تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى و الدرجة الاولى

مسائل التبريد:
قانون نيوتن للتبريد ينص بأن معدل الزمن لتغيير درجة حرارة الجسم يتناسب مع فارق درجة الحرارة بين الجسم و محيطة.
أفرض T تشير الى درجة حرارة الجسم و أفرض T_m تشير الى درجة حرارة المحيط. ثم معدل الزمن لتغيير درجة حرارة الجسم هو $\frac{dT}{dt}$ و قانون نيوتن للتبريد يمكن أن يكون كالاتي :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$OR$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$$

حيث k هو ثابت التناسب

مثال :
أنبوب معدني درجة حرارته $100^0 F$ موضوع في غرفة ثابتة الحرارة $0^0 F$ بعد مرور 20 دقيقة أصبحت درجة حرارة الانبوب المعدني $50^0 F$ أوجد
1- الزمن عندما تكون درجة حرارة الانبوب المعدني $25^0 F$.
2- درجة حرارة الانبوب بعد مرور 10 دقائق.

الحل:
بما أن درجة حرارة الغرفة $0^0 F$ يعني $T_m = 0$ ومنها تصبح المعادلة

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

وهذة هي معادلةخطية و منها

$$T = ce^{-kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

عندما تكون درجة حرارة الانبوب $T = 100$ في زمن $t = 0$ اذن تصبح المعادلة (1)

$$100 = ce^{-k(0)}$$

$$c = 100$$

نعوض هذة النتيجة في (1) تصبح

$$T = 100e^{-kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وعندما تكون $t = 20$ و $T = 50$ لذلك تصبح (2)

$$50 = 100e^{-kt}$$

$$k = \frac{-1}{20}\ln\frac{50}{100}$$

$$= \frac{-1}{20}(-0.693)$$

$$= 0.035$$

$$T = 100e^{-0.0035t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

1- عندما $T = 25$ نعوض في (3)

$$25 = 100e^{-0.035t}$$

$$-0.035t = \ln\frac{1}{4}$$

$$t = 39.6$$

2- عندما $t = 10$ نعوض في (3)

$$T = 100e^{(-0.035)(10)}$$

$$T = 100(0.705) = 70.5^0 F$$

مثال :

جسم بدرجة حرارة $50^0 F$ موضوع خارجا حيث درجة الحرارة $100^0 F$ وبعد مرور 5 دقائق أصبحت حرارة الجسم $60^0 F$ أوجد

1- ما الفترة التي يستغرقها الجسم حتى يصل لدرجة حرارة $75^0 F$

2- درجة حرارة الجسم بعد 20 دقيقة

الحل:

عندما تكون درجة حرارة المحيط $T_m = 100$ سوف تكون المعادلة

$$\frac{dT}{dt} + kT = k100$$

هذة المعادلة هي خطية يمكن حلها

$$T = ce^{-kt} + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

عندما $T = 50$ و $t = 0$ تصبح (1)

$$50 = ce^{-k(0)} + 100$$

$$and$$

$$c = -50$$

نعوض هذة النتيجة في معادلة (1) فتصبح

$$T = -50e^{-kt} + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

عندما $t = 5$ سوف تكون $T = 60$ ومن (2)

$$60 = -50e^{-k(5)} + 100$$

$$-40 = -50e^{-k5}$$

$$k = \frac{-1}{5}\ln\frac{40}{50}$$

$$= \frac{-1}{5}(-0.223) = 0.045$$

نعوض هذة النتيجةفي معادلة (2) نحصل على درجة الحرارة عند أي وقت

$$T = -50e^{-0.045t} + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

1- نحن نحتاج t عندما $T = 75$ نعوض في (3)

$$75 = -50e^{-0.045t} + 100$$

$$e^{-0.045t} = \frac{1}{2}$$

$$-0.045t = \ln\frac{1}{2}$$

$$t = 15.4$$

2-نحن نحتاج T عندما $t = 20$ نعوض في (3)

$$T = -50e^{(-0.045)(20)} + 100$$

$$= -50(0.41) + 100$$

$$= 79.5^0 F$$