المعادلة التفاضلية : هي أية معادلة ليست متطابقة مكونة من دوال جبرية أو دوال متسامية أو معا و تحوي مفاضلات أو مشتقات.

مثال: $\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=1$

الامثلة على المعادلات التفاضلية هي:-

$$y''+3y=x^2 \quad (1)$$

$$(3x+2y)^2y'=1 \quad (2)$$

$$(1+2y'^2)^{\frac{3}{2}}=8y'' \quad (3)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0 \quad (5)$$

$$(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})-(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=0 \quad (6)$$

$$udx+xdu+zdz=0 \quad (7)$$

$$x^2+2xyy'+(yy')^2=(zz')^2 \quad (8)$$

أنواع المعادلات التفاضلية: تقسم المعادلات التفاضلية الى نوعين:-
1- المعادلات التفاضلية الاعتيادية مثلا (1, 2, 3, 7, 8).
2- المعادلات التفاضلية الجزئية مثلا (4, 5, 6).

رتبة المعادلة التفاضلية:
رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تظهر في المعادلة مثلا المعادلات التفاضلية (2, 4, 7, 8) كلها من الرتبة الاولى والمعادلات التفاضلية (1, 3, 5, 6) من الرتبة الثانية.

درجة المعادلة التفاضلية:
درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات أعلى رتبة في المعادلة مثلا المعادلات التفاضلية (1, 2, 3, 4, 5, 7) من الدرجة الاولى و المعادلات (6, 8) من الدرجة الثانية.

المعادلات التفاضلية الخطية:
أية معادلة تفاضلية مهما كانت رتبتها تكون خطية أذا كان المتغير المعتمد فيها و جميع المشتقات التي تظهر فيها من الدرجة الاولى وغير مضروبة ببعضها , بحيث تكون صيغتها العامة هي:-

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (9)$$

حيث أن المعاملات $a_0, a_1, ..., a_n, f(x)$ دوال معرفة ب x ضمن الفترة $a \le x \le b$, اذا كانت $f(x) = 0$ عندما $a \le x \le b$ فأن

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (10)$$

تسمى المعادلة (10) معادلة تفاضلية خطية متجانسة, أما اذا كانت المعاملات $a_0, a_1, ..., a_n$ ثوابت تسمى المعادلة (10) معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

حل المعادلة التفاضلية :
حل المعادلة التفاضلية هو أية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث أن هذة العلاقة تكون
1- خالية من المشتقات.
2- معرفة على فترة معينة.
3- تحقق المعادلة التفاضلية.

عند أجراء أي تكامل غير محدد نضيف ثابت أختياري فأذا كانت $y^{(n)}$ المشتقة n للدالة $y = f(x)$ عندما $a \le x \le b$ فأن:-

$$\int y^{(n)} dx = y^{(n-1)} + c_1$$

حيث c_1 ثابت أختياري و أذا كررنا عملية التكامل ينتج:

$$\int \left[\int y^{(n)} dx \right] dx = \int (y^{(n-1)} + c_1) dx = y^{(n-2)} + c_1 x + c_2$$

حيث c_2 ثابت أختياري ثاني وكذلك

$$\iiint y^{(n)} dx = \int (y^{(n-2)} + c_1 x + c_2) dx = y^{(n-3)} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

وهكذا أذا كررنا عملية التكامل n من المرات على $y^{(n)}$ ينتج

$$\iiint ... \int y^{(n)} dx = y + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_{n-1} x + c_n$$

أن هذة الثوابت الاختيارية $c_1, c_2, ..., c_n$ مستقلة عن بعضها ولا يمكن استبدال أثنين أو أكثر في الناتج النهائي بثابت واحد لأن معاملاتهم متغيرات.

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

تقسم المعادلات التفاضلية من هذا النوع والتي يمكن حلها الى عدة اقسام:

1- المعادلات التفاضلية التي تفصل متغيراتها (.Separable eq).

2- معادلات تفاضلية من النوع المتجانس (.Homogeneous eq.).

3- معادلات تفاضلية ذات معاملات خطية

4- معادلات تفاضلية تامة (.Exact eq).

5- معادلات تفاضلية خطية - معادلة برنولي (.linear eq. and Bernoulli eq).

---

1) المعادلات التفاضلية التي تفصل متغيراتها:

هذا النوع من ابسط الحالات التي يمكن وضعها بالشكل

$$\int g(x)dx + \int h(y)dy$$

يتم حلها بالتكامل

مثال/ حل المعادلة التفاضلية الاتية $xdx - y^2dy = 0$

$$Sol: \int xdx - \int y^2 dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - c \rightarrow\rightarrow y = (\frac{3x^2}{2} - 3c)^{\frac{1}{3}}$$

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $y' = y^2x^3$

الحل/

$$\frac{dy}{dx} = y^2x^3 \rightarrow dy = y^2x^3dx \rightarrow \frac{dy}{y^2} = x^3dx$$

$$x^3dx - \frac{dy}{y^2} = 0 \rightarrow \int x^3dx - \int \frac{dy}{y^2} = 0$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{y} = c \rightarrow \frac{1}{y} = c - \frac{x^4}{4} \rightarrow y = \frac{1}{c - \frac{x^4}{4}}$$

مثال/ حل المعادلة التفاضلية الاتية $x^2\left(1-y^2\right)dx+y\left(1+x^2\right)dy=0$

الحل/

$$\frac{x^2}{1+x^2}dx+\frac{y}{1-y^2}dy=0$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{1-y^2}dy=0$$

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx-\frac{1}{2}\ln\left(1-y^2\right)=c$$

$$x-\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left(1-y^2\right)=c$$