .
2. أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
3. أ- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,0[$.

أ- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x\in J$. (ينجز هذا السؤال بعد درس الدوال الأسية) ؟

6. نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{4}{9} \\ u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\dfrac{4}{9}\le u_n\le 1$: $\forall n\in\mathbb{N}$.

ب- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

جـ- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها.

3- استنتاج :

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق ولا تنعدم على مجال I .

الدوال الأصلية للدالة $\dfrac{u'}{u}$ على I هي الدوال : $x\mapsto \ln|u(x)|+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

IV- دالة اللوغاريتم للأساس a :

1- تعريف :

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$.

الدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ، تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز $\log_a$. ولدينا :

$$\begin{array}{rccc} \log_a : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$

ملاحظة : لدينا : $\log_e(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\ln x$: $\forall x\in]0,+\infty[$.

دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e .

2- خاصيات :

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$.

1. لكل x و y من $]0,+\infty[$ ولكل $n\in\mathbb{N}$ ؛ لدينا :

(i) $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$; (ii) $\log_a(x^n)=n\log_a(x)$

(iii) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$; (iv) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

2. لكل $r\in\mathbb{Q}$ ولكل $x\in]0,+\infty[$ ؛ لدينا : $\boxed{\log_a(x^r)=r\log_a(x)}$.

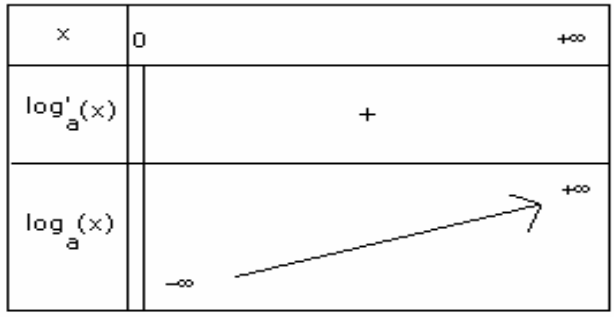
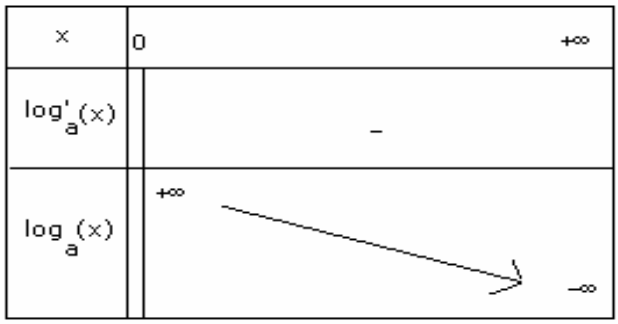
3- رتابة الدالة $\log_a$:

أ- مجموعة تعريف الدالة $\log_a$ هي : $\mathscr{D}_{\log_a}=]0,+\infty[$.

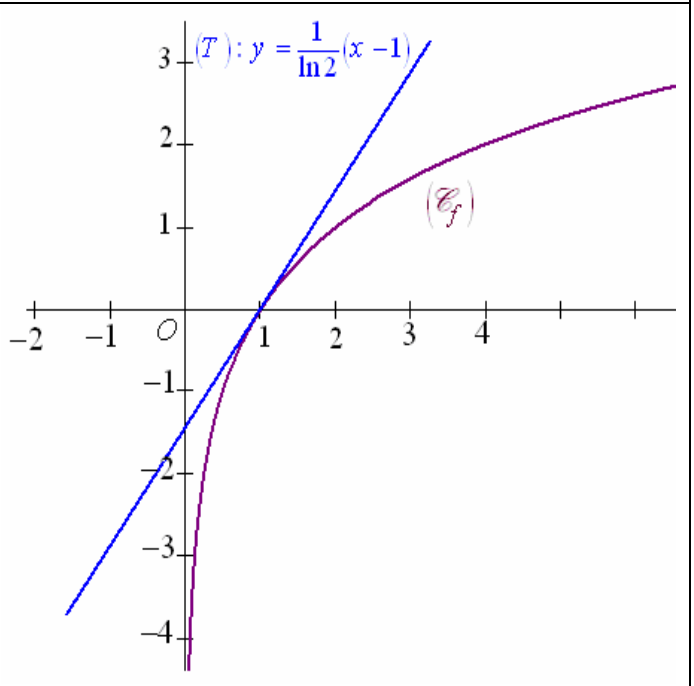
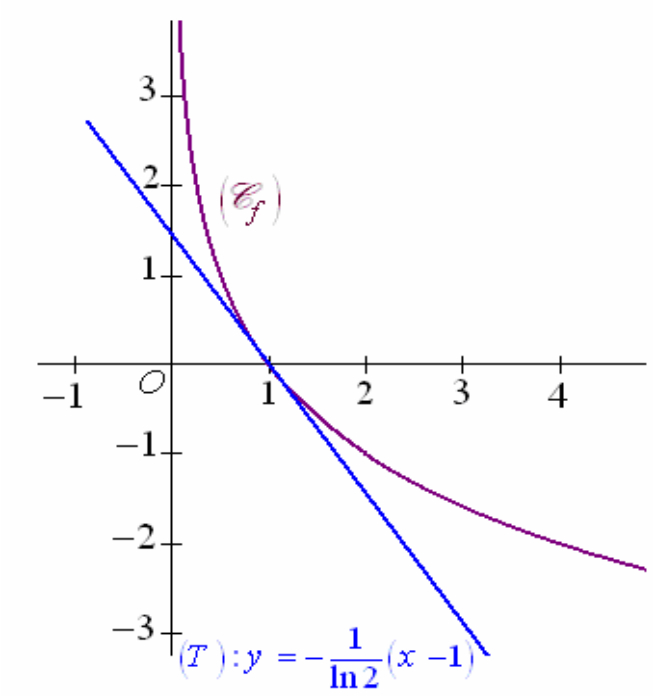
ب- النهايات : نعلم أن : $\log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$: $\forall x\in]0,+\infty[$. إذن :

- ✓ إذا كان $a>1$ ؛ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a(x)=-\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty}$.
- ✓ إذاكان $0<a<1$ ؛ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a(x)=+\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a(x)=-\infty}$.

جـ- جدول التغيرات : لدينا : $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[\ :\ \log_a{}'(x)=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}}$

أ- حالة $a>1$:	**ب- حالة $0<a<1$:**
لدينا $\log_a$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$	لدينا $\log_a$ تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$
	

د- إنشاء $\left(\mathscr{C}_{\log_a}\right)$:

حالة $a>1$ ، مثلا : $(a=2)$	**حالة $0<a<1$ ، مثلا :** $\left(a=\dfrac{1}{4}\right)$
	

V- دالة اللوغاريتم العشري : Logarithme décimal :

1- تعريف :

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة **اللوغاريتم العشري** ونرمز لها بالرمز $\log$ (عوض $\log_{10}$) . ولدينا :

$$\log :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

2- ملاحظة :

$$\log 1=0 \quad ; \quad \log 10=1 \qquad (a$$
$$\forall r\in\mathbb{Q} \quad ; \quad \log\left(10^r\right)=r\log 10 \qquad (b$$
$$\forall (x,y)\in\left(]0,+\infty[\right)^2 \quad ; \quad \log x=\log y \Leftrightarrow x=y \qquad (c$$

3- مثال :

1. أحسب : $A=\log\left(\sqrt[3]{100}\right)$ و $B=\log(0,0001)$ و $C=\log(10000)$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $10^{-x}=3$ ثم أعط قيمة مقربة للحل مستعملا المحسبة .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث : $f(x)=x+\frac{3}{x}+2\ln\left(|x|\right)$

1. أ- حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
   ب- أحسب نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.
2. أ- أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathscr{D}_f$.
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .
3. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
   ب- أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
   جـ- أعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة I ذات الأفصول 3 .
   د- أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مبرزا نقطه التي أفاصيلها هي 3 و 2- و 4- .

بالتوفيق إنشاء الله



تم نشر هذا الملف بواسطة قرص تجربتي مع الباكالوريا

tajribatybac@gmail.com

facebook.com/tajribaty

jijel.tk/bac