



جامعة القاهرة كلية الزراعة - قسم المحاصيل



الرياضيات

الأستاذ الدكتور

ضياء أحمد القاضي

الفصل الدراسي

كود

2019-2020

102

توصيف المقرر

(١) الفئات وأساسيات نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

SETS AND FUNDAMENTALS OF PROBABILITY THEORY AND ITS
APPLICATIONS

(٢) التفاضل

DIFFERENTIATION

(٣) المتراجحات والبرمجة الخطية

INEQUALITIES AND LINEAR PROGRAMMING

(٥) التكامل

INTEGRATION

(٤) الدوال وتوفيق المنحنيات

CURVE FITTING

التفاضل

DIFFERENTIATION

توصيف المقرر

(١) التفاضل

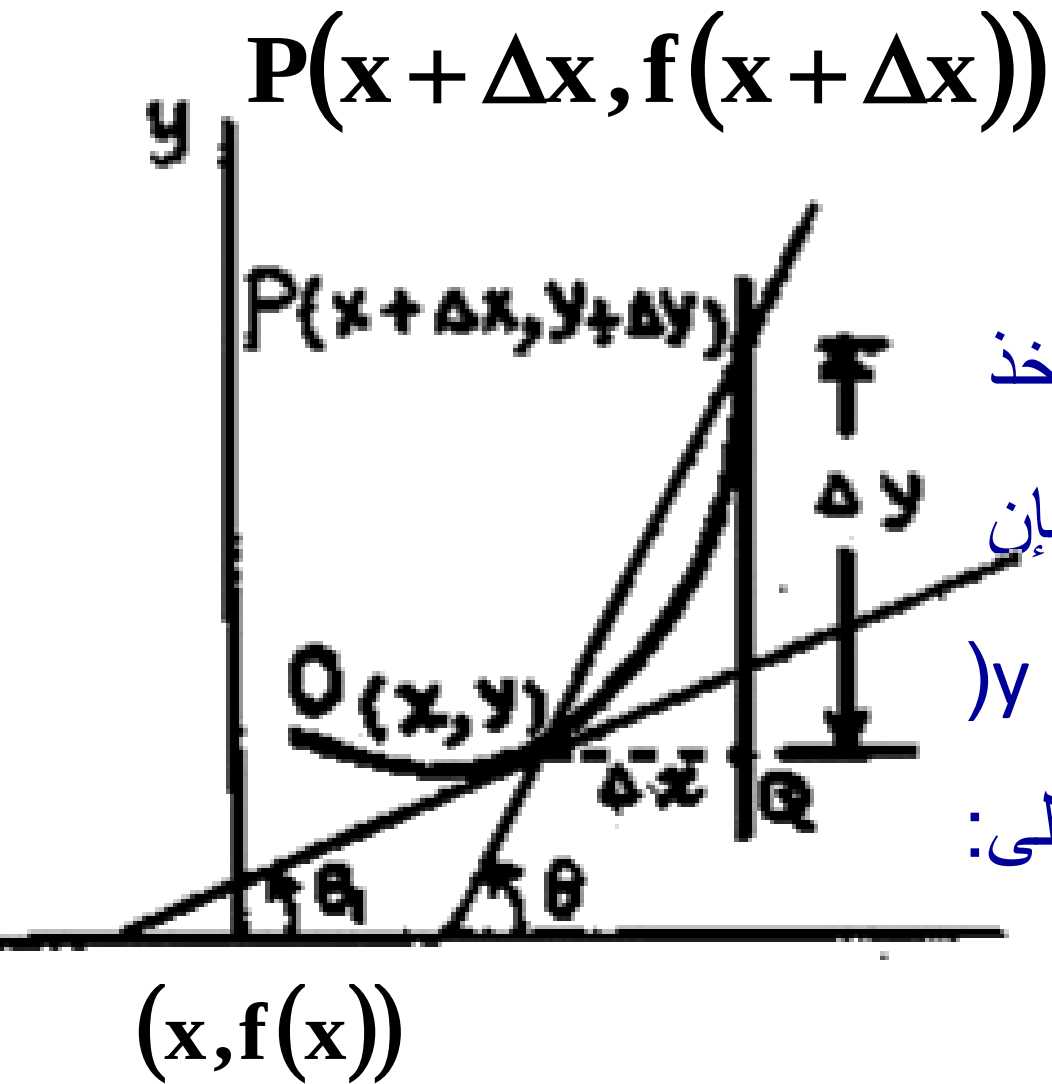
DIFFERENTIATION

- النهايات العظمى والصغرى
- نظرية رول
- نظرية القيمة المتوسطة
- مفكوك تيلور وماكلورين
- الدوال متعددة المتغيرات
- التفاضل الجزئي
- النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات

- القواعد الأساسية للتفاضل
- المشتقة الأولى للدوال المثلثية
- تفاضل الدوال المثلثية العكسية
- تفاضل الدوال الأسية اللوغارتمية
- تفاضل المعادلات البارامترية
- تفاضل الدوال الضمنية
- تفاضل الدالة العكسية
- التفاضل المتتالي

القواعد الأساسية للتفاضل

تعتبر المهمة الأساسية لعلم التفاضل هو إيجاد
مقياس للطريقة التي تتغير بها دالة كلما تغيرت
قيمة المتغير المستقل. ومن الاستعراض السابق
لموضوع الدالة، علمنا أنه إذا تغير المتغير
لدالة ما تغيرت تبعاً له قيمة الدالة. فإذا x المستقل
 Δx مقداره x وحدث تغير في $y = f(x)$ كانت
 Δy . فإن الدالة تتغير تغيراً مناظراً قدره



($x + \Delta x$ القيمة x فعندما نأخذ

تأخذ القيمة المقابلة y فإن

(كما هو موضح $y + \Delta y$)

فى الشكل التالى:

تقع على منحنى O x, y فإذا فرضنا ان النقطة)
هى $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$ هذه الدالة، والنقطة
، فنجد أن: O نقطة أخرى على المنحنى قريبة من

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PQ}{OQ} = \tan \theta$$

أى أن Δy عندما تؤول OP تساوى ميل الوتر

على المنحنى Δx P الى الصفر تتحرك النقطة Δx وحيث يدور O وتقترب شيئاً فشيئاً من النقطة حتى يصبح فى النهاية مماساً O حول OP المستقيم O. لمنحنى الدالة عند

$0 =$ وبذلك فإن ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta_1$$

0 عند النقطة x بالنسبة الى $y =$ معدل تغير الدالة

ويطلق على معدل تغير دالة ما بالنسبة لمتغيرها
بالمشتقة الأولى (المعامل التفاضلي الأول) لهذه
الدالة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{dy}{dx}, D_x y, y', f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال

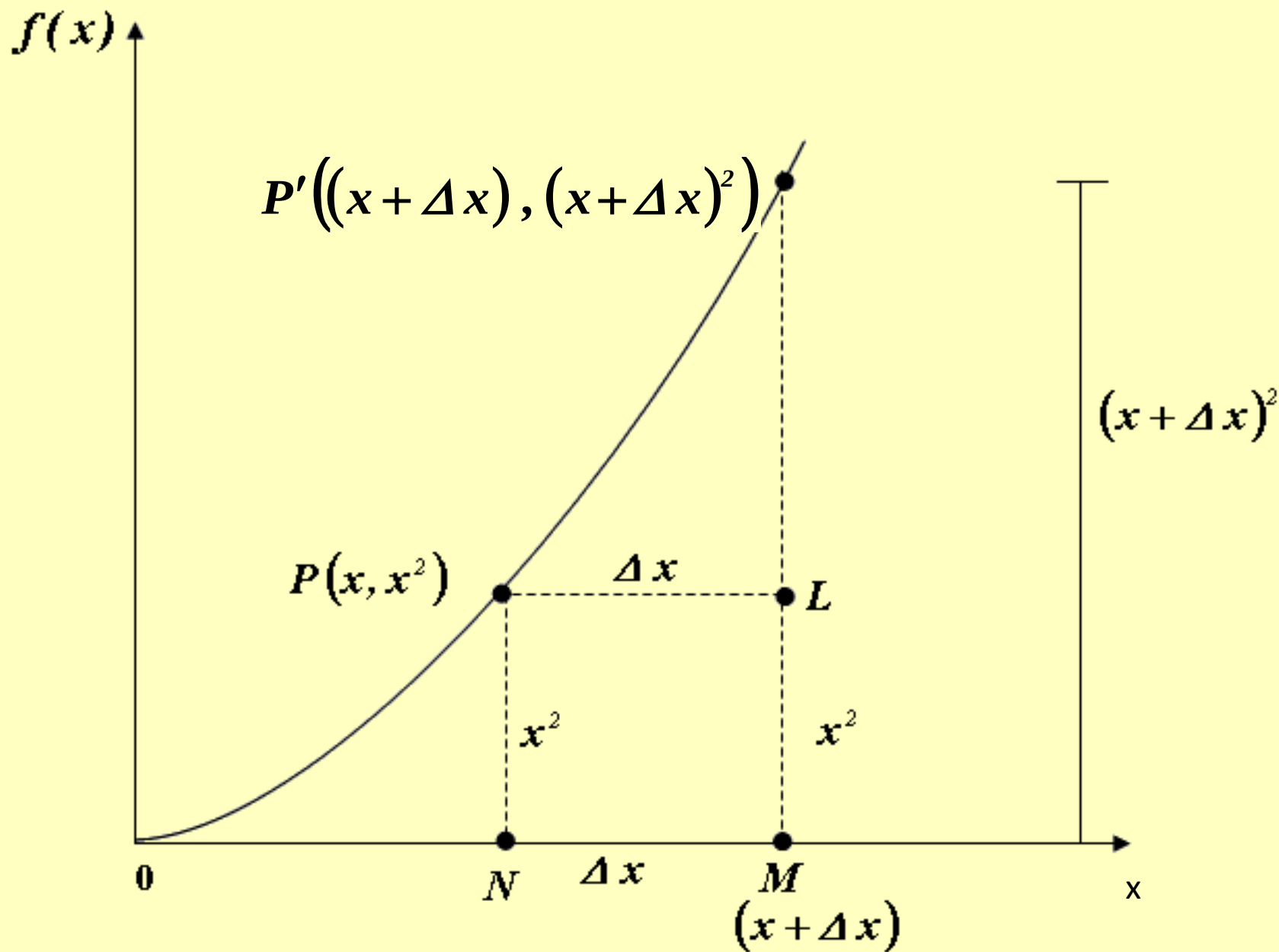
عند أى نقطة $y = x^2$ أوجد المشتقة الأولى للدالة

الحل

$Np = x^2$ هو P قيمة هذه الدالة عند أى نقطة

كما هو موضح بالشكل $Mp' = (x + \Delta x)^2$ هى P' وقيمتها عند

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

و بالقسمة على Δx

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)$$

$$D_x y = 2x$$

وفيما يلي بعض القواعد الأساسية في التفاضل:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب ثابت (١)
الثابت في دالة، يساوي حاصل ضرب
الدالة: في المشتقة الأولى لهذه

$$\frac{d}{dy}(c \cdot v) = c \frac{dv}{dx}$$

مثال

فإن: $y = 5x^3$ إذا كان

$$D_x y = (5) (3x^2) = 15 x^2$$

المشتقة الأولى للمجموع الجبرى لعدد
محدود من الدوال يساوى المجموع
الجبرى للمشتقة الأولى لكل منها:

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

مثال

إذا كان $y = (x^2 + c) + (ax^4 + b)$

فإن $y' = 2x + 4ax^3$

المشتقة الأولى لحاصل ضرب الدالتين: (٣)

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

مثال

إذا كانت $y = x^3 \sin x$

فإن $y' = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$

المشتقة الأولى لخارج قسمة الدالتين: (٤)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

مثال

$$y = \frac{bx^5 + c}{x^2 + a}$$

إذا كانت

$$bx^5 + c = u \quad , \quad x^2 + a = v \quad \text{فإذ اعتبرنا أن}$$



$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 + a) \cdot \frac{d(bx^5 + c)}{dx} - (bx^5 + c) \frac{d(x^2 + a)}{dx}}{(x^2 + a)^2} \\ &= \frac{(x^2 + a)(5bx^4) - (bx^5 + c)(2x)}{(x^2 + a)^2} \\ &= \frac{3bx^6 + 5abx^4 - 2cx}{(x^2 + a)^2}\end{aligned}$$

تفاضل دالة الدالة

Differentiation of a function of a function

مباشرة y في بعض الأحيان بدلا من تعريف
، تعرف علي إنها دالة x كدالة للمتغير
. x دالة للمتغير V حيث V لمتغير آخر
 x دالة للمتغير y وفي هذه الحالة يقال أن
ويمكن الحصول علي V خلال المتغير
المشتقة الأولى لهذه الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

مثال : إذا كانت : $y = v^2 - 3v + 2$, $v = 4x^2 + 1$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dv} = 2v - 3 , \quad \frac{dv}{dx} = 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = (2v - 3) \cdot (8x) = 8x(8x^2 - 1)$$

: أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية: مثال $y = (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$

الحل

$$v = x^2 + a^2$$

$$y = (v)^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dv} = \left(\frac{3}{2}\right) v^{1/2}, \quad \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \left(\frac{3}{2} v^{1/2}\right) (2x)$$

$$= \frac{3}{2} (x^2 + a^2)^{1/2} (2x) = 3x (x^2 + a^2)^{1/2}$$

تفاضل المعادلات البارامترية

Differentiation of parametric equations

في كثير من الأحيان يفضل تمثيل منحنى معين بدلالة (x, y) بواسطة معادلتين تعبران عن كل من مثال ذلك : t متغير آخر

$$x = 2t + 3, \quad y = t^2 - 1$$

وتسمى هاتان المعادلتان بالمعادلات البارامترية للمنحنى بالمقياس t ويسمى $y = f(x)$ الذي معادلته في الصورة

parameter

ولإيجاد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

فإن ($dx / dt \neq 0$) فإذا كانت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$

فإذا أوجدنا المشتقة الأولى لكل من المعادلتين السابقتين

$$\frac{dx}{dt} = 2 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = 2t / 2 = t = \frac{x-3}{2}$$

- تفاضل الدالة الضمنية – تفاضل الدالة العكسية – المشتقة الأولى للدوال المثلثية

تفاضل الدالة الضمنية

Differentiation of implicit functions

explicit سبق القول أن الدوال قد تكون صريحة
وفيها يمكن فصل أحد متغيري functions
المعادلة في طرف والمتغير الآخر في الطرف
أما الدوال التي $y = (2t + 3)^3$ الآخر مثال ذلك
ليست علي هذه الصورة تسمى بالدوال الضمنية
implicit functions

مثال ذلك:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

: ولإيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة الضمنية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \frac{2x \cdot dx}{a^2} + \frac{2y \cdot dy}{b^2} = 0$$

بتفاضل الطرفين

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

مثال أوجد المشتقة الأولى للدالة: $x^2 + y^2 = 25$

الحل

: بتفاضل طرفي المعادلة

$$2x \, dx + 2y \, dy = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

تفاضل الدالة العكسية

Differentiation of inverse function

$y = 3x$ سبق تعريف الدالة العكسية. إذا كانت
فيمكن التعبير عنها بالصورة

$$x = \frac{y}{3}$$

والصورة الأخيرة هي الدالة العكسية

للدالة الأصلية ونلاحظ the inverse function
العلاقة التالية بين المشتقة الأولى للدالة الأصلية
والمشتقة الأولى للدالة العكسية:

$$y = 3x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3$$

$$x = \frac{y}{3} \quad \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \quad \text{أو}$$

: أوجد المشتقة الأولى للدالة العكسية للدالة: تمرين

$$y = \sqrt{\frac{3}{x} - 1}$$

الحل

$$x = \frac{3}{1 + y^2}$$

: الدالة العكسية للدالة الأصلية هي

$$\therefore \frac{dx}{dy} = - \frac{3 (2y)}{(1+y^2)^2} = - \frac{6y}{(1+y^2)^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{3}{x} - 1}$$

ويمكن توضيح العلاقة السابقة بين المشتقة الأولى للدالة ومعكوسها كما يلي:

فإذا اعتبرنا أن $y = u^{\frac{1}{2}}$, $u = \frac{3}{x} - 1$

وبإيجاد $\frac{dy}{du}$, فإن وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \frac{dy}{du} = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{du}{dx} = -3x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3}{2 x^2 \sqrt{\frac{3}{x} - 1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy} = - \frac{(1+y^2)^2}{6y} = - \frac{(1+3/x-1)^2}{(6) \sqrt{\frac{3}{x}-1}}$$

$$= - \frac{3}{2x^2 \sqrt{\frac{3}{x}-1}}$$

تفاضل الدوال المثلثية

Differentiation of Trigonometric

تفاضل الدوال المثلثية

Differentiation of Trigonometric

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

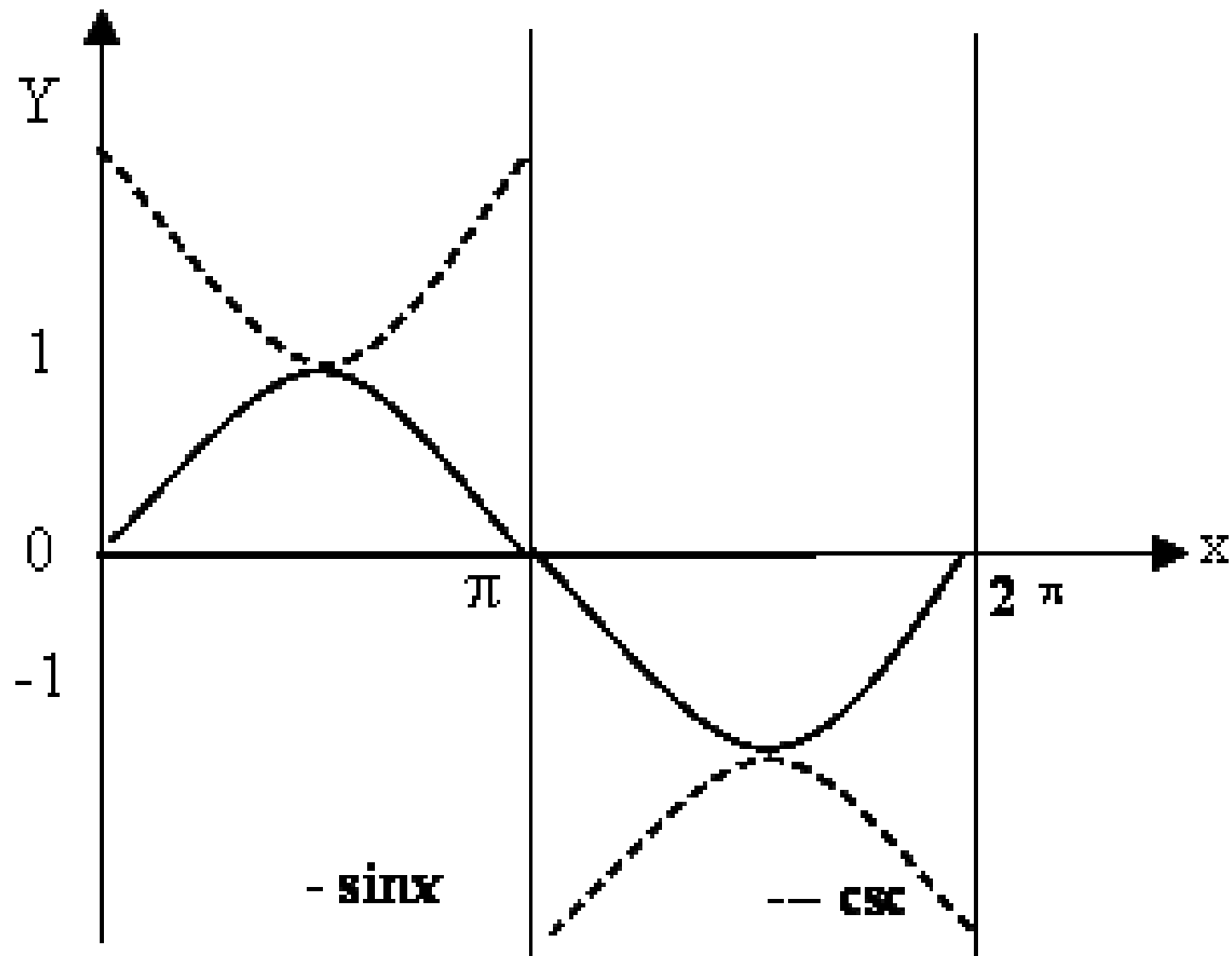
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

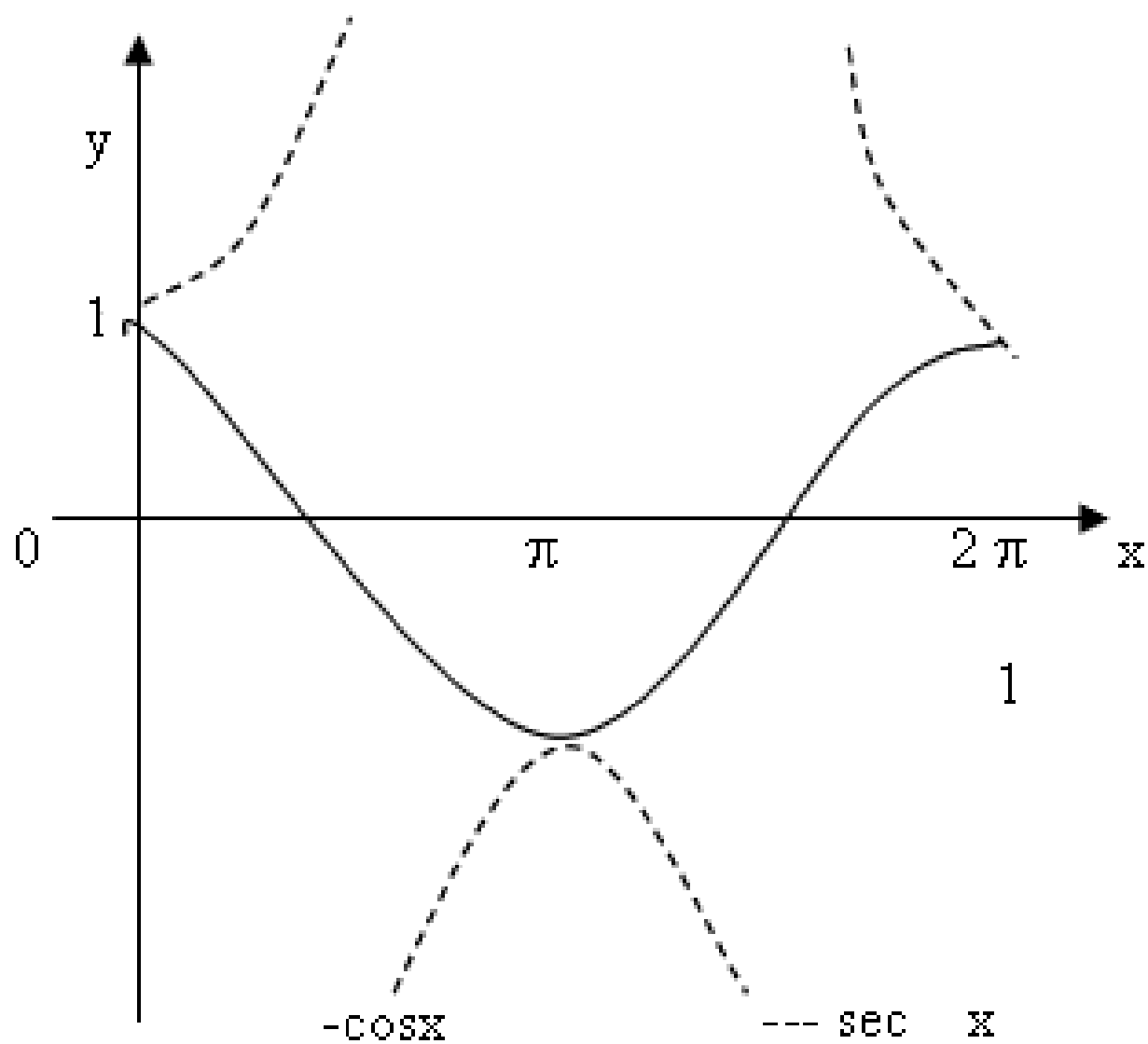
لأي زاوية $\cos$ وجيب التمام $\sin$ الجيب
عبارة عن دوال منفردة القيمة ومتصلة لجميع x
أما بقية الدوال المثلثية x قيم المتغير المستقل
فهي دوال غير متصلة ويتضح من الشكل التالي
سلوك الدوال:

$$\sin \theta , \tan \theta , \cos \theta$$

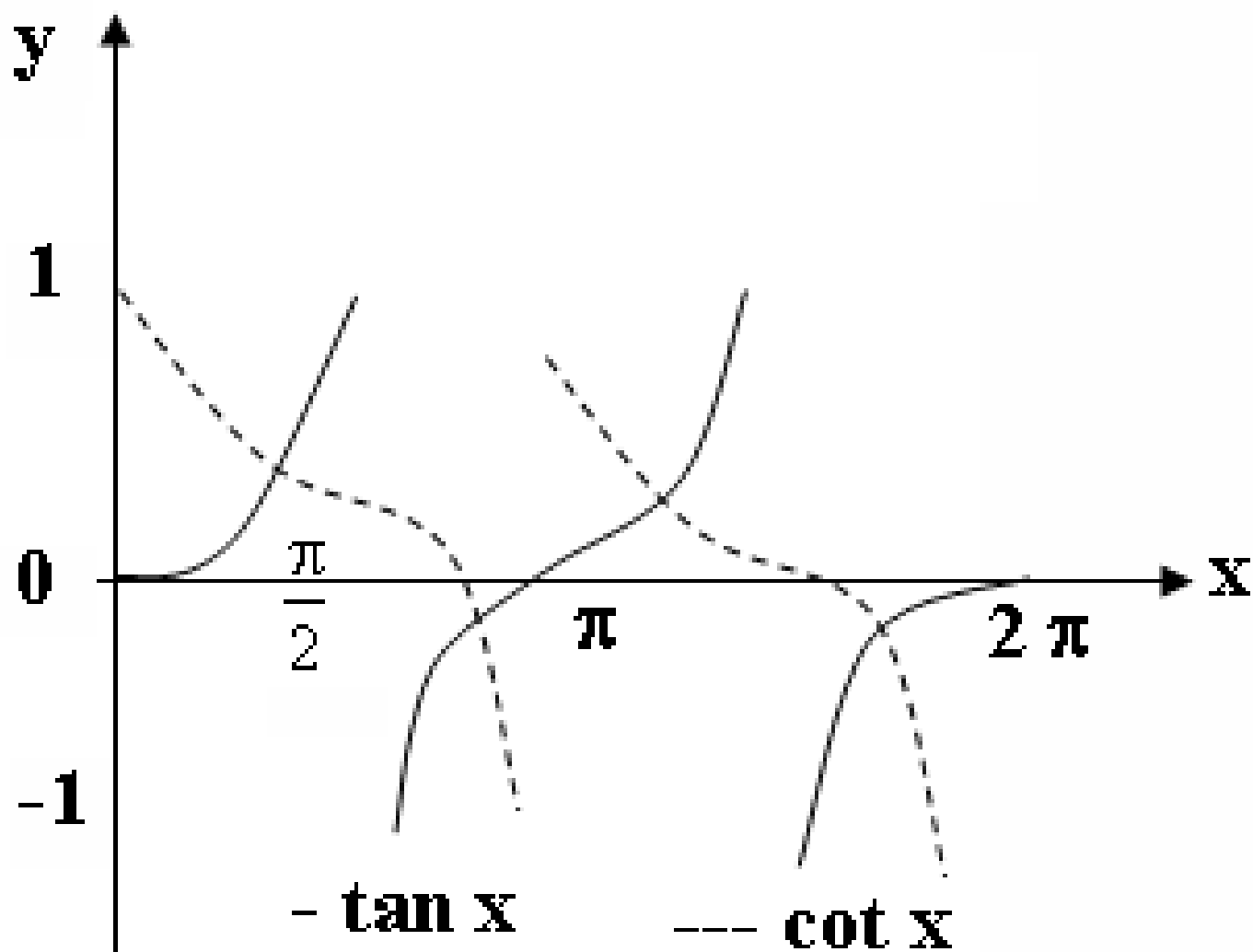
$$(0 - 2\pi) \text{ في الفترة}$$



(→)



(2)



(A)

وفيما يلي بعض العلاقات الرئيسية بين تلك الدوال :

$$\tan x = \sin x / \cos x \quad , \quad \cot x = \cos x / \sin x$$

$$\cot x = 1 / \tan x \quad , \quad \sec x = 1 / \cos x$$

$$\csc x = 1 / \sin x \quad , \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin (-x) = -\sin x \quad , \quad \cos (-x) = \cos x$$

$$\tan (-x) = -\tan x$$

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

المشتقة الأولى للدوال المثلثية

Derivatives of trigonometric functions

$y = \sin x$: أولاً:

$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$: يثبت أن

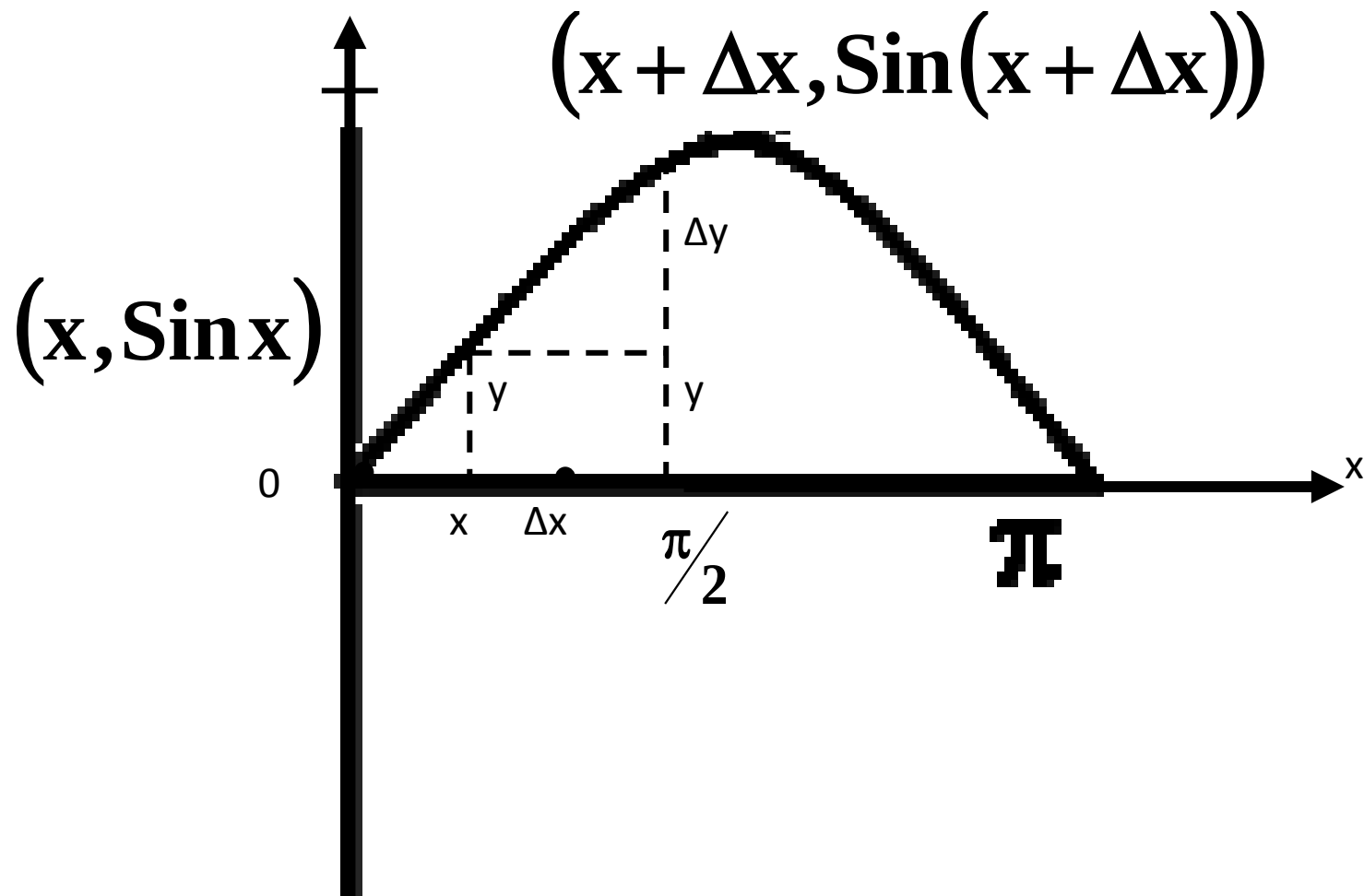
$$= \sin x \cos (\Delta x) + \cos x \sin (\Delta x) - \sin x$$

(Δx) ثم بالقسمة علي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\sin x \frac{\cos (\Delta x)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin (\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin x}{\Delta x} \right)$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \Delta x = \Delta x$ وحيث أن:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = 1$$



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos(\Delta x)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin x}{\Delta x} \right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\Delta x} + \cos x - \frac{\sin x}{\Delta x} \right) = \cos x$$

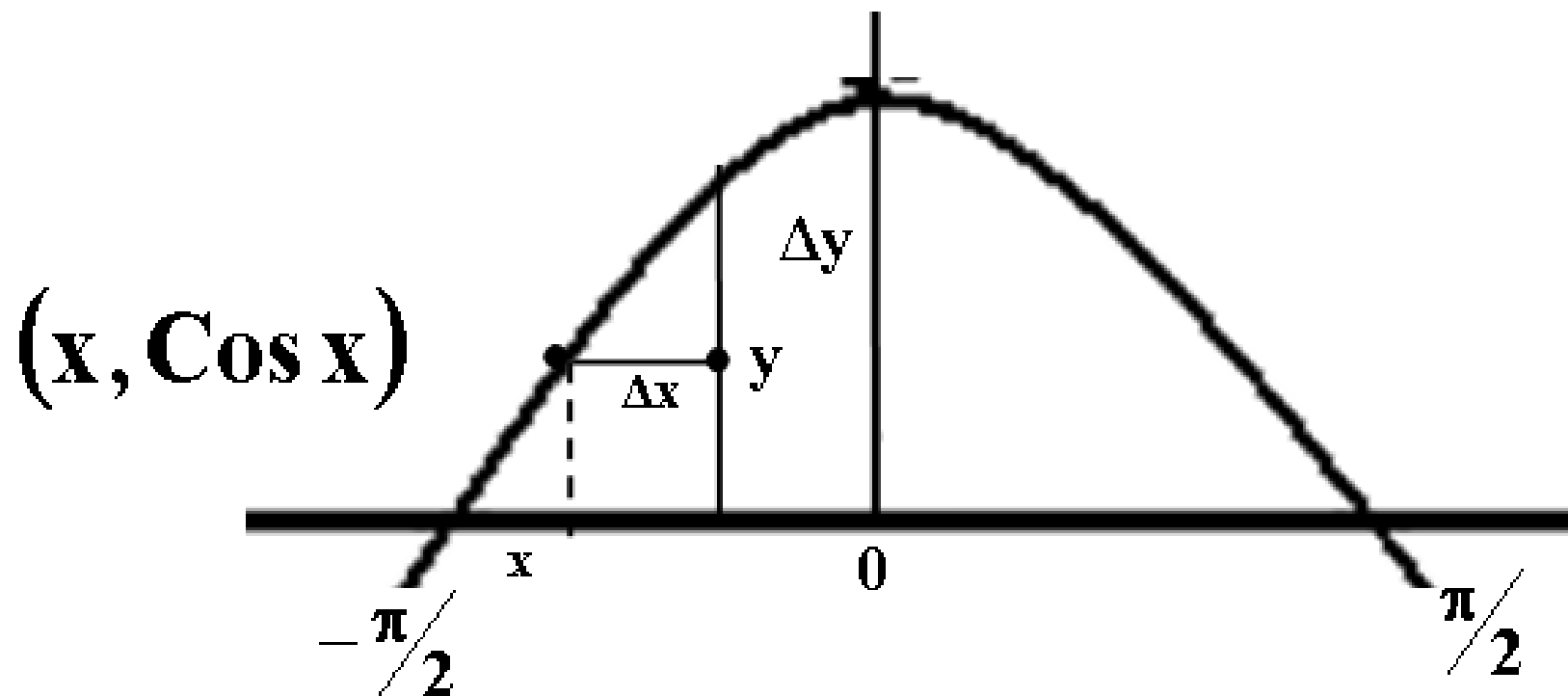
ثانياً : $y = \cos x$

كما يلي $y = f(x)$ عرفنا سابقاً المشتقة الأولى للدالة

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$(x + \Delta x, \cos(x + \Delta x))$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x) / \Delta x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\cos x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -$$

ثالثاً : $y = \tan x$

من تعريفنا السابق : $y = \tan x = \sin x / \cos x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\tan x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

رابعاً : $y = \cot x$

$$\frac{d}{dx} (\cot x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tan x} \right)$$

(يترك للطالب كتمرين)

خامساً : $y = \csc x$

$$\frac{d}{dx} (\sec x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \sin x / \cos^2 x$$

$$= \tan x \cdot \sec x$$

سادساً : $y = \sec x$

$$\frac{d}{dx} (\csc x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right)$$

$$= - (\cos x) / \sin^2 x$$

$$= - \cot x \cdot \csc x$$

: أمثلة

أوجد $\frac{dy}{dx}$ (١) إذا كانت $y = \sqrt{\sin x}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin x)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[\frac{d}{dx} (\sin x) \right]$$

$$= \cos x / (2 \sqrt{\sin x})$$

إذا كانت $f'(x)$ أوجد (٢) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

الحل

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$$

أوجد $D_x y$ 1 تمرين

إذا كانت $y = \sin^2 x$

الحل

$$D_x y = \frac{d}{dx} (\sin x)^2 = 2 \sin x \cos x$$
$$= \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx}$$

(أوجد 2 تمرين)

ثابت حقيقي n حيث $y = \sin(\pi + nx)$ إذا كانت

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin(\pi + nx))$$

$$= n \cos(\pi + nx)$$

أوجد (3 تمرين) $\frac{d^3 y}{dx^3} = \sin x$ إذا كانت

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x$$

(4 تمرين)

: ، للدالتين التاليتين ، توالياً $D_x y$ ، $D_v y$ أوجد

$$y = \sin (x^3 + 3x + 5)$$

$$y = \sin (e^v)^2$$

الحل

$$\begin{aligned} D_x y &= \frac{d}{dx} \sin (x^3 + 3x + 5) \\ &= \cos (x^3 + 3x + 5) \frac{d}{dx} (x^3 + 3x + 5) \\ &= (3x^2 + 3) \cos (x^3 + 3x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_v y &= \frac{d}{dx} \sin (e^{v^2}) = \cos (e^{v^2}) \frac{d(e^{v^2})}{dv} \frac{dv}{dx} \\ &= 2v (e^{v^2}) \cos (e^{v^2}) \end{aligned}$$

الدرس الثالث •

- تفاضل الدوال المثلثية العكسية –
تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية
– التفاضل المتتالي

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

$f^{-1}(x)$ بناء علي مناقشتنا السابقة للدالة العكسية
في الفصلين الأول والثالث

نعرف الدوال المثلثية العكسية كما يلي:

$$(1) \quad y = \arcsin x = \sin^{-1} x$$

: إذا فقط إذا كانت

$$x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad y = \arccos x = \cos^{-1} x$$

$x = \cos y$, $0 \leq y \leq \pi$: إذا فقط إذا كانت π

$$(3) \quad y = \arctan x = \tan^{-1} x$$

$x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$: إذا فقط إذا كانت $\frac{\pi}{2}$

$$(4) \quad y = \operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x$$

$x = \cot y$, $0 < y < \pi$: إذا فقط إذا كانت π

$$(5) \quad y = \operatorname{arcsec} x = \sec^{-1} x$$

إذا فقط إذا كانت

$$x = \sec y, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$(6) \quad y = \operatorname{arccsc} x = \csc^{-1} x$$

إذا فقط إذا كانت

$$x = \csc y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$$

$$\text{تفاضل } y = \cos^{-1}x \text{ , } y = \sin^{-1}x$$

(أ) إذا كانت :

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1}x \\ x &= \sin y \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \text{ , } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\text{since : } \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

: (ب) إذا كانت

$$y = \cos^{-1} x \quad x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

: (أ) برهان أن فيمكننا علي غرار ما سبق

$$\frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$y = \cot^{-1} x \text{ , } y = \tan^{-1} x$$

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1} x \\ x &= \tan y \text{ , } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \text{ , } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ , } x \in \mathbb{R}$$

ب) إذا كانت $y = \cot^{-1} x$

$$x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$$

: (أ) برهان أن فيمكننا علي غرار ما سبق

$$\frac{d}{dx} (\cot^{-1} x) = - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{تفاضل : } y = \csc^{-1} x \quad , \quad y = \sec^{-1} x$$

$$\text{أ : إذا كانت } y = \sec^{-1} x$$

$$x = \sec y \quad , \quad 0 \leq y \leq \pi \quad , \quad y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad , \quad |x| > 1$$

$$\text{ملحوظة: } \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

: $y = \csc^{-1}x$ (ب) إذا كانت

$$x = \csc y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$$

: (أ) برهان أن فيمكننا علي غرار ما سبق

$$\frac{d}{dx} (\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1$$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ ملحوظة:

أوجد : مثال $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \sin^{-1} x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \left(\frac{d}{dx} (x^2) \right) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad \underline{\underline{\text{الحل:}}}$$

أوجد: تمرين $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \tan^{-1} \left(\frac{1}{x^2} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^{-4}} \left(\frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{1+x^{-4}} \right) \left(\frac{-2}{x^3} \right) = \left(\frac{x^4}{x^4+1} \right) \left(\frac{-2}{x^3} \right) \\ &= \frac{-2x}{x^4+1} \end{aligned}$$

تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية

Differentiation of Exponential
and logarithmic Functions

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$$

$$d(\ln x) = x^{-1}$$

$$d(\log_a x) = x^{-1} \log_a e$$

الدوال الأسية

Exponential functions

الدالة التي علي الصورة

وهي دالة a تسمى دالة أسية بأساس ($a > 0$) حيث $y = a^x$

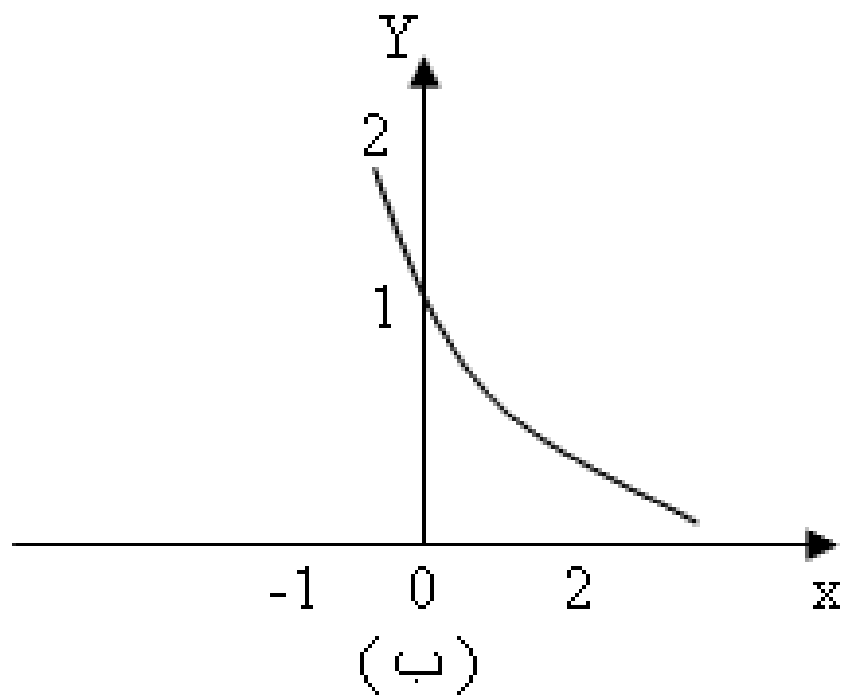
x منفردة القيمة ومتصلة وموجبة لجميع قيم ($0 < x < \infty$)

: وللدالة الأسية الخواص التالية

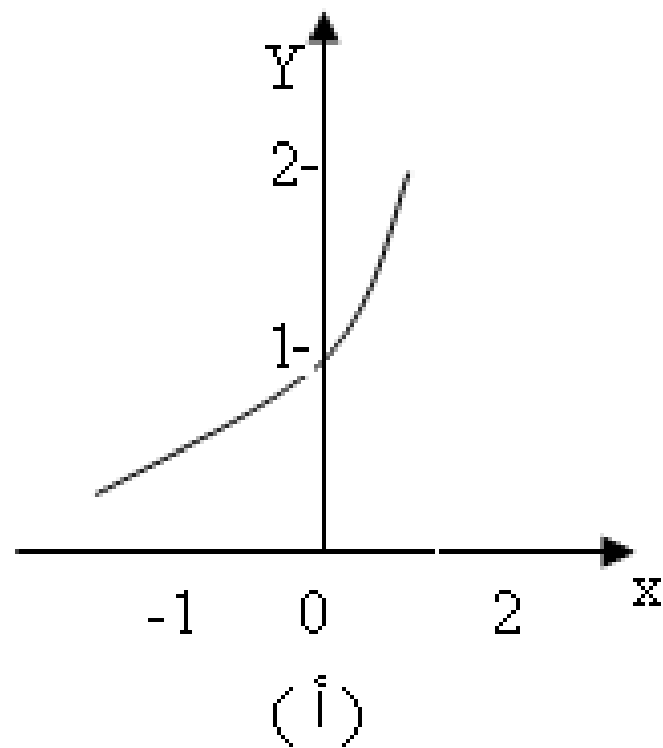
$$a) \quad (a^x) (a^{x_1}) = a^{x+x_1}$$

$$b) \quad (a^x)^{x_1} = a^{xx_1}$$

$$c) \quad a^{-x} = 1/a^x$$



$a < 1$ منحنى الدالة الأسية عندما تكون
1)



$a > 1$ منحنى الدالة الأسية عندما تكون
1)

Logarithmic Functions : الدوال اللوغاريتمية

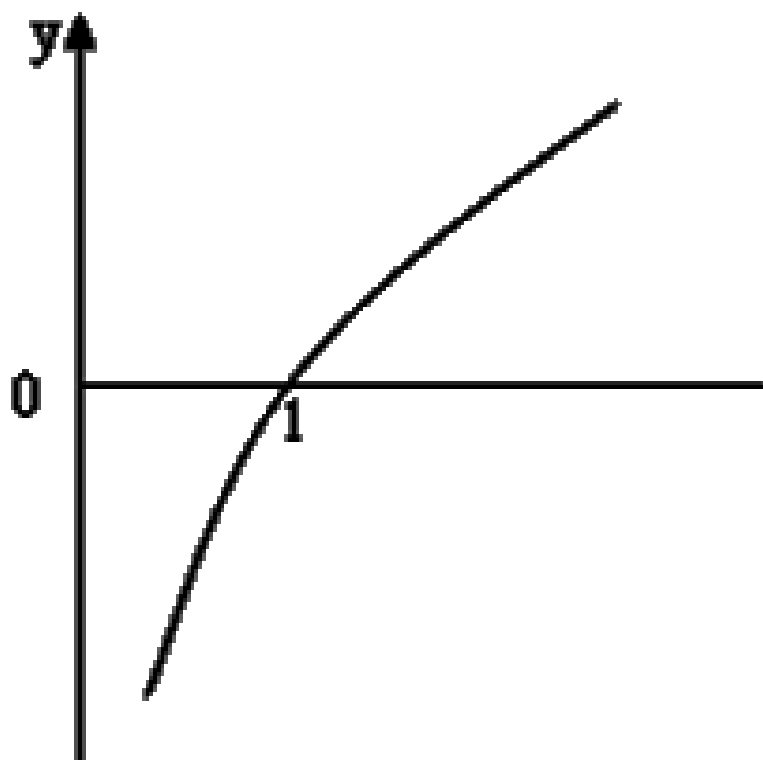
هي دالة منفردة القيمة ومتصلة $y = a^x$ حيث أن الدالة الاسية إذا كانت

فيمكن إيجاد الدالة العكسية لها $a > 0$, $a \neq 1$ وتعرف الدالة العكسية للدالة الاسية بالدالة اللوغاريتمية وتكتب في الصورة :

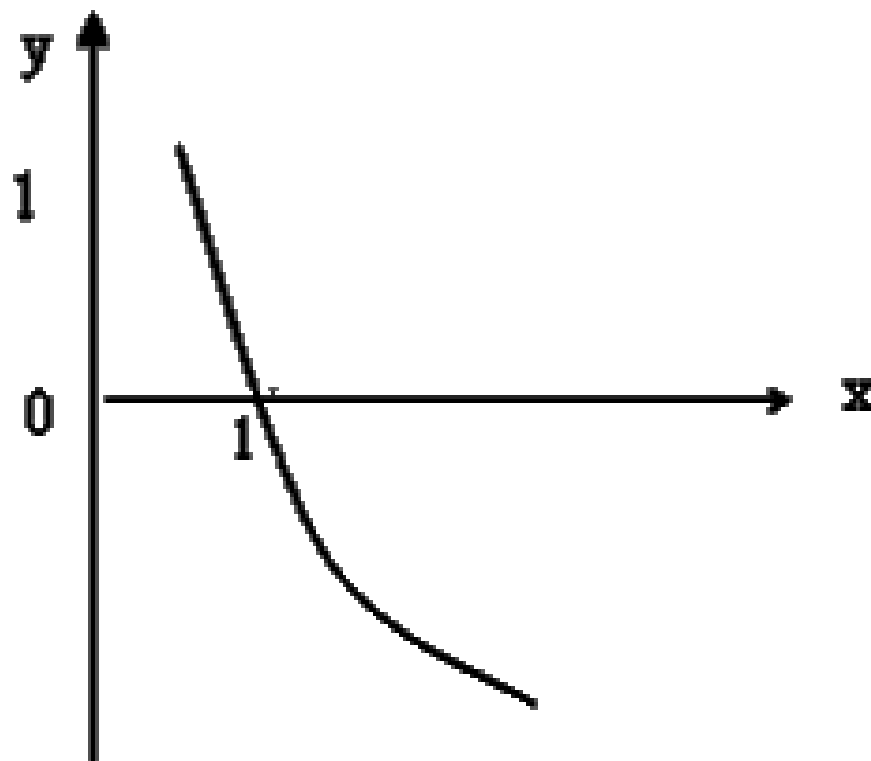
$$y = \log_a x$$

منفردة والدالة اللوغاريتمية للأساس x لوغاريتم تساوي y وتقرأ : الموجبة وهي تحقق القوانين الآتية x القيمة ومتصلة لجميع قيم

عندما تكون $a < 1$ $y = \log_a x$ و $y = \log_a x$ ويبين الشكل التالي منحنى الدالة
عندما تكون $y = \log_a x$ وهي دالة متصلة و متناقصة . ومنحنى الدالة
هي دالة متصلة تزايدية $a > 1$.



$$y = \log_a x, \quad a = 3 > 1$$



$$y = \log_a x, \quad a = \frac{1}{2} < 1$$

Natural Logarithms: اللوغاريتم الطبيعي

e عندما يكون أساس اللوغاريتم هو العدد

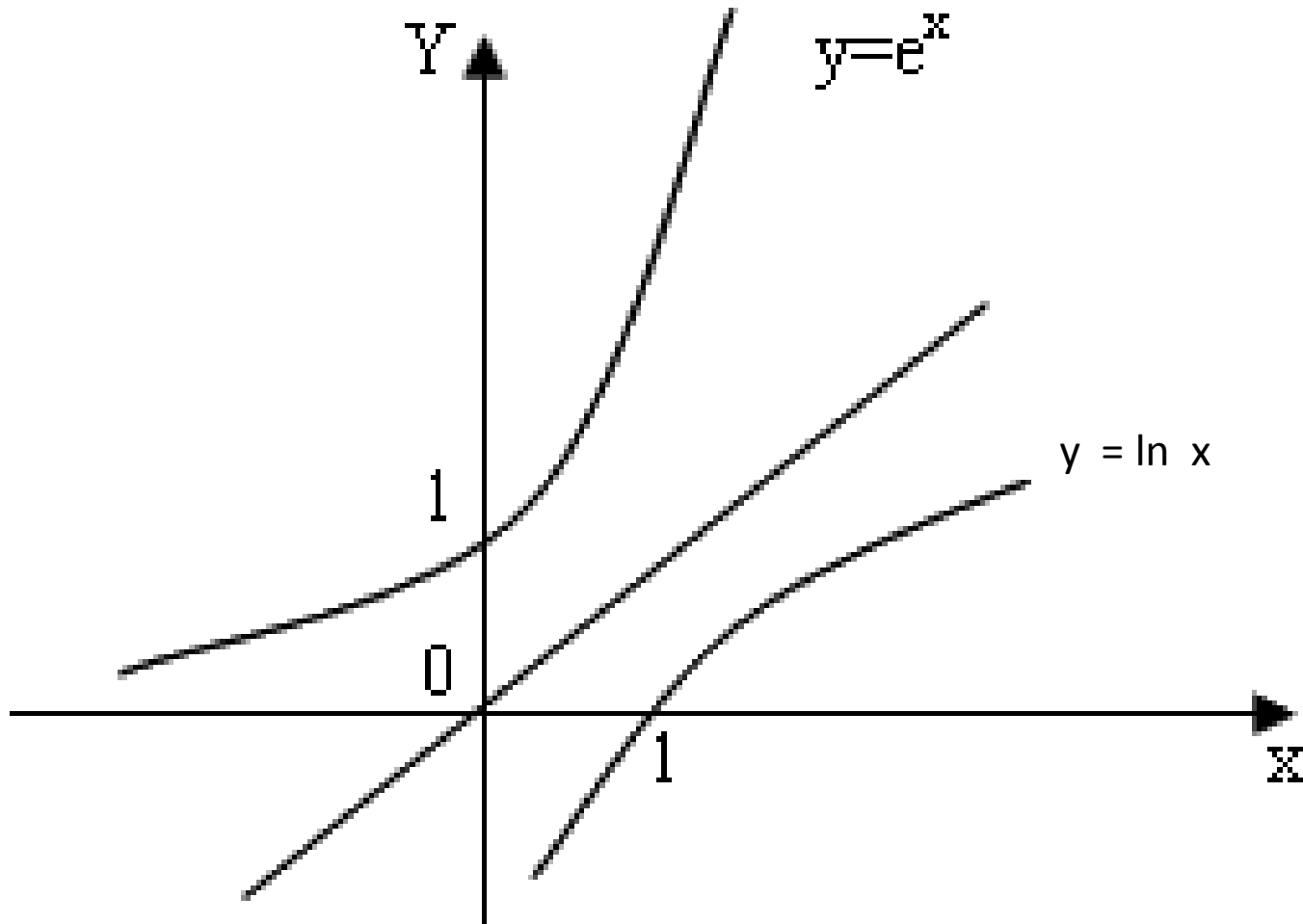
($e = 2.71828$) حيث

يسمى اللوغاريتم لوغاريتم طبيعياً وفي هذه الحالة تكتب

($y = \ln x$) أو ($y = \log x$)

والشكل التالي يوضح منحنيات الدوال

$$y = e^x \quad , \quad y = \log_e x$$



تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية

Differentiation of Exponential and logarithmic Functions

في الفصل الأول تم مناقشة خواص الدوال

$y = a^x$ الأسية التي علي الصور :

وكحالة خاصة عندما $a \in \mathbb{R}^+$ حيث

ويساوي e يكون الأساس هو العدد الحقيقي

والذي يعرف بالأساس 2.71828 تقريباً

الطبيعي للوغاريتمات .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

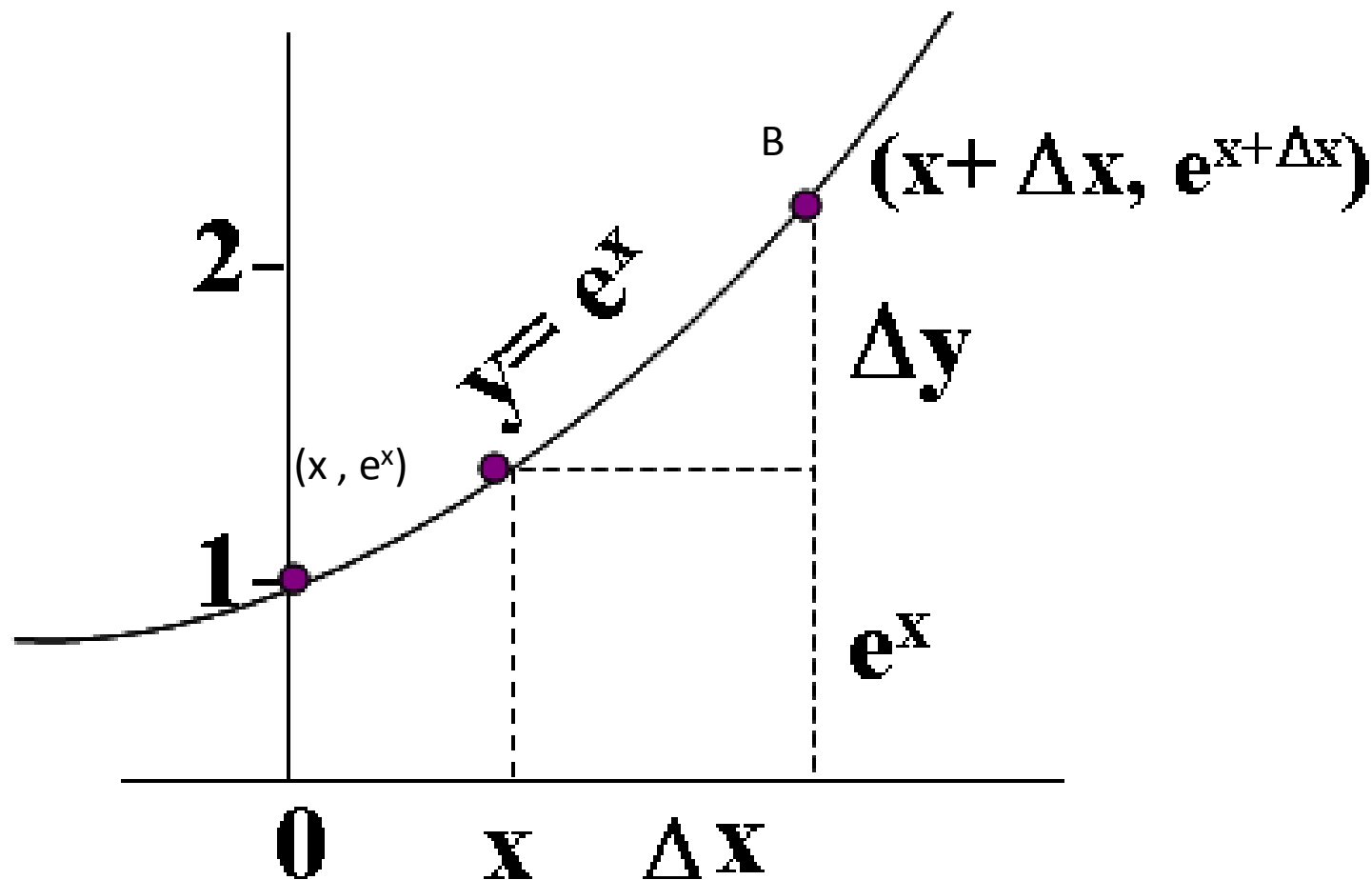
$$y = e^x \text{ تفاضل الدالة}$$

$$\text{if } y = e^x \text{ then } \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^x$$



أوجد : مثال $\frac{d^2 y}{dx^2}$ إذا كانت $y = e^{-x}$

$$\frac{d}{dx} (e^{-x}) = -e^{-x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (e^{-x}) = e^{-x}$$

إذا كانت $y = e^{5v}$ أوجد: مثال $D_v y$

$$\frac{d}{dv} (e^{5v}) = 5 e^{5v}$$

$y = \ln x$ تفاضل الدالة

فإن $x = e^y$ إذا كانت $y = \ln x$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\ln x) = x^{-1}$$

تفاضل الدالة : $a \in \mathbb{R}^+$, $y = \log_a x$

$$y = \log_a x = (\log_e x) (\log_a e)$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = x^{-1} \log_a e$$

تفاضل الدالة : $a \in \mathbb{R}^+$, $y = a^x$

$$y = a^x$$

$$\ln y = x \ln a \quad \text{or} \quad x = (\ln y) / (\ln a)$$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{\ln a} \right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

مثال : أوجد $D_x v$, $D_x y$:

$$y = e^{3x^2} , \quad v = \ln x^2$$

$$D_x y = (e^{3x^2}) \frac{d}{dx} (3x^2)$$

$$= 6x e^{3x^2}$$

$$D_x V = \frac{d}{dx} (\ln x^2) = x^{-2} \frac{d}{dx} (x^2)$$

$$= 2x^{-1}$$

التفاضل المتتالي

Successive Differentiation

، فإن (x) هي المشتقة الاولى للدالة $f'(x)$ إذا كانت يطلق عليها المشتقة الثانية $f''(x)$ مشتقة الدالة ويرمز $f(x)$ للدالة second derivative
third derivative والمشتقة الثالثة $f'''(x)$ لها
وهكذا $f''''(x)$ ويرمز لها $f(x)$ للدالة .

مثال: إذا كانت $y = f(x) = x^n$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$f''''(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4}$$

وهكذا يمكن الحصول علي المشتقات المتتالية للدالة

$$y = f(x) = x^n$$

مثال: أوجد المشتقة الثانية للدالة

$$y = f(x) = 7x^4 + 35x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

الحل

$$f'(x) = 28x^3 + 105x^2 - x + 1$$

$$f''(x) = 84x^2 + 210x - 1$$

Rolle ' s Theorem نظرية رول

$a \leq x \leq b$ دالة متصلة في الفترة $f(x)$ إذا كانت الدالة

ولها مشتقة عند كل نقطة داخل تلك الفترة، وإذا كانت

فلا بد أن تكون هناك علي الاقل نقطة $f(a) = f(b) = 0$

$f'(c) = 0$ التي يكون لها a, b بين c واحدة

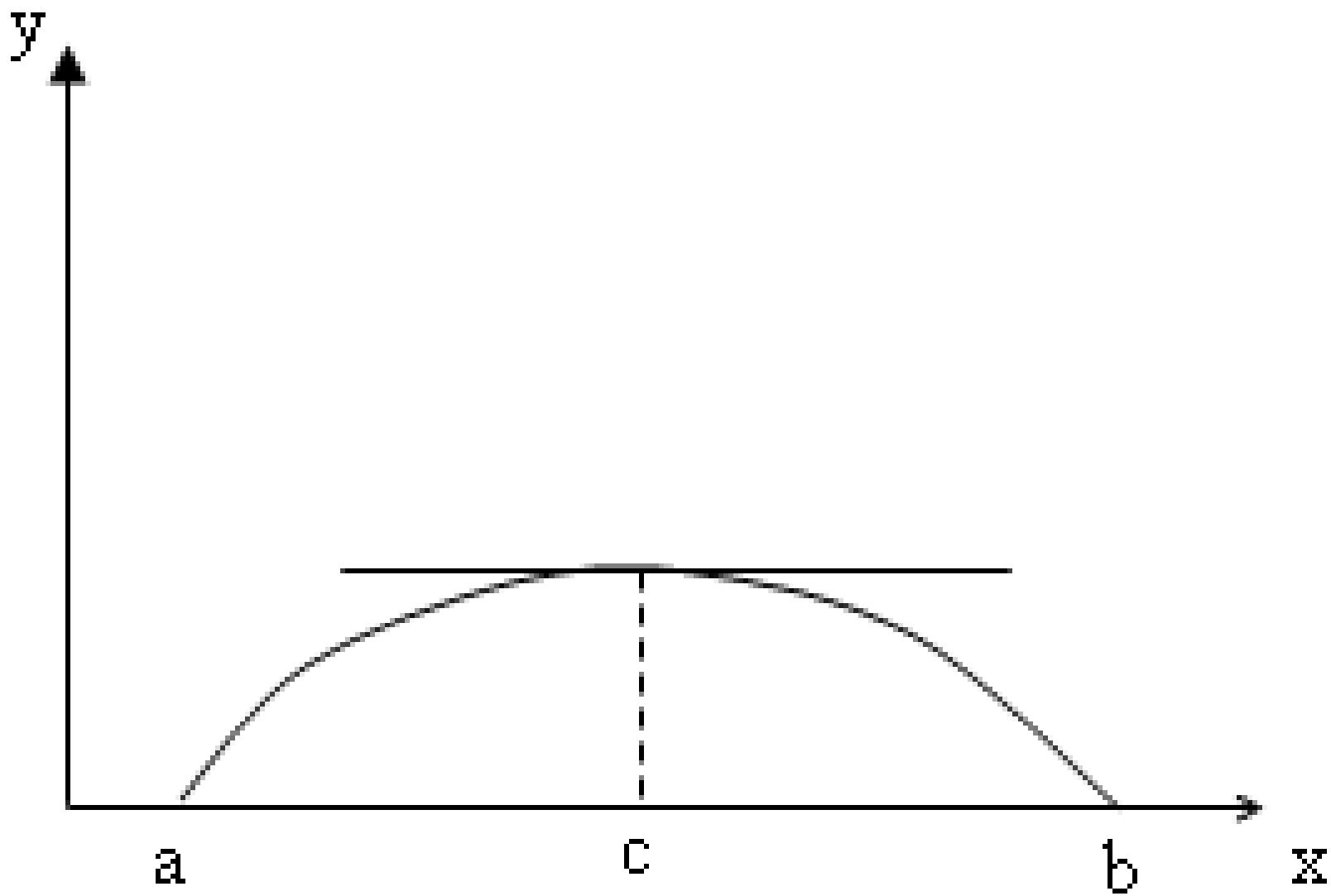
والتفسير الهندسي لهذه النظرية موضح في الشكل
المرفق حيث يلاحظ أن المنحني يقطع
المحور السيني عندما

$$f(a) = f(b) = 0, \quad x = b, \quad x = a$$

بين c وبذلك يجب أن يكون هناك نقطة ما

يكون لها a, b

$$f'(c) = 0$$



مثال

$$y = f(x) = x^3 - 4x$$

في x هي دالة متصلة ويمكن تفاضلها، لكل قيم

$$-\infty < x < +\infty \text{ — الفترة}$$

$$a = -2, b = +2 \text{ فأذا أخذنا}$$

كما في الشكل وبذلك تتحقق شروط نظرية رول

$$f(-2) = f(+2) = 0 \text{ حيث :}$$

وعلي ذلك فإن المشتقة الأولى

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

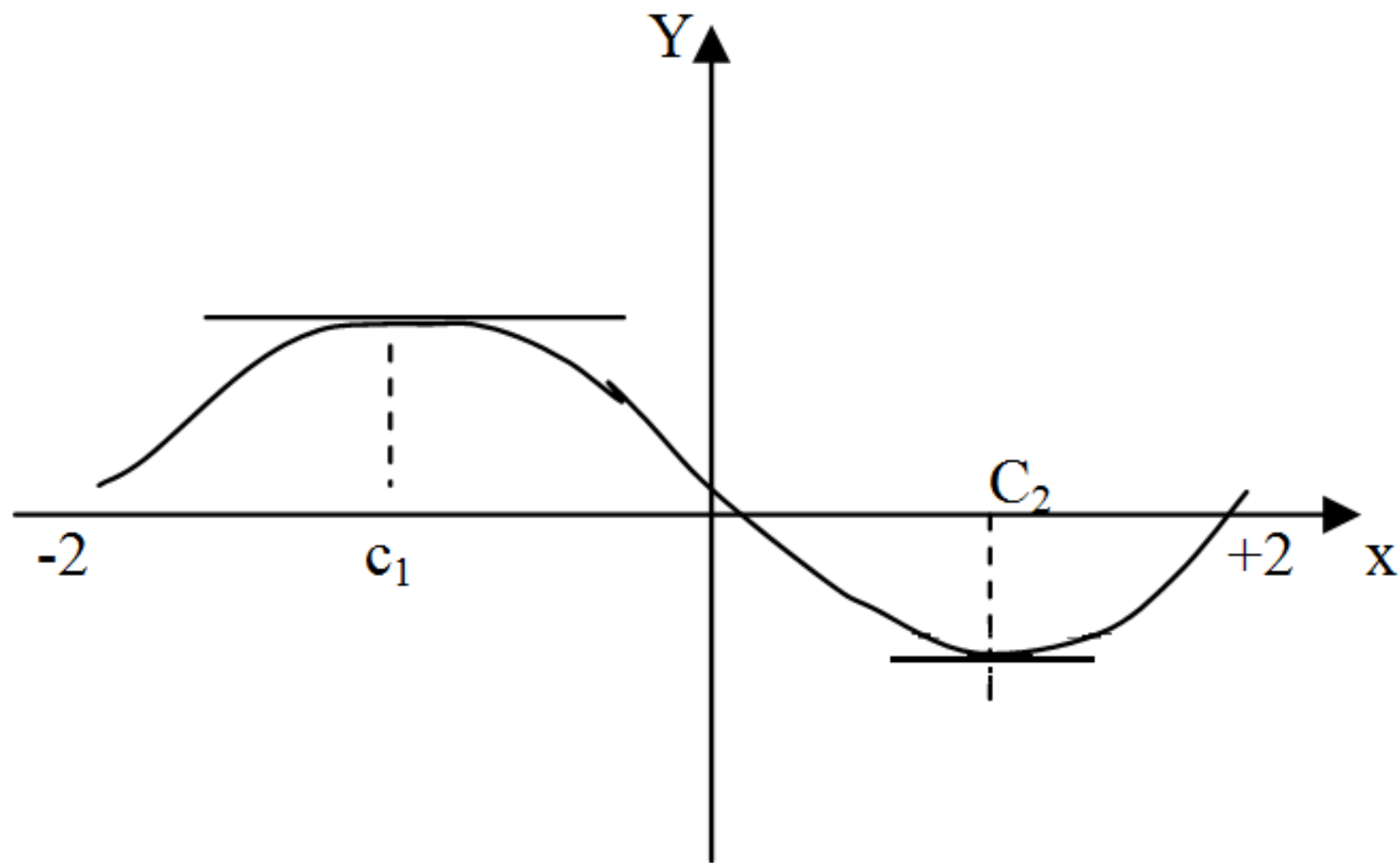
يجب ان تساوى صفراً على الأقل مرة واحدة

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \text{حيث } +2, -2 \text{ بين}$$

عندما

$$x = c_1 = -2\sqrt{3}/3 ,$$

$$x = c_2 = +2\sqrt{3}/3$$



نظرية القيمة المتوسطة

The Mean Value Theorem

دالة متصلة خلال الفترة $f(x)$ إذا كانت
ويوجد لها مشتقة عند كل $a \leq x \leq b$
نقطة داخل تلك الفترة . فإنه يجب أن يكون
 a , بين C هناك علي الأقل نقطة واحدة
بحيث b

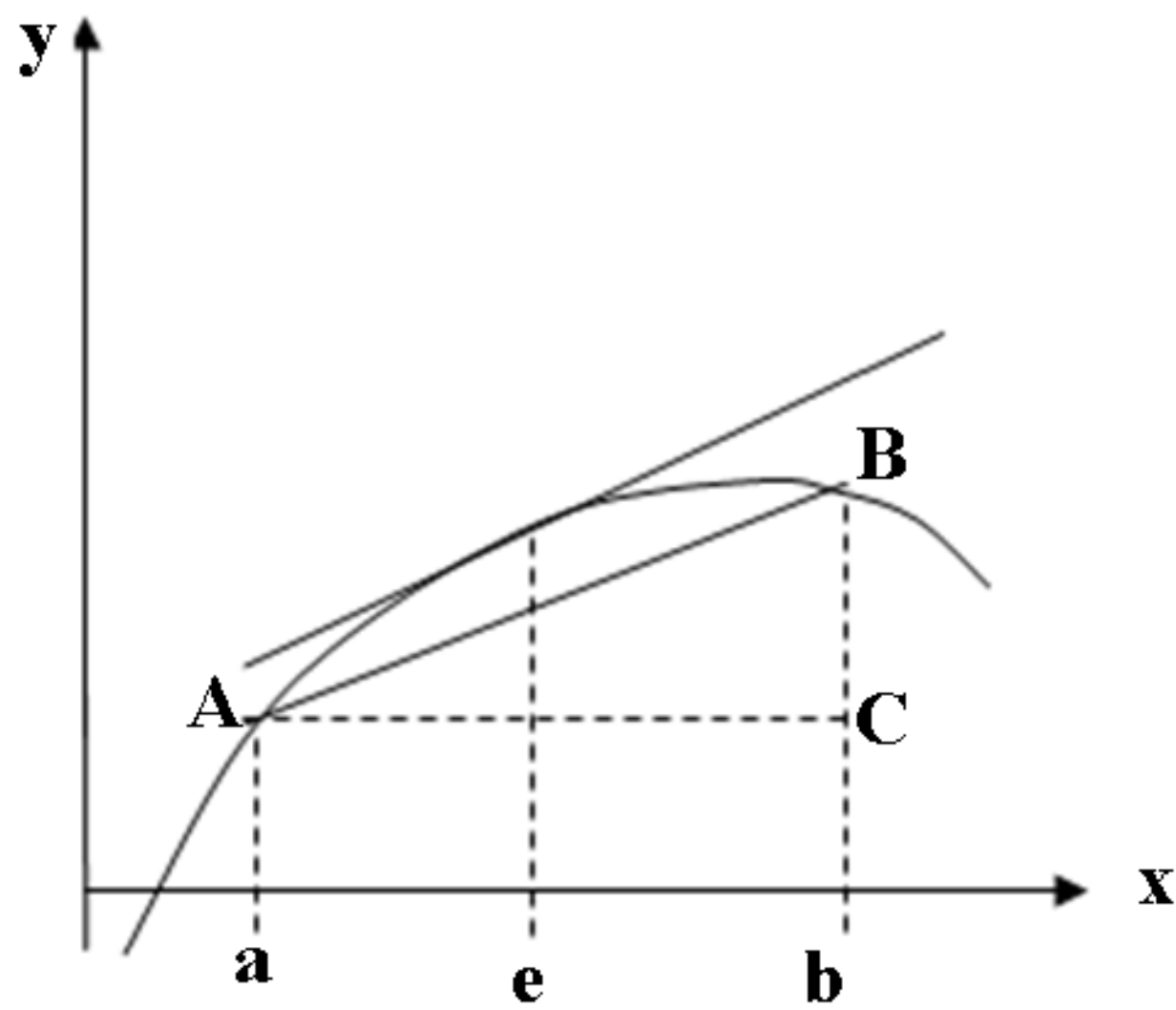
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهذه النظرية واضحة هندسيا كما هو في الشكل التالي ،
هو: AB فأن ميل المستقيم

$$\frac{CB}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وتنص النظرية أنه تحت الشروط السابقة فإنه يجب
بحيث أن المماس a, b بين x_1 أن تكون هناك نقطة
يكون موازيا للمستقيم $c = x_1$ للمنحني عند

AB



مثال :

إذا كانت:

$$f(x) = x^3, \quad a = -2, \quad b = +2$$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(c) = 3c^2$$

$$f(b) = 2^3 = 8, \quad f(a) = (-2)^3 = -8$$

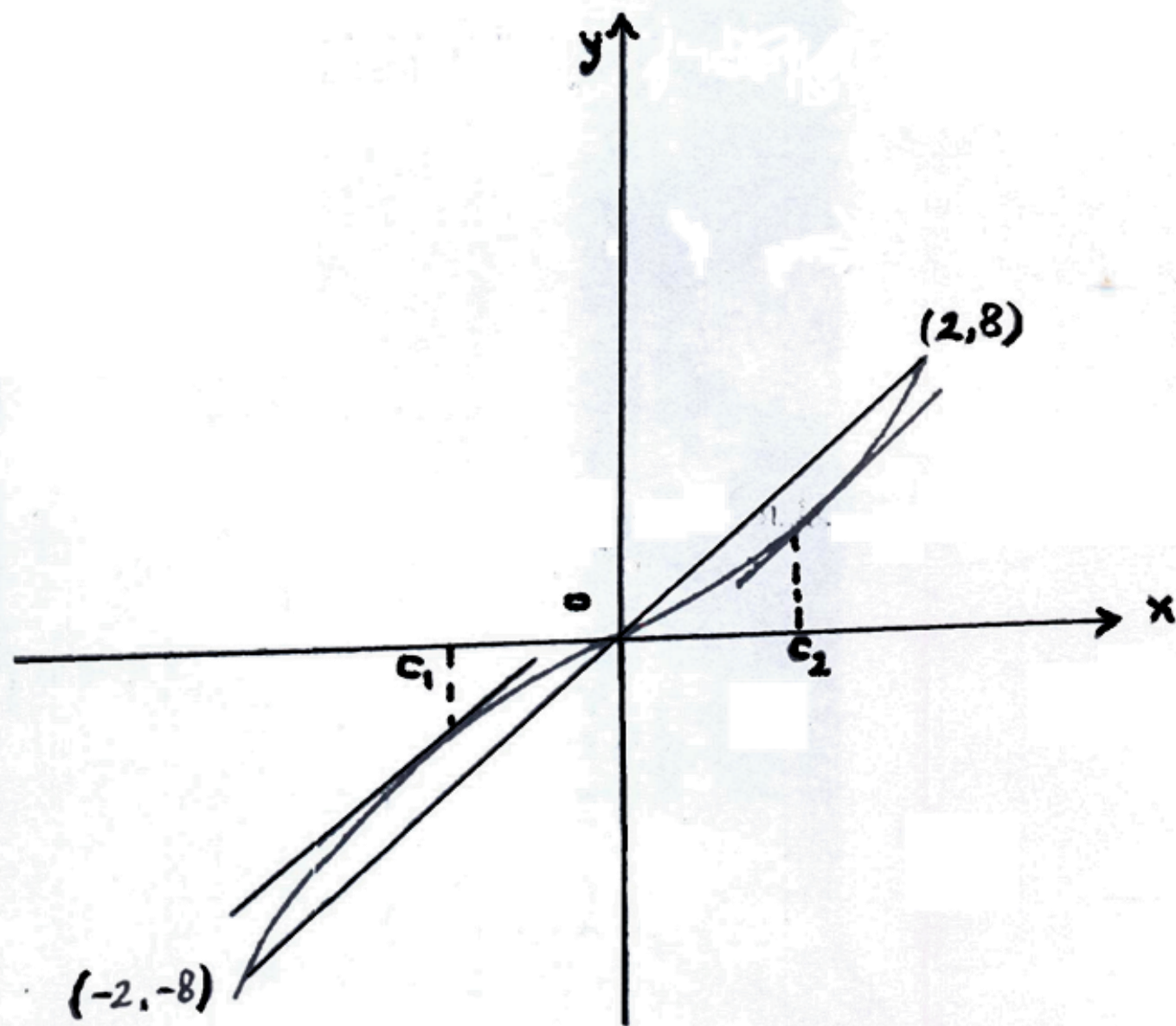
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = 4$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad 3c^2 = 4, \quad c = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

وبناء علي ذلك توجد قيمتين بين $\mathbf{b = +2}$, $\mathbf{a = -2}$

$$\mathbf{c_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}} \text{ هم } , \mathbf{c_2 = +\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

يكون موازيا للمستقيم أو $y = x^3$ التي يكون عندها المماس للمنحني
الوتر المار بالنقط $(-2, -8)$, $(2, +8)$



مفكوك تيلور وماكلورين

Taylor , s and Maclaurin , s Formula

Derivatives لها مشتقات $f(x)$ إذا كانت الدالة
فإن (a, b) في الفترة المحدودة $(n + 1)$ حتي الرتبة
: مفكوك تيلور هو

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n$$

بالحد الباقي للاجرائ R_n ويسمي الحد الأخير

Lagrange , s form of the remainder__

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1},$$

غير معلوم ويوجد له a, b هو عدد بين ξ وحيث ودائماً في الدوال التي a, b علي الاقل حل واحد بين تستطيع كتابة مفكوك لها نجد أن الحد الباقي يؤول إلى الصفر إذا أخذنا عدد كبيراً من الحدود وبذلك نهمله ولا نكتبه في المفكوك.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

متغيرا فإنه يمكن b هو ثابت وأن a وإذا اعتبرنا أن
: في المفكوك السابق وبذلك b من بدلا x إحلال

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

مفكوك ماكلورين

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

مفكوك ماكلورين

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة

$$y = e^x$$

مثال

الحل

$$y = f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = e^x$$

وبحساب قيم هذه المشتقات عند نقطة الصفر

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

تمرين

بدلالة $y = f(x) = \sin x$ عبر عن الدالة x متسلسلة لا نهائية للقوي التصاعدية للمقدار

الحل

$$f(x) = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(6)}(0) = 0$$

.....

.....

$$\therefore f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



بدلالة $y = \ln(x+1)$ تمرين :- أوجد مفكوك ما كلورين للدالة x متسلسلة لا نهائية تصاعدية لقوي

الحل

$$y = \ln (x + 2)$$

بأخذ التفاضل المتتالي للدالة

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+2)^{-1}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(x+2)^{-2}$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2(x+2)^{-3}$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f''''(x) = -6(x+2)^{-4}$$

$$f''''(0) = -6$$

$$f'''''(x) = 24(x+2)^{-5}$$

$$f'''''(0) = 24$$

مفكوك ماکلورین

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{6x^4}{24} + \dots$$

$y = \cos x$ تمرين -: أوجد مفكوك ماكلورين للدالة

الحل

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x \qquad f^{(5)}(0) = 0$$

بدلالة x ثم نعوض عن $f(x)$ أنحصل على التفاضل المتتالي للدالة
الصفر ثم نطبق مفكوك ماكلورين

$$f(x) = f(10) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

في صورة متسلسلة لا نهائية $f(x) = \cos x$ عبر عن الدالة -: **تمرين**
 x تصاعدية لقوي المتغير

الحل

$$f(x) = \cos x$$

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^4(x) = \cos x$$

$$f^4(0) = 1$$

ثم التعويض في مفكوك ماكلورين كما سبق في المثال السابق

تمرين :

صحيحا لخمس أرقام عشرية _e أوجد الجذر العاشر للمقدار

الحل

من المثال السابق علمنا أن :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

في هذه المتسلسلة أن: $x = 0.1$ وبوضع

$$\begin{aligned}(e)^{0.1} &= 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + \frac{0.0001}{24} \\ &= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.000167 + 0.000004\end{aligned}$$

$$(e)^{0.1} = 1.10517$$

الدرس الرابع

النهايات العظمى والصغرى-
الدوال متعددة المتغيرات-

maxima and minima النهايات العظمي والصغري

تكون متزايدة $y = f(x)$ سبق القول بان الدالة ، أي أنه إذا x تزداد بزيادة قيمة y إذا كانت قيمة y تتغير فإن Δx تغيراً موجباً قدره x تغيرت تساوي وبذلك فإن Δy تغيراً موجباً قدره Δx : مقداراً موجباً بالتالي فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{مقداراً موجباً}$$

وعلي ذلك إذا كانت المشتقة الأولى لدالة ما

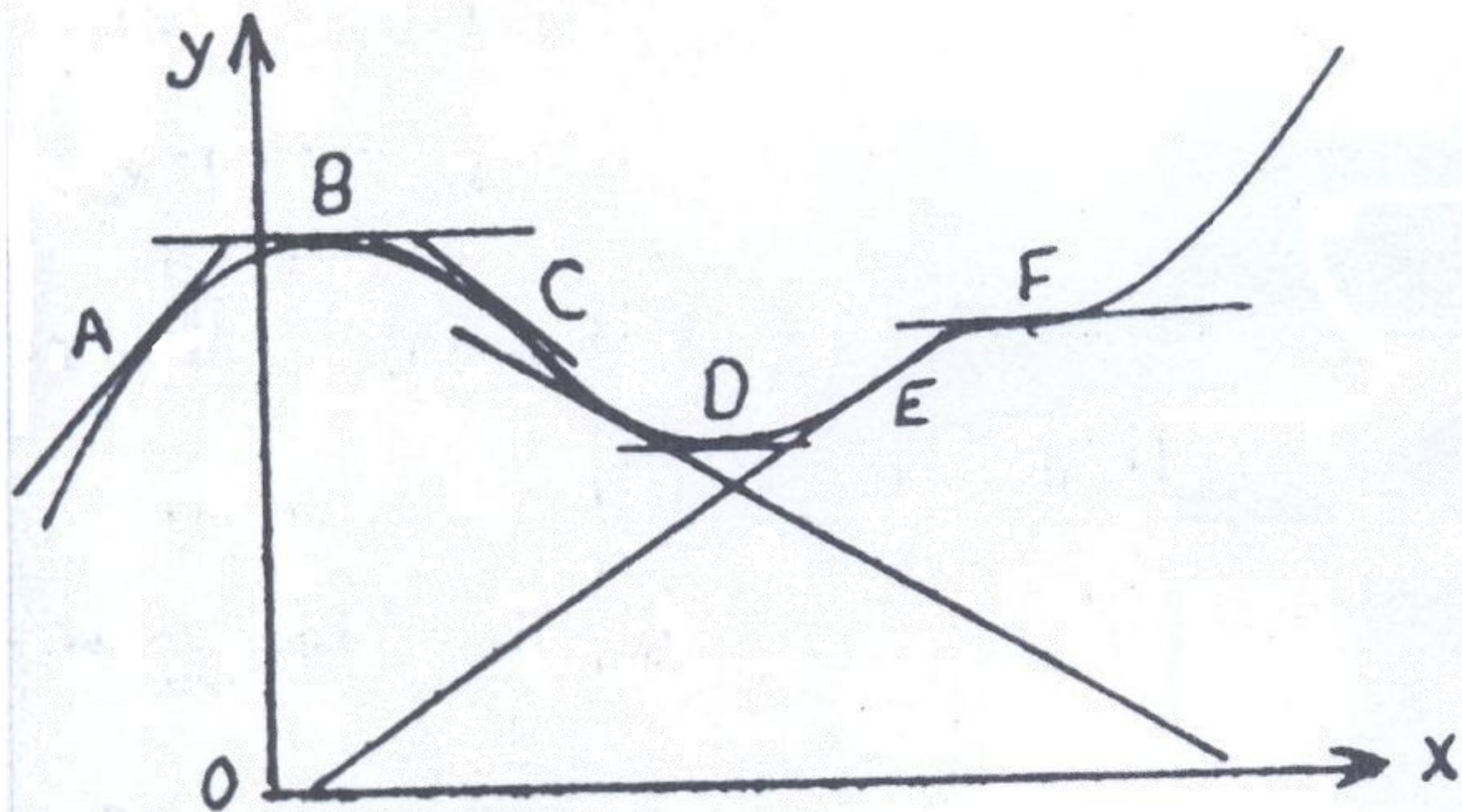
موجبة عند نقطة معينة تكون الدالة متزايدة عند

E هذه النقطة أو النقطة. كما هو واضح عند النقطة

في الشكل . ويلاحظ أن المماس عند هذه A ,

النقطة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب

لمحور السينات .



متناقصة إذا كانت $y = f(x)$ وتعتبر الدالة

تغيراً x أي إذا تغيرت x تنقص بزيادة قيمة y قيمة

تتغير تغيراً سالباً قدره y فإن x Δ موجباً قدره

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} . \text{ وبذلك فإن } \Delta y$$

تساوي مقداراً سالباً وعلي ذلك فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ مقداراً سالباً}$$

وبذلك يمكن القول بأنه إذا كانت المشتقة الأولى

فإن الدالة C لدالة ما سالبة عند نقطة معينة مثل

تكون متناقصة عند هذه النقطة ويلاحظ أن المماس

عند مثل تلك النقطة يصنع زاوية منفرجة مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات.

والنقط التي عندها تتغير الدالة من دالة
متزايدة إلى دالة متناقصة أو بالعكس من
دالة متناقصة إلى دالة متزايدة تسمى نقط
في B , D الرجوع على المنحني مثل
الشكل السابق .

ويقال أن للدالة نهاية عظمي عند نقطة ما إذا كانت
قيمة الدالة عند هذه النقطة أكبر من أي قيمة أخرى لها
عند النقط المجاورة التي تسبق أو تلي هذه النقطة
مباشرة أي أن الدالة يجب أن تكون متزايدة عند جميع
مباشرة B النقط التي تسبق

$$\left(\frac{dy}{dx} = + \right)$$

وتكون متناقصة بعدها مباشرة

$$\left(\frac{dy}{dx} = - \right)$$

ومعني ذلك أن إشارة المشتقة الأولى تتغير
من موجب إلى سالب قبل وبعد موضع النهاية
العظمي مباشرة وتكون قيمة المشتقة الأولى

تساوي (B) عند نقطة النهاية العظمي

صفرًا حيث يكون المماس عند هذه النقطة

موازيًا لمحور السينات .

(D) ويقال أن للدالة نهاية صغرى عند نقطة ما
إذا كانت قيمة الدالة عند هذه النقطة أصغر من أي
قيمة أخرى لها عند النقط المجاورة التي تسبق أو
تلي هذه النقط مباشرة. أي أن الدالة يجب أن تكون
مباشرة D متناقصة عند جميع النقط التي تسبق
وتكون متزايدة بعدها مباشرة

تتغير من ومعني ذلك أن إشارة المشتقة الأولى

dx

سالبة إلى موجب قبل وبعد موضع النهاية الصغرى

مباشرة. ويلاحظ أن قيمة المشتقة الأولى عند نقطة

تساوي صفرا حيث يكون (D) النهاية الصغرى

. المماس عند هذه النقطة موازيا لمحور السينات

نهاية عظمي $y = f(x)$ وبذلك تكون للدالة

تساوي صفرا عند $\frac{dy}{dx}$ هذه عند نقطة ما إذا كانت

النقطة وتتغير إشارتها من الموجب إلى السالب

. x عند المرور بهذه النقطة في اتجاه زيادة

ويكون لهذه الدالة نهاية صغري عند نقطة ما إذا

كانت $\frac{dy}{dx}$ تساوي صفرا عند تلك النقطة ولكن

تتغير إشارتها من السالب إلى الموجب عند المرور

. x بهذه النقطة في اتجاه زيادة

ويجب ملاحظة أن الشرط أن تكون $\frac{dy}{dx}$ تساوي صفرا
لتعيين مواضع نقط الرجوع (النهايات العظمي والصغري)
F يعتبر غير كافيا لتعيين تلك المواضع فمثلا عند النقطة
في الشكل السابق

نجد أن المشتقة الأولى تساوي صفرا ولكن إشارتها لم تتغير
عند المرور بهذه النقطة فهي موجبة قبلها وبعدها وبذلك فإن
ليست نقطة نهاية عظمي أو صغري F نقطة

ويمكن باستخدام المشتقة الثانية التمييز بين

النهايات العظمى والصغرى فإذا كانت قيمة

المشتقة الثانية $f''(x)$ عند نقطة الرجوع سالبة

تكون النقطة نهاية عظمى أما إذا كانت قيمتها

موجبة تكون النقطة نهاية صغرى ،

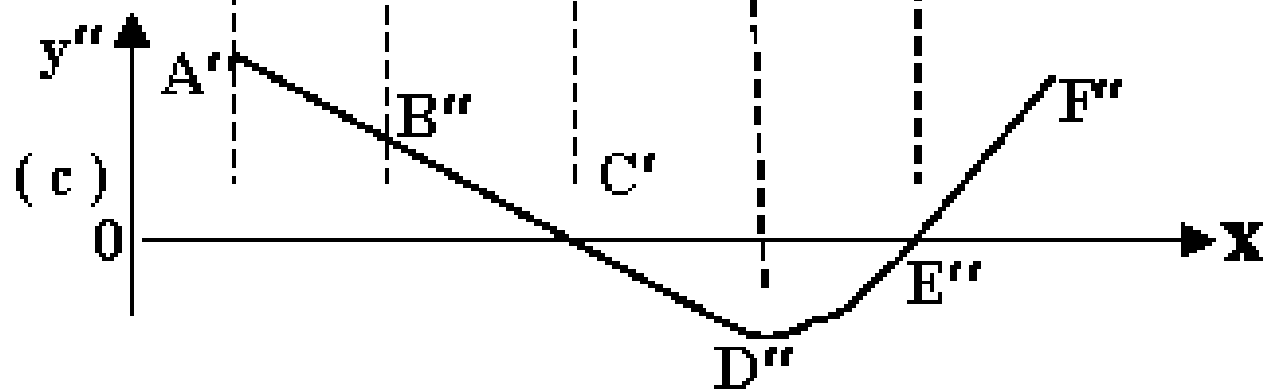
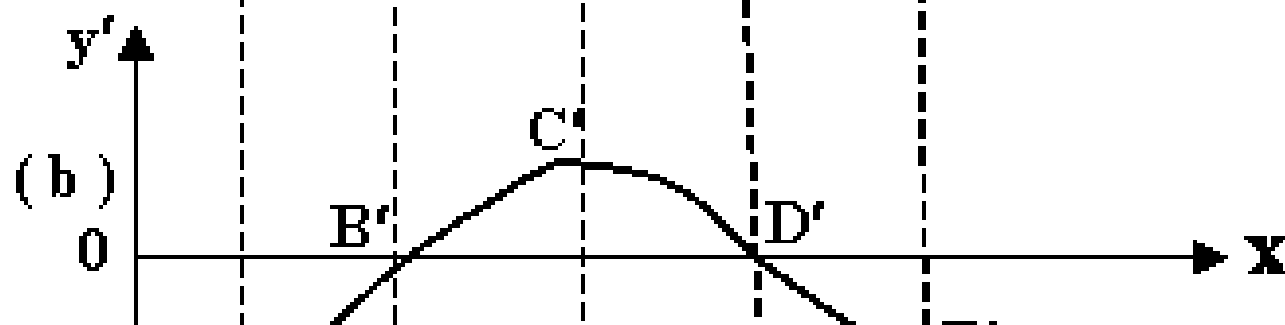
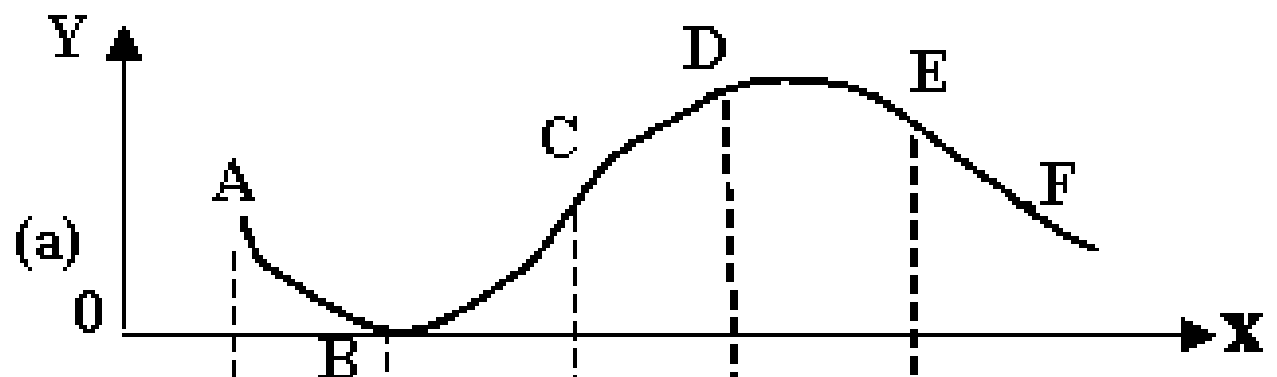
تساوي ~~(x)~~ f' أما إذا كانت قيمة

استخدام المشتقة الثانية يفشل في التمييز بين

النهايات العظمي والصغري ويتحتم في هذه الحالة

كما هو واضح أتبع ~~(x)~~ f' تغيير إشارة

. بالشكل



تذكر أن

$$y = f(x)$$

$$y' = 0$$

$$y'' < 0$$

نهاية عظمى

Maxima

$$y'' > 0$$

نهاية صغرى

Minima

$$y'' = 0$$

لا توجد معلومات

No Info.

: أوجد إحداثي نقط النهايات العظمي والصغري للدالة : مثال

$$y = \frac{1}{3} x^3 - 2 x^2 + 3 x + 2$$

الحل

$$y' = x^2 - 4x + 3 = (x - 1) (x - 3)$$

$$y' = 0 \text{ وبوضع}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad x = 1 \quad \text{or} \quad x = 3$$

: وبالتعويض في الدالة الأصلية عن قيم x

$$y = 3 \frac{1}{3} \text{ or } y = 2$$

$$y'' = 2x - 4$$

$$y'' = 2 - 4 = -2$$

$$\text{عندما } x = 1$$

(نقطة نهاية عظمي) $(1 , 3\frac{1}{3})$ نقطة الرجوع. ∴

$$\text{عندما } x = 3 \quad y'' = 6 - 4 = 2$$

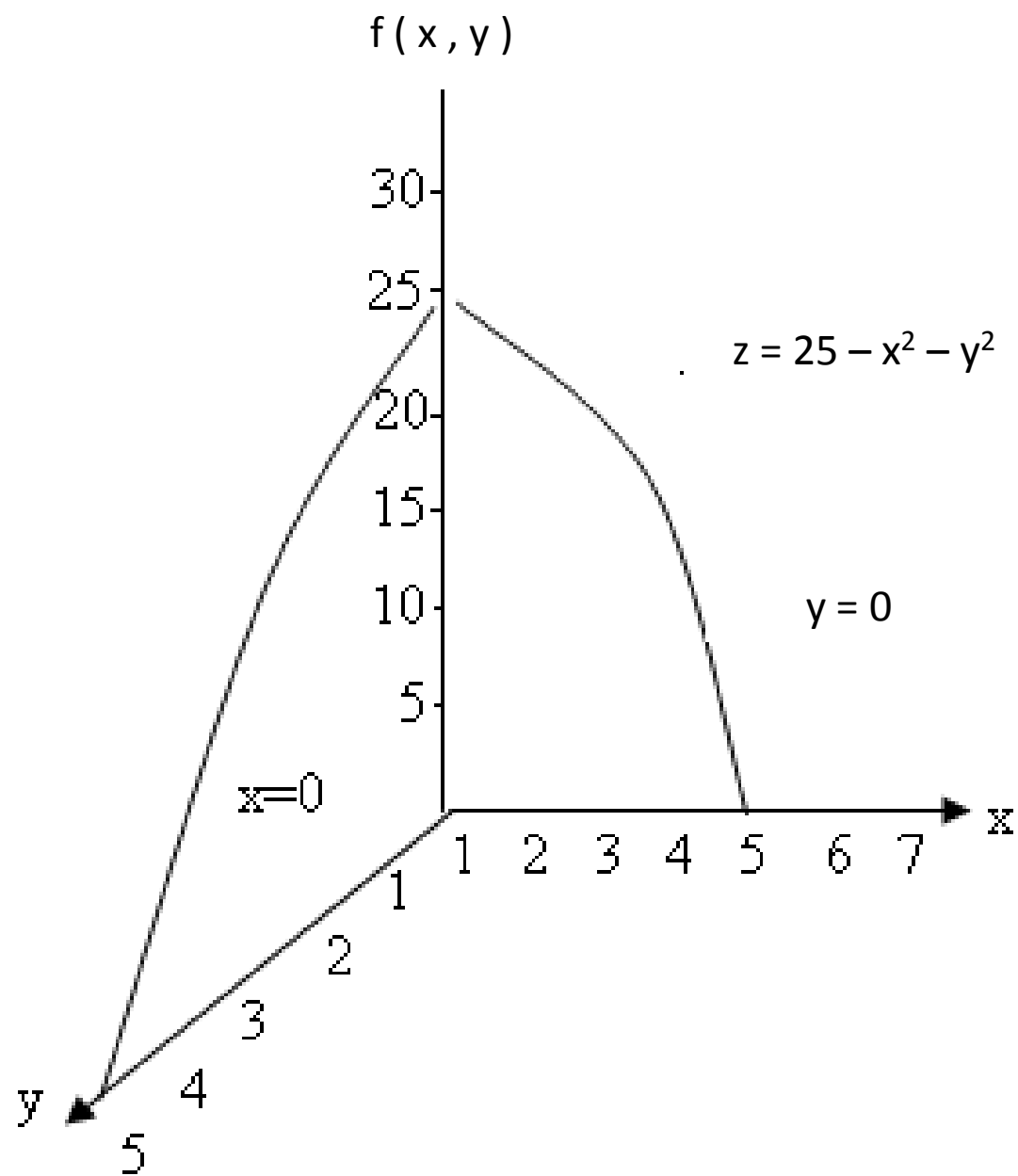
هي نقطة نهاية صغري $(3 , 2)$ نقطة الرجوع ∴

الدوال متعددة المتغيرات

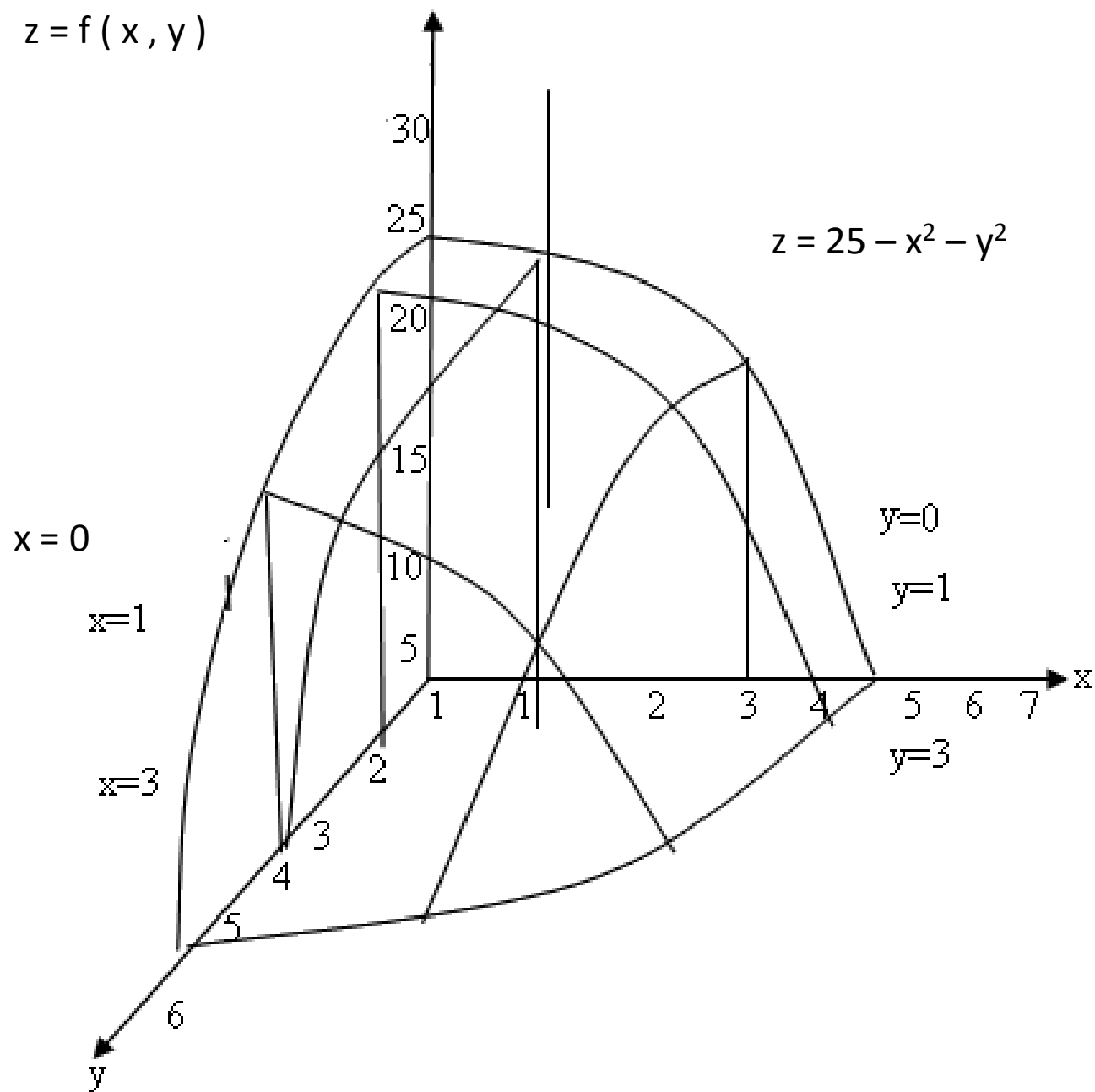
Functions of Several Variables

x , y بأنه دالة في متغيرين z يعرف المتغير التابع في مجال ما بناظرة قيمة (x, y) إذا كان كل زوج ويمكن استخدام الرمز التالي للتعبير عن z واحدة للمتغير تلك العلاقة الدالية :

$$z = f (x , y)$$



$$z = f(x, y)$$



التفاضل الجزئي Partial Differentiation

بالنسبة للمتغير $w = f(x, y)$ تعريف: المشتقة الجزئية للدالة تعرف كما يلي: (x, y) عند نقطة ما x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

بالنسبة للمتغير $w = f(x, y)$ وتعرف المشتقة الجزئية للدالة : كما يلي (x, y) عند نقطة ما y

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ملحوظة

$Z = f(x, y)$ إذا كانت:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

وبالطبع يمكن الامتداد بالتعبيرات السابقة إلى المشتقات الجزئية الأعلى وعلى سبيل المثال :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = f_{yyx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

النهايات العظمي والصغري للدوال متعددة المتغيرات

Maxima and Minima of Functions of Several Variables

الشروط اللازمة والكافية لوجود نهاية عظمي أو
 $U = f(x, y)$ صغري للدالة

: تعرف كما يلي

النهايات العظمي Maxima

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^2$$

$$\text{or} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} \end{array} \right| > 0$$

Minima النهايات الصغرى

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$\text{or } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$$

وعلي غرار ما سبق يمكن الامتداد لحالات الدوال متعددة
(أكثر من متغيرين) المتغيرات

maximum

$$\begin{aligned}f_x &= 0, & f_y &= 0 \\f_{xx} &< 0, & f_{yy} &< 0 \\f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 &> 0\end{aligned}$$

saddle point

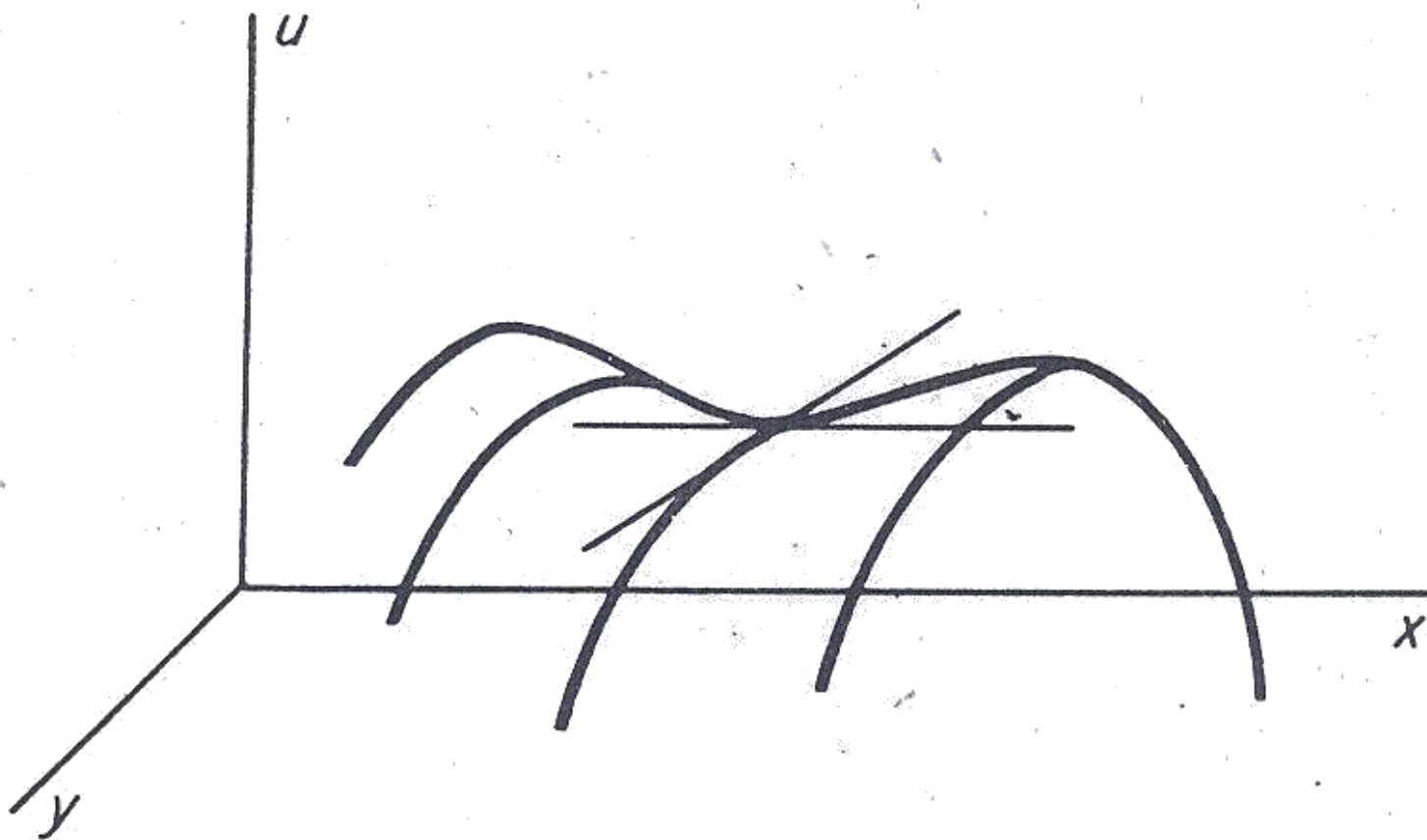
$$\begin{aligned}f_x &= 0, & f_y &= 0 \\f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 &< 0\end{aligned}$$

minimum

$$\begin{aligned}f_x &= 0, & f_y &= 0 \\f_{xx} &> 0, & f_{yy} &> 0 \\f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 &> 0\end{aligned}$$

no information

$$\begin{aligned}f_x &= 0, & f_y &= 0 \\f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 &= 0\end{aligned}$$



Saddle point

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta > 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = 0$$

Saddle Point

No Inf.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ and } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$$

Minima

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ and } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$$

Maxima

$$z = f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$$

مثال :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

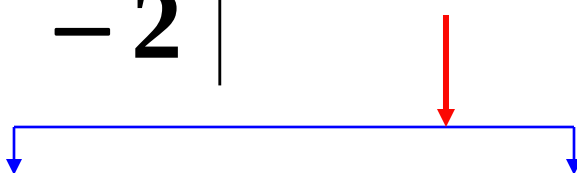
$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$


Minima **Maxima**

Since $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ and $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ equal negative values

Therefore, we have a maxima point at (0,0)

$$z = 25 - x^2 - y^2 = 25 - 0 - 0 = 25$$

$\therefore$ The coordinates of the maxima point are (0,0,25)

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4x - 8y \quad \text{مثال :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4 = 0 \quad x = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8 \quad y = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{وحيث أن}$$

علي التوالي $x = 2$, $y = 2$ عندما

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 4$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad \text{وحيث أن} \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0$$

$z = (-12)$ نهاية صغرى وقيمتها هي $(2, -2)$ وبذلك أنه عند

$(-12, 2, -2)$ وبالتالي فإن احداثيات نقطة النهاية الصغرى هي)

أذا كانت : $(\frac{\partial z}{\partial y})$, () , مثال (١) : أوجد

$$Z = f(x, y) = e^x \sin y + 2xy + y$$

الحل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y + 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y + 2x + 1$$

تمرين (١) : أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى والثانية للدالة التالية

$$t = f(x, y) = xy + \sin xy + x^2 + 5x \ln y$$

الحل

$$\frac{\partial t}{\partial x} = y + y \cos xy + 2x + 5 \ln y$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = x + x \cos xy + 5 \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = -y^2 \sin xy + 2$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 1 + \cos xy - xy \sin xy + \frac{5}{y}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x} = -x^2 \sin xy - 5 \left(\frac{x}{y^2} \right)$$

$$(f_y(x, y)) = \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 1 + \cos xy - xy \sin xy + \frac{5}{y}$$

إذا كانت $z = f(x, y) = 5x^3 - 2y^2 + xy - 3$ مثال (٣):

فأوجد كلا $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

الحل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2 + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y + x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 30x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1$$

(٤) إذا كانت: تمرين $V = g(x,y) = 2x^2 + y^3 - 3xy + 5$

فأوجد كلا من $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$

الحل

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x - 3y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -3$$

تمرين : إذا كانت $w = f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2x$$

هي درجة الحرارة المئوية للوح من w فإذا كانت x, y حيث (x, y) الصلب عند نقطة ما بالسنتيمترات، بالتالي فإن درجة الحرارة عند

ويكون $C = 75^\circ$ هي $(3, 4)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -6^\circ \text{ C / cm} .$$

x وبالتالي فان نتيجة تغير ضئيل موجب في
C 6° سوف ينقص درجة الحرارة بمعدل
بينما المتغير السالب في x لكل سم تغير في
. سوف يزيد درجة الحرارة بنفس المعدل x

• الدرس السابع

- النهايات العظمي والصغري للدوال متعددة المتغيرات

تمرين :

$$u = f(x, y) = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2x - y = 0, \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y = 0, \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore x = 2y, \quad y = 0 \quad \text{or} \quad y = -\frac{1}{4}$$

$$\text{when } y = 0, \quad x = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

بناءً ($-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$) ، (0 , 0) وبالتالي يكون لدينا نقطتان
على الشروط اللازمة .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_y} = -1$$

for $(0, 0)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 4 > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = (-1)^2 = 1$$

تحقق الشروط الخاصة بالنهاية الصغرى $(0, 0)$ وبالتالي فإن النقطة $(u = 4)$ مساوية $(0, 0)$ وتكون القيمة الصغرى عند النقطة

for $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$:

لا تتحقق الشروط $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ وبالتالي فإنه عند النقطة

مثال إذا كانت: $t = f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 13$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{فأوجد كلا من}$$

$t = f(x, y)$ ثم حدد نهايات الدالة

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x} + 2$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

$$2\mathbf{x} + 2 = 0$$

$$2\mathbf{x} = -2$$

$$\mathbf{x} = -1$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{y}} = 6\mathbf{y} - 12$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

$$6\mathbf{y} - 12 = 0$$

$$6\mathbf{y} = 12$$

$$\mathbf{y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}}{\partial \mathbf{y}^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \quad \therefore \text{توجد نهاية}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 2 > 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 6 > 0$$

$$t = f(x, y) = 1 + 12 - 2 - 24 + 13 = 0 \quad \text{النهاية صغري} \therefore$$

هي نقطة نهاية صغري $(-1, 2, 0)$ النقطة $\therefore$

أوجد كلا من:- تمرين $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$

$u = f(x, y) = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$ إذا كانت
(0, 0) نهاية صغري عند النقطة u ثم حقق صحة أو خطأ أن للدالة

الحل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2x - y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y = 0 \quad \therefore x = 2y \quad (2)$$

بالتعويض من المعادلة في المعادلة (١)

$$3x^2 + 2x - y = 0 \quad 3(2y)^2 + 2(2y) - y = 0$$

$$\therefore 12y^2 + 4y - y = 0 \quad 12y^2 + 3y = 0 \quad 3y(4y + 1) = 0$$

$$\therefore y = 0 \quad , \quad y = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore x = 0 \quad , \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{في المعادلة (٢) } y \text{ بالتعويض عن قيم}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(0) + 2 = 2$$

النقاط هي: $(0,0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

إذن يوجد نهاية وعناصر القطر الرئيسي موجب إذن النهاية صغري
 $\therefore u = 4$ في الدالة u وبالتعويض عن قيمة x, y
 تحقق نهاية صغري $(0,0,4)$ أذن النقطة

إذا كانت: $V = g(x, y) = 2x^2 + y^3 - 3xy + 5$ مثال

فأوجد كلا من $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$

الحل

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x - 3y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -3$$

$$z = f(x, y) = 5x^3 - 2y^2 + xy - 3$$

مثال: إذا كانت

فأوجد كلا من

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

الحل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2 + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4 + x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$