المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة

المعادلات الخطية:

ان المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي معادلة تفاضلية من نوع

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = f(x).....(1$$

حيث ان $a_n(x),...,a_1(x)$ دوال للمتغير x. وتسمى 1) معادلة خطية ذات معاملات ثابتة اذا كانت $a_n,...,a_1$ ثوابت فاذا كان $f(x) = 0$ تصبح المعادلة 1) بالصورة

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n y = 0.....(2$$

وتسمى معادلة خطية متجانسة وبخلافه تسمى معادلة خطية لا متجانسة

أن المعادلات التفاضلية التالية أمثلة على معادلات خطية من رتبة مختلفة

من الرتبة الأولى $y' + y = x^2$

من الرتبة الثانية $y'' + y = \sin x$

من الرتبة الثالثة $y''' - 3y' + y = x^2 + 3$

من الرتبة الخامسة $\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0$

من الرتبة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ان المعادلات الثلاث الأولى هي لا متجانسة وبينما المعادلتان الاخيرتان متجانستان.

ان لحل المعادلة المتجانسة 2) علاقة وحيدة مع حل المعادلة الخطية لا متجانسة

1) ولتوضيح ذلك سوف نبرهن ما يلي:

مبرهنة1: أذا كانت الدوال $y_n,...,y_2,y_1$ حلولا للمعادلة المتجانسة 2) وكانت $c_n,...,c_2,c_1$ اعدادا فأن

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n.....(3$$

حل للمعادلة المتجانسة 2) أيضا

البرهان: اذا ضربت المعادلات التي عددها n وهي

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_n y_1 = 0$$
$$y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + ... + a_n y_2 = 0$$
$$\downarrow ....\downarrow .....\downarrow .....\downarrow ....\downarrow ....\downarrow$$
$$y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + ... + a_n y_n = 0$$

في $c_n, ..., c_2, c_1$ على الترتيب وبجمع الحدود المتشابهة نحصل على

$$\frac{d^n}{dx^n}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n) + ... +$$
$$a_n (c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n) = 0$$

وهو المطلوب برهنته.

تعريف: يقال للدوال $y_n, ..., y_2, y_1$ انها مرتبطة خطية (غير مستقلة) بالفترة المفتوحة I أذا وجدت اعداد $c_n, ..., c_2, c_1$ ليست كلها مساوية للصفر، بحيث أن $c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \neq 0$

ويقال للدوال $y_n, ..., y_2, y_1$ بانها غير مرتبطة خطيا (مستقلة خطيا) بالفترة المفتوحة I اذا وجدت اعداد $c_n, ..., c_2, c_1$ بحيث اذا كان

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n = 0$$

فأن $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

تعريف: عرف معين فرونسكي للدوال القابلة الاشتقاق $y_n, ..., y_2, y_1$ بالفترة المفتوحة I بالمحدد التالي

$$w \equiv w(y_n, ..., y_2, y_1) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^1 \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ان علاقة استقلالية حلول المعادلة التفاضلية مع معين فرونسكي مبينه بالمبرهنتين التاليتين والتي سنعطيها بدون برهان.

مبرهنة2: أذا كانت $y_n, ..., y_2, y_1$ حلولا للمعادلة المتجانسة 2) فأن الشرط الضروري والكافي لكي تكون $y_n, ..., y_2, y_1$ مرتبطة خطيا (غير مستقلة) بالفترة المفتوحة I هو

$$w = w(y_n, ..., y_2, y_1) = 0$$

مبرهنة3: لتكن $a_n,...,a_2,a_1$ دوالا مستمرة بالفترة I لكل $x \in I$ فان الحلول $y_n,...,y_2,y_1$ للمعادلة التفاضلية المتجانسة 2) غير مرتبطة خطيا(مستقلة) في الفترة I اذا وفقط اذا

$$w(y_n,...,y_2,y_1) \neq 0$$

لكل $x \in I$

مثال1/ برهن أن الدوال $e^{-x}, 2e^x, e^x$ مرتبطة خطيا بالفترة المفتوحة $(-\infty,\infty)$ اذا فرضنا

$$y_3 = e^{-x}, y_2 = 2e^x, y_1 = e^x$$

الحل/ باستخدام معين فرونسكي. نجد ان

$$w = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & e^{-x} \\ e^x & 2e^x & -e^{-x} \\ e^x & 2e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 0$$

مثال2/ برهن أن $\cos x$, $\sin x$ هما حلان مستقلان خطيا للدالة $y'' + y = 0$ لكل $-\infty \leq x \leq \infty$

الحل/ بما ان $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ هما حلان للمعادلة لأنها يحققاها وللتأكد بأنها مستقلان خطيا نجد من معين فرونسكي أن

$$w(\cos x, \sin x) = \begin{Bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Bmatrix} = 1$$

لكل $-\infty \leq x \leq \infty$. واستنادا للمبرهنة 3) يكون $\cos x$, $\sin x$ حلين مستقلين خطيا للمعادلة $y'' + y = 0$ بالفترة $-\infty \leq x \leq \infty$.

قد ذكرنا اذا كانت $y_n,...,y_2,y_1$ حلولا للمعادلة المتجانسة 2) وانها مستقلة خطيا فأن

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n + y_n$$

هو الحل العام للمعادلة المتجانسة. ويسمى الحل العام للمعادلة المتجانسة بالدلة المتممة المعادلة لا متجانسة 1). وذلك لان الحل العام للمعادلة لا متجانسة يشمل الدالة المتممة التي يمكن ايجادها بوضع $f(x)=0$ والحل الخاص الذي هو أي حل للمعادلة لا متجانسة. وعلى هذا فأن الحل العام للمعادلة لا متجانسة يساوي الدالة المتممة زائد الحل الخاص كما هو مبين بالمبرهنة التالية.

مبرهنة4: اذا كان $y=u(x)$ هو أي حل خاص للمعادلة لا متجانسة1) و $y=v(x)$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة 2) فان $y=u+v$

هو الحل العام للمعادلة لا متجانسة1)