مبرهنة: اذا كان $f(\mathrm{p}) = L\{f(x)\}$ و أن a عدد فأن

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = f(p+a)$$

البرهان:

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}.e^{-ax} f(x)dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-(p+a)x} f(x)dx$$
$$= f(p+a)$$

وبالاستفادة من هذة المبرهنة يمكن حل بعض التحويلات

8- اذا كانت $f(x) = x^n e^{-ax}$ فأن $L\{\mathrm{e}^{-ax} x^n\} = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

البرهان:

حسب التحويل $L\{x^n\} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

فأن

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \int_0^\infty e^{-px}.e^{-ax} x^n dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-(p+a)x} x^n dx$$
$$= \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \qquad , p+a>0$$

9- اذا كانت $f(x) = e^{-ax}\sin bx$ فأن $L\{e^{-ax}\sin bx\} = \dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$

البرهان:

حسب القانون السابق $L\{\sin ax\} = \dfrac{a}{p^2+a^2}$ فأن

$$L\{e^{-ax}\sin bx\} = \int_0^\infty e^{-px}.\mathrm{e}^{-ax}\sin bx dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p+a)x}\sin bx dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(p+a)x}}{(p+a)^2+b^2}[-(p+a)\sin bx - b\cos bx]\right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{1}{(p+a)^2+b^2}[0-b]$$

$$= \frac{b}{(p+a)^2+b^2}$$

10- اذا كانت $f(x) = e^{-ax}\cos bx$ فأن $L\{e^{-ax}\cos bx\} = \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$

البرهان : H.W