بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة سالاّ ودان المفتوحة

برنامج التربية

مبادئ الإحصاء والاحتمالات

تأليف : بروفيسور عبد العزيز محمد احمد تنقساوى

تصميم تعليمي: أ. محمد حسن الزبير

مراجعة تصميم : أ. منال محمد بشير التنقاري

تنضيد طباعي : ميادة محمد احمد سيداحمد

التصميم الفني : محمد فتح الرحمن محجوب

أشكال توضيحية : م حسن عبدالعزيز محمد تنقساوي

منشورات جامعة السودان المفتوحة الطبعة الأولي 2005م

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج أيّ جزء من هذا الكتابوبأيّ وجه من الوجوه، إلاّ بعد الموافقة المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستعين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين أما بعد

نقدم لك **عزيزي الدارس،** هذا المقرر تحت أسم مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومما لاشك فيه أنك تدرك أن علم الإحصاء أصبح من أهم العلوم المعاصرة. ومما يجدر ذكره هو أن مفاهيم الاحتمالات كانت معروفة منذ آلاف السنين وقد كانت مقرونة بلعب الحظ إلا أن نظرية الاحتمالات لم تصنف كفرع من فروع الرياضيات حتى القرن السابع عشر.

في عام 1494م أصدر لوكا باسيولي Fraluca Paccioli أول عمل مطبوع في الاحتمالات وفي عام 1500م أصدر كاردانو (Cardano) كتاباً في لعب الحظ وفي أواسط القرن السابع عشر كان الغامر دي مير (Chevalie dere) يراهن على الحصول على ستة واحدة على الأقل فى 4 رميات لزهر النرد ثم غير رهانه إلى الحصول على مجموع 12 في رمي زهرتين 24 مرة لكنه لاحظ أن فرصة الربح كانت أقل لذلك خاطب صديقه باسكال (Blais Pascal) مستفسراً عن السبب وعلى ضوء ذلك خاطب باسكال صديقه فيرمات (Fermat) بشأن الخيارين وتعتبر هذه المخاطبة بداية نظرية الاحتمالات.

منذ ذلك التاريخ دخل علم الاحتمالات مجالات متعددة مثل التأمين وضبط الجودة ودراسة الجينات ومكيانيكا الكم الخ.....

كما أصبح أساساً يعتمد عليه علم الإحصاء وفي الوقت الحاضر لا يخلو أي مجال (بسيطاً أو معتمداً) من الاعتماد على علم الإحصاء والاحتمالات.

وقد قدمنا في بداية المقرر تعريفاً وافياً لعلم الإحصاء مع شرح الكثير من مفاهيمه وتعريفاته ومقاييسه كما وضحنا فكرة الاحتمالات مع بعض النظريات وبعض التوزيعات الاحتمالية وتطبيقات عليها.

ونحن إذ نقدم لك عزيزي الدارس هذا المقرر كلنا ثقة في أنه سيلبي رغباتك وميولك كما نرحب أيضاً بانتقاداتك ووجهات نظرك لذا نجمل لك الأهداف العامة لهذا المقرر كما يلي.

الأهداف العامة للمقرر



عزيزي الدراس بعد فراغك من هذا المقرر نأمل أن تكون قادراً على أن

ترتب البيانات الإحصائية كمفردات أو جداول تكرارية.

تعرض البيانات الإحصائية في شكل رسومات بيانية.

تجد المقاييس الإحصائية من متوسطات ومقاييس للتشتت.

تحسب التغاير ومعامل الارتباط الخطي.

تحسب الاحتمالات للإحداث المختلفة.

تعرف بعض التوزيعات الاحتمالية وتحسب بعض مقاييسها ودوالها.

لذا عزيزي الدارس فقد جعلنا هذا المقرر في أربع وحدات تناولنا في الوحدة الأولى بعض التعاريف والمفاهيم الإحصائية وشرحنا كيفية تلخيص وعرض البيانات وفي الوحدة الثانية تعرضنا لبعض المقاييس الإحصائية ووضحنا أيضاً معنى الارتباط وكيف نحسب معامله.

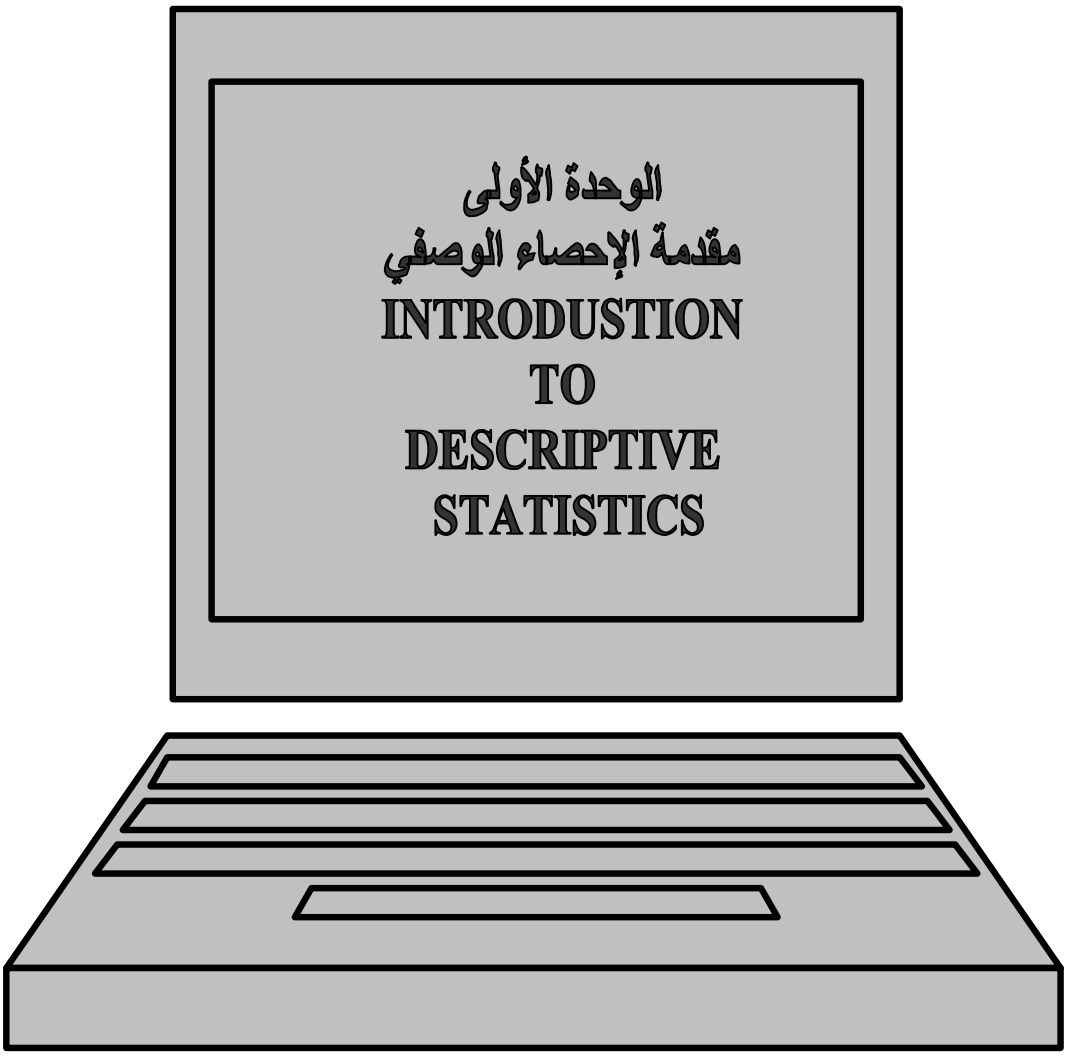
أما الوحدة الثالثة فقد تحدثنا فيها عن التجربة العشوائية وكيف نحسب احتمالات الإحداث بأنواعها المختلف كما وضحنا قانون بيز و شجرة الاحتمالات.

أما الوحدة الرابعة فقد تناولنا بعض التوزيعات النمطية وكيفية حساب المنوال والوسيط لهذه التوزيعات ووضحنا مع الالتواء والتفلطح.

وعليه فقد كانت عناوين الوحدة الواردة في هذا المقرر كما يلي:

محتويات المقرر

	اسم الوحدة	الصفحة
1	مبادئ الإحصاء والوصف	1
2	مقاييس إحصائية	41
3	مقدمة الاحتمالات والإحصاء	75
4	المتغير العشوائي	127


الوحدة الأولى
مقدمة الإحصاء الوصفي
INTRODUSTION
TO
DESCRIPTIVE
STATISTICS

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	4
تمهيد	4
اهداف الوحدة	4
1. المتغيرات الإحصائية وأنواعها	5
1.1 متغيرات تصنف حسب دقتها	5
1.2 متغيرات تصنف حسب نوع القيم التي تأخذها	6
2. علم الإحصاء	7
1.2ترتيب البيانات	7
2.2 العرض ألجدولي	8
3. الجداول (تلخيص البيانات)	10
1.3 الجداول التكرارية	10
2.3 الجداول التكرارية ذات الفئات	11
3.3 الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والهابطة)	13
4.3 الجداول التكرارية النسبية	14
4. الرسم البياني	17
1.4 المضلع التكراري	18
2.4 منحني التكرار ي	19
3.4 المدرج التكراري	20
4.4 الاعمدة البيانية	20
5.4 التمثيل الدائري	24

الموضوع	الصفحة
6.4 التمثيل بالرسوم	29
الخلاصة	30
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	30
إجابات التدريبات	31
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	34
مسرد المصطلحات	38
المراجع	40

المقدمة

تمهيد

نرحب بك عزيزي الدارس في هذه الوحدة الأولى من مقرر مبادئ الاحصاء والاحتمالات حيث اشتملت هذه الوحدة على تعريف المتغيرات الإحصائية وأنواعها كما تضمنت هذه الوحدة تعريفاً وافياً لعلم الإحصاء وكذلك وضحنا في هذه الوحدة كيفية ترتيب البيانات الإحصائية وكيفية عرضها وتقديمها في شكل جداول تكرارية أو رسومات بيانية.

نرحب بك مرة أخرى عزيزي الدارس في هذه الوحدة وكلنا أمل في أن تكون موضوعاتها شيقة وممتعة ومفيدة لك كما نرحب أيضاً بارأئك ونقدك البناء.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد انتهائك من دراسة هذه الوحدة نأمل أن تكون قادراً على أن

تعرف المتغير وغيره من المصطلحات الإحصائية.

تفرق بين أنواع المتغير.

تلخص المعلومات العددية الكثيرة في جداول تكرارية.

تعرض المعلومات الإحصائية في شكل رسوم بيانية.

تنشئ جداول تكرارية متجمعة صاعدة أو نازلة(هابطة).

1. المتغيرات الإحصائية وأنواعها

عزيزي الدارس نعرف من دراستنا للرياضيات مفهوم المتغير (variable) ويهمنا هنا أن نعرف أن المتغيرات تصنف إلى أنواع من وجهات نظر مختلفة.

1.1 متغيرات تصنف حسب دقتها وهي أربعة أنواع

(أ) المتغير التصنيفي Nominal or Classification Variable :

هو مجرد مجموعة رموز تشير إلى أصناف مختلفة. فمثلاً يمكن أن يكون المتغير هو نوع الغزل الذي يصنع منه القماش : قطن ، حرير، تيريلين، بوليستر، ... الخ. في هذه الحالة يمكن الرمز لهذه الأنواع بأي رموز مثل ً ق، ح، ت، ب،.. أو D,C,B,A.. أو $\otimes,\Delta,\circ,*$. كما يمكن أن يرمز لها بأعداد 1، 2، 3، 4، ... . ويلاحظ أنه في حالة الرمز لها بالأعداد، أن العمليات الحسابية المعروفة $(+,-,\times,\div)$ غير معرفة عليها بمعنى أنه ليس من الممكن مثلاً أن تجمع 1+2 للحصول على 3 (قطن + حرير = تيريلين). ونحن نعرف أننا كثير ً ا ما ر مزنا لأولى بالرقم 1 و لثانية بالرقم 2 ، الخ.

(ب) المتغير ألترتيبي Ordinal variable

هو أعلى درجةً من سابقه من حيث الدقة. و هو يعطى فكرة عن ترتيب القيم حسب مبدأ معين. فيمكن مثلاً أن نرمز للطالب الأول فى الفصل بالعدد 1، وللثاني بالعدد 2 وهكذا. أيضاً نلاحظ أن مثل هذه الأعداد ترى فقط أي المفردات تأتي قبل الأخرى ولكن لا يعرف بأي قدر. فإذا رمزنا للأول بالعدد 1 وللثاني بالعدد 2 فلا يمكن أن نستنتج بأي قدر يفوق الأول الثاني. وفى هذا النوع من المتغيرات نجد أيضا أن العمليات الحسابية الأربع غير معرفة، فلا يمكن أن تجمع الأول (1) إلى الثاني (2) ليعطينا الثالث (3). وبالمثل بالنسبة للعمليات الأخرى.

(ج) المتغير الفترتي Interval variable

وهو يحمل قيماً عددية تعرف عليها عمليتا الجمع والطرح وليس الضرب أو القسمة. هذا النوع من المتغيرات ليس فيه صفرمطلقاً إنما صفر اعتباطي ً (اختياري) ، فمثلاً درجة الحرارة: درجة الصفر لا تعنى أنه لا توجد حرارة، إنما الصفر اختياري اتفق عليهفاق ً ا، وليس حقيقي ً ا.

فالصفر المئوي اتفق على أن يكون درجة الماء عند التحول إلى الثلج، فهو يعادل الدرجة 32 فهرنهايت ويعادل الدرجة 273 كيلفن في الكيمياء.

$$0^o \ C \equiv 32^o \ F \equiv 273^o \ K$$

أيضاً الطالب الذي يحصل على صفر في مادة ما لا يعنى أنه لا يعرف شيئاً في هذه المادة. لكن يمكن أن يقال : إذا كانت درجة حرارة غرفة $20^0 C$ ثم زادت درجة حرارتها $10^0 C$ فتصبح درجة حرارتها $30^0 C$ (بالجمع). كما يمكن القول بأنها كانت ابرد من غرفة ثانية بعشرين درجة إذا كانت درجة الأخيرة $40^0 C$ (بالطرح.) لكن لا يمكن أن نقول أن الحرارة في الثانية ضعف الحرارة في الأولى لأن القسمة غير معرفة عليها.

(د) المتغير النسبي Ratio variable

هو أحسن هذه المتغيرات، فيه الصفر مطلق وهو يعنى عدم وجود الشيء، وتُعَرَّف عليه العمليات الحسابية الأربع. أمثلة لهذا النوع : المبلغ بالدينار الذي في الجيب ، كمية الأمطار التي هطلت صباح السبت في مكان معين، طول قطعة القماش التي على المنضدة الخ.

2.1 متغيرات تصنف حسب نوع القيم التي تأخذها (وهي نوعان)

(أ) متغير متقطع Continuous Variable

وهو المتغير الذي تكون قيمه منفصلة عن بعضها البعض مثل عدد الكراسي في الغرفة هو أما صفر أو 1 أو 2 أو 3... الخ من الأعداد الصحيحة أو إلى أي تصنيف اعتباطي $X=1, 2, 3\ldots$ وهي تشمل النوعين الأولين أعلاه (أ-ب من المتغيرات التي صنفت حسب دقتها)

(ب) المتغير المستمر Discrete Variable

وهو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة في فترة معينة مثل الطول والوزن والعمر اذ انه ليس من الضروري أن تكون الإعداد صحيحة.

2.علم الإحصاء Subject of Statistics

علم الإحصاء فرع من العلوم يعني بمعالجة الخواص العددية للمجموعات، تلك الخواص التي يمكن الحصول عليها بالعد أو القياس. المجموعة التي تهمنا دراستها في أي وقت تسمي المجتمع (population) ويقصد بالمجتمع هنا أي مجموعة سواء كانت من البشر أو الحيوانات أو النباتات أو الجمادات أو أي خليط منها. وبالمعالجة العددية للمجموعات يقصد جمع البيانات، عرضها وتحليلها واستخلاص الحقائق عن المجتمع الذي جمعت منه. إذا كانت الخواص غير عددية أو لا يمكن قياسها فيتطلب منا ذلك ربطها بالأعداد بوسيلة ما حتى يمكن معالجتها إحصائياً .

في علم الإحصاء المعالجات المقصودة بالنسبة للخواص تنقسم إلي قسمين رئيسين:

(أ) وصفي

وهو القسم الذي تكون لدينا فيه المعلومة الكاملة عن كل مفردات المجتمع (و هو ما يهمنا في هذا الكتاب).

(ب) استدلالي

وهو القسم الذي تكون لدينا فيه مجموعة جزئية فقط من المجتمع تسمى عينة(sample) وبدراسة هذه العينة نحصل (نستدل) على معلومة تقريبية عن كل المجتمع.

وصف المجتمعات يتم إما بترتيب البيانات أو تلخيصها في جداول أو بيانها بالرسوم البيانية أو بحساب بعض المقاييس التي تصف المجتمع.

1.2 ترتيب البيانات Ordering

واحدة من طرق تبسيط البيانات الإحصائية هي ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً . فمثلاً إذا كانت لدينا المفردات

47 ، 52 ، 24 ، 45 ، 35 ، 82 ، 14 ، 63، 14، 25 ، 35 ، 60 ،20 ، 24، 70.

فبمكن ترتيبها كالآتي

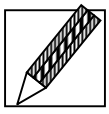
14 ،14 ، 20 ، 24، 24 ، 25 ، 35 ، 35 ،47 ، 52 ، 60 ، 20 ، 24، 70 ، 82 .

بالطبع نلاحظ أن فهم مضمون هذه البيانات بعد ترتيبها أسهل منة قبل الترتيب.

2.2 العرض الجدولي Tabular Representation

عندما يكون عدد مفردات المجتمع صغيراً فإن ترتيب عناصره يُمكِّن من فهمه؛ لكن كلما زاد عدد المفردات كلما صارت إمكانية فهم المجتمع أصعب وأصعب. فإذا كان عدد المفردات مائة، فقد يحتاج المرء لقراءة الأعداد مرات حتى يتمكن من تكوين فكرة عنها: أصغر وأكبر مفردة، هل تأتي القيم المختلفة بأعداد متساوية؟ أم أن هناك ثقلا في القيم الكبرى أو الصغرى أو الوسيطة.لكن إذا كان عدد المفردات بالمئات أو الآلاف فيكون ذلك مستحيلاً . مثلاً إذا أُعطينا درجات طلاب الشهادة السودانية للعام 2004 حسب ترتيب ورودها في قوائم النتائج، فلن يتمكن المرء من فهم شكل النتيجة، علماً بأنها تتكون من 101 قيمة مختلفة فقط.

تدريب (1)



الجدول في صفحة(8) يعطي أوزان 300 رجل. انظر إليها جيداً هل يمكنك وصف المجموعةكلها؟ رتب هذه الأوزان تصاعدياً هل يمكنك الآن إعطاء وصف لها؟

78	78	43	83	70	90	66	95	52	90	83	70	83	66	99
83	90	95	99	70	78	83	66	83	95	83	95	52	70	66
78	52	66	95	83	78	66	66	70	90	83	78	99	78	70
78	83	66	99	83	78	70	90	78	70	90	78	70	83	90
83	95	70	66	78	70	83	95	90	70	83	83	66	78	83
83	66	95	90	70	78	90	95	70	70	78	90	52	83	90
99	78	70	90	83	66	95	70	84	43	66	83	90	95	78
52	78	70	90	90	95	33	78	83	78	83	95	66	78	70
52	83	95	78	95	66	78	70	78	70	66	83	90	70	78
78	90	70	90	83	95	70	66	78	78	83	66	99	90	70
83	95	78	78	70	43	70	70	83	66	78	83	90	52	78
78	83	70	83	78	90	70	66	78	70	66	78	99	78	70
83	78	70	90	70	78	83	90	78	66	95	52	78	83	83
83	78	52	78	83	70	83	90	78	83	70	90	78	83	90
78	90	66	43	52	70	78	90	70	78	83	66	95	83	78
78	95	78	83	70	99	66	78	70	66	90	83	78	66	52
83	78	70	52	78	52	78	70	66	83	90	70	83	78	95
70	90	78	70	66	90	78	66	95	78	78	66	78	90	95
83	78	95	78	78	66	78	99	43	95	70	52	90	78	70
90	70	78	66	95	70	66	78	52	90	78	52	78	90	70

جدول (1)

جدول يبين أوزان 300 رجل (كجم)

3. الجداول (تلخيص البيانات)

عزيزي الدارس أن المعلومات أو البيانات الإحصائية يمكن أن تعرض بصورة أفضل من الترتيب وذلك بان تلخص في شكل جداول بأي من الإشكال آلاتية:

1.3 الجداول التكرارية Frequency Tables

عندما يكون عدد المفردات كبيراً فإن كثيراً منها تكون متساوية أو متقاربة، ولذلك فبدلاً من أن تكتب قيم المفردات حسب الترتيب الذي جاءت به، فإننا نكتب القيم المختلفة منها فقط وأمام كل منها نبين عدد المرات التي ظهرت فيها. عدد مرات ظهور القيمة يسمي تكرارها(frequency). بذلك نبين البيانات في جدول من عمودين: العمود الأول يشمل القيم المختلفة مرتبة ويشتمل الثاني التكرارات المقابلة للقيم.مثل هذا الجدول يسمي جدولاً تكرارياً (frequency table) لتكوين الجدول التكراري تتبع الخطوات الآتية:

ننشئ عموداً نبين فيه كل القيم المختلفة بالترتيب.

تقرأ الأعداد الواحد تلو الآخر حسب ورودها، وكلما قرأنا عدداً نرسم أمامه في عمود ثان خطاً صغيراً (|).

لتسهيل العملية الحسابية، كلما أكملنا أربعة خطوط نرسم الخامس متعارضاً معها. هذه الخطوط تسمي علامات التالي (Talley marks.)

عند الانتهاء من جميع الأعداد نعد عدد الخطوط أمام كل قيمة لنحصل علي تكرارها.

مثال (1)

أنشئ جدولاً تكرارياً للجدول السابق (صفحة8) الذي يبين أوزان 300رجل مقرباً الأوزان لأقرب7 كجم

الحل:

بمراجعة الأوزان نجد أن القيم المختلفة هي:

43، 50، 57 ، 64 ، 71 ،78 ، 85 ،92 ، 99. نبين هذه الأعداد في العمود الأول. بعد ذلك نمر علي القيم ونرسم علامات التالي كما في العمود الثاني.أخيراً نعد العلامات أمام كل

قيمة لنحدد التكرارات كما في العمود الثالث. العمودان الأول والثالث يشكلان الجدول التكراري للمجموعة.

العدد	العلامـــات	التكرار
43	𝍸	5
50	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
57	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	34
64	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	50
71	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

➢ مثال(2)

الجدول الآتي يبين توزيع نتائج 125 طالباً في امتحان ما، مصنفة إلي 6 فئات:

الفئة	9−0	10−	20−	30−	40−	59−50	المجموع
التكرار	5	14	36	36	25	7	125

جدول(3)

جدول يبين نتيجة 125 طالباً في أحد الامتحانات من 60

تلاحظ عزيزي الدارس أنه:

1. عبرنا عن الفئة الأولي بتحديد أدني وأعلي درجة فيها بينما في الفئات الأربع التالية لها ذكرنا فقط أدني درجة فيها. يفهم من ذلك أن جميع الفئات تكون علي نفس الشكل: 10−19، 20−29.. وهكذا. الفئات التي تبين فيها أدني واعلي قيمة تسمي مغلقة (closed)، وهي تستخدم عادة عندما يكون المتغير متقطعاً .أما إذا كان المتغير مستمراً فعادة تبين أدني قيمة في كل فئة دون ذكر أعلاها، مثلاً 60 −، 65 −، 70−. وهذا يعني أن الفئة (60−) تمثل جميع القيم X حيث $60 \le x < 65$. مثل هذه الفئات تسمي مفتوحة من أعلي(Open from above) ومغلقة من أدني. بمكن اختيار الفئات بحيث تكون مفتوحة من أدني ومغلقة من أعلي، مثلا (− 70).

2. في الجدول أعلاه تسمي القيم 5، 9 ، 10 ، ...، 59علامات الفئات (class marks) .

3. إذا كان المتغير مستمراً واستخدم شكل الفئات هذا، فذلك يعني أننا قربنا القيم إلي أقرب واحد صحيح. في هذه الحالة تكون النقاط الفاصلة بين الفئات هي .9.5, 19.5, ...هذه الأعداد تسمي حدود الفئات (class Limits) .

4.يستحسن أن تكون جميع الفئات متساوية الطول، لكن في بعض الأحيان تقابلنا (أو نلجأ إلي) فئات متباينة الطول، خاصة بالنسبة للفئتين الأولي والأخيرة. مثلاً إذا أردنا بيان دخول أفراد مجتمع عادة ما تكون الفئة الأخيرة مفتوحة من أعلى مثل(500, 00 -) ذلك لقلة الأفراد الذين لهم مثل هذه الدخول وتفرقهم في مجال الدخل.

5. في حالة الفئات المفتوحة من جهة فإن حدود الفئات تساوي علاماتها.

3.3 جداول التكرارات المتجمعة (الصاعدة والهابطة)
Cumulative frequencies

في بعض الأحيان نحتاج لبيان الأعداد التي تقل عن أو تساوي العلامات العليا للفئات.فننشئ صفاً في الجدول نبين في خليته الأولي تكرار الفئة الأولي وفي الخلية الثانية نبين مجموع تكراري الفئتين الأولى و الثانية، و في الثالثة مجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولي وهكذا. بالطبع تحتوي الخلية الأخيرة علي المجموع الكلي. هذه التكرارات تسمي التكرارات المتجمعة الصاعدة(increasing cumulative frequencies). بالمثل يمكن أن kبدأ من الخلية المقابلة للفئة الأخيرة ونتجه نحو الأولي لنحصل علي التكرارات المتجمعة الهابطة. Decreasing) cumulative frequencies)

➢مثال(3)

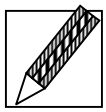
أنشئ جدولا تكراريا متجمعا صاعداً وآخر هابطاً لنتائج أل 125 طالباً المعطاة في مثال(2) المبين صفحة (10).

الفئة	0−9	10−	20−	30−	40−	50−59	المجموع
التكرار	5	14	38	36	25	7	125
التكرار المتجمع الصاعد	5	19	57	93	118	125	–
التكرار المتجمع الهابط	125	120	106	68	32	7	–

جدول (4)

جدول تكراري متجمع لنتائج 125طالباً

تدريب (2)



ما هو الفرق بين الفئة المفتوحة من أدني و الفئة المغلقة ؟

4.3جداول التكرارات النسبية Relative frequencies

أحياناً نحتاج لننسب التكرارات المطلقة أو المتجمعة إلي العدد الكلي، فنحصل عليها بقسمة كل تكرار علي المجموع. بالتالي تكون النواتج كلها بين الصفر والواحد الصحيح. مثل هذه البيانات تسمي تكرارات نسبية (relative frequencies).تستخدم هذه التكرارات النسبية مثلاً عندما يراد اختبار أحسن نسبة محددة من مجموعة كبيرة، مثل ما يحصل بالنسبة للجان التعيين أو القبول للجامعات. كما تستخدم التكرارات النسبية إذا كانت الرغبة في مقارنة توزيع مجموعتين أو أكثر عندما يكون أعدادها متفاوتة.

مثال (4)

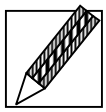
أنشئ جدولا تكراريا نسبيا متجمعا صاعدا و آخر هابطا لنتائج أل 125 طالباً في مثال (2) المبين في صفحة (10).

الفئة	9−0	10−	20−	30−	40−	50− 59	مجموع
التكرار النسبي	0.040	0.112	0.34	0.288	0.200	0.056	1.000
التكرار المتجمع النسبي الصاعد	0,040	0.152	0.456	0.744	0.944	1.002	–
التكرار المتجمع النسبي الهابط	1.000	0.960	0.342	0.544	0.256	0.056	–

جدول (5)

الجدول التكراري النسبي و النسبي المتجمع لنتيجة 125طالباً

تدريب (3)



1- ما المقصود بالجدول التكراري المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط.

2- أذكر مثالاً لاستخدام كل منهما.

➢ مثال (5)

الجدول الآتي يبين أطوال مجموعتين من الرجال بالسنتيمترات، الأولى من 120 رجلا و الثانية من 300. قارن بين توزيعي المجموعتين.

الطول	120-	130-	140-	150-	160-	170-	180-	190-	مجموع
تكرارات الأولى	2	5	18	24	35	25	10	1	120
تكرارات الثانية	18	30	48	67	50	47	30	10	300

جدول ل (6)

جدول يبين أطوال مجموعتين من الرجال (سم)

الحل:

ننشئ أولا جدول التكرارات النسبية.

الطول	120-	130-	140-	150-	160-	170-	180-	190-	مجموع
التكرار النسبي للأولى	0.017	0.042	0.150	0.200	0.292	0.208	0.083	0.008	1.000
التكرار النسبي للثانية	0.060	0.100	0.160	0.223	0.167	0.157	0.100	0.033	1.000

جدول (7)

الجدول التكراري النسبي لأطوال مجموعتين من الرجال (سم)

من التكرارات النسبية يمكن استنتاج أن المجموعة الأولي تميل إلى الطول والمجموعة الثانية إلي القصر النسبي، ذلك لأن التكرارات النسبية للثانية أعلي في النصف الأول من الجدول وأصغر في النصف الثاني. (لاحظ أنة من الصعوبة بمكان الوصول لمثل هذه المقارنة من التكرارات المطلقة.

ملاحظة

لعلك قد لاحظت عزيزي الدارس أن الجدول التكراري في المثال أوزان ال 300 رجل يعطي المعلومة كاملة (بدون تقريب) أما في الجداول التكرارية ذات الفئات فإن المعلومة تكون ناقصة، فمثلاً في جدول (مثال 1 ومثال 2) نعرف أن خمسة طلاب حصلوا علي درجات من صفر إلي تسعة لكن لا نعرف نتيجة كل منهم بالضبط. نخلص من ذلك أن الجداول ذات الفئات فيها تبسيط للمعلومة لكن علي حساب الدقة. وفي الواقع كلما كانت الفئات كبيرة كل ما كان التبسيط أكثر وكذلك عدم الدقة، وبالعكس. من التجارب وجد أنة من المستحسن أن يكون عدد الفئات بين العشرة والعشرين.

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1.أنشئ جدولا تكراريا متجمعا هابطا لأوزان أل 300 رجل المبين في تدريب (1).

2. الإحصائيات الآتية تبين أعداد الخراف عند مائة راع من ولاية شمال كرد فان.

أ. أنشئ جدولاً تكرارياً من 6 فئات لهذه المجموعة.

ب.كون منه جدولاً تكرارياً نسبياً .

ج.أنشئ جدولاً تكرارياً نسبياً متجمعاً صاعداً.

1.جدول يبين أعداد الخراف عند 100 راع من ولاية كرد فان

105	102	33	62	73	107	55	17	42	25
87	65	20	58	111	116	93	78	20	48
60	122	51	38	54	105	99	48	76	23
100	47	29	89	66	76	124	80	62	44
42	48	87	100	20	110	117	90	73	41

55	121	77	53	82	18	56	77	102	33
83	40	58	75	122	81	63	106	37	40
40	73	46	105	81	27	100	54	82	61
60	97	31	77	79	67	86	85	103	88
100	72	67	90	87	101	67	55	40	63

3. إلى كم قسم تنقم المتغيرات من حيث الدقة؟ وماهي هذه الأقسام؟

4.أنشئ جدولاً تكراريا متجمعا لأوزان ثلاثمائة الرجال في تدريب (1)، و بين منه التكرار النسبي المتجمع، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) كم نسبة الذين تقل أوزانهم عن 75 كجم ؟

ب) كم نسبة الذين تقع أوزانهم بين 68 و 85 كجم ؟

ج) كم نسبة الذين تزيد أوزانهم عن 75 كجم ؟

4. الرسم البياني Graphs (التمثيل البياني)

الطريقة الثانية لوصف المجتمعات هي إعطاء المعلومة في شكل رسم بياني (graph). هنالك أنواع مختلفة من الرسوم البيانية، كل منها يناسب أنواعاً معينة من البيانات دون الأخرى اعتماداً علي نوع المتغير المستخدم والهدف من المعلومة التي يراد إيصالها. فبالنسبة للمتغير هل هو متصل أم متقطع، متغير واحد أو أكثر، وبالنسبة للمعلومة هل هي مطلقة أم مقارنة، الخ. في ما يلي أنواع الرسوم البيانية.

1.4 المضلع التكراري Frequency polygon

عندما يكون لدينا جدول تكراري ونريد إبراز المعلومات فيه بيانياً فإننا نبين قيم المتغير في المحور الأفقي والتكرارات علي المحور العمودي. لعمل المضلع التكراري نحدد نقاطا علي المستوي (قيمة المتغير، تكراره) ثم نوصل هذه النقاط بخطوط مستقيمة. إذا كان الجدول التكراري ذا فئات فإن قيم المتغير هي مراكز الفئات (class midpoints):

مركز الفئة = متوسط حدي الفئة.

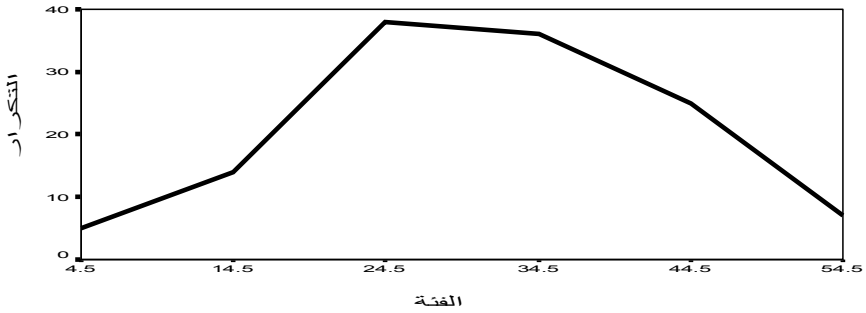
في العادة نضيف فئتين، الأولى قبيل بداية الجدول والثانية بعده مباشرة. ويكون تكراراهما صغريين، ثم نكمل رسم الخطوط المستقيمة لنحصل علي شكل مغلق.

هذا النوع يصلح فقط للمتغيرات المستمرة كما يصلح لأكثر من متغير في شكل واحد من أجل المقارنة.

مثال (6)

ارسم مضلعا تكراريا من جدول نتائج أل 125 طالبا مثال (2) صفحة (12).

الحل:

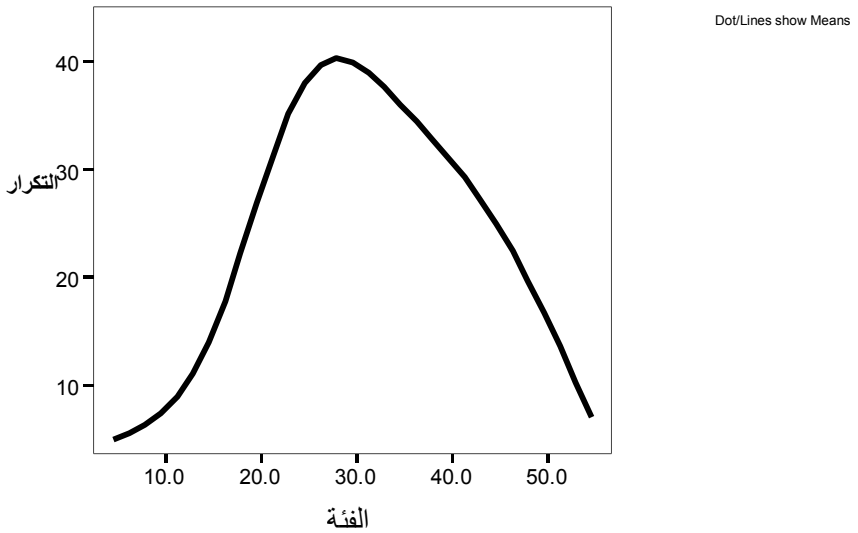


شكل (1)

مضلع تكراري لنتائج 125 طالبا

2.4 المنحني التكراري Frequency Curve

وهو شبيه بالمضلع التكراري إلا أن النقاط توصل بمنحنى ناعم. الشكل أدناه يبين المنحني التكراري لنتائج أل 125 طالباً

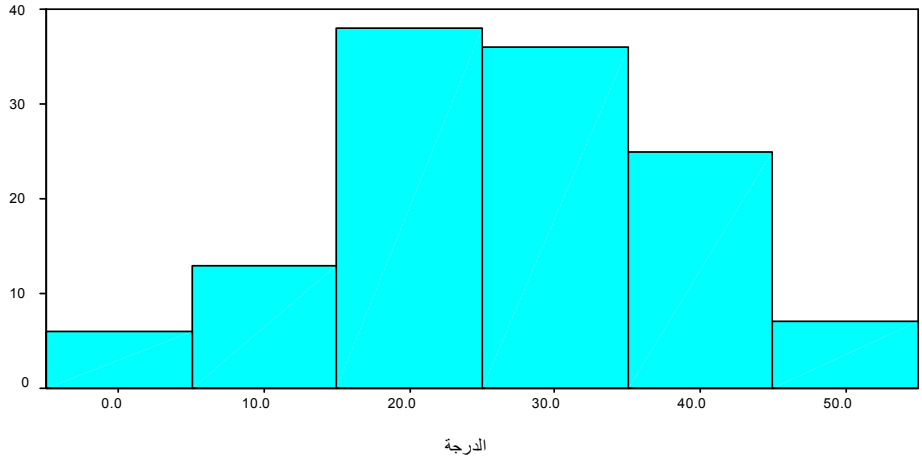


شكل (2)

شكل منحنى تكراري لنتائج 125 طالبا

3.4 المدرج التكراري Histogram

يستخدم المدرج التكراري للمغيرات المستمرة عندما تكون البيانات في شكل جدول تكراري ذي فئات تبين أولاً مساحته مع تكرار مع تكرار الفئة. إذا كانت الفئات متساوية فإن أطوال المستطيلات تناسب مع مساحتها وبالتالي مع التكرارات.



شكل (3)

شكل يبين المدرج التكراري لنتائج ال125 طالبا

ملاحظة

هذه الأنواع الثلاثة تصلح أيضاً لبيان التكرارات المتجمعة.

4.4 الأعمدة البيانية Bar diagrams

كما قلنا عزيزي الدارس فإن الرسوم البيانية السابقة تصلح فقط للمتغيرات المستمرة (أو المتقطعة التي تكون فيها الفروق بين القيم المتتالية صغيرة جداً – أي في حكم المستمرة)، لكنها لا تصلح للمتغيرات المتقطعة.

فمثلاً إذا أردنا بيان أعداد السكان في الولايات فإننا نبين هذه الولايات علي المحور الأفقي و نبين أعداد السكان بأعمدة تتناسب في أطوالها مع هذه الأعداد. العمود إما أن يكون خطا مستقيماً أو مستطيلاً صغير العرض. وفي الحالة الأخيرة فإن الطول هو المهم ولا معني للمساحة. يمكن أيضاً أن بيان الولايات في المحور العمودي وتكون(الأعمدة) أفقية.

هذا النوع يصلح فقط للمتغيرات المتقطعة.

➢ **مثال (7)**

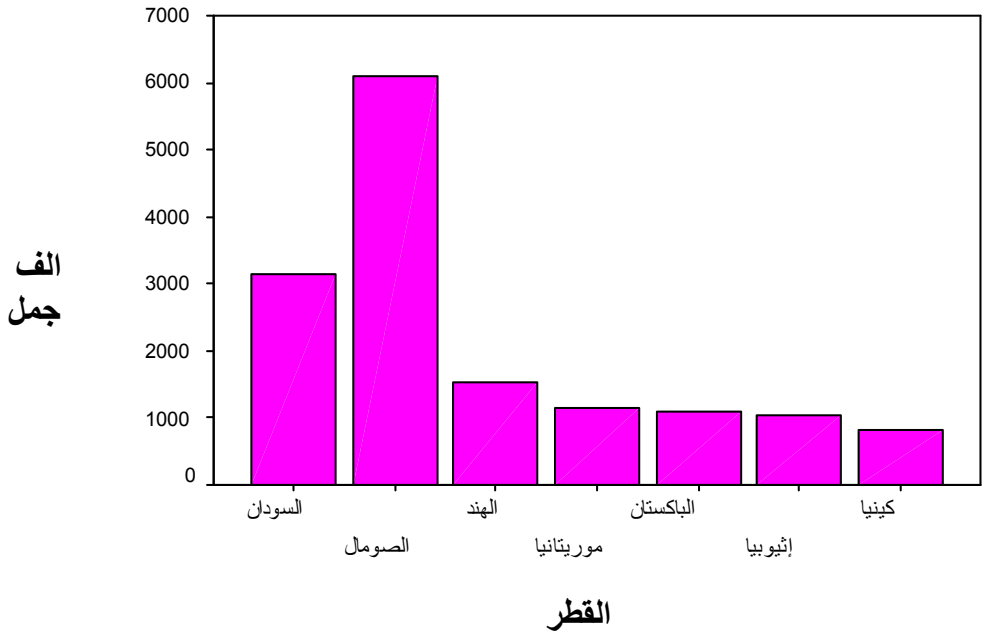
الجدول أدناه يبين أعداد الجمال (بالآلف) في بعض الدول(1939). مثل هذه البيانات بالأعمدة.

الدولة	السودان	الصومال	الهند	موريتانيا	الباكستان	إثيوبيا	كينيا
عدد	3150	6100	1520	1183	1100	1030	820

المصدر: منظمة الغذاء و الزراعة، الأمم المتحدة 1996 م.

جدول (7)

جدول يبين أعداد الجمال في سبع دول (1993)



شكل (4)

شكل يوضح أعداد الجمال في سبع دول

يمكن استخدام البيان بالأعمدة لمقارنة تكرارات عدة مجموعات مجزأة إلي نفس الأقسام. هنالك أسلوبان لهذا الغرض:

الأول: الأعمدة المتجمعة (clustered bars) ننشئ عمودا لكل قسم ونضع أقسام كل مجموعة متجاورة.

الثاني: الأعمدة المركبة (stacked bars): لكل مجموعة ننشئ عموداً واحداً يمثل مجموع تكرارات الأقسام، ويقسم العمود إلي أجزاء حسب الأقسام. الخيار بين الاثنين يعتمد علي نوع المعلومة المراد إيصالها ونوع المتغير. ففي الأول يمكن مقارنة الأقسام داخل للمجموعة الواحدة، كما يمكن مقارنة قسم واحد في كل المجموعات.لكن لا يمكن مقارنة المجموعات ككل. هذا النوع لا يشترط أن تكون الأقسام مقادير من نفس النوع. في الثاني يمكن مقارنة الأقسام داخل المجموعة الواحدة، كما يمكن مقارنة قسم واحد فقط في المجموعات المختلفة – ذلك القسم الذي يبين على المحور الأفقي مباشرة. ويشترط في هذا النوع أن تكون الأقسام المختلفة في كل مجموعة من نفس النوع، إذ لا يمكن جمع الكميات المختلفة.

➢مثال (8)

الجدول الآتي يبين إنتاج أربع مناطق في الجزيرة من القمح والفول والذرة(بآلاف الدينارات) بين هذه المعلومات بالأعمدة المتجمعة والمركبة.

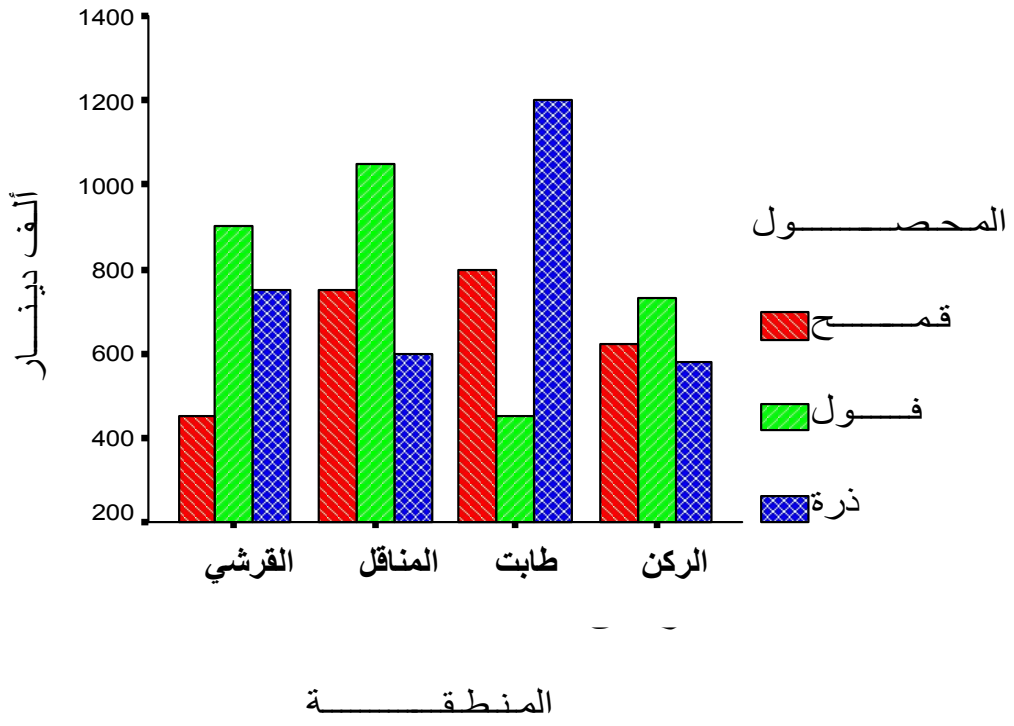
الحل:

المنطقة	القمح	الفول	الذرة	المجموع **
القرشي	450	900	750	2100
المناقل	750	1050	600	2400
طابت	800	450	1200	2450
الركن	620	730	580	1930
المجموع	2620	3130	3130	8880

** هذا المجموع ممكن لأن الوحدة (دينار) مشتركة.

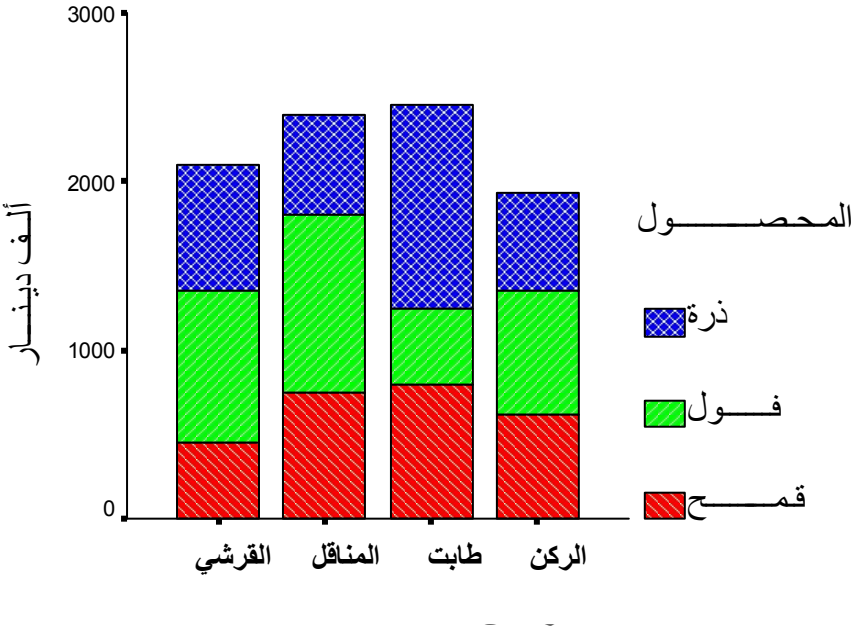
جدول (8)

جدول يوضح إنتاج أربع مناطق من القمح والفول والذرة(بالدينار)



شكل (5)

الشكل يمثل أعمدة متجمعة لإنتاج أربع مناطق في الجزيرة من القمح و الفول والذرة.



شكل (6)

شكل اعلاه عبارة عن أعمدة مركبة لإنتاج أربع مناطق في الجزيرة من القمح و الفول والذر ة

4.5 التمثيل الدائري Circular pie chart

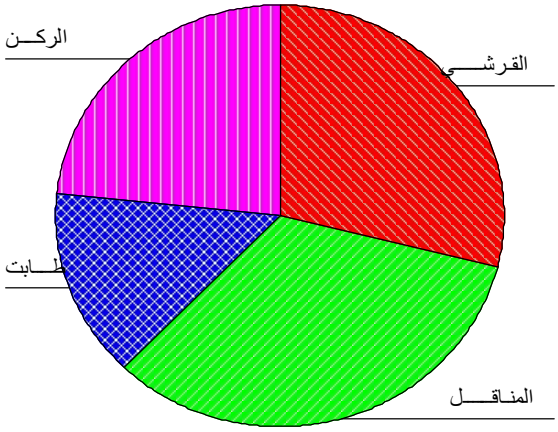
يستخدم هذا النوع عندما يكون الهدف إبراز نسب مكونات منفصلة لمجموعة لمقارنة كل ممكن مع المجموعة ككل ومقارنة المكونات مع بعضها البعض. نرسم دائرة لتمثل المجموعة كلها وتنقسم إلي قطاعات(Sectors) تتناسب في مساحاتها(وبالتالي في زواياها المركزية) مع أحجام المكونات الزاوية المركزية للمكون = حجم المكون × 360 درجة.

الحجم الكلي

➢مثال (9)

أرسم شكلاً دائرياً لإنتاج الفول في المناطق الأربع في جدول مثال (8) صفحة (21).

الحل:



شكل (7)

شكل دائري يوضح إنتاج الفول في أربع مناطق في الجزيرة

أما إذا كانت لدينا مجموعتان أو أكثر كل منها تتكون من نفس المكونات فترسم دائرة لكل مجموعة – تتناسب في مساحتها (وبالتالي في مربعات أنصاف أقطارها) مع أحجامها، ثم تقسم كل دائرة كما سبق. بذلك يمكن مقارنة أحجام المجموعات كما يمكن مقارنة المكونات لكل مجموعة علي حدة. لكن ليس سهلا مقارنة المكون الواحد في المجموعات المختلفة.

في بعض الأحيان ترسم الدوائر المختلفة بنفس نصف القطر(لتوضيح المكونات %) ويكون الهدف عندها مقارنة نسب المكونات في المجموعة الواحدة أو المكون الواحد نسبياً بين المجموعات. بالطبق هذا النوع لا يعطي فكرة لمقارنة المجموعات ككل.

مثال(10)

شركة زراعية تعمل في منطقتي القضارف والجزيرة كانت منصرفاتها في إحدى السنوات كما في الجدول أدناه. يراد إبراز نسبة المكونات إلي الكل وكذلك نسبة المنطقتين. أنشئ رسما دائرياً لهذا الغرض.

	بند الصرف					مجموع
المنطقة	أجور	استثمار زراعي	استثمار صناعي	ضرائب	احتياطي	
القضارف	945	1574	575	1000	262	4356
الجزيرة	1180	1683	1829	1480	1512	7744

جدول (8)

جدول يبين منصرفات شركة في منطقتي القضارف والجزيرة

الحل:

أفرض أن نصفي القطرين هما ق، ج

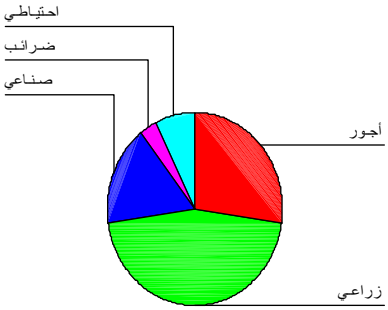
إذا ق : ج :: $\sqrt{4356} : \sqrt{7744} :: 3 : 4$

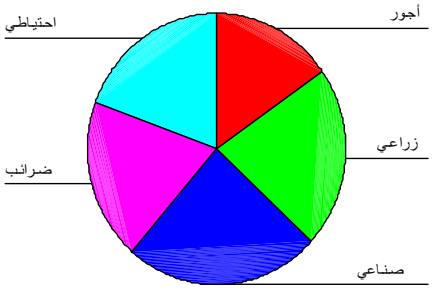
نختار ق، ج بهذه النسبة حسب المكان المتاح، ثم نحدد الزوايا المركزية لكل بند:

بند الصرف	القضارف	الجزيرة
أجور	$78.1 = \frac{945 \times 360}{4356}$	$54.9 = \frac{1180 \times 360}{7744}$
استثمار زراعي	$130.1 = \frac{1575 \times 360}{4356}$	$78.2 = \frac{1683 \times 360}{7744}$
استثمار صناعي	47.5 (بالمثل)	87.8
ضرائب	82.6	68.8
احتياطي	21.7	70.3
المجموع	360.0	360.0

جدول (9)

جدول لحساب الزوايا المركزية





القضـارف الجزيرة

شكل (8)

الشكل الدائري (8) يمثل منصرفات شركة زراعية في منطقتي الجزيرة و القضارف

تدريب (4)

الجدول أدناه يري التوزيع العمري لطلاب ثلاث كليات في جامعة الخرطوم الذين زاروا مستوصف الجامعة للعلاج (2003 م). مثل هذه البيانات

أ. بالأعمدة البيانية.

ب. بالرسم الدائري.

ج- باحثـان: قـام الأول بإنشـاء الرسـم البيـاني بالأعمـدة المركبة وقام الثاني بإنشاء الرسم البياني بالأعمدة المتجمعة لهذه البيانـات.بـين الفـرق بـين هـدفي البـاحثين فـي اختيـار الشـكلين المختلفين.

جدول يبين التوزيع ألعمري لمرضى ثلاث كليات في جامعة الخرطوم

الكلية	21 >	25 -21	25 <	المجموع
الآداب	120	158	77	355
الهندسة	74	120	46	240
العلوم	61	110	27	198

6.4 البيان بالرسوم Pictograms

يستخدم هذا النوع من الرسم البياني لإعطاء فكرة عامة جداً عن التوزيع التكراري خاصة في المعارض لغير المتخصصين. وهنالك طريقتان: الأولي رسم شكل تقريبي بمقياس رسم ثابت يمثل عددا معيناً من الوحدات ثم يكرر هذا الشكل بقدر التكرار المراد تمثيله. إذا لم يكن من الممكن رسم الوحدة فيستخدم أي شكل مثل الدائرة أو المربع أو أي شكل آخر. هذا النوع الأول هو الأكثر استخداماً. في الطريقة الثانية يرسم الشكل التقريبي لكن بأحجام تتناسب مع التكرارات المراد بيانها.

➢ مثال(11)

الجدول أدناه يعطي وار دات السودان من إطارات العربات في الفترة 1955–1961 (بالآلف) اعرض هذه البيانات باستخدام البيان بالرسوم.

السنة	1955	1959	1960	1961
الواردات	566	1178	817	903

جدول(10)

جدول يبين واردات السودان من الإطارات (ألف)

الحل:

O تمثل 000 100 إطار

1961	O O O O O O O O O
1960	O O O O O O O O (
1959	O O O O O O O O O O O C
1955	O O O O O C

شكل (9)

الشكل أعلاه يبين واردات السودان من إطارات العربات (1955 – 196)

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1. ما هي أنواع الرسوم البيانية و متي يستخدم كل نوع؟
2. ما هي محاسن ومساوئ التمثيل البياني؟
3. متي لا يمكن استخدام المضلع التكراري؟ المنحني التكراري؟ المدرج التكراري؟ الأعمدة؟
4. الجدول الآتى يبين مصادر مياه الشرب الرئيسية(%) فى السودان عام 2000م بين هذه المعلومات بيانياً .

جدول لمصادر المياه فى السودان 2000م

المصدر	%
ماسورة داخل المنزل	24
ماسورة عامة	7
حفير	28
بئر	15
نهر/ ينبوع	11
الامطار	8
اخرى	6.6
المجموع	100,0

المصدر الجهاز المركزي للإحصاء: السودان فى أرقام 2003م.

5. الجدول في الصفحة التالية الآتي يبين أطوال مجموعتين من الرجال بالسنتيمترات، الأولى من 120 رجلا و الثانية من 300 رجلأوسم منحنَى تكراريا نسبيا متجمعا صاعدا لكل من المجموعتين. جدول يبين أطوال مجموعتين من الرجال (سم)

الطول	120−	130−	140−	150−	160−	170−	180−	190−
تكرارات الأولى	2	5	18	24	35	25	10	1

تكرارات الثانية	18	30	48	67	50	47	30	10

الخلاصة

عزيزي الدارس لعلك قد لاحظت أننا فى هذه الوحدة بدأنا بتصنيف المتغيرات إلى:

أ) متقطع ومستمر.

ب) نوعى وترتيبي وفترتي ونسبى.

بعد ذلك تحولنا إلى مجموعات الملاحظات وكيفية تلخيصها بالترتيب أو الجدولة أو الرسوم البيانية. وقد حصلنا على أن الترتيب لايفى إلا للأعداد القليلة وأن الجداول تختلف فى أنواعها (تكرارية، متجمعة نسبية) حسب نوع المعلومة المراد توصيلها. اخيراً عرجنا إلى التمثيل البياني بأنواعه المختلفة، وبينا متى يمكن إستخدام كل نوع وذلك بناء على نوع المتغير. وكل هذه الطرق لتبسيط المعلومة فى البيانات تعطي فكرة تقريبية إلا أن عيبها أن كل ناظر لها يخرج باستنتاجات قد تختلف عن الآخرين – هذا العيب غير مرغوب فيه فى العمل العلمي الدقيق.

لمحة مسبقة عن الوحدة الثانية

عزيزي الدارس في الوحدة الثانية سنتناول موضوع المقاييس الإحصائية وذلك لان الرسوم البيانية ليست كافية لإعطاء فكرة تامة عن البيانات لذلك سنبداء بمقاييس النزعة المركزية ثم ندرس مقاييس التشتت ونختتم الوحدة بدراسة التغاير ومعامل الارتباط الخطي نأمل أن تكون وحدة سهلة الفهم ومفيدة لك.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

أوزان 300 رجل (كجم) مرتبةترتيباً تصاعدياً

92 85 85 78 78	78 71 71 71 64	64 64 57 50 43
92 85 85 78 78	78 71 71 71 64	64 64 57 57 43
92 85 85 78 78	78 71 71 71 64	64 64 57 57 43
92 85 85 78 78	78 71 71 71 64	64 64 57 57 43
92 85 85 78 78	78 71 71 71 64	64 64 57 57 43
92 92 85 78 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
92 92 85 78 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
92 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
92 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
92 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
92 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
99 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
99 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
99 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
99 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 57 57 50
99 92 85 85 78	78 71 71 71 71	64 64 64 57 50
99 92 85 85 78	78 78 71 71 71	64 64 64 57 50
99 92 85 85 78	78 78 71 71 71	64 64 64 57 50
99 92 85 85 78	78 78 71 71 71	64 64 64 57 50
99 92 85 85 78	78 78 71 71 71	64 64 64 57 50

من الصعوبة بمكان فهم شكل التوزيع.

تدريب (2)

الفئة المفتوحة من أدنى (أعلى) بدايتها (نهايتها) غير محددة أما الفئة المغلة فبدايتها ونهايتها محددتين تحديداً كاملاً .

تدريب (3)

الجدول المتجمع الصاعد يبين مجموع أعداد المفردات عند كل قيمة (أ و فئة) وجميع القيم (الفئات) السابقة لها .

تدريب (4)

جدول مرضى مجمع الوسط بجامعة الخرطوم يرى المجاميع أيضاً إضافة للتوزيع العمرى. بما أن المتغير (الكلية) متقطع فتستخدم الأعمدة.وبما أننا نر يد بيان المجاميع فتستخدم الأعمدة المركبة.

(ب) الرسم الدائري: تحدد أنصاف الأقطار بتناسبها مع الجذور الربيعية لمجاميع الكليات الثلاث:

$$\text{نق}_1 : \text{نق}_2 : \text{نق}_3 \equiv \sqrt{355} : \sqrt{240} : \sqrt{198} = 18 \cdot 3 : 15 \cdot 5 : 1 : 14$$

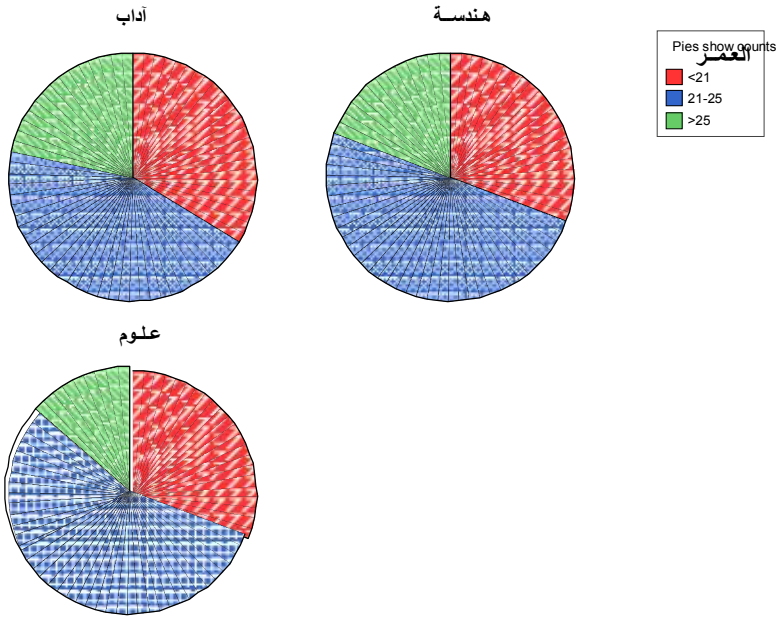
∴ اختر أنصاف الأقطار بهذه النسب ، مثلا 4.60 , 3.90 , 3.55 .

حساب الزاوايا المركزية :

الآداب : $(77,158,120)\frac{360}{355} = (78,160,122)^0$.

الهندسة: $(46,120,74)\frac{360}{240} = (69,180,111)^0$.

العلوم: $(27,110,61)\frac{360}{198} = (49,200,111)^0$.



الشكل أعلاه يبين أعداد مرضى بعض كليات جامعة الخرطوم %

(ج) الأول اهتم بالقيم و العدد الكلى للمرضى في حين اهتم الثاني بنسب الأعمار المختلفة في كل كلية.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. الجدول الآتي يبين التكرار المتجمع الهابط لأوزان الثلاثمائة رجل

الوزن	43	50	57	64	71	78	85	92	99
التكرار	5	16	34	50	71	51	38	26	9
متجمع هابط	300	295	279	245	195	124	73	35	9

2.

1) عدد الخراف عند مائة راع:

2) اصغر عدد 17، اكبر عدد 124. المدى 108.

يوزع المدى على 6 فئات كما مطلوب، لذا طول كل فئة 18خروفاً .

∴ الفئات المناسبة هي:

17-34، 35-، 53 -، 71-، 89-، 107-124.

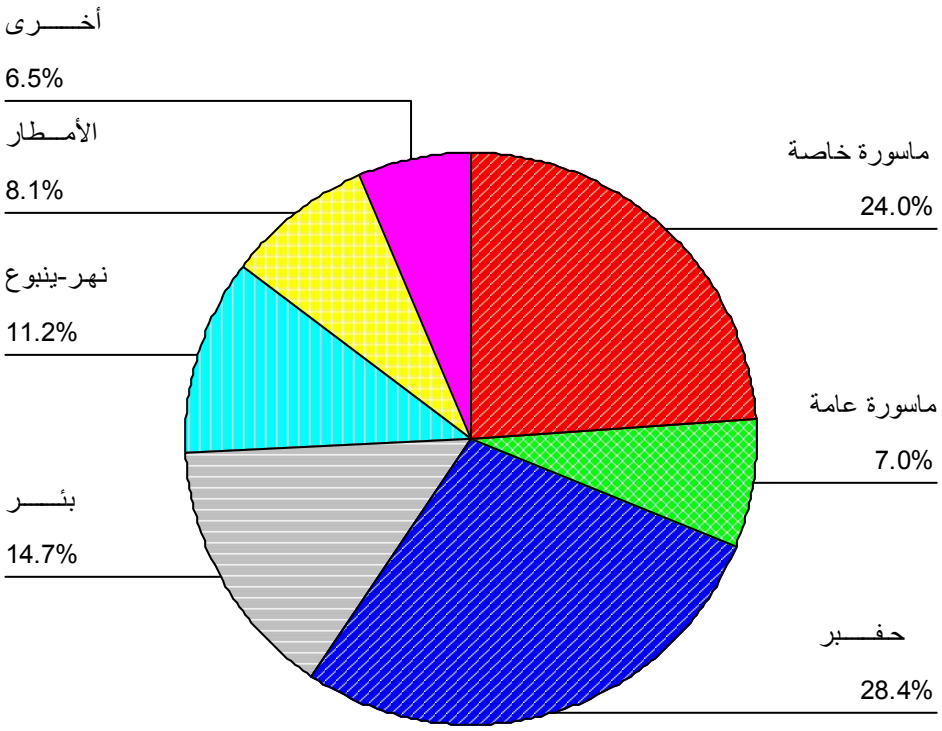
جدول يبين التكرار النسبي والنسبي المتجمع الصاعد لأعداد خراف مائة راع :

الفئة	17-34	35-	53-	71-	89-	107-124	المجموع
التكرار	12	17	20	24	18	9	100
التكرار النسبي	0.12	0.17	0.20	0.24	0.18	0.09	1.00
التكـــــرار النســـــبي المتجمع الصاعد	0.12	0.29	0.49	0.73	0.91	1.00	-

4. بما أن المعلومات معطاة فى شكل نسب مئويه فأنسب شكل هو الدائرى.

الزاوية المركزية لكل مصدر = $\frac{360}{100}$ × النسبة المئوية.

نصف القطر اختيارى.



شكل يوضح مصادر مياه الشرب فى السودان.

وألان عزيزي الدارس يمكنك أن تكمل الإجابة برسم المنحنى التكراري النسبي المتجمع الصاعد لكل من مجموعتي الرجال.

4. جدول يبين التكرار المتجمع النسبي لأوزان ثلاثمائة رجل :

الوزن	43	52	66	70	78	83	90	95	99	$\sum$
التكرار	5	16	34	50	71	51	38	26	9	300
التكـرار المتجمع	5	21	55	105	176	227	265	291	300	–
المتجمع النسبي	0.017	0.070	0.183	0.350	0.587	0.757	0.883	0.971	1.000	-

أ) نسبة الذين تقل أوزانهم عن 75= 0.350 أو 35 %.

ب) نسبة الذين أوزانهم بين 68 و 85 = 0.757 − 0.183 = 0.574 أو 4.57 %.

ج) نسبة الذين تزيد أوزانهم عن 75=1− 0.350 = 0.650 أو 65 %.

أسئلة التقويم الذاتي (2)

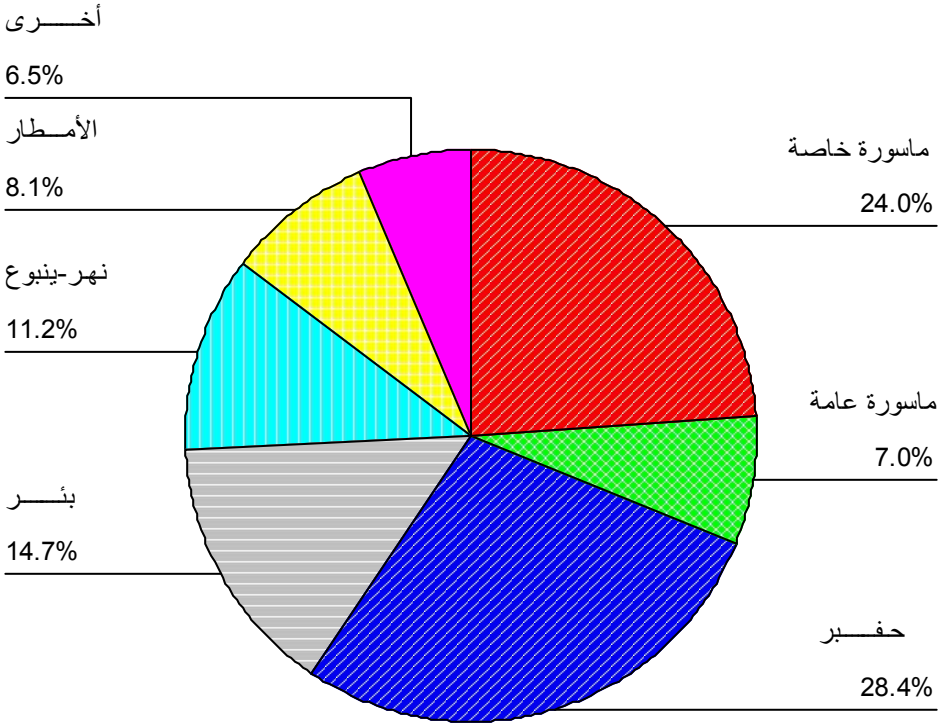
2) الرسم البياني سهل الفهم لكنه يعطى صورة تقريبية فى أغلب الأحيان.

3) لايمكن استخدام المضلع والمنحنى والمدرج التكراري إذا كان المتغير متقطعاً، كما لا يصلح الرسم بالأعمدة للمتغيرات المستمرة.

4. بما أن المعلومات معطاة فى شكل نسب مئوية فأنسب شكل هو الدائري.

الزاوية المركزية لكل مصدر = $\frac{360}{100}$ × النسبة المئوية.

نصف القطر اختياري.



شكل يوضح مصادر مياه الشرب فى السودان.

5) الجدول التكراري النسبي المتجمع الصاعد لأطوال مجموعتين من الرجال:

الفئة	120-	130-	140-	150-	160-	170-	180-	190-200
المجموعة الأولى	0.017	0.059	0.209	0.409	0.701	0909	0.992	1.000
المجموعة الثانية	0.060	0.160	0.320	0.543	0.710	0.867	0.967	1.000

وألان عزيزي الدارس يمكنك أن تكمل الإجابة برسم المنحنى التكراري النسبي المتجمع الصاعد لكل من مجموعتي الرجال.

مسرد المصطلحات

- **بيان بالاعمدة Bar Diagram :**

نوع من انواع الرسوم البيانية يصاح للمتغيرات المتقطعة.

- **التمثيل الدائري Circular Representation :**

نوع من انواع الرسوم يستخدم عندما يكون الهدف ابراز نسب مكونات منفصلة ومقارنة المكونات مع بعضها البعض.

- **فئه Class :**

تستخدم اذا كانت القيم كثيرة لتبسيطها ويكون لها حدين ادني واعلي.

- **حد الفئه Class Limit :**

هو القيمة الدنيا او العليا للفئة.

- **قضيب متجمع Cluster Bar :**

يستخدم لتمثيل المتغيرات المتقطعة وتنشئ عمودا لكل قسم ونضع اقسام كل مجموعة متجاورة.

- **المتغير المستمر Continues Variable :**

هو المتغير الذي لا يمكن ان ياخذ اي قيمة في فترة معينة.

- **المتغير المتقطع Discrete Variable :**

هو المتغير الذي تكون قيمة منفصله عن بعضها البعض.

- **التكرار المتجمع Cumulative Frequency :**

نبين بها الاعداد التي تقل او تساوي العلامات العليا للفئات.

- **المنحني التكراري Frequency Curve :**

هو منحني لوصل نقاط التكرارات لقيم المتغير.

- **المضلع التكراري Frequency Poygon :**

شبية بالمنحني التكراري ولكن النقاط توصل بخطوط مستقيمة.

- **المدرج التكراري Frequency Histogram :**

يستخدم المتغيرات المستمرة عندما تكون البيانات في شكل جدول تكراري ذي فئات.

- **المتغير الفترتي Interval Variable :**

هو متغير يحمل قيما عددية تعرف عليها عمليتا الجمع والطرح فقط.

- **المتغير التصنيفي Nominal or Classification Variable :**

هو مجرد رموز تشير الي اصناف مختلفة.

- **المتغير الترتيبي Ordinal Variable :**

مثل التصنيفي ولكنه يعطي فكرة عن ترتيب القيم حسب مبدأ معين.

- **المتغير النسبي Ratio Variable :**

هو متغير يعتمد علي وجود الشئ المراد قياسه وتعرف عليه العمليات الحسابيه الاربع

المراجع

1) أحمد عبدا لله ومحمود هندي الإحصاء التطبيقي، ج الملك سعود، 1995
2) عائشة محمود زينون، أساسيات الإحصاء الوصفي: دار عمار. 1996
3) فاتن عبدا لحليم أبو على مبادئ الإحصاء الوصفي: دار الفكي. 2000
4) منظمة الغذاء والزراعة الأمم المتحدة. 1996
5) آلاء الاحمدى وآيات حسن ونهاد وقيع الله: نمط الأمراض وسط طلاب مجمع الوسط بجامعة الخرطوم. مشروع بحث تخرج، كلية العلوم الرياضية. (2003)


الوحدة الثانية
مقاييس إحصائية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	43
التمهيد	43
أهداف الوحدة	44
1. مقاييس النزعة المركزية (مقاييس التوسط).	45
1.1 الوسط الحسابي.	45
2.1 الوسيط.	48
3.1 المنوال.	51
2. مقاييس التشتت	55
1.2 المدى البسيط.	55
2.2 التباين.	56
3.2 الانحراف المعياري.	56
3. التغاير	58
1.3 التغاير	59
الخلاصة	65
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	65
إجابات التدريبات	66
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	67
مسرد المصطلحات	72
المراجع	73

المقدمة

تمهيد

لعلك قد لاحظت عزيزي الدارس أن الرسوم البيانية تعطي فكرة عامة عن البيانات الإحصائية إلا أن تفسير هذه الرسوم يختلف من شخص لآخر ولذلك مثل هذه الأساليب لا تصلح في مجال العلوم والبحوث لأن المطلوب مقياساً يفهمه الجميع بنفس المعنى في هذه الوحدة سندرس في هذه الوحدة بعض المفاهيم التي تفي بهذا الطلب.

فعند وصف المجتمعات نحتاج لعدة أنواع من المقاييس لتعطي فكرة عن التوسط (أين تقع المجموعة في المحور) واختلاف المفردات عن بعضها البعض وعما إذا كانت هذه المفردات تميل إلى الكبر أو الصغر أو الاعتدال لذلك فقد تناولنا في هذه الوحدة مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) كما تعرضنا أيضاً لبعض من مقاييس التشتت واختتمنا الوحدة بموضوع التغاير ومعامل الارتباط.

ستجد عزيزي الدارس في ضمن هذه الوحدة كثير من الأمثلة والتدريبات وأسئلة التقويم الذاتي.

أهدف الوحدة



عزيزي الدارس، عند انتهائك من هذه الوحدة ينبغي ان تكون قادرا علي ان:

* **تحسب** الوسط الحسابي للبيانات الإحصائية غيرا لمجدولة _(غير المبوبة) أو المجدولة (المبوبة).
* **تحسب** الوسيط للبيانات بنوعيها مجدولة أوغير مجدولة.
* **تجد** الوسيط من الرسم البياني للبيانات المجدولة.المنوال للبيانات بنوعيها.
* **تجد** المنوال للبيانات بنوعيها مجدولة أوغير مجدولة.
* **تقارن** بين كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
* **تجد** المدى البسيط للبيانات بنوعيها مجدولة أوغير مجدولة.
* **تحسب** الانحراف المعياري للبيانات بنوعيها.
* **تحسب** التغاير.
* **تحسب** معامل الارتباط الخطي وتفسر مدى قوته.

1.مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

Measures of Central Tendency

ويقصد بها مقاييس ترينا أين تقع المجموعة بصفة عامة في محور المتغير. سنهتم هنا بثلاثة منها: الوسط الحسابي و الوسيط والمنوال. تسمي هذه متوسطات Means.

1.1 الوسط الحسابي Arithmetic mean

يُعرَّف الوسط الحسابي بأنه مجموع القيم مقسوماً علي عددها n . فإذا رمزنا للمتغير الملاحظ بالرمز X فإننا نرمز للوسط الحسابي بالرمز $\overline{x}$ حيث

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \qquad (1)$$

.

أما إذا كانت البيانات في شكل جدول تكراري غير مبوب ، حيث القيم المختلفة X1، X2، ... ، Xk وكانت تكراراتها n1 ، n2 ، ... ، nk علي التوالي فإن

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} \qquad (2)$$

أما في حالة البيانات في شكل تكراري ذي فئات فإننا ل انعرف قيم X في كل فئة، لكن نقربها بمركز الفئة. أفرض أن مراكز الفئات هي X1، X2، ... ، Xk وأن تكرارات الفئات هي n1 ، n2 ، ... ، nk فإن (2) تعطي الوسط الحسابي بصورة تقريبية.

مثال (1)

الجدول الأتي يبين أوزان ثلاثمائة رجل بالكيلوجرام أوجد الوسط الحسابي لهذه الأوزان

الوزن هـ x	43	50	57	64	71	78	85	92	99
التكرار n_i	5	16	34	50	71	51	38	26	9

الحل:

الوزن هـx	43	50	57	64	71	78	85	92	99
التكرار n_i	5	16	34	50	71	51	38	26	9
nx_i	215	800	1938	3500	5041	3978	3230	2392	891

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i\, x_i}{\sum n} = \frac{21685}{300} = 72.283$$

أي أن الوسط الحسابي يساوي 72.28 كجم.

➢مثال(2)

الجدول التي يبين نتائج 125 طالباً أوجد الوسط الحسابي للنتائج:

الفئة	9−0	10−	20−	30−	40−	50−59	المجموع
التكرار n_i	5	14	38	36	25	7	125

الحل:

الفئة	9−0	10−	20−	30−	40−	50−59	المجموع
مركز الفئة x_i	4.5	14.5	24.5	34.5	44.5	59.5	------
التكرار n_i	5	14	38	36	25	7	125
$n_i\, x_i$	22.5	2030	9310	1242.0	1112.5	381.5	3892,5

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i\, x_i}{\sum n_i} = \frac{3892.5}{125} = 31.14$$

∴ الوسط الحسابي يساوي 31.14 درجة تقريباً .

يمكن تبسيط العملية الحسابية في حالة الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية كالآتي

(بالنسبة للجدول أعلاه):

أ. نلاحظ أن كل قيم المراكز، تنتهي بنفس العدد(4.5).

ب. أطرح من كل مركز أحد قيم المراكز، الأحسن في وسط الجدول، مثلاً 24.5.

ج.أقسم النواتج علي طول الفئة (10) لنحصل لقيم جديدة سمها Yi.

د.أوجد الوسط الحسابي للقيم الجديدة.

$$\overline{Y} = \frac{\sum n_i y_i}{\sum n_i}$$

هـ. لإيجاد $\overline{x}$ استخدم الخطوتين ب، جـ بالعكس: أضرب $10 \times \overline{Y}$ ثم أضف 24.5:

طريقة أخرى:

هنا طرحنا 524.–و قسمنا الناتج علي عشرة للحصول علي قيمY

جدول درجات 125 طالباً

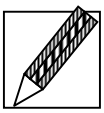
المركز x_i	4.5	14.5	24.5	34.5	44.5	54.5	المجموع
Y_i	−2	−1	0	1	2	3	–
n_i	5	14	38	36	25	7	125
$n_i\, y_i$	−10	−14	0	36	50	21	83

$$\overline{Y} = \frac{83}{125} = 0.664$$

$$\therefore \overline{X} = 10 \times 0.664 + 24.5 = 31.14$$

عزيزي الدارس هل لاحظت الفرق بين العمليات الحسابية في الطريقتين بينما النتيجة (الإجابة) واحدة.

تدريب (1)



أوجد الوسط الحسابي لأوزان ال300 رجل من الجدول التكراري في صفحة(8) والجدول التكراري في صفحة(10) وتحقق من إنهما متساويان.

2.1 . الوسيط Median

يعرف الوسيط بأنه قيمة المتغير التي تتوسط قيمه بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازلي ً ا. فإذا كان عدد القيم ن فر ديا فإن ترتيب الوسيط هو (ن+1)\2، أما إذا كان زوجيا فيقرب السيط بمتوسط القيمتين الوسيطتين.

➢مثال (3)

أوجد الوسيط للمجموعة الآتية:

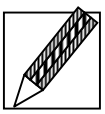
115، 122 ،130 ، 151 ، 176 ، 182 ، 94 ، 203.

الحل :

عدد القيم = 8 (زوجى) ∴ الوسيط يساوى متوسط القيمة الرابعة $\left(\frac{N}{2}\right)$ والخامسة $\left(\frac{N}{2}+1\right)$.

∴ الوسيط = $\frac{176+151}{2} = 163.5$.

تدريب (2)



اوجد الوسيط للمجموعة الاتية:

15، 20، 22، 28، 32، 39، 40، 45، 70.

✦ملاحظة :

من هذا التعريف نلاحظ أن عدد الملاحظات التى تزيد عن الوسيط يساوى عدد تلك التى تقل عنه. حساب الوسيط من الجداول التكرارية أكثر تعقيداً، خاصة فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات. فى هذه الحالة

تعتمد على الكرارات المتجمعة والملاحظة أعلاه. أفرض أن عدد الملاحظات الكلى N .

إذا الوسيط L_m هو القيمة التى تقابل

التكرار المتجمع $\frac{N}{2}$.نحدد أولاً الفئة التى تشمل التكرار المتجمع $\frac{N}{2}$. (فئة الوسيط) أفرض أن

L_L حدها الأدنى. L_u حدها الأعلى N_L التكرار المتجمع للفئة السابقة و N_N التكرار المتجمع لفئة الوسيط.

الوسيط هو القيمة L_n التى تقسم الفئة L_U, L_L بنسبة $N_U - \frac{N}{2}$ إلى $N_L - \frac{N}{2}$.

$$\frac{N_M - N_L}{N_U - N_M} = \frac{L_M - L_L}{L_U - L_M}$$ اى

أو (من الشكل) $\frac{N_M - N_L}{N_U - N_L} = \frac{L_M - L_L}{L_U - L_M}$.

NL NM NU
|----------|----------|
LL M=LM LU

وبذلك فإن الوسيط هو (من المعادلة الثانية)

$$L_L + \frac{(N_M - N_L)}{(N_U - N_L)}(L_U - L_M) = L_M = m$$

L_L + طول الفئة $\times (N_M - N)_L$ ÷ تكرار الفئة لاحظ عزيزي الدارس أن: **المعادلتان تعطيان نفس النتيجة بالضبط.**

➢مثال (4)

الجدول الاتى يبين درجات 125 طالباً أوجد الوسيط لهذه الدرجات.

الفئة	0−9	10−	20−	30−	40−	50−59	$\sum$
التكرار n	5	14	38	36	25	7	125

الحل:

الفئة	0−9	10−	20−	30−	40−	50−59	$\sum$
التكرار n	5	14	38	36	25	7	125

التكرار (الصاعد) N	5	19	57	93	118	125	–

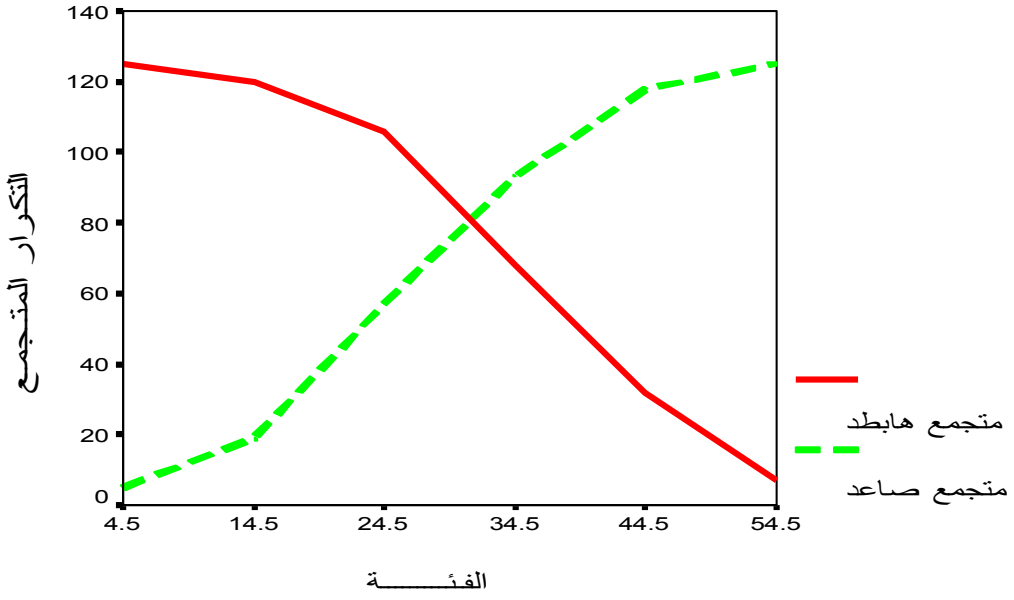
$N = 125$, $\frac{N}{2} = 62.5$

فئة الوسيط هى 30–39 وحدها $L_L = 295$, $L_0 = 39.5$

التكرارات المتجمعة للحدود هى $N_L = 57$, $N = 93$.

∴ الوسيط $= L_m = M = 29.5 + \frac{10}{36}(57 - 62.5)$ = 31.03

يمكن ايجاد الوسيط بيانياً باستخدام المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط، حيث هو قيمة المتغير التى عندها يتقاطع المنحنيان:



شكل (1)

شكل يبين إيجاد الوسيط كنقطة تقاطع المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل

3.1 المنوال Mode

المنوال هو قيمة المتغير التي لها أكبر تكرار. و يمكن تحديده مباشرة من الجدول التكراري بغير فئات أو من البيان بالأعمدة أو من المضلع أو المنحنى التكراريين.

مثال (6)

أوجد منوال أوزان 300 رجل (في الجدول المبين صفحة (8).

الحل:

أكبر تكرار هو 71 و يقابل الوزن 71 كجم. إذا المنوال هو 71كجم.

مثال (7)

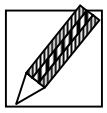
أوجد منوال أعداد الخراف عند 100 راع من شمال كردفان من الجدول المبين صفحة (15).

الحل:

بعد إيجاد التوزيع التكراري للأعداد نجد أن أكبر تكرار هو 4 عند القيمتين 40 و 100.

إذا لأعداد الخراف منوا لين هما 40 و 100.

تدريب (3)



أوجد المنوال لمنصرفات الشركة الزراعية من الجدول المبين صفحة (25) مثال (10)

مثال (8)

أوجد منوال نتائج 125 طالبا من الجدول التكراري الاتي:

الفئة	0-9	10-	20-	30-	40-	50-59	$\sum$
التكرار n	5	14	38	36	25	7	125

الحل:

بما أن الدرجات الحقيقية غير معلومة فإننا نحتاج لتقدير المنوال. نفترض أن المنوال يقع في الفئة ذات أكبر تكرار (الفئة المنوالية)، كما نفترض أنه أقرب إلى الفئة المجاورة ذات التكرار الأكبر. هنالك تقديران :

الأول : طريقة العزوم (Method of moments)

بعد المنوال من حدي الفئة في تناسب عكسي مع تكراري الفئتين المجاورتين.

افرض أن بعد المنوال عن الحد الأدنى = x و بالتالي بعده عن الحد الأعلى = 10 - x

إذا النسبة هي $x : 10 - x :: 14 : 36$ أو باستخدام العزوم :

$$36 (10 - x) = 14 x$$

29.5 (10 – x) M x 19.5

|----------|----------|

36 14

بحل المعادلة نجد أن $x = 7.2$ و لذا المنوال = 19.5+ 7.2 = 26.7.

الثاني: نفترض أن فرقا تكرار الفئة المنوالية عن كل من التكرارين المجاورين يتناسب طرديا مع بعد المنوال عن الحدين المقابلين. تكرار الفئة المنوالية = 38

الفرق من التكرار السابق = 38 – 14 = 24، الفرق من التكرار اللاحق = 38 – 3

36 2 : 24 14

|----------|----------|

29.5 (10-x) M x 19.5

إذا $\frac{x}{10-x} = \frac{24}{2}$

أي أن $x = 9.23$ و بالتالي المنوال = 19.5 + 9.23 = 28.73 .

ملاحظة

بصفة عامة التقديران غير متساويين لأنهما بنيا على افتراضين مختلفين.

مقارنة بين المتوسطات الثلاثة:

الوسط الحسابي	الوسيط	المنوال
1) يعتمد على كل الملاحظات	* يعتمد فقط على ترتيب الملاحظات	* يعتمد فقط على الملاحظة الأكثر تكراراً
2) دائماً معرف وهو قيمة فريدة	* يمكن اختبار أكثر من قيمة	* قد يوجد أكثر من منوال وقد لايوجد أي منوال
3) لا يمثل الوسط فى حالة وجود ملاحظات متطرفة	* لايتأثر بتطرف بعض القيم	* قديكون متطرفاً
4) قانون الحساب ثابتة فى كل الحالات	*معقد الحساب احياناً	*معقد أحياناً
5) له خواص تحليلية إحصائية جيدة	* صعب المعالجة التحليلية الإحصائية	* صعب المعالجة التحليلية الإحصائية

من هذه الخواص نلاحظ أن الوسط الحسابي هو الأحسن فى تمثيل التوسط. فى حالة وجود قيم متطرفة(جيدة جداً عن البقية) فيمكن استبعاد الملاحظات المتطرفة من جانب نفس العدد من الملاحظات من الجانب الثاني.

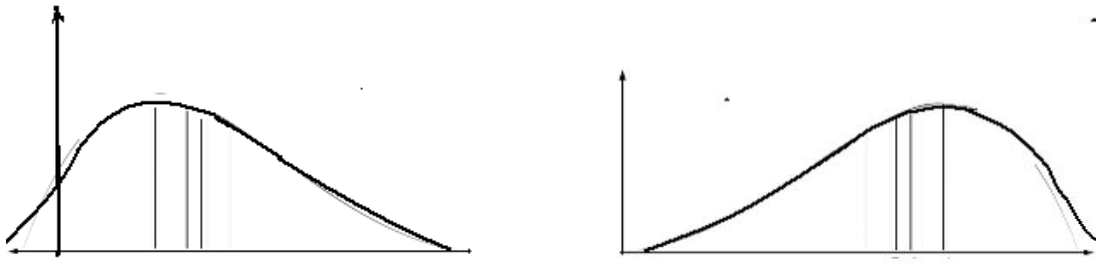
ملاحظات

(1) إذا كان توزيع الملاحظات متماثلاً حول المنوال الفريد فإن الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.

(2) من الملاحظ بصفة عامة أن يكون الوسط الحسابي (ح) والوسيط (و) والمنوال (م) فى هذا الترتيب من اليمين إلى اليسار أو بالعكس.

(3) أيضا الوسيط – الوسط الحسابي $\frac{1}{3}$ (المنوال – الوسط الحسابي).

(4) ترتيب هذه المتوسطات يعطى فكرة عن نقل الملاحظات: إذا كان المنوال هو الأكبر فهذا يعنى أن ثقل الملاحظات فى اليمين وا ذا كان هو الأصغر فيعنى أن الثقل إلى اليسار، وا ذا تساوت المتوسطات فهذا يعنى التماثل.



م و ح　　ح وم

شكل (2)

شكل يبين ترتيب المنوال (م) و الوسيط (و) و الوسط الحسابي (ح)

أسئلة التقويم الذاتي (1)

أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل من مجموعات الأعداد الآتية. وناقش كل على ضوء المقارنة أعلاه

1) 2 ،6 ،8 ، 10 ، 100.

2) 2 ،2 ،2 ، 3 ، 3 ، 4،5.

3) 3، 4 ، 4 ، 4 ، 6 ، 8 ، 12 ، 14 ،14 ، 14.

4)

x_i	4 −7	−8	−12	−16	20	21−20	مجموع
n_i	3	8	14	18	11	6	60

2. مقاييس التشتت Scatter

هنالك عدة معايير للتشتت نختار بعضها:

1.2 المدى البسيط Simple Range

المدى البسيط أو المدى يعرف كالآتي:

أكبر ملاحظة ناقصاً أصغر ملاحظة فى حالة المتغير المستمر ونضيف واحد إذا كان المتغير متقطعاً .

فى حالة الجداول التكرارية المغلقة فهو الحد الأعلى للفئة العليا – الحد الأدنى للفئة السفلى (مستمر) ونضيف واحد فى حالة المتقطع . هذا يتطلب أن تكون الفئتان العليا والسفلى مقلقتين.

مثال (10)

1) أوجد المدى للأعداد الآتية المدى

2 ،6، 7، 9 ، 12 ، 20 ، 24 ، 16.

24 – 2+1 = 23.

أوجد المدى من الجدول التكراري الآتي:

جدول يبين التوزيع التكراري لستين ملاحظة.

x_i	4 – 7	8–	12–	16–	20–	24– 27	المجموع
n_i	3	8	14	18	11	6	60

المدى = 27 – 4 + 1 = 24، وهو تقريبياً فى هذه الحالة.

ملاحظة النونيات (ntiles)

كثيراً ما تكون بعض الملاحظات متطرفة (Outlying) بمعنى أنها بعيدة عن بقية القيم سواء من أدنى أو من أعلى فى مثل هذه الحالات(لحساب المدى) فإننا نستبعد الملاحظات المتطرفة فى الجانبين شريطة استبعاد نفس النسبة من الملاحظات من كل جانب. إذا استبعدنا الملاحظات 1% من كل جانب فيسمى مدى البقية المدى المئينى Percentile range وإذا استبعدنا 10% فيسمى مدى البقية المدى العشيرى deciles range و إذا استبعدنا 25% فيسمى المدى الربيعي

.quartile rangeعادة يستخدم نصف المدى الربيعي بدلاً عن المدى الربيعي لأنه تلاحظ أنه يقارب الانحراف المعياري.

2.2 التباين Variance

التباين هو الوسط الحسابي لمربعات اختلافات القيم عن وسطها الحسابي، ويرمزله بالرمز S^2 :-

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \equiv \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \bar{x}^2 \ , \ \bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i \ .$$

3.2 الانحراف المعياري Standard Deviation

الانحراف المعياري هو الجزر التربيعى الموجب للتباين.

$$S = +\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2} \ .$$

ملاحظة

(1) إذا كانت جميع الملاحظات متساوية فإنها تساوى الوسط الحسابى وبالتالى

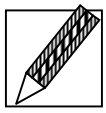
التباين = الانحراف المعيارى = صفر .

(2) فى حالة الجداول التكرارية فإن

$$S^2 = \frac{1}{\sum n}\sum n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - \bar{x}^2$$

(3) فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات فإن X يرمز لمركز الفئة.

تدريب (4)



أوجد الوسط الحسابي والتباين للمجموعة الاتية:-

2، 8، 15،7 ، 16، 10 ، 14 ، 9، 18.

مبرهنة

فى حالة أن قيم المتغير X على أبعاد متساوية كما فى المثال (3) أعلاه، فيمكن تسهيل العملية الحسابية للمتوسط والتباين كالآتى:

أفرض أن $Y = a + bx$

إذا $\overline{Y} = a + b\overline{x}$

و $S_y^2 = b^2 S_x^2$

حيث الثابت a أحد قيم X وسط الجدول أو التى تقابل أكبر تكرار والثابت b يساوى الفرق الثابت فى قيم x. هذا الاختيار لقيمتى a وb يجعل قيم Y اعدادا صحيحة قريبة من الصفر.

البرهان:

$$\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum (a + bx_i)}{n} = a + \frac{b\sum x_i}{n} = a + b\overline{x}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \overline{y})^2}{n} = \frac{\sum [(a + bx_i) - (a + b\overline{x})]^2}{n}$$

$$= \sum \frac{b^2 (x_i - \overline{x})^2}{n} = b^2 \sum \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n} = b^2 S_x^2$$

➢مثال (11)

أوجد الوسط الحسابي والتباين لبيانات الجدول الأتي مستخدما تحويلاً فى الصورة $y = a + bx$

الفئة	4 −7	−8	−12	16	20	27−24	المجموع
التكرار	3	8	14	18	11	6	60

الحل:

الفئة	7−4	−8	−12	−16	−20	27−24	المجموع
المركز ، X	5.5	9.5	13.5	17.5	21.5	25.5	-
$y = (x_i - 17.5)/4$	3-	2-	1-	0	1	2	-
التكرار	3	8	14	18	11	6	60

لنا $x = 17.5 + 4y$. بما أن متوسط Y:

$$\bar{y} = \frac{3(-3) + 8(-2) + \ldots + 6(2)}{(3 \quad +8 \; + \quad \ldots + 6)} = \frac{-16}{60} = -0.267$$

$$S_y^2 = \frac{3(-3)^2 8(-2)^2 + \ldots + 6(2)}{(3 \quad +8 \; + \quad \ldots + 6)} - \left(\frac{-16}{60}\right)^2 = 1.729$$

$$\therefore \bar{x} = 17.5 + 4 \times (-0.267) \qquad = 16.433$$

$$S_x^2 = 4^2 \times 1.729 \qquad = 27.664$$

و تباينه

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1) أوجد الوسط الحسابي والتباين لبيانات الجدول أدناه

x_i	7	9	10	13	15	المجموع
n	5	10	14	12	9	50

2) أوجد الوسط الحسابي والتباين لبيانات الجدول التالي:

الفئة	4 −7	−8	−12	16	20	27−24	المجموع
التكرار	3	8	14	18	11	6	60

3. التغاير والارتباط Covariance and Correlation

أحياناً يكون لدينا متغيران مرتبطان: مثلاً طول الشخص ووزنه، نصف قطر قضيب معدني والقوة التى تكسره، نتيجة طالب فى مادتين الخ. مثل هذه المتغيرات المتزاوجة توضع فى شكل متجهات أثنينية binary vectors

(الطول، الوزن)، (نق، ق)، فيزياء، رياضيات). فى مثل هذه الحالات – بالإضافة لدراسة كل مكون على حدة – فيمكن دراسة إلى أى مدى يتغيرا لمتغيران معاً . هل زيادة المكون الأول تقابلها زيادة فى الثانى؟ أو نقصان ؟ أم انهما مستقلان رياضياً بمعنى الزيادة فى الأول تقابلها زيادة فى الثانى احيانا ونقصان احياناً أخرى وعدم تغير فى حالة ثالثة. للإجابة على مثل هذه الاسئلة تحتاج إلى إيجاد معلم مشترك يسمى التغاير Covariance وآخر معامل الارتباط

الخطى linear correlation coefficient ، وهو برى إلىأى مدى توجد علاقة خطية بين المكونين.

1.3 التغاير

أفرض اننا رمزنا للمكونين (المتغيرين) بالرمزين X و Y

يعرف التغاير بأنه

$$S_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}\ \bar{y}$$

وفى حالة الجداول التكرارية فهو

$$S_{xy} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{\sum n_i x_i y_i}{N} - \bar{x}\ \bar{y}$$

فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات فنستخدم مراكزفئات كل من X و Y . يكون التغاير موجبا إذا كانت الزيادة في الأول تقابلها زيادة في الثاني و يكون سالبا إذا كانت الزيادة في الأول يقابلها نقصانا في الثاني و يكون صفرا في حالة الاستقلال التام.

2.3 معامل الإرتباط الخطى:

يعرف معامل الارتباط (الخطى) بأنه حاصل قسمة التغاير على الانحرافين المعياريين لـ X و Y، ويرمز له بالرمز R :

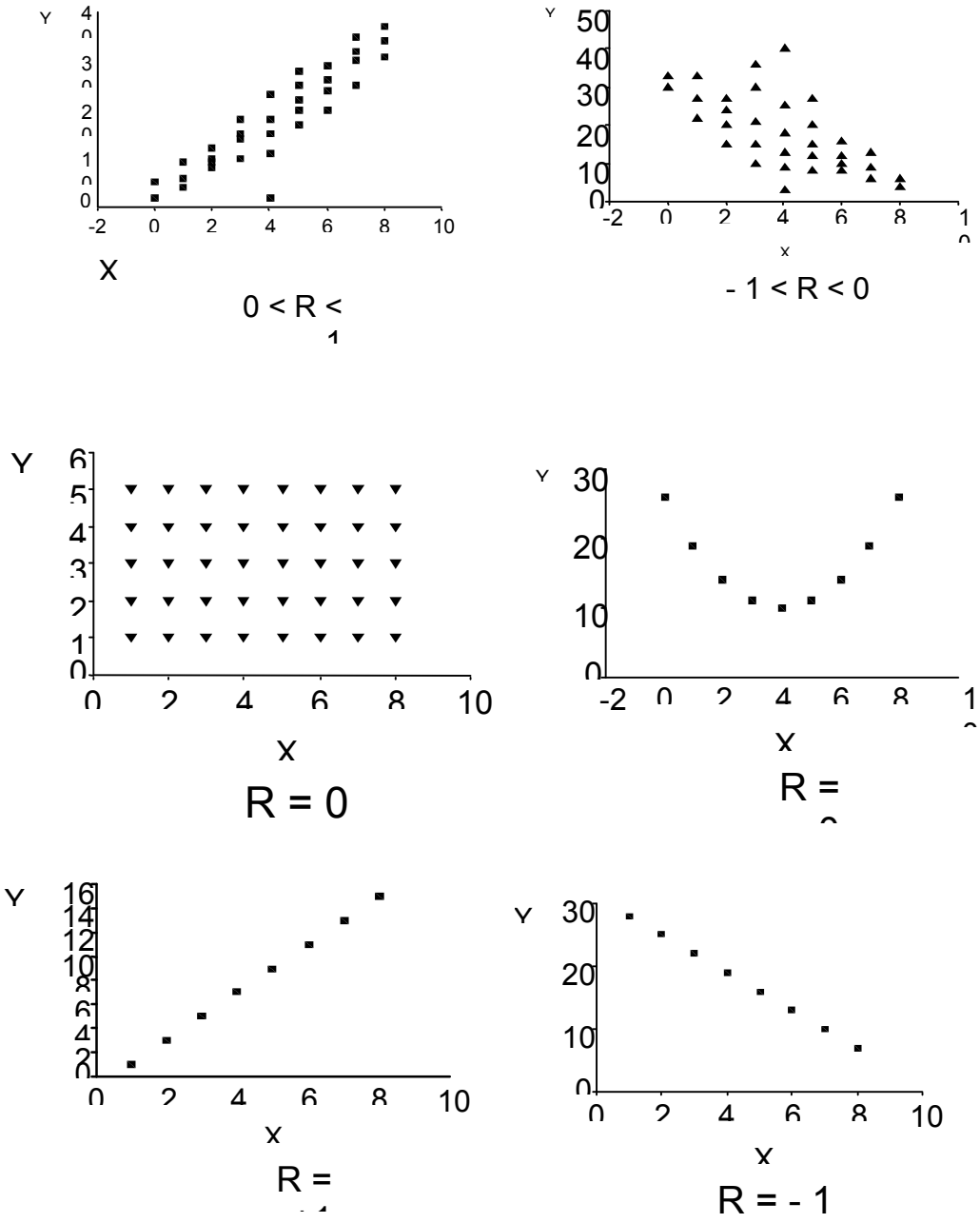
$$R = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \quad ; \quad -1 \le R \le 1$$

يكون R=1 إذا وجد خط مستقيم ميله موجب يمر بجميع النقاط (x ,y).

= −1 إذا وجد خط مستقيم ميله سالب يمر بجميع النقاط (x ,y).

= صفر فى حالة عدوم وجود علاقة خطية بينهما.

الشكل الموضح في الصفحة التالية يري العلاقة بين بعض الملاحظات على (x , y) و قيم R .



شكل (3)

قيم معامل الارتباط المقابلة للاشكال المختلفة للملاحظات

➢مثال (12)

أوجد التغاير ومعامل الارتباط للمتغيرين X و Y :

جدول لتوضيح التوزيع المشترك لمتغيرين

							المجموع
x	2	4	5	8	9	14	42
y	5	6	8	12	14	15	60

$$506 = \sum xy \, , 10 = \frac{60}{6} = \bar{y} \, , \quad 7 = \frac{42}{6} = \bar{x}$$

$$S_{xy} = \frac{506}{6} - 7 \times 10 = 14.333$$

$$S_x = 3.916 \qquad S_y = 3.872$$

$$\therefore R = \frac{14.333}{3.916 \times 3.872} = 0.945$$

الحل:

من قيمة R نستنتج أن العلاقة بين X و Y قوية جداً (قريبة من الواحد) وأنهما متزايدان فى نفس الاتجاه (R موجبة).

➢ مثال (13)

حساب التغاير ومعامل الارتباط الخطى من الجداول التكراري المتجهينى لمئة ملاحظة.

جدول يوضح حساب التغاير ومعامل الارتباط

العمود الصف	(1)	(2) Yj					(3)	(4)	(5)	(6)
1	x_i	1	2	3	4	5	$\sum_j n_{ij}$	$\sum_i n_{ij} y_j$	$\sum_i n_{ij} x_i y_j$	$\sum_i n_{ij} y_j^2$
2	1	2	5	4	1	0	12	28	28	74
	2	6	8	14	7	5	40	117	214	401
	3	2	7	8	7	6	30	98	294	364
	4	0	0	4	5	9	18	77	308	341
3	$\sum_i n_{ij}$	10	20	30	20	20	100	320	864	1180
4	$\sum_i n_{ij} x_i$	20	42	72	56	64	254			
5	$\sum_i n_{ij} x_i y_j$	20	84	216	224	320	864			
6	$\sum_i n_{ij} y_j^2$	44	100	196	172	218	730			

$$S_{xy} = \frac{864}{100} - \frac{320 \times 254}{10{,}000} = 0.512$$

$$S_x^2 = \frac{730}{100} - \left(\frac{254}{100}\right)^2 = 0.8484$$

$$S_y^2 = \frac{1180}{100} - \left(\frac{320}{100}\right)^2 = 1.5600$$

$$\therefore R = \frac{0.512}{\sqrt{1.560 \times 0.8484}} = 0.5035$$

شرح الجدول:

- العمود الأول (1) يبين قيم X والصف الأول يبين قيم Y.
- العمود الثانى فى الصف الثانى يبين تكرارت $(x_i \ , \ y_j)$.
  مثلاً 14 = تكرار (3,2) و 9 = تكرار $(5,4)$.
- العمود الثالث يعطى مجموع التكرارت n_i لكل x_i.
- العمود الرابع يبين مجموع حواصل الضرب $n_{ij} y_j$ فى كل صف.
- العمود الخامس يبين حاصل ضرب العمود الأول فى قيم الرابع $\sum_j n_{ij} x_i y_j$.
  مثلاً 1×28 = 28 ، 2×117 =234.
- العمود السادس يرى مجاميع $y_i^2 \times n_{ij}$، $\left(\sum_j n_{ij} y_i^2\right)$.
- بالمثل بالنسبة للصفوف.

أسئلة تقويم ذاتي (3)

1) جلس أحد عشر طالباً لامتحان الرياضيات والفيزياء فكانت نتائجهم % كما فى الجدول. حلل هذه النتائج ثم قارن بين النتيجتين .

الرياضيات	65	79	54	82	58	92	43	66	60	71	89
الفيزياء	58	62	72	82	60	80	42	65	44	74	54

2) سُئِل 72 طالبا عن رأيهم فى مستوى الشرح الشفهي للأستاذ ومستوى تحضيره لمادته، فكانت حصيلة آرائهم فى سلم خماسي كما فى الجدول أدناه. ضع الدرجات 5 للممتاز إلى 1 للضعيف، ثم اصف العلاقة بين المستويين من جهة نظر الطلاب.

الجدول الاتي يوضح رأى 72 طالباً فى مستوى تدريس أستاذ

		مستوى التحضير					
	المستوى	ممتاز	جيد	وسط	دون الوسط	ضعيف	المجموع
مستوى الشرح الشفهي	ممتاز	6	5	3	2	0	16
	جيد	6	4	4	3	1	18
	وسط	3	4	5	3	2	17
	دون الوسط	1	2	4	5	2	14
	ضعيف	0	2	1	2	2	7
	المجموع	16	17	17	15	7	72

الخلاصة

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة نأمل عزيزي الدراس أن تكون تعرفت على مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)كالوسط الحسابي والوسيط والمنوال وأصبحت قادراً على أن تحسب كلاً منها من البيانات المبوبة (في شكل جداول تكرارية) أوغير المبوبة أي التي تكون في شكل مفردات.

كذلك نأمل أن تكون أصبحت قادراً على أن تحسب مقاييس التشتت من مدى وتباين وانحراف معياري لكل من نوعي البيانات مبوبة أو غير مبوبة وأيضاً تكون عرفت كيف تحسب التغاير ومعامل الارتباط الخطي.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

تسعى هذه الوحدة إلى أن تجعلك عزيزي الدارس ملماً بعدد الطرق التي يمكن أن تتم بها عملية ما إ(جر اء) وعدد الطرق التي تتم بها عمليات متتابعة. كما تتناول الوحدة أيضاً تعريف التجربة الإحصائيةوفراغها وأحداثها وحساب احتمالات الأحداث المختلفة وتشمل الوحدة ايضاً على معنى إحتمال الاتحاد والتقاطع ومعاني الاستنفاذ والتنافر وكذلك تسعى الوحدة إلى أن تجعلك ملماً بمفهوم الاحتمال الشرطي والاستقلال بنوعيه الاثنين والمتبادل وفي نهاية الوحدة سوف تدرس نظرية بيز واستخداماتها التطبيقية.

إجابات التدريبات

تدريب(1)

بما أن الجدولين يعطيان نفس المعلومة بالضبط فأي معلم يحسب منهما يعطى نفس القيمة بالضبط.

من الجدول الأول:

$$\bar{x} = \frac{99 + 66 + 83 + \ldots + 90}{300} = \frac{23433}{300} = 77.810$$

من الجدول الثاني

$$\bar{x} = \frac{5 \times 43 + 16 \times 52 + \ldots + 9 \times 99}{5 + 16 + \ldots + 9} = \frac{23433}{300} = 77.810$$

.

تدريب (2)

ترتيب الوسيط = $5 = \frac{1+9}{2}$

∴ الوسيط هو القيمة الخامسة = 32 .

تدريب (3)

الحل:

بما أن كل الأعداد غير متكررة فلا يوجد منوال.

تدريب (4)

الحل :

الوسط الحسابى = $11 = \frac{18 + ... + 8 + 2}{9}$

التباين: $S^2 = \frac{(2-11)^2 + (8-11)^2 + ... + (18-11)^2}{11} = 23.333$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي:

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1) الوسط الحسابى = $\frac{100+10+8+6+2}{5} = \frac{126}{5} = 25.2$

الوسيط = القيمة التى ترتيبها $\frac{1+5}{2}$ ، وهى 8

المنوال : لايوجد منوال إذ كل قيمة مكررة مرة واحدة فقط.

2) الوسط الحسابى = $\frac{5+...+2+2+2}{7} = \frac{21}{7} = 3$

الوسيط ترتيبه $\frac{1+7}{2} = 4$ ، لكن 3 ليست وسيطا لان ترتيبها من الأول لا يساوى ترتيبها من النهاية. لذا

نفترض أن القيمتين 3 قريتا من قيمتين فى الفترة 2.5 ، 3.5 ونستخدم التكرار المتجمع ونريد القيمة التى

تقابل تكرارا متجمعا $\frac{N}{2}$ ، وهى الوسيط :

$$\therefore \frac{m-2.5}{3.5-2.8} = \frac{3.5-3}{5-3}$$

$$\therefore m = 2.5 + (3.5-2.5)\left(\frac{3.5-3}{5-3}\right) = 2.5 + 1.0 \times \frac{0.5}{2} = 2.75$$

وهو تقريب .

المنوال = 2. (لاحظ أن 2 لا تمثل و ستط القيم !)

3) الوسط الحسابى = $\frac{14+...+4+4+3}{10} = 8.3$

الوسيط = متوسط القيمتين الخامسة والسادسة لأن العدد زوجي = $\frac{8+6}{2} = 7$

المنوال: يوجد متولان 4 و 14 !

جدول لحساب الوسط الحسابي من الجدول التكراري ولحساب الوسيط من الجدول التكراري المتجمع

4)

x	5.5	9.5	13.5	17.5	21.5	25.5	المجموع
n	3	8	14	18	11	6	60
nx	16.5	76.0	1890.0	3150	236.5	153.0	986.0
$\sum n$	3	11	25	43	54	60	-

الوسط الحسابى= $16.433 = \frac{986}{60} = \frac{25.5\times 6 + .. + 9.5\times 8 + 5.5\times 3}{6 + .. + 8.. + 3}$

الوسيط يقع فى الفئة 16−19، حدودها $15.5 - 19.5$ ، التكرار المتجمع للوسيط = $30 = \frac{60}{2}$

$$\frac{m - 15.5}{30 - 25} = \frac{19.5 - 15.5}{43 - 25}$$

$$\therefore m = 15.5 + 5.\frac{4}{18} = 16.611$$

المنوال يقع فى الفئة ذات التكرار الأكبر : 16−19

بطريقة العزوم :

$$14x = 11(4 - x)$$

$$25x = 11\times 4 \quad \therefore x = \frac{44}{25} = 1.76$$

∴ المنوال $17.260 = 15.5 + 1.76$.

المناقشة:

1) الوسيط أحسن تمثيلاً للمتوسط إذ أن الوسط الحسابى بعيد جداً عن كل القيم يسبب القيمة المتطرفة 100. وبذا لايمثلها، ولايوجد منوال!
2) هذا الجزء يبين بعض المشاكل التى تقابلك باستخدام تعريف الوسيط أما المنوال فهو متطرف ولا يمثل المتوسط للمجموعة.
3) لهذا التوزيع متوالان . لا يمثل أى منهما التوسط فى البيانات .
استخدمنا تعريفاً مختلفاً للوسيط.

4) استخدمنا تقريباً جديداً للمنوال.

من هذه الأمثلة الأربعة نلاحظ أاننا حافظنا على تعريف واحد للوسط الحسابى بينما لجأنا لتعريفات مختلفة بالنسبة للوسيط والمنوال . وكما ذكرنا فى البند 1-6-2 هنالك مشاكل مختلفة قد تقابلنا فى حساب هذين المتوسطين. نلاحظ أيضاً أن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال (عندما يكون معرفاً و فريدا) يكونوا فى هذا الترتيب كما ذكرنا من قبل.

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1)

الوسط الحسابي= $11.12 = \frac{15\times 9 + \ldots + 9\times 10 + 7\times 5}{9 + \ldots + 10 + 5}$

التباين : بما أن الوسط الحسابي غير عدد صحيح فيستحسن استخدام القانون المكافئ الآتي :

$$S^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i} \equiv \frac{\sum n_i x_i^x}{\sum n_i} - \left(\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}\right)^2 = \frac{5\times 7^2 + 10\times 9^2 + \ldots 9\times 15^2}{9 + \ldots + 5} - \left(\frac{256}{50}\right)^2 = 6.506$$

2) الوسط الحسابي:

مراكز الفئات: 5.5 , 9.5 , 13.5 , 17.5 , 21.5 , 25.5

$$\bar{x} = \frac{3\times 5.5 + 8\times 9.5 + \ldots + 6\times 25.5}{(3 + 8 + \ldots + 6)} = \frac{986}{60} = 16.433$$

$$S^2 = \frac{3\times 5.5^2 + 8\times 9.5^2 + \ldots + 6\times 25.5^2}{(3 + 8 + \ldots + 6)} - \left(\frac{986}{60}\right)^2 = 26.663$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

(1) رياضيات: المتوسط 69، الانحراف المعياري = 14.554

الفيزياء:المتوسط 63، الانحراف المعياري = 12.699

$$\left(\sum xy = 489161\right)$$

$$S_{xy} = \frac{48916}{11} - 69 \times 63 = 99.909$$

$$R = \frac{99.909}{14.554 \times 12.699} = 0.541$$

∴ درجات الرياضيات أعلى من درجات الرياضيات فى المتوسط وأكثر تشتتاً . معامل الارتباط كبير موجب مما يدل على ارتباط خطى وثيق بين نتائج المادتين وفى نفس الاتجاه.

(2) جدول لحساب التغاير ومعامل الارتباط الخطى .

		مستوى التحضير								
المستوى		5	4	3	2	1	$\sum_j n_{ij}$	$\sum_j n_{ig} y_j$	$\sum_j n_{ij} y_{ij} x_i$	$\sum_j n_{ij} y_i^2$
مستوى التدريس	5	6	5	3	2	0	16	63	315	265
	4	6	4	4	3	1	18	65	260	265
	3	3	4	5	3	2	17	54	162	198
	2	1	2	4	5	2	14	37	74	115
	1	0	2	1	2	2	7	17	17	51
$\sum_i n_{ij}$		16	17	17	15	7	72	236	828	892
$\sum_i n_i x_i$		65	59	55	43	16	236			
$\sum_i n_i x_i y_i$		325	236	165	86	16	828			
$\sum_i n_{ij} x_i^2$		277	235	201	147	44	904			

المتوسط : مستوى التدريس = $3.306 = \frac{238}{72}$ ، التحضير= $3.278 = \frac{236}{72}$.

الانحراف المعيارى : التدريس = 1.276 ، التحضير = 1.209

التغاير = 0.665. معامل الارتباط = 0.431

فى تقدير الطلاب لمستوى أدائه : فوق الوسط فى الجانبين ، وأن أداؤه فى الجانبين ذو ارتباط كبير موجب.

مسرد المصطلحات

- **التباين Variance (S^2) :**

هو الوسط الحسابي لمربعات اختلاف القيم عن وسطها الحسابي.

- **معامل الارتباط Correlation Coefficient :**

مقياس للعلاقه الخطية بين مربعين.

- **التغاير Covariance :**

قياس لمدي تغير متغيرينمترابطين معا.

- **العشير Decile :**

هو الجزء المتبقي بعد استبعاد 10% .

المدي الربيعي Quartile Range :

الجزء المتبقي من الملاحظات بعد استبعاد 25% .

- **وسط حسابي Mean :**

مجموع القيم مقسومة علي عددها.

- **الوسيط Median :**

قيمة المتغير التي تتوسط قيمة بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.

- **المنوال Mode :**

هو قيمة المتغير التي لها اكبر تكرار.

- **المتغير الاسمي Nominal Variable :**

هو متغير يحمل اسم أو رمز معين يشير الي الاصناف المختلفة.

- **المدي البسيط Simple Range :**

اكبر ملاحظة ناقصا اصغر ملاحظة في حالة المتغير المستمر وتضيف 1 في حالة المتغير المتقطع.

- **الانحراف المعياري Standard Deviation :**

الجذر التربيعي الموجب للتباين.

المراجع

1) أحمد عبدالله ومحمود هندي، الإحصاء التطبيقي. ج الملك سعود، 1995
2) عائشة محمود ود زينون، أساسيات الإحصاء الوصفي: دار عمار، 1996
3) فاتن عبدالحليم ابو على، مبادئ الإحصاء الوصفي: دار الفكي، 2000
4) محمد صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض، مقدمة فى الإحصاء: مركز الكتاب، 1990
5) الجهاز المركزىللإحصاء: الإحصاء الثاني للسكان.
6) الجهاز المركزي للإحصاء السودان فى أرقام 1998-2002م2003
7) منظمة الغذاء والزراعة الأمم المتحدة 1996
8) آلاء الاحمدى وآيات حسن ونهاد وقيع الله نمط الأمراض وسط طلاب مجمع الوسط بجامعة الخرطوم. مشروع بحث تخرج ، كلية العلوم الرياضية . (2003)
9) Spiegel, M.R. and L.J. Stevens (1999) : Statistics (Schaum)


الوحدة الثالثة
مقدمة الاحتمالات
والإحصاء

المحتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	78
تمهيد	78
أهداف الوحدة	78
1. تعريفات أساسية	79
1.1 التجربة	79
2.1 فراغ التجربة	79
3.1 الحدث	80
4.1 الاحتمال	80
5.1 خواص الاحتمال	84
2. الاختيار العشوائي وأحداث التجربة	86
1.2 الاختيار العشوائي	86
2.2 أحداث التجربة	86
3.2 بعض النتائج الهامة	89
3. طرق العد	90
1.3 مبدأ الضرب	90
2.3 مبدأ الجمع	91
3.3 مضروب العدد	91
4.3 التباديل	92
5.3 التوافيق	92

4. الاحتمال الشرطي	97
1.4 الاستقلال الاحتمالي	98
2.4 الاستقلال الاثنيني	99
الموضوع	**الصفحة**
3.4 الاستقلال التبادلي	101
5. قانون بيز وشجرة الاحتمالات	103
1.5 مبرهنة قانون بيز	103
2.5 شجرة الاحتمالات	106
الخلاصة	110
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	110
إجابات التدريبات	111
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	117
مسرد المصطلحات	123
المراجع	125

المقدمة

تمهيد

أهلاً بك عزيزي الدارس في الوحدة الثالثة من مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمالات وهذه الوحدة تأتي مكملة لما تعرضنا له في الوحدة الأولى والثانية حيث أننا تعرضنا في هذه الوحدة إلى التجربة وفراغها وا ٍحداثها بأنواعها المختلفة وكيفية حساب احتمال الحادثة كما وضحنا أيضاً بعض النظريات من خلال هذه الوحدة وكذلك شرحنا في هذه الوحدة طرق العد المختلفة، وأثبتنا بعض النتائج الهامة وكذلك عرفنا الاستغلال الاحتمالي بأنواعه المختلفة.

واختتمنا الوحدة بقانون بيز وشجرة الاحتمالات. نأمل أن تكون وحدة شيقة ومفيدة.

أهداف الوحدة

د فراغك من هذه الوحدة نأمل عزيز ي الدارس أن تكون قادراً على أن:

* **تعرف** أنواع الإحداث المختلفة للتجربة.
* **تحسب** عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن يتم بها أي إجراء أو تجربة.
* **تحسب** إحتمال حدث ما.
* **تفرق** بين الإحداث المستغلة والغير مستغلة.
* **تحسب** إحتمال حدث ما بشرط وقوع حدث آخر.
* **تعرف** قانون بيز وتثبت صحته.
* **تستخدم** قانون بيز في حل المسائل.

1. تعريفات أساسية

لقد عرفنا فى الوحدة الأولى أن علم الإحصاء يعنى بمعالجة الأعداد التى نُحصل عليها بالعد أو القياس. نحتاج الآن لبعض التعريفات:

1.1التجربة Experiment

تعريف: أي عمل تقوم به للحصول على عدد يسمى تجربة.

فعملية العد التي يقوم بها الراعي لأغنامه عبارة عن تجربة، وقياس طول شخص تجربة، و سؤال شخص عما إذا كان متزوجا تجربة. وبذلك نرى أن مفهوم التجربة يختلف عنه فى الفيزياء أو الكيمياء حيث تجرى التجربة تحت ظروف محددة. في الإحصاء قد تكون بعض العوامل تحت السيطرة لكن ليس كلها، وقد تكون كلها خارج السيطرة.

2.1 فراغ التجربة Experimental space

تعريف: فراغ التجربة(أوالفراغ)هو مجموعة جميع النواتج الممكنة نظريا من تكرار التجربة.

فمثلاً فراغ تجربة الراعي هو $Z_+ = \{0,1,2,...\}$، مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة، وفراغ أطوال الأشخاص في منطقة ما قد يكون(120، 220)، وفراغ سؤال الزواج هو{ نعم، لا }، وفراغ رمى زهر النرد هو { 1،2،3،4،5،6 }. عادة نرمز للفراغ بالحرف الكبير S.

في بعض التجارب يمكن تحديد الفراغ بأكثر من طريقة : فمثلا إذا رمينا زهري نرد وكان يهمنا مجموع الناتجين فيمكن اختيار S_1 على أنها مجموعة الأزواج المرتبة (ناتج الزهر الأول، ناتج الزهر االثاني) = (X،Y) ، أو أن نختار S_2 على أنها مجموعة المجاميع الممكنة:

$$S_1 = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1)..(6,6)\}$$
$$S_1 = \{2,3,4,...,12\}$$

ففى S_1 كل عنصر يحدث بطريقة واحدة فقط، أما في S2 فإن 2 تحدث بطريقة واحدة (1،1) و 3 تحدث بطريقتين (1،2) أو(2،1)، وهكذا. في العادة نفضّل الاختيار الذي يحدد طريقة واحدة فقط لكل عنصر إن أمكن ذلك.

3.1 الحدث Event

تعريف: أي مجموعة جزئية من فراغ التجربة تسمى حدثا.

مثلاً الحصول على راع له أكثر من 50 خروفاً حدث، ووجود رجل أقصر من 150 سم حدث، ومقابلة رجل غير متزوج حدث، وناتج رمى الزهر 5 أو 6 حدث. عادة نرمز للحوادث بالحروف اللاتينية الكبيرة A، B، C ... .

4.1 الاحتمال Probability

تعريف الاحتمال تغير كثيرا من التعريف الكلاسيكي (definition Classical) إلى الصورة المجردة للتعريف (axiomatic definition) ، حسب تطور علم الاحتمالات إليك عزيزي الدارس هذه التعريفات.

أ) التعريف الكلاسيكي للاحتمال Classical definition

أفرض أن A حدث في فراغ S، وان عددي عناصر A و S هما n و N.

فنعرف احتمال الحدث A [ويكتب $p(A)$] على أنه $p(A)=\frac{n}{N}$.

مثال(1)

أفرض أن التجربة هي رمى زهر النرد مرة واحدة. وأن A يعنى أن الناتج 5 أو 6.

$$\therefore S = \{1,2,3,4,5,6\},\ A = \{5\ ,\ 6\}$$

$$6 = N \quad , \quad 2 = n$$

$$\therefore p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

وهذايعنى نظرياً أنه إذا كررنا التجربة عددا كبيراً جداً من المرات فإن حدوث A يشكل ثلث المرات. بالطبع إذا رمينا الزهر 100 مرة فلن نحصل بالضبط على ثلث هذا العدد من A، فنسبة حدوث A تتغير كلما رمينا الزهر 100 مرة. هذا يقودنا للتعريف الثاني للاحتمال.

مثال (2)

فى تجربة رمى زهري النرد أوجد الاحتمالات الآتية:

$A \equiv$ مجموع ناتجى الزهرين يساوى 4.

$b \equiv$ مجموع الناتجين يساوى 10 على الأقل.

$C \equiv$ ناتج الزهر الثاني يساوى 6.

$D \equiv$ مجموع الناتجين أكبر من 5.

$E \equiv$ ناتج احد الزهرين يساوى 6.

$F \equiv$ مجموع الناتجان أقل من 10.

الحل:

نختار الفراغ فى الصورة $S = \{(1,1),(1,2),...(1,6),(1,2),...(6,6)\}$

فى هذه الحالة العناصر متنافرة ومستنفذة واحتمالاتها متساوية $\left(\frac{1}{36}\right)$

$$\therefore\ p(A) = p[(1,3),(2,2),(3,1)] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p(B) \equiv p(\geq 10) = p(10) + p(11) + p(12)$$

$$B \equiv \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$$\therefore\ p(\geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$C \equiv \{(1,6),(2,6),\cdots,(6,6)\}$$

$$\therefore\ p(c) = \frac{23}{36} = \frac{1}{6}$$

$$D \equiv \{(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),\cdots,(6,6)\}$$

$$\therefore\ p(D) = \frac{23}{36} = \frac{23}{36}.$$

$$E \equiv \{(6,1),(6,2),\cdots,(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\}$$

$$\therefore\ p(D) = \frac{11}{36} = \frac{11}{36}$$

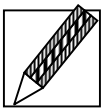
$$F \equiv \{(1,1),(1,2),\cdots,.(1,6),(2,1),\cdots,(6,3)\}$$

$$\therefore\ p(F) = \frac{30}{36} = 5/36$$

ناتج الزهر الأول	ناتج الزهر الثاني					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	*
5	6	7	8	9	*	*
6	7	8	9	*	*	*

الحدث F.

تدريب (1)



1) مِـي زهـران مـرة واحـدة . إذا لـم يتكـرر نـاتج فـى الزهـرين أوجـد احتمال أن أحد الناتجين كان 5.

ب) التعريف التكراري للاحتمال Frequencial definition

أفرض أننا بدأنا برمي الزهر 100 مرة وحسبنا نسبة A، ثم أكملنا عدد الرميات إلى 200 و حسبنا نسبة A، ثم أكملنا عدد الرميات إلى 500 و حسبنا نسبة A، و هكذا، فإننا نلاحظ أن النسبة تتغير كل مرة، لكن مع استمرار التجربة نلاحظ أن النسبة تقترب من كسر معين. هذا الكسر يسمى احتمال A.

ج) التعريف الاعتقادى للاحتمال Degree of belief

مع تقدم الزمن وجد أن هذين التعريفين لايفيان لكل التجارب. فظهر تعريف الاحتمال بأنه مستوى الاعتقادفهناك تجارب لايُعرف فيها عدد عناصر الفراغ أو الحدث. مثلاً إذا أردنا تحديد احتمال فوز فريق المريخ على الهلال فى مباراة قادمة، فليست هنالك فراغ بالمفهوم السابق حتى نحسب عدد عناصره وبالتالى عدم امكانية عد عناصر الحدث. كما أنه ليس من الممكن تكرار التجربة (إجراء مباريات بينهما) لنستخدم التعريف التكراري . بالطبع يمكن لكل شخص أن يفكر فى احتمال الحدث من رؤيته الخاصة بناء على مباريات سابقة، إعداد الفريقين، لاعبيهما الخ . هذا الاحتمال يسمى احتمال اعتقاد.

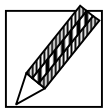
د) التعريف التجريدي للاحتمال Axiomatic definition

في هذا التعريف لا نشير إلى موضوع محدد ولكن نتحدث عن قانون يمثل الاحتمال في تجربة ما : أي دالة حقيقية تحقق الشروط الآتية تسمى دالة احتمال، بمعنى أنها وصف حدثٍ ما فى تجربة ما:

$$I \qquad f(x) \geq 0 \qquad x \in S$$
$$II \qquad f(S) = 1$$
$$III \quad f\left(\underset{C}{\cup} A_i \right) = \sum_i f(A_i)$$

هذه الشروط مستنبطة من خواص الاحتمال في التعريف الكلاسيكي.

تدريب (2)



حقق فى ما إذا كانت آى من الدوال الآتية تمثل دالة احتمال:

(1) $f(x)=\frac{1}{10}(4-x);x=0,1,2,3,4.$

(2) $f(x)=\frac{1}{10}(4-x);x=3,4,5$

(3) $f(x)=\frac{1}{10}(4-x);x=-1,0,1,2$

(قيم X تعطى عناصر S)

5.1 خواص الاحتمال Properties of Probability

من هذين التعريفين نصل إلى النتائج الآتية :

(1) $P(A)\geq 0$

لان n و N عددان غير سالبين.

و بما أن n عدد عناصر المجموعة الجزئية من S . لذا $n \leq N$ و بالتالي:

(2) $P(A)\leq 1$.

(3) $P(S)=1$.

(4) $p(\phi)=0$

5) إذا كانت $A_k ...,A_2,A_1$ حوادث لايمكن حدوث أي اثنين منها معا، أي أن

$$A_I \cap A_J = \phi \,.\, I \neq j$$

فإن

$$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)=p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_k)$$

$$p\left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} p(A_i)$$.

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1)ماهى الفروق بين تعريفات الاحتمال أعلاه.

2)أى تعريفات الاحتمال يصلح لاستخدامه لتقدير الاحتمالات فى الحالات الآتية:

أ. احتمال صورة فى رمى عملة معدنية.

ب. احتمال شروق الشمس غدا من المشرق.

ج. احتمال $x = 0.2$ ، $x = 0,1,2,3,4$.

د. احتمال الحصول على طالبة من الصف الأول عند اختيار طالبة عشوائياً من الكلية.

هـ. احتمال أن تستغرق الرحلة من المنزل إلى الكلية اقل من عشرين دقيقة.

و. احتمال الحصول على 3 كرات حمراء عند الاختيار العشوائي لخمس كرات من صندوق به

4 كرات حمراء و 7 بيضاء.

ز. احتمال مرور عربة تاكسي أمام بوابة الكلية فى نصف ساعة.

ح. احتمال غياب المحاضر عن المحاضرة.

ط. احتمال وجود خطأ مطبعي فى صفحة من كتاب معين.

ى. إحتمال $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x}$, $x = 0, 1$.

2. الاختيار العشوائي وأحداث التجربة

1.2 الاختيار العشوائي Random Selection

أفرض أننا نريد اختيار عنصر من فراغ S . يسمى هذا الاختيار عشوائياً إذا كان ممكنا من الناحية النظرية تحديد احتمالات وقوع الاختيار على كل عنصر من S . مثلاً اختيار عدد من $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. ثم تم ذلك الاختيار برمي زهر النرد، فإننا نعرف أن احتمال كل وجه يساوى السدس إذا كان الزهر عادلا (fair) بمعنى فرص الأوجه متساوية.

2.2 أحداث التجربة

والأن عزيزي الدارس يمكننا أن نعرف أحاث التجربة من حيث احتمال وقوعها كما يلي:

أ) الحدث المستحيل Impossible Event:

الحدث المستحيل هو الذى لايمكن حدوثه مهما كررنا التجربة. مثلا إذا رمينا الزهر وكان الحدث هو الحصول على سبعة . فمهما نرمي الزهر لن ينتج عن هذا الحدث. فى هذه الحالة $p(7) = 0 \equiv$ (الناتج 7) p . نرمز للحدث المستحيل بالرمز ϕ (فاي).

ملاحظة

إذا كان الحدث مستحيلاً فإن احتماله صفر، أما إذا كان احتمال حدث آخر صفراً فهذا يعنى أن الحدث مستحيل أو في حكم المستحيل (وليس بالضرورة استحالة مطلقة). مثلا إذا اخترنا شخصاً من ميدان الأمم المتحدة الخرطوم فاحتمال أن دخله اكبر من 20 مليون دينار فى الشهر هو الصفر (في حكم المستحيل)، لكن هذا لايعنى عدم إمكانية وجود مثل هذا الشخص.

ب) الحدث المؤكد: Sure Event

الحدث المؤكد هو الذي يحدث في كل مرة تُجرَى فيها التجربة. وهو مرادف للفراغ S. مثلا إذا رمينا زهر النرد وكان A = (الحصول على عدد أقل من عشرة)، فإن احتمال A هو الواحد. احتمال الحدث المؤكد هو الواحد. بذا يمكن اعتبارالحدث المؤكد إسم آخر للفراغ

ج) الحوادث المتنافرة : Exclusive Events

تسمى الحوادث $A_k,...,A_2,A_1$ في S متنافرة أو متناهية إذا كان احتمال حدوث كل اثنين منها معا يساوى الصفر، أي إذا كان

$$\forall_{i,j}: p(A_i \cap A_j)=0 \quad , \quad i \neq j$$

إذا كان A و B, حدثين فإن تقاطعهما $A \cap B$ يعنى حدوثهما معا، واتحادهما $A \cup B$ يعنى حدوث أحدهما على الأقل. لذا نقرأ الحدث الأول (A و B) والثانى (A أو B). لاحظ أن معنى (أو) هنا (A أو B أو الاثنين معا) و هو يختلف عن المعنى السائد عند العامة.

د) الحوادث المستنفذة : Exhaustive Events

تسمى الحوادث $A_k,...,A_2,A_1$ في S مستنذة إذا كان اتحادها يساوى S :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \mathrm{S}$$

خاصيتا الاستنفاذ و التنافر مستقلتان، وبذلك تقسمان مجموعات الحوادث إلى أربعة :

جدول تقسيم مجموعات الحوادث حسب الاستنفاذ والاستنفار

الخاصية	مستنفذة	
	نعم	لا
متنافرة : نعم	متنافرة مستنفذة	متنافرة غير مستنفذة
لا	مستنفذة غير متنافرة	غير متنافرة ولا مستنفذة

هـ) الحدث المكمل Complementary Event

افرض أن A حدث فى S. الحدث المكمل هو عدم حدوث A ونرمز له بالرمز A' أو $\overline{A}$ أو A^C. إذا مثلنا للفراغ S بمستطيل والحدث A بدائرة داخله فإن A^C تمثل بالمساحة داخل المستطيل خارج دائرة A .

إذا كان لدينا حدثان A و B فيمثلان بدائرتين داخل مستطيل S، هما بصفة عامة يقسمان الفراغ (المستطيل) الى أربع حوادث متنافرة مستنفذة

$$A \cap B \, , \, A \cap B^C \, , \, A^C \cap B \, , \, A^C \cap B^C$$

وا ٍذا كانت 3 حوادث فإنها تقسم الفراغ إلى ثمانية (2^3) حوادث متنافرة مستنفذة، وبصفة عامة k حدثا يقسم الفراغ الى (2^k) حدثا متنافرة ومستنفذة. فى هذا التمثيل اتحاد حدثين يمثل بكل المساحة داخل الدائرتين منفردتين ومشتركتين ويمثل التقاطع بالجزء المشترك بينهما فقط.

➢مثال(3)

رمينا.زهر النرد وكان

$$\{1,3,4\} \equiv B\ , \{1,2,3\} \equiv A$$
$$\{2,5\}\ \equiv D\ , \{4,5,6\} \equiv C$$

أوجد الاحتمالات الآتية

(1) $p(A \cap B)$ (2) $p(A \cap C)$
(3) $p(B \cup D)$ (4) $p(A \cap B)$
(5) $p(A \cup C)$

الحل:

(1) $p(A \cap B) = p(\{1,3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

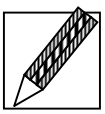
(2) $p(A \cap C) = p(\phi) = 0$

(3) $p(A \cup D) = p(\{1,2,3,5\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(4) $p(A \cup C) = p(\{1,3,4,5,6\}) = \frac{5}{6}$

(5) $p(A \cup C) = p(\{1,2,3,4,5,6\}) = \frac{6}{6} = 1$

تدريب (3)



1) افرض أن A ، B ، C حدثان فى S . أي هذه الحوادث الآتية متساوية ، وايها متنافرة وأيها مستنفذة للفراغ ؟

(1) $A \cup B$ (2) $(A \cap B)^c$ (3) $A^c \cup B^c$
(4) $(A \cap B)^c$ (5) $A^c \cup B^c$ (6) $A \cup B^c$

3.2 بعض النتائج الهامة

نتيجة(1)

$$p(A) = 1 - p(A^c) \quad (1)$$

البرهان:

بما أن A و A^c متنافران ومستنفذان، فإن $1 = p(S) = p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$

$$\therefore p(A) = 1 - p(A^c)$$

هذه النتيجة تستخدم في إيجاد احتمال حدث A عندما يكون من الأسهل حساب احتمال الحدث المكمل A^c .

مثال (4)

فى تجربة رمى زهرين، أوجد احتمال أن ناتج أحد الزهرين أقل من 4.

الحل:

أحد الزهرين أقل من أربعة يطابق أن مجموع الناتجين أقل من 10. وهو مكمل للحدث مجموع الناتجين يساوى 10 على الاقل. (انظر مثال 2-2-2(B)) إذا الحدث المطلوب هو $\therefore B^c$

$$p(B^c) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{6} = 1/6$$

نتيجة (2)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

البرهان:

وهذه الحوادث الثلاثة متنافرة . من خواص الاحتمال

$$p(A \cup B) = p(A \cup B^c) + p(A \cap B) + p(A^c \cap B)$$

$$= [p(A \cup B^c) + p(A \cap B)] + [p(A^c \cap B) + p(A \cap B)] - p(A \cap B)$$

$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

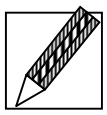
نتيجة (3):

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(B \cap C) - p(C \cap A) + p(A \cap B \cap C) \quad (2)$$

ويمكن برهان ذلك بالنتيجة (2)

وهكذا.

تدريب (4)



برهن النتيجة (3).

3. طرق العد Methods of Counting

فى كثير من المسائل نحتاج لاستخدام التعريف الكلاسيكى للاحتمالات لإيجادها. هذا يتطلب منا معرفة عدد عناصر الحدث وعدد الفراغ . فى هذا البند نتطرق لطرق ايجاد عدد العناصر فى بعض الحالات .

1.3 مبدأ الضرب

إذا كان حدث A يحدث بـ N_1 طريقة مختلفة وحدث آخر B ب N_2 طريقة مختلفة والحدثان مستقلان بمعنى لا يؤثر حدوث A على حدوث B فإنهما يحدثان معا بـ $N_1 \times N_2$ طريقة مختلفة.

مثال (5)

رجل يريد السفر من ود مدنى الى الحصاحيصا ثم من الحصاحيصا الى الخرطوم. أمامه 3 وسائل سفر من ود مدنى و5 وسائل من الحصاحيصا . يكم طريقة مختلفة يمكن الوصول الى الخرطوم. لاحظ أن اختياره للوسيلة في الرحلة الأولى مستقل عن اختياره للوسيلة الثانية.

لذا عدد الطرق = 3 × 2 =15 طريقة مختلفة.

2.3 مبدأ الجمع

أما إذا أريد حدوث طريقة واحدة إما الحدث الأول أو الثانى وليس الاثنين معا فإن ذلك يحدث ب ($N_1 + N_2$) طريقة.

مثال (6)

رجل يريد السفر من كوستى الى الخرطوم. يمكنه السفرعن طريق الدويم وأمامه 4 وسائل مواصلات أو عن طريق ود مدنى وأمامه 6 طرق مواصلات. بكم طريقة مختلفة يمكن الوصول الى الخرطوم.

الحل : عدد الطرق = 4+6=10.

لاحظ فى المثال الأول يجب على الرجل الجمع بين وسيلة من ود مدنى وأخرى من الحصاحيصا. لكن فى المثال الثانى هذا الجمع غير ممكن فإما عن طريق الدويم أو عن طريق ود مدنى وليس الاثنين معا. عند إستخدام (و) نضرب (مبدأ الضرب) وعند استخدام (أو) نجمع (مبدأ الجمع).

3.3عدد الطرق المختلفة لترتيب N عنصراً مختلفا في صف(مضروب العدد)

العنصر الأول يمكن أن يحدد موقعه بطريقة واحدة، والثانى بطريقتين يمين او يسار الأول، الثالث بثلاث طرق يمين الاثنين أو يسارهما أو بينهما، والرابع بأربع طرق وهكذا. لذلك فإن عدد الطرق الكلى هو $N = N!$ 1.2.3,... ويسمى مضروب N.

مثال (7)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من خمسة أرقام مستخدما الأرقام 1،2،3،4،5.

عدد الطرق = 5! =120.

4.3 التباديل Premutation

(عدد الطرق المختلفة لإختيار n عنصرا من N عنصراً مختلفا مع ترتيب الاختيار)

تخيل أن لدينا n مقعداً مرقما وهنالك N شخصاً، لمعرفة عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها ملء المقاعد. المقعد الاول له N طريقة، والثانى $(N-1)$ طريقة، والثالث $(N-2)$ طريقة وهكذا حتى المقعد الأخير ويمكن لأن يملا بـ $(N-n+1)$طريقة.

∴ عدد الطرق المختلفة لملء المقاعد هو $N(N-1)(N-2)...(N-n+1)$

أى $\frac{N!}{(N-n)!}$

هذا العدد يسمى N تباديل n (N permutation) ويرمز له بالرمز ${}_N P_n$ أو ${}^N P_n$

مثال (8)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 3 أرقام من الأرقام 1،2،3،3،4،5،6 دون تكرار أى رقم.

عدد الطرق ${}^7 P_3$

مثال (9)

لدينا 15كتاباً مختلفاً نريد ترتيبها على رف يسع لـ 5 كتب. بكم ترتيب يمكن تنفيذه؟

عدد التراتيب الممكنة ${}_{15} P_8$ = 360ترتيباً مختلفاً .

5.3 التوافيق

(عدد الطرق المختلفة لاختيار n عنصراً مختلفاً بدون ترتيب)

هنا المقصود أن ترتيب العناصر المختارة ليس مهما. عدد الطرق

$$\frac{N(N-1)...(N-n+1)}{n!}$$

أفرض أن n = 3 وكان الاختيار وقع على أحمد (أ) وبابكر (ب) وجمال (ع) فى حالة أن الترتيب مهم فهذه الأسماء يمكن ترتيبها ب 3!ترتيباً مختلفاً :

(أ،ب،ج)، (أ،ج، ب)، (ب،ا،ج)، (ب،ج،أ)،(ج،أ،ب)، (ج،ب،أ) . ثلاثيات مرتبة. لكن إذا كان ترتيب الأسماء غير مهم فهذه تشكل اختياراً واحد { أ،ب،ع } . لذا كل مجموعة من 3 عناصر يقابلها 3! ترتيباً لها. بذلك فإن عدد تراتيب n من N يساوى $n!$ ضعفا للطرق بدون ترتيب.

إذا عدد الطرق بدون ترتيب هو،أى أن $_N C_n = \frac{N!}{(N-n)!}.\frac{1}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$.

و يسمى هذا العدد N توافيق n (N Combination n) و نرمز له بالرمز $^N C_n$ او $_n C_n$

تدريب (5)

جمعية بها 50 عضوا يراد اختيار 6 منهم لعضوية اللجنة التنفيذية.

1) كم لجنة مختلفة يمكن تكوينها إذا كانت اللجنة من رئيس و سكرتير و أمين خزينة و سكرتير ثقافي و سكرتير رياضي و عضو ؟

2) كم لجنة مختلفة يمكن تكوينها إذا لم يرد تحديد وظائف لأعضائها ؟

ملاحظة:

أ) بصفة عامة عدد طرق ترتيب N شيئاً فى صف إذا كان n_1 شيئاً منها متطابقا و n_2 شيئا متطابقا من نوع ثانى و n_3 شيئا متطابقا من نوع ثالث وهكذا $\left(N = \sum n_i\right)$ هو $\frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!,\ldots}$.

ب) عدد طرق اختيار n من Nعنصرا مختلفا إذا كان تكرار العنصر مسموح به هو N^n .

المفردة الأولى يمكن اختيارها بـ N طريقة، ولذلك الثانية N طريقة (لأن التكرار مسموح به) الخ. إذا عدد الطرق هو $N.N.N...N = N^n$.

مثال (10)

كم كلمة مختلفة يمكن تكوينها من جميع حروف كلمة Parallogram دون اعتبار للمعنى ؟

الحل:

الكلمة تتكون من 11 حرفا منها A مكررة 3 مرات كل من L و R مرتين وكل من P,O,M,G مرة واحدة.

∴ عدد الكلمات المختلفة هو:

$$\frac{11!}{1!1!1!1!2!3!} = 3,326,400$$

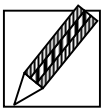
.

➢مثال (11)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الارقام 1،2،3،4،5،6 إذا كان التكرار مسموح به .

عدد الطرق = $6^3 = 216$.

تدريب (6)



إناء به ست كرات حمراء و 10 كرات بيضاء وكل الكرات متطابقة ما عدا اللون.

أ) بكم طريقة بمكن اختبار 5 كرات من الإناء؟

ب) بكم طريقة يتم هذا الاختيار بحيث يشمل كرتين حمراوين؟

ج) بكم طريقة يتم هذا الاختيار بحيث عدد الحمر أقل من 3؟

د) بكم طريقة يتم هذا الاختيار بحيث عدد الحمر يفوق عدد البيض؟

ثم أوجد احتمالات الحوادث ب، ج، د .

☝ **ملاحظة** : فى حساب المضروبات نعرف $0! = 1$

➢مثال (12)

جلس خمسة طلاب (أحمد، بابكر، جميلة، دلال، هاشم) متجاورون فى الصف الأمامى . أوجد احتمالات الحوادث الآتية:-

1) $A \equiv$ جلوس هاشم فى أول الصف من اليمن.

2) $B \equiv$ جلوس البنتين على طرفى الصف.

3) $C \equiv$ جلوس جميلة أول الصف ودلال أخره

4) $D \equiv$ جلوس جميلة يمين دلال مباشرة.

5) $E \equiv$ جلوس جميلة ودلال متجاوزين.

6) $F \equiv$ عدم جلوس ولدين متجاوزين.

7) $G \equiv$ عدم جلوس البنتين متجاوزين.

الحل :عدد طرق الجلوس بدون شرط هو !5 (عدد عناصر الفراغ).

عدد الطرق وهاشم فى أول الصف هو !4 (لاننا نستبعد هاشم.

1) والمقعد الأول ثم تجلس بقية الطلاب و !4 طريقة.

$$\therefore p(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

2) عدد الطرق = 2×3 (نستبعد البنتين ثم نجلس الطلاب الثلاثة بـ 3! طريقة.

بالنسبة البنتين تجلسان بطريقتين)، وهكذا (3) :

$$\therefore p(B) = \frac{3!\ 2}{5!} = \frac{1}{10} \qquad p(c) = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$$

4) نجلس الأول أولا بـ !3 طريقة تبقى 4 مواقعة للبنتين

∴ عدد الطرق !3 . 4. الخ

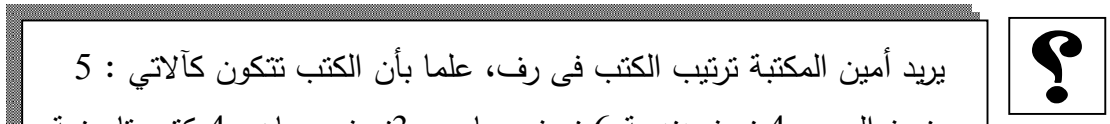
5) $$p(E) = \frac{2!.4.3!}{5!} = \frac{2}{5}$$

6) $$p(F) = \frac{3!\ 2}{5!} = \frac{1}{10}$$

(نجلس الأول أولاً ب !3 طريقة ثم نجلس البنتين بين الأولاد بـ!2 طريقة)

7) $$p(G) = 1 - p(E) = \frac{3}{5}$$.

أسئلة تقويم ذاتي (2)



يريد أمين المكتبة ترتيب الكتب فى رف، علما بأن الكتب تتكون كآلاتي : 5 نسخ الجبر، 4 نسخ هندسة 6 نسخ حساب ، 3نسخ حسبان و4 كتب تاريخية مختلفة. بكم طريقة مختلفة يمكن

أ) ترتيب الكتب على الرف.

ب) ترتيب الكتب على الرفع شريطة النسخ من الكتاب الواحد تكون متجاوزة.

أوجد احتمال (ب)إذا كان الترتيب عشوائياً .

2) يراد تكوين لجنة من 9 أشخاص يختارون عشوائياً من 14 رجلاً و8 نساء . أوجد احتمال تكوين اللجنة

أ)من الرجال فقط

ب) من النساء فقط

ج) بأغلبية من الرجال

د) باشتراك إمراة وحدة على الاقل.

3) يراد تكوين عدد من ثلاثة أرقام مستخدمين الارقام 1، 2، 3، 4،5على ان يكون الاختيار للارقام ومواقعها عشوائياً شريطة أن لا يتكرر رقم فى العدد المكون

أ)بكم طريقة يمكن تكوين العدد.

ب) اوجد احتمال أن العدد المكون زوجى.

ج) أوجد احتمال أن العدد أكبر من 300.

د) اوجد احتمال أن العدد زوجى أكبر من 300.

هـ) أوجد احتمال ان العدد يقبل القسمة على 3.

4) أجب عن السؤال (3) إذا كان تكرار الارقام مسموح به قارن الاجابتين.

4. الاحتمال الشرطي Conditional Probability

أفرض أن A و B حدثان في S. في بعض الأحيان – و لسبب أو آخر – نكون محصورين في B و نريد احتمال A . في هذه الحالة يصبح الحدث B و كأنه فراغ. لذلك في حسابنا لاحتمالات A ننسب إلى B بدلا عن S. هذا النوع من الاحتمال يسمى احتمال A معطى B (أو مشروطا ب B)، و نرمز له بالرمز : $p(A|B)$ و هو يساوي

$$p(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\times\frac{n(S)}{n(A)}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}.$$

حيث n(A) تعني عدد عناصر A.

ملاحظة :

في علم الا حتمالات نرمز للاحتمال $p(A\cap B)$ بالرمز p(AB).

مثال (13)

بالسنة الثالثة 75 طالبا منهم 30 يدرسون الأحياء (B) ، 15 يدرسوى الرياضيات الإضافية (A) خمسة يدرسون المادتين و البقية أدبيون. رأى أستاذ الأحياء أحد الطلاب طلابه يخرج من الفصل.أجد احتمال أن هذا الطالب يدرس إضافية أيضاً .

الحل :

$$p(A|B)=\frac{pAB)}{p(B)}=\frac{(\frac{5}{75})}{(\frac{30}{75})}=\frac{1}{6}.$$

.

1.4الاستقلال الاحتمالي Stochastic Independence

تعريف

أفرض أن A و B حدثان في S. نقول أن A مستقل عن B إذا كان

$$p(A|B) = p(A)$$

أي إذا كان احتمال A ثابت إذا حدث B أم لا.

مبرهنة (Theorem)

إذا كان A مستقلا عن B فإن

(1) $p(AB) = p(A)p(B).$

(2) $p(B|A) = p(B).$

أى أن B مستقل عن A .

البرهان:

بما ان A مستقل عنB فإن $P(A/B) = P(A)$. بالضرب العكسى:

$$\therefore P(AB) = P(A)\cdot P(B)$$

$$(2) \quad \therefore P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$\therefore$ B مستقل عن A.

ذلك عندما يكون حدث مستقلا عن آخر فإننا نقول أن الحدثين مستقلان. ويمكن أن نأخذ النتيجة (1) فى المبرهنة تعريفاً للاستقلال.

مثال (14)

فى المثال (13) الموجود في الصفحة التاليةهل A و B مستقلان؟

$$P(A)=\frac{10+5}{10+5+25+35}=\frac{15}{25}=\frac{3}{25}$$

$$P(B)=\frac{5+25}{75}=\frac{30}{75}=\frac{2}{5}$$

$$P(AB)=\frac{5}{75}=\frac{1}{15}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{25}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{125}\neq\frac{1}{15}$$

إذا A و B غير مستقلين.

2.4 الاستقلال الاثنينى Pair wise Independence

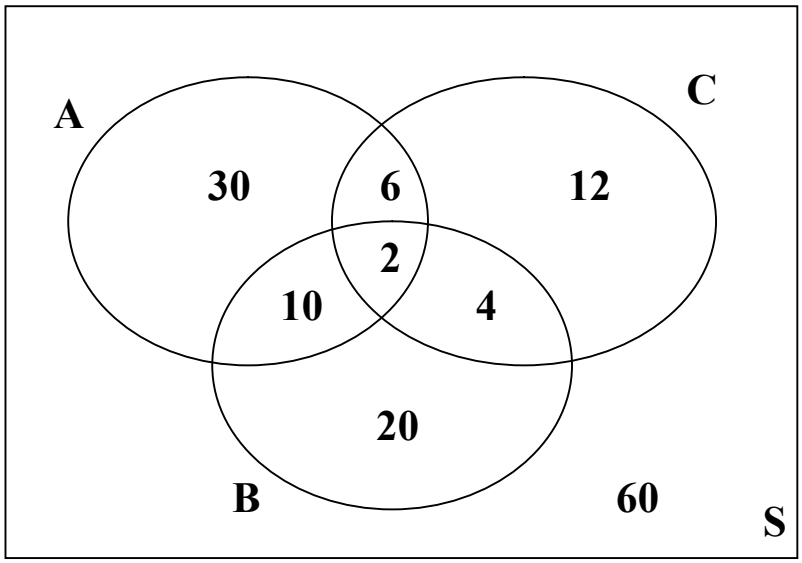
تعريف : أفرض أن $A_n,\ldots,A_2,A_1$ حوادث فى فراغ S . نقول أن هذه المجموعة من الحوادث مستقلة اثنينيا إذا كان كل اثنين منها مستقلين. أي إذا كان

$$\forall_{i,j}(i\neq j): P(A_iA_j)=P(A_i).P(A_j)$$

(الرمز $\forall_{ij}$ يعنى لكل قيم i و j فى المجال المذكور).

مثال (15)

فى كلية ما توزيع الطلاب بين علوم الاحياء(B) والكيمياء (C) والآثار (A) كما في شكل فن الآتي . حقق فى الاستقلال الاثنينى.



الحل : العدد الكلى $n(S)=144$

$$P(A)=\frac{48}{144}=\frac{1}{3}\,,\ P(B)=\frac{36}{144}=\frac{1}{4}\,,\ P(C)=\frac{24}{144}=\frac{1}{6}$$

$$P(BC)\ =\frac{6}{144}\ \ =\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=P(B)\cdot P(C)$$

∴ C و B مستقلان

$$p(AC)=\frac{8}{144}=\frac{1}{18}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$$

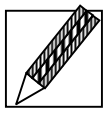
∴ C و A مستقلان

$$P(AB)=\frac{12}{144}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot(B)$$

∴ A و B مستقلان

∴A و B و C مستقلة اثنينيا.

تدريب (7)



اخترنا رقمين على التوالى عشوائيا من الارقام 1 ،2 ،3 ، 4 ، 5. اوجد احتمال اختيار عدد فردى

أ) فى المرة الأولى. (ب) فى المرة الثانية . (ج) فى المرتين .

3.4 الاستقلال التبادلي Mutual Independence

تعريف : نقول أن مجموعة حوادث مستقلة تبادلياً إذا كان احتمال تقاطع كل مجموعة جزئية منها يساوى حاصل ضرب احتمالاتها منفردة. أى

$$P\left(A_i A_j\right) = P(A_i)\cdot P(A_i) \quad i \neq j$$
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_i A_j A_k\right) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)\, i \neq j \neq k \neq i$$
$$p(A_i\, A_j A_k A_e) = p(A_i)P(A_j)p(A_k)\cdot P(A_e)$$

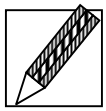
حيث الدلائل غير متساوية

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) = \pi_{i}^{n} P(A_i)$$

لاحظ أن عدد هذه الشروط هو

$${}^{N}C_2 + {}^{N}C_3 + {}^{N}C_4 + ... + {}^{N}C_N \quad = \quad 2^n - n - 1.$$

تدريب (8)



احتمال أن يعيش رجل عشرين عاما أخرى يساوى $\frac{4}{9}$ واحتمال أن تعيش زوجته نفس المدة $\frac{3}{8}$.

أوجد الاحتمالات الآتية

أ) أن يعيش الاثنان عشرين عاما.

ب) أن يعيش الرجل دون المراة عشرين عاما

ج) أن يتوفيا قبل العشرين عاما.

➢مثال (16)

في المثال (14) نجد أن

$$P(ABC) = \frac{12}{142} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

هذه النتيجة مع نتائج المثال السابق تبرهن أن A و B و C مستقلة تبادلياً .

ملاحظة:

(1) شرط الاستقلال الاثنينى يقابل فقط الشرط الأول فى الاستقلال التبادلى. لذلك فإن الاستقلال الاثنينى لايعنى الاستقلال التبادلى، لكن الاستقلال التبادلي يتضمن الاستقلال الاثنينى.

(2) إذا كان إحتمال حدوث جميع الحوادث مجتمعة يساوى حاصل ضرب احتمالاتها منفردة، فهذا لايعنى أى نوع من الاستقلال.

تدريب (9)



فى سجلات مدرسة من 120 طالباً لوحظ اللآتى:-

18 طالباً مسجلاً لكل من التخصص (m) والاحياء (B) .

50طالباً مسجلاً للاحياء أو الجغرافيا (G) وليس للتخصص

45طالباً مسجلاً للاحياء أو التخصص وليس الجغرافيا

60طالباً مسجلاً للتخصص أو الجغرافيا وليس الاحياء

17طالباً مسجلاً للتخصص وليس الاحياء أو الجغرافيا

15طالباً مسجلاص للاحياء وليس التخصص أو الجغرافيا

28طالباً مسجلاً للجغرافيا وليس التخصص أو الاحياء

20طالباً غير مسجل لآى من المواد الثلاث.

بين هذه البيانات فى شكل فن ثم أوجد احتمالات التسجيل

أ) للثلاث مواد معا.

ب) للرياضيات تخصص فقط.

ج) للاحياء وليس الجغرافيا.

د) غير مسجل للاحياء

هـ) لمادة واحدة فقط.

و) هل الحوادث G وB و M مستقلة

(1) اثنينيا ؟ (2) تبادليا ؟

مبرهنة

أفرض أن $A_n,...,A_2,A_1$ حوادث مستنفذة ومتنافرة فى فراغ S، وأن B أى حدث آخر.

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(B|A_i)P(A_i)$$

فإن

$$B=(B\cap A)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_n)$$

$$\therefore P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+...+p(BA_n)$$

لأن $\{B\cap A_i\}$ متنافرة أيضاً ومستنفذة لـ B . لذلك احتمال اتحادها يساوى مجموع احتمالاتها منفردة من تعريف دالة الاحتمال. إذا

$$P(B) =]\ (B\cap A)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_n)\ p[$$

$$= P(B|A_i)P(A_i)+P(B|A_2)p(A_2)+...+P(B|A_n)P(A_n)$$

من النتيجة التى تبعت تعريف الاحتمال الشرطى .

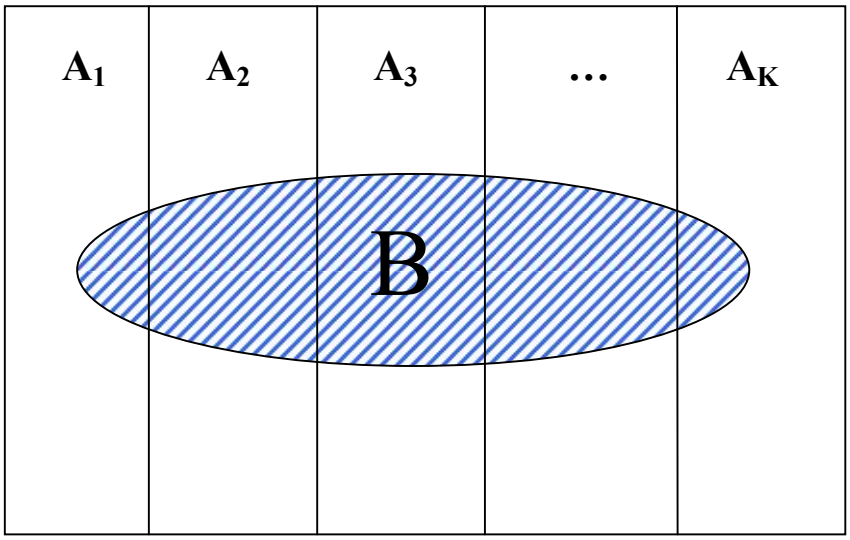
5. قانون بيز(Bayes' Law) وشجرة الاحتمال

1.5 قانون بيز(Bayes' Law)

أفرض أن $A_n,...,A_2,A_1$ حوادث مستنفذة ومتنافرة وأن B أى حدث آخر.

فإن

$$P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{k} p(B|A_i)p(A_i)}$$



البرهان :

$$P(A_k|B)=\frac{P(BA_k)}{P(B)}=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)}$$

من تعريف الاحتمال الشرطى و نتيجة النظرية السابقة.

مثال (17)

مدرسة ثانوية من ثلاثة صفوف I, II ,III . ربع المدرسة فى الصف الأول وثلثها فى الثانى . $\frac{1}{6}$ طلاب الصف الأول و $\frac{1}{4}$ الصف الثانى و $\frac{1}{3}$ الصف الثالث أعضاء في جمعية الرياضيات. اخترنا طالباً عشوائياً من المدرسة فكان عضوا فى الجمعية. أوجد احتمال أنه من الصف الأول.

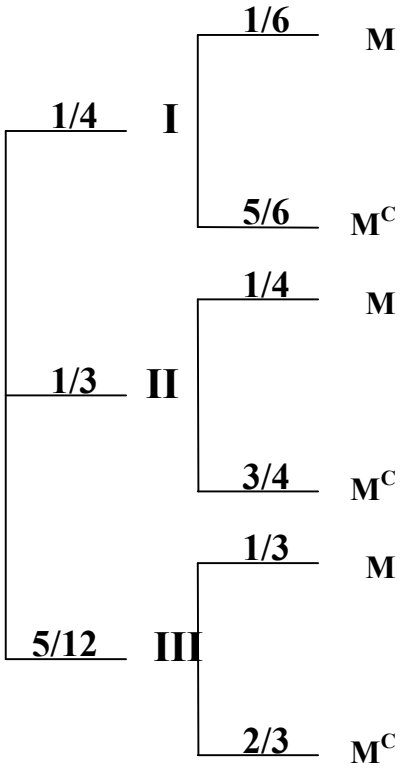
الحل:

افرض أن I, II ,III ترمز للصفوف وأن (m) ترمز للعضوية.

$$P(II)=\frac{1}{3}, P(I)=\frac{1}{4} \quad \text{و بالتالى} \quad P(III)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

$$P(m|I)=\frac{1}{6} \quad , p(m|II)=\frac{1}{4}, p(m|III)=\frac{1}{3}$$

والمطلوب : p(I | m) .

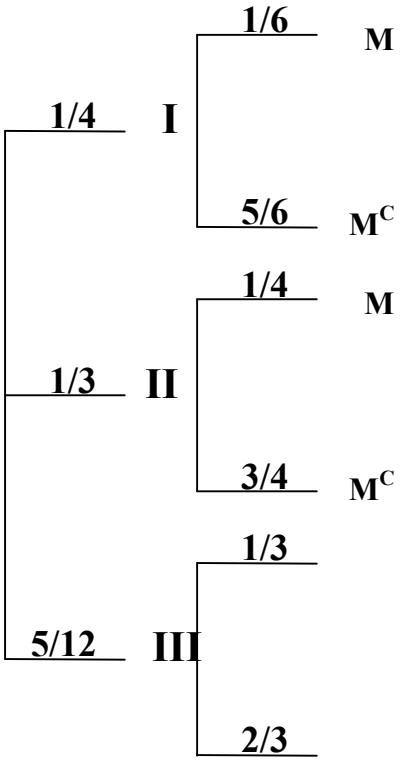


$$P(I|m) = \frac{P(m|I).P(I)}{P(I|m)P(I) + P(m|II)P(II)P(m|III)P(III)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}} = \frac{3}{10}$$

2.5 شجرة الاحتمال Probability Tree

يمكن توضيح المثال السابق بيانيا ً في شكل شجرة كما في الصفحة التالية :

الجزء الايسر من الشكل يمثل الاحتمالات المطلقة (غيرالشرطية) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{15}$؛ والجزء الايمن يمثل النتائج والاحتمالات الشرطية $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ نلاحظ أن مجموع الاحتمالات فى كل نقطة تفرع يساوى الواحد . هذا الشكل يسمى شجرة الاحتمال لأنها تشبه الشجرة.



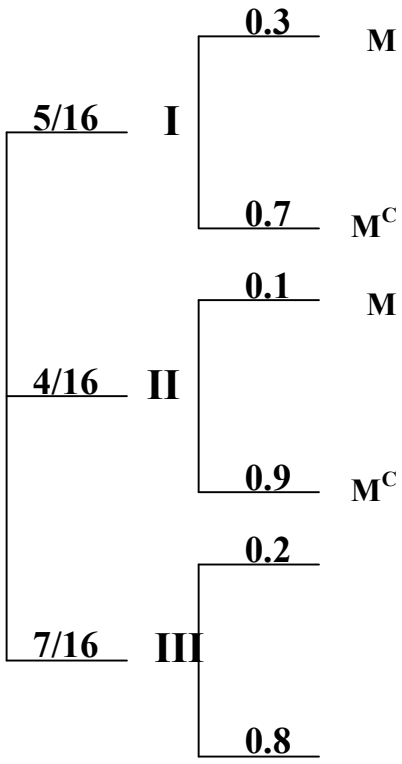
$$P(I|m)=\frac{P(m|I).P(I)}{P(I|m)P(I)+P(m|II)P(II)P(m|III)P(III)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}}=\frac{3}{10}$$

نلاحظ فى حل المثال، لايجاد $P(m)$ ضربنا $\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}$. من الشكل نلاحظ أن هذه الضربيات تبدأ من (m) وتنتهى عن R، جزع الشجرة.

➢ مثال (18)

تعداد سكان الخرطوم (K) والخرطوم بحرى (N) وامدرمان (O) بنسبة 7:4:5 الذين يعملون بالتجارة (T) يمثلون 30% و10% و20% من سكان المدن الثلاث على التوالى. بين هذه المعلومات فى شجرة احتمالات .إذا اخترنا شخصاً عشوائياً من العاصمة ووجد أنه يعمل بالتجارة، أوجد احتمال أنه من سكان الخرطوم.



الحل : مجموع النسب = 5 + 4 + 7 = 16 .

$$p(k)=\frac{5}{16}, P(N)=\frac{4}{16}, p(0)=\frac{7}{16}$$
$$p(T|k)=0.30, P(T|N)=0.10\ ,\ P(T|0)=0.20$$

و

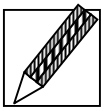
المطلوب $p(k|T)$

$$\therefore P(T)=p(T|k)P(k)+P(T|N)p(N)+P(T|O)P(O)$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{16}+\frac{2}{10}\cdot\frac{7}{16}=\frac{33}{160}$$

.

$$\therefore P(T|k)=\frac{P(T|k)P(k)}{P(T)}=\frac{\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{16}\right)}{(\frac{33}{160})}=\frac{3\times5\times160}{10.16.33}=\frac{5}{11}$$

تدريب (10)



يلعب أحمد وبابكر مبارة رمى عملة معدنية عادلة كالآتى:

ترمى العملة مرة تلو الآخر حتى الحصول على نفس الناتج فى مرتين متتاليين حيث تتوقف المباراة. يكسب أحمد إذا كان الناتج الاخير صورة ويكسب بابكر إذا كانت كتابة. أوجد احتمال

أ) أن تنتهى المباراة عند الرمية الخامسة.

ب) ان تنتهى المباراة قبل الرمية السادسة.

ج) أن تنتهى المباراة بعد عدد زوجى من الرميات.

د) أن يكسب أحمد.

هـ) أن يكسب بابكر.

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1) أفرض أن 5 % من الرجال و 25 % من النساء مرضى بعمى الألوان.إذا اخترنا مريضا عشوائيا أوجد احتمال أنه من الرجال بافتراض أن عدد النساء فى المجتمع يساوى عدد الرجال .

2) يطلق ثلاثة اشخاص أحمد و بابكر و جمال كلٌ طلقة واحدة نحو هدف. احتمال إصابتهم للهدف هي 0.4 ، 0.2 ، على التوالي0.3.

أوجد الاحتمالات الآتية

أ) إصابة الهدف مرة واحدة بالضبط.

ب) عدم اصابة الهدف.

ج) إصابة الهدف على الأقل مرة واحدة.

د) إذا اصيب الهدف مرة واحدة أوجد احتمال أنها طلقة أحمد.

3)يرمى زهر النرد عددا من المرات حتى الحصول على 6 لأول مرة حيث يتوقف اللعب.

إذا لم تظهر 6 في المرة الأولى ، أوجد احتمال الحاجة لرمي الظهر اكثر من 3 مرات.

4)مصنع به 4 ماكينات M_4, M_3, M_2, M_1 طاقاتها بنسبة 1: 2: 3 : 4. احتمالات انتاج هذه الماكينات لسلعة تالفة هى 0.2 ، 0.3 ، 0.4 على التوالى.إذا اختيرت قطعة من انتاج المصنع عشوائياً .

أوجد (أ) احتمال أنها تالفة من انتاج الماكينة الأولى.

(ب) احتمال أنها تالفة.

(ج) احتمال أنها من انتاج الماكينة الأولى إذا كانت تالفة.

5) صندوق به 6 كرات حمراء و 5 بيضاء وكانت هذه الكرات متطابقة فى ماعدا اللون. اختيرت 4 كرات عشوائيا من الصندوق. أوجد احتمال.

أ) كلها بيضاء. (ب) كلها حمراء. ج) تساوى عددى الحمراء والبيضاء.

د) كرة واحدة من لون وثلاثة من الآخرى.

الخلاصة

عزيزي الدارس فى هذه الوحدة بدأنا بعدد من التعريفات المتعلقة بالاحتمالات، ثم عرجنا إلى بعض النتائج الهامة عن العلاقة بين احتمال الحدث و الحدث المكمل له واحتمال الاتحاد بدلالة احتمالات التقاطعات. ثم ناقشنا طرق العد التي ينبني عليها التعريف الكلاسيكي للاحتمال.

بعد ذلك دخلنا موضوع احتمالات حدثين وما يتعلق بها من الاحتمالات الشرطية والاستقلال بنوعيه الاثنينى والتبادلي وأخيراً درسنا قانون بيز.

وقد اشتملت الوحدة على عدد من التمارين و الاختبارات الذاتية التي قصد منها تعميق المفاهيم لديك.نأمل أن تكون قد وجدتها وحدة شيقة ومفيدة وقد استوعبتها تماماً .

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدراس فى الوحدة الرابعة سنركز على التعريف التجريدي للاحتمال، وسنراجع بعض المفاهيم السابقة باستخدام هذا التعريف كما سنتطرق إلى دراسة أكثر من متغير واحد والعلاقة الإحصائية بينها، لكن ستكون دراسة هذا الموضوع باستفاضة فى الكتاب الثاني.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1) هنالك 36 ناتجا مختلفا منها 6 يتكرر فيها ناتجا الزهرين و30 من ناتجين مختلفين.

∴ احتمال عدم التكرار = $\frac{5}{6} = \frac{30}{36}$ احتمال 5 بدون تكرار = $\frac{5}{18} = \frac{10}{36}$

∴ احتمال 5 معطى عدم التكرار = $\frac{1}{3} = \frac{5/18}{5/6}$.

يمكن إيجاد هذه النتيجة من الجدول :

الزهر الأول	الزهر الثاني					
	1	2	3	4	5	6
1	×				v	
2		×			v	
3			×		v	
4				×	v	
5	v	v	v	v	×	v
6					v	×

تدريب (2)

(1) دالة احتمال لأن تعويض كل من قيم X يعطينا $f(x) > 0$ ومجموع القيم بعد التعويض يساوى الواحد .

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(4) = 1 = f(S)$$

2) ليست دالة احتمال لأن (مثلاً)

$$f(5) = \frac{1}{10}(4-5) = \frac{-1}{10}$$

والاحتمال لا يكون سالباً .

3) ليست دالة احتمال رقم أن قيم f كلها موجبة الا أن $1 < \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = f(S)$

والاحتمال لا يكون أكبر من الواحد.

تدريب (3)

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ و $(A \cap B) = A^c U B^c$. هاتان النتيجتان تسميان قانون دي مورغان de Morgan .

هذه الحوادث غير مستنفذة و غير متنافرة.

(2) الحوادث المتساوية هي :

(1) = (2) و (3) = (4) و (5) = (6) و (7) = (8).

تدريب (4)

باستخدام خواص المجموعات نجد أن

$$
\begin{aligned}
& P(A \cup B \cup C) = p(A \cup B) \cup C \\
&= P(A \cup B) + p(C) - P[(A \cup B) \cap C] \\
&= P(A \cup B) + P(C) - p[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= P(A \cup B) + p(C) - P[(A \cap C) + p(B \cap C) - P(A \cap C) \cap (B \cap C)] \\
&= P[(A \cup B) + p(C)] - P[(A \cap C) + p(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - p)A \cap B \cap C] \\
&= P(A) + p(B) + P(C) - p(A \cap B) - P(A \cap C) - p(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

تدريب(5)

1) في هذه الحالة يمكن للعدد المختار من الاعضاء أن يتبادلوا الوظائف في ما بينهم مشكلين لجاناً مختلفة. إذا عدد الطرق المختلفة لتكوين اللجنة هو50 تباديل6 أي هو 50×49×48×47×46×45

2) بما أن الاختيار بدون ترتيب (بدون وظائف) فإن عدد اللجان المختلفة هو 50 توافيق6 50×49×48×47×46× 45 مقسوماً على 1×2×3×4×5×6

تدريب (6)

عدد الكرات الكلى 16.

أ) عدد الطرق بدون شرط على التكوين اللونى يساوى $^{16}C_5$.

ب) عدد الطرق $^{6}C_2 \cdot {}^{10}C_3$

لان هذا الاختيار يعنى اختيار كرتين حمراوين من 6 و 3 بيضاء من 10، ونستخدم مبدأ الضرب.

ج) الاختيارات المختلفة هى:

= (5،0)، أو (4،1)، أو (3، 2)

∴ عدد الطرق = $^{6}C_5 \cdot {}^{10}C_0 + {}^{6}C_4 \cdot {}^{10}C_1 + {}^{6}C_3 \cdot {}^{10}C_2$

د) الاختيارات المختلفة هى

(0،5)، أو (1،4)، أو (2، 3) .

∴ عدد الطرق المختلفة = $^{6}C_5 \cdot {}^{6}C_1 + {}^{10}C_5 \cdot {}^{6}C_2 + {}^{10}C_4 \cdot {}^{10}C_2$

فى حساب الاحتمالات نلاحظ أن الحدث (أ) يمثل الفراغ.

الاحتمالات (ب) أ $= \frac{^{6}C_2 \cdot {}^{10}C_3}{^{16}C_5}$

(جـ) أ $\frac{^{6}C_2 \cdot {}^{10}C_0 + {}^{6}C_4 \cdot {}^{10}C_1 + {}^{16}C_2 \cdot {}^{10}C_2}{^{16}C_5}$

(د) أ $\frac{^{6}C_2 \cdot {}^{10}C_5 + {}^{6}C_1 \cdot {}^{10}C_4 + {}^{6}C_2 \cdot {}^{10}C_3}{^{16}C_5}$

تدريب (7)

أ) احتمال فردى فى المرة الأولى = 0.6.

ب) احتمال فردى فى الثانية (Odd 2) هو

$$P(odd\ 2) = P(odd\,2 \mid odd\,1)\,P(odd\,1) + p(odd\,2 \mid even\,1)P(even\,1)$$
$$= 0.5 \times 0.6 + 0.75 \times 0.4 = 0.6.$$

ج) احتمال فردى فى المرتين =

$$p(odd\ ,odd) = p(odd1) \cdot p(odd2) = 0.6 \times 0.5 = 0.30$$

تدريب(8)

أ) احتمال أن يعيش كل منهما عشرين عاما = $\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{6}$.

ب) احتمال أن يعيش الرجل دون الزوجة = $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$.

ج) احتمال الوفاة خلال عشرين عاما = $\frac{5}{8}\frac{5}{9}=\frac{25}{72}$.

تدريب (9)

عزيزي الدارس يمكنك أن تبين البيانات في شكل فين وتحسب الاحتمالات كالاتي:

أ) $p(ABG)=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$

ب) $p(AB^cG^c)=\frac{17}{120}=\frac{7}{120}$

ج) $p(AG^c)=\frac{13+15}{120}=\frac{7}{30}$

د) $p(B^c)=\frac{17+15+28+20}{120}=\frac{2}{3}$

هـ) $p(AB^cG^c)+P(A^cB\,G^c)+p(A^c\,B^c\,G)=\frac{17+15+28}{120}=\frac{1}{2}$

و)

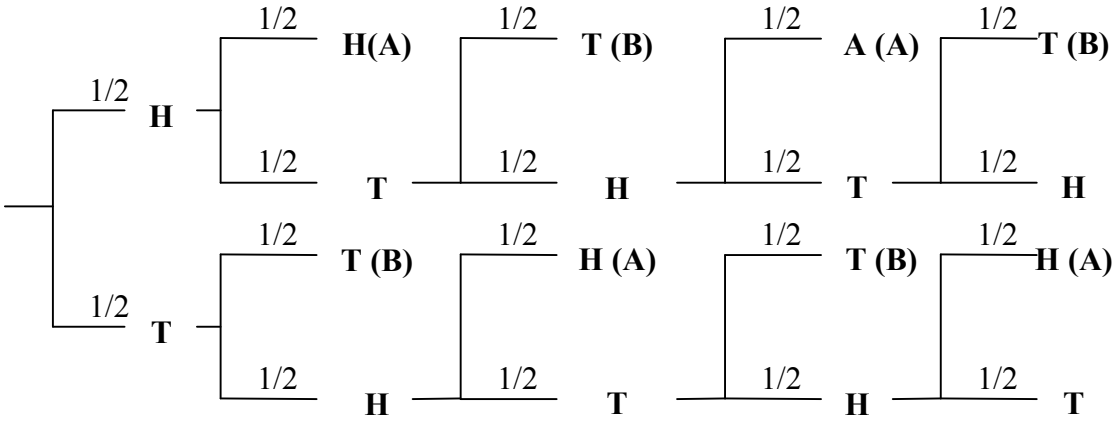
$$p(A)=\frac{50}{120},\quad p(B)=\frac{33}{120}\quad,\quad P(G)=\frac{48}{120}$$

$$p(AB)=\frac{18}{120}\neq\frac{50}{120}\cdot\frac{33}{120}$$

إذا هذه الحوادث الثلاثة غير مستقلة اثنينا وبالتالي ليست مستقلة تبادليا.

ملاحظة: لنفي الحالة العامة يكفى نفي تحقيق شرط واحد فقط. لكن لإثبات الحالة العامة يجب إثبات تحقيق كل الشروط.

تدريب (10)



أ) احتمال انتهاء اللعبة في الرمية الخامسة هو

$$P(5) = P(HTHTT) + P(THTHH) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}.$$

ب)

$$\begin{aligned} P(<6) &= P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\ &= [P(HH) + P(TT)] + [P(HTT) + P(THH)] + [p(HTHH)] + (THTT)] + [P(HTHTT) + P(THTHH)] \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{15}{16}}} \end{aligned}$$

ج) احتمال تكرار وجه

$$= [P(HH) + P(TT)] + [P(HTHH) + P(THTT)] + [P(THTHTT) + P(HTHTHH)] + \cdots$$

$$= [\frac{1}{4} + \frac{1}{4}] + [\frac{1}{16} + \frac{1}{16}] + [\frac{1}{64} + \frac{1}{64}] + \cdots \quad = \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \quad = \quad \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

(مجموع متوالية هندسية لا نهائية حدها لأول 0.5 و نسبت ها الثابتة 0.25 .)

د) احتمال فوز A

$$P(A) = P(HH) + P(THH) + P(HTHH) + P(THTHH) + \cdots$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots. = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{0.5}}.$$

هـ) احتمال فوز B

$\therefore \quad P(B) = \quad 1 - 0.5 \quad = \underline{\underline{0.5}}.$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

أ) تكرارى .(ب) إعتقادى. (ج) تجريدى. (د) كلاسيكى. (هـ) تكرارى. (و)كلاسيكى.
(ز) تكرارى . (ح) اغتقادى . (ط) كلاسيكى . (ى) تجريدى.

أسئلة التقويم الذاتي (2)

أ) عدد الكتب =22. إذا عدد طرق ترتيب الكتب على الرف هو :

$$\frac{22!}{1_i1_i1_i1_i3_i6_i5_i}$$

ب) عدد الطرق بحيث تتجاور نسخ كل كتاب هو : 8! لان لدينا ثمانية كتب مختلفة ولا اعتبار

للنسخ لأن كل نسخ لها طريقة واحدة فقط .

ج) $\frac{8!3!6!4!5!}{22!} = 4.63\times10^{-10}$.

د) هذا الحدث مكمل للحدث (أ)

∴احتمال إمراة واحدة على الاقل هو

$p(\geq 1) = 1 - p(0) = 1 - p(P) = 0.896$.

3)

أ) عدد الطرق المختلفة لتكوين العدد هو عدد طرق اختبار 3 من 5 مع ترتيبها = $60={}_5P_3$

ب) تكوين عدد زوجى يعنى رقم الآحاد إما 2، أو 4.

إذا عدد الطرق لخانة الآحاد $2={}_2P_1$

عدد الطرق لبقية الخانتين $12={}_4P_2$

عدد الطرق الكلى = 2×12 = 24

∴ احتمال عدد زوجى = $0.4 = \frac{24}{60}$

ج) ليكون أكبر من 300 يعنى أن خانة المئات إما 3 أو 4 أو 5.

هذه الخانة تـُملا بـ $P_1^3 = 3$ طريقة

بقية الخانتين بـ $P_2^4=12$

$\therefore$ الاحتمال = $\frac{12\times 3}{60}$

د) ليكون العدد زوجى اكبر من 300 يعنى

إما : خانة الآحاد بها 2 والمئات 3 أو4 أو5

وعدد الطرق $9={}_3P_1\cdot{}_3P_1\cdot{}_1P_1$

أو أن خانة الآحاد بها 4 و المئات بها 3 أو 5.

و عدد الطرق = $6 = {}_2P_1\cdot{}_3P_1\cdot{}_1P_1$

وهذان الحدثان متنافران لذا نجمع الاحتمالان :

$\therefore$ احتمال زوجى أكبر من 300 هو

$$0.25=\frac{9}{60}+\frac{6}{60}$$

هـ) ليقبل العدد القسمة على 3 يعنى أنه يتكون من مجموعات الارقام

$\{\{3,4,5\}, \{4,3,2\},\{5,3,1\}\{3,2,1\}\}$

وعدد الطرق 3 ! 3! 3!

3! 3 !

واحتمالاتها $\frac{3!}{{}_5P_3}$ $\frac{3!}{{}_5P_3}$ $\frac{3!}{{}_5P_3}$ $\frac{3!}{{}_5P_3}$

وبما أنها متنافرة فإن الاحتمال هو المجموع $\frac{3!}{{}_5P_3}\times 4 = \frac{4\times 6}{60} = 0.40$

إذا كان التكرار مسموحا به فإن عدد الطرق المختلفة فى أ هو 5×5× 5 = 125

أ) عدد الطرق فى ب هو 2 × 5 × 5 = 50

والاحتمال = $\frac{50}{125} = 0.4$

ب) ليكون العدد أكبر من 300 (بالمثل) عدد الطرق المختلفة 3× 5 × 5 = 75

والاحتمال $0.60 = \frac{75}{125}$ الخ

وهكذا نجد أن الاحتمالات كما هي.

أسئلة التقويم الذاتي (3)

(2

$$P(B|F) = 0.0025, P(B|m) = 0{,}05\ , \frac{1}{2} = P(F) = P(M)$$

$$0.025 = 0.5 = P(MP), \frac{0.00525}{2} = \frac{1}{2}(0.025 + 0.05) = P(B) \therefore$$

$$0.952 = \frac{2 \times 0.025}{0525} = P(M|B) \therefore$$

$$\frac{3}{8} = p(w) \quad , \frac{4}{9} = p(M)$$ (3

4) أفرض أن الرماة C,B,A و احتمالات إصابة الهدف

$$0.3 = p(c) \quad , \quad 0.2 = p(B) \quad , p(A) = 4$$

أ) احتمال اصابة الهدف مرة واحدة =

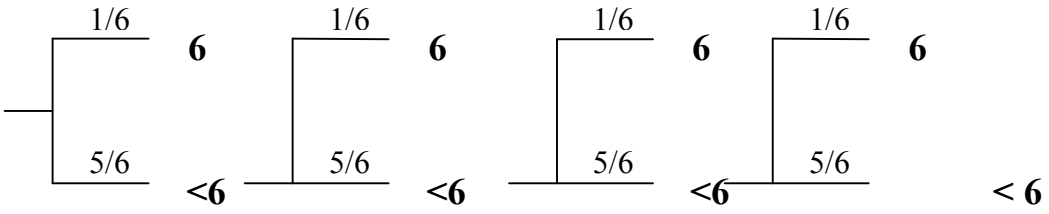
$$p(I) = P(A\ B^C C^C) + P(A^c B C^C) + P(A^c B^c C)$$
$$= 0.4 \times 0.8 \times 0.7 + 0.6 \times 0.2 \times 0.7 + 0.6 \times 0.8 \times 0.3$$
$$= 0.224 + .084 + 0.144 = 0.452$$

ب) احتمال عدم اصابة الهدف = $0.336 = 0.7 \times 0.8 \times 0.6 = P(A^c B^c C^c)$

ج) إذا ضرب الهدف مرة واحدة (H 1) فإن احتمال أن الضارب A هو

$$P(A|H1) = \frac{P(AB^c C^c)}{P(H1)} = \frac{0.224}{0.452} = 0.496$$

6) احتمال أكثر من 3 رميات معطى " غير 6 " فى الأولى، تعنى احتمال " غير سته فى كل من الرميتين الثانية والثالثة " لأن الحدث الثاني مستقل عن الأول. إذا



إذا $p(>3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

8)

$$p(M_1)=\frac{1}{8}, p(M_2)=\frac{2}{8}, p(M_3)=\frac{1}{8}, p(M_4)=\frac{4}{8}$$

أرمز لسلعة تالفة بالحرف B :

$$P(B|M_1)=0.2, P(B|M_2)=0.3, P(B|M_3)=0.1, P(B|M_4)=0.4$$

المطلوب (أ) $P(BM_1)$ (ب) $P(B)$ (ج) $P(M_1|B)$

ب) احتمال سلعة تالفة

$$P(B)=\sum_i p(B|M_i)P(M_{i1})$$

$$=\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{8}\right)=\frac{24}{80}=\frac{3}{10}$$

.

ج) احتمال الماكينة الأولى معطى تالفة

$$P(M_1|B)=\frac{P(M_1|B)\times p(B)}{p(B)}=\frac{1/40}{3/10}=\frac{1}{12}$$

9) احتمال r كرة حمراء

$$P(R=r)=\frac{\binom{6}{r}\times\binom{5}{4-r}}{\binom{11}{4}}.$$

أ) احتمال كلها بيضاء يعنى احتمال صفر حمراء

$$P(R=o)=p(0)=\frac{\binom{6}{0}\times\binom{5}{4-0}}{\binom{11}{4}}=\frac{5}{330}=\frac{1}{66}.$$

ب) احتمال كلها حمراء

$$P(R=4)=p(4)=\frac{\binom{6}{4}\times\binom{5}{4-4}}{\binom{11}{4}}=\frac{\binom{6}{4}\times\binom{5}{0}}{\binom{11}{4}}=\frac{15}{330}=\frac{1}{22}.$$

ج) الحدث هو 2 من كل لون :

$$P(R=2)=p(2)=\frac{\binom{6}{2}\times\binom{5}{4-2}}{\binom{11}{4}}=\frac{5}{11}.$$

د) كرة واحدة من اللون الاحمر وثلاثة بيضاء

$$P(R=1)=p(1)=\frac{\binom{6}{1}\times\binom{5}{4-1}}{\binom{11}{4}}=\frac{2}{11}$$

هـ) كرة واحدة من لون وثلاثة من الآخر تعنى
$(1,3)=(R_1 w)$ أو $(3,1)=(R,w)$.

وهذان حدثان متنافران إذا احتمال ايهما يساوى مجموع احتماليهما منفردين.

$$\therefore p(R=1 or 3)=\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{3}+\binom{6}{3}\binom{5}{1}}{\binom{11}{4}}=\frac{16}{33}.$$

مسرد المصطلحات

- **فراغ التجربة Experimental Space :**

فراغ التجربة (أو الفراغ) هو مجموعة جميع النواتج الممكنة نظريا مع تكرار التجربة.

- **الحدث Event:**

أي مجموعة جزئية من فراغ العينة.

- **الاحتمال الكلاسيكي Classical Probability :**

$$P(A) = \frac{\text{عدد الاحداث}}{\text{عدد العناصر}} = \frac{n}{N}$$

- **الاحتمال التكراري Frequencial Probability :**

- **الاحتمال التجريدي Axiomatic Probability :**

- **الاحتمال الاعتقادي Probability as Degree of belief Random Selection :**

- **الاختيار العشوائي Random Selection :**

هو اختيار عنصر من فراغ S .

- **الحدث المستحيل Impossible Event :**

هو الذي لا يمكن حدوثة مهما كررنا التجربة.

- **الحدث المؤكد Sure Event :**

هو الذي يحدث في كل مرة تجري فيها التجربة.

- **الحوادث المتنافرة Exclusive Events :**

اذا كان احتمال حدوث كل اثنين منهما معا يساوي الصفر.

- **الحوادث المستنفذة Exhaustive Events :**

اذا كان اتحادها يساوي S .

- **الحدث المكمل Complementary Event (A^c) :**

هو الحدث الذي يعني عدم حدوث حدث اخر A .

- **التباديل Permutation :**

عدد الطرق المختلفة لإختيار n عنصراً من N عنصراً مختلفاً مع ترتيب الإختيار.

- **التوافيق Combination :**

عدد الطرق المختلفة لإختيار n عنصراً من N عنصراً مختلفاً بدون ترتيب.

- **الاحتمال الشرطي Conditional Probability :**
- **الاستقلال الاحتمالي Stochastic Independence :**
- **الاستقلال الاثنيني Pair Wise Independence :**
- **الاستقلال التبادلي Mutual Independence :**
- **قانون بيز Bayes' Rule :**
- **شجرة الاحتمال Probability Tree :**

المراجع العربية

1) أبوصالح، محمد صبحى وعدنان محمد عوض (1990) مقدمة فى الإحصاء (مركز الكتاب)

2) أبو على، فاتن عبدالحميد (2000) مبادئ الإحصاء الوصفى(دار الفكر)

3) داؤد، سامح (مترجم) (1993) الاحتمالات (سلسلة شوم)

4) سمور، خالد قاسم وأحمد جمعة عبيد (2000) الاحتمالات (دار الفكر)

5) عبدالله، أحمد ومحمود هندى (1995) الإحصاء التطبيقى (جامعة الملك سعود)

6) عدنان، ماجد برى وآخرين(1997) مبادئ الإحصاء والاحتمالات (جامعة الملك سعود)

المراجع الانجليزية

1) Cramer , H (1964) : Mathematical methods of Statistics (Princeton).

2) Feller , W (1971) : An introduction to Probability Theory and it Application (Wiley).

3) Freud, J.E (1952) : Modern Elementary Statistics (Oliver and Boyd).

4) Hogg. R.V and A. Craig (1978) : Introduction to Mathematical Statistics (Macmillan).

5) 1) Lipschutz, S.(1998) : Probability (Schaum's Series).

6) Spiegel , M R (1998) : Probability and Statistics (Schaum's Series).