
الوحدة الرابعة
الحلول العددية لمسائل القيم
الابتدائية للمعادلات
التفاضلّية العادية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**143**
تمهيد	143
أهداف الوحدة	144
1. مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية	**145**
2. طرق الخطوة الواحدة	**148**
1.2 طريقة أويلر	148
2.2 طريقة هن	162
3.2 صيغة متسلسلة تايلر	163
4.2 صيغ رنج – كتا	167
3. طرق الخطوات المتعددة	**181**
1.3 صيغ آدم باشفورث	182
2.3 صيغ آدم مولتون	188
4. حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا وأنظمة المعادلات	**193**
5. أمثلة عامة على الوحدة	**201**
الخلاصة	**206**
إجابات التدريبات	**208**
المراجع	**217**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحبا بك إلى الوحدة الرابعة (الأخيرة) من مقرر التحليل العددي، وهي بعنوان: "الحلول العددية لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية".

تتألف هذه الوحدة من خمسة أقسام رئيسة، يتعلق القسم الاول منها بمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية، وهو قسم تمهيدي يمكنك بعد دراسته الانتقال لدراسة "طرق الخطوة الواحدة لحل المعادلات التفاضلية" في القسم الثاني من أقسام الوحدة، وهذا القسم يحتوى داخلة مجموعة كبيرة من الموضوعات المهمة، إذ يتناول بالشرح والتحليل مجموعة من صيغ الخطوة الواحدة، وهي صيغة أويلر، وصيغة هن، وصيغة متسلسلة تايلر، وصيغ رنج – كتا.

في القسم الثالث نتناول "طرق الخطوات المتعددة لحل المعادلات التفاضلية" وتشمل نوعين من الصيغ هما: صيغ آدم باشفورث، وصيغ آدم مولتون، وكل من هذين النوعين يحتوي على مجموعة من الأساليب لحل المعادلات التفاضلية ضمن شروط وخيارات محددة، وسنعرض في الوحدة معظم تلك الأساليب مع أمثلة عليها وتدريبات وأسئلة مناسبة.

في القسم الرابع نكون قد وصلنا إلى مستوى يؤهلنا لاستعراض حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا وأنظمة المعادلات، حيث سنعالج كيفية الوصول إلى حلول لتلك المعادلات والأنظمة من خلال استخدام الأدوات الواردة في الأقسام السابقة ضمن محددات واضحة، مع ايراد عدد كبير من الأمثلة والشروحات اللازمة.

وبمناسبة الحديث عن الأمثلة، وكما ورد في الوحدة السابقة، فقد أفردنا قسما خاصا للأمثلة العامة على الوحدة، وهو قسم يأتي ليحقق عدة أهداف: أولها مراجعة ما مر بنا في الوحدة عبر التمثيل لكل حالة من الحالات السابقة، والهدف الثاني المساهمة في مساعدتك على تطبيق ما تعلمته في الوحدة من خلال مجموعة من الأمثلة التي تشمل أفكارا متنوعة ووردت خلال دراستك للوحدة. وأعتقد أن هذا القسم سيكون مفيدا لك في التهيئة لأي اختبارات قادمة. نرجو أن نكون موفقين في تقديم هذه الوحدة بشكل مناسب، وأن تشاركنا برأيك فيما ورد فيها كي يتم تطويرها مستقبلا.

ومرحبا بك مرة أخرى.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة، نأمل أن تكون قادراً على أن:

- **تشرح** مسائل القيم الابتدائية.
- **تعدد** الشروط لوجود حلول لتلك المسائل.
- **تستخدم** بعض الطرق لحل مسائل القيم الابتدائية عددياً.
- **تستخدم** الطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية من عدة رتب.

1. مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلّية

عزيزي الدارس،،

تعتبر المعادلات التفاضلية أفضل طريقة لوصف الظواهر الفيزيائية والظواهر الطبيعية رياضياً، وقد قدم العلماء نظريات عديدة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية وبالتالي فهم أكبر لتلك الظواهر، لكن الكثير من تلك المعادلات لا يوجد لحلها صيغة دقيقة ومحددة، لذلك قدم لنا الإنجاز العلمي معلومات كثيرة عن الطرق العددية لحل تلك المعادلات.

ولكن قبل حل مسائل القيم الابتدائية عددياً. يجب ان نتعرف على ماهيتها.

إن مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية هي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية مع مجموعة من الشروط عند نقطة معينة واحدة.

فمثلاً: $3t\,y'' - y' = y \sin t$

$y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$

هي عبارة عن واحدة من مسائل القيم الابتدائية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. وسوف نستغرق الوقت الأكبر من هذا الجزء في التركيز على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والتي يرافقها شرط ابتدائي واحد:

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

قبل أن نبدأ بعرض الطرق العددية لمسائل القيم الابتدائية بقي أن نعرف متى يكون لتلك المسائل حلول أو حلول وحيدة، ومتى لا يكون لها حل.

تعريف:

الدالة $f(t, y)$ تحقق شرط ليبشيتز (Lipschitz Condition) في المتغير التابع y في المجموعة $D \subseteq R^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D

إن المجموعة $D \subseteq R^2$ تسمى محدبة (Convex) إذا كان لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D فإن النقطة $[(1 - \lambda)\, t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)\, y_1 + \lambda y_2]$

والمعنى الهندسي لمجموعة محدبة هو أنه أي نقطتين تقعان في المجموعة D فإن الخط الواصل بينهما يقع بأكمله في D.



نظرية:

ليكن $f(t, y)$ معرّفة على مجموعة محدبة D في R^2 فإذا وجد $L > 0$ بحيث

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \le L$$

لكل $(t, y) \in D$ فإن f تحقق شرط ليبشيتز في D بالنسبة للمتغير y ويسمى L ثابت ليبشيتز (Lipschitz Constant)

نظرية:

ليكن $D = \{(t, y) : a \le t \le b\ ,\ -\infty < y < \infty\}$ وليكن $f(t, y)$ دالة متصلة في D. إذا حققت الدالة f شرط ليبشيتز في D بالنسبة للمتغير y فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$y'(t) = f(t, y(t))\ \ , a \le t \le b\ \ \ , y(a) = y_0$

لها حل وحيد هو $y(t)$ حيث $a \le t \le b$.

◄◄ مثال:

ليكن: $y' = 1 + t \sin (t\, y) : 0 \le t \le 2 \ , y(0) = 0$

باستخدام نظرية القيمة الوسيطة (Mean Value Theorem)

لأي عددين $y_2 > y_1$ فإن يوجد $c : y_1 < c < y_2$ بحيث أن:

$$t^2 \cos (t\, c) = \frac{\partial}{\partial y} f(t,c) = \frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_2 - y_1}$$

لذلك لكل $y_1 < y_2$

$$| f(t, y_2) - f(t, y_1) = |y_2 - y_1|\, t^2 \cos (t\, c) \le 4\, |y_1 - y_2|$$

إذن f تحقق شرط ليبشيتز في المتغير y حيث ثابت ليبشيتز $L = 4$ أيضاً، حيثما f (t, y) دالة متصلة عندما $0 \le t \le 2$، $-\infty < y < \infty$ فإن النظرية السابقة تؤكد وجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية السابقة.

ملاحظات على النظرية:

1. أي دالة f (t, y) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى y بحيث $|f_y| \le L$ في الفترة I يحقق الشرط وتكون قيمة ثابت ليبشيتز : $L = \max_I |f_y (t, y|$
2. $f(t, y) = y$ تحقق شروط ليبشيتز بالرغم من أن المشتقة بالنسبة إلى y غير موجودة وهنا $L = 1$ وبصفة عامة $L = \max |f_y (t, y)|$ في الفترة I حيث f_y موجودة.

لذلك فإن f لا تحقق شروط لينتيز ولا يوجد للمسألة حل وحيد.

الحل الأول: $y = 0$ ، الحل الثاني: $y = \frac{t^2}{4}$

حلول لا نهائية:

$$y = \begin{cases} 0 & : 0 \le t \le a \\ \dfrac{(t-a)^2}{4} & : t > a \end{cases}$$

سنبدأ الآن بتعلم الطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الأولى على الشكل: $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

وسنفترض دائماً بان f تحقق شرط ليبشيتز.

أسئلة تقويم ذاتي

1- ما هي مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية؟

2- ما المعنى الهندسي لمجموعة محدبة؟

2. طرق الخطوة الواحدة One - Step Methods

1.2 طريقة أويلر Euler's Method

عزيزي الدارس،

تعتمد طرق التقريب ذات الخطوة الواحدة على تقريب المسألة عند النقطة t_{n+1} باستخدام نقطة واحدة قبلها t_n.

والآن لنأخذ المسألة التالية على القيمة الابتدائية لمعادلة تفاضليّة من الرتبة الأولى:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , \quad y(a) = y_0$$

يمكن تقريب حلها من خلال تقسيم الفترة [a, b] إلى عدد N من الفترات الجزئية متساوية القياس بحيث نحصل على نقاط t_n تبعد عن بعضها بعداً ثابتاً:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

كذلك:

$$t_n = a + n\,h \;:\; n = 0, 1, \dots, N \quad : h = \frac{b-a}{N}$$

وعند تطبيق مفكوك متسلسلة تايلر وبافتراض أن $y \in c^2\,[a, b]$ فإنه

لكل $n = 0, 1, .., N$ يمكن كتابة قيمة الحل $y\,(t)$ عند النقطة t_{n+1}:

$$y\,(t_{n+1}) = y\,(t_n + h) = y\,(t_n) + h\,y'\,(t_n) + \frac{h^2}{2}y''\,(c_n)$$

حيث $t_n < c_n < t_{n+1}$. لاحظ أن $t_{n+1} - t_n = h$

وبعد التبسيط:

$$y\,(t_{n+1}) = y\,(t_n) + h\;\; f\,(t_n, y\,(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''\,(c_n)$$

وعند إهمال الحد الأخير يصبح لدينا صيغة أويلر الأمامية أو للاختصار صيغة أويلر

$$y_{n+1} = y_n + h\,f\,(t_n, y_n) \qquad : \;\; n = 0, 1, \dots, N - 1$$

الرمز y_n للدلالة على تقريب القيمة الدقيقة $y\,(t_n)$ أي أن:

$$y_n \approx y\,(t_n)$$

◄◄ مثال:

في المسألة السابقة أثبت أن: $L = 1 \;:\; y' = |y|$

الحل:

$$f\,(t, y) = |y|$$

$$|f\,(t, y_2) - f\,(t, y_1)| = ||y_2| - |y_1|| = \begin{cases} (1)\,|y_2 - y_1| & \text{if } y_1\,y_2 \geq 0 \\ |y_2 + y_1| & \text{if } y_1 y_2 < 0 \end{cases}$$

وإذا كان $y_1 y_2 < 0$ فإن $|y_2 - y_1| \leq (1) |y_2 + y_1|$ وفي كلتا الحالتين f يحقق شرط ليبشيتز حيث $L = 1$.

تعريف:

إن مسألة القيمة الابتدائية موضوع جيداً (well - posed) إذا كان للمسألة

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad a \leq t \leq b \qquad y(a) = y_0$$

(a) حل وحيد $y(t)$ للمسألة.

(b) ثوابت موجبة $\gamma, \in$ مع الخاصية بأن حل وحيد $Z(t)$ للمسألة:

$$z'(t) = f(t, z) + \delta(t) \quad : \quad a \leq t \leq b \ , z(a) = y_0 + \in_0$$

موجود مع تحقيق الشرط:

$$|z(t) - y(t)| < \gamma \in \qquad \forall a \leq t \leq b$$

عندما $|\delta(t)| < \in \quad , \quad |\in_0| < \in$

ومعنى التعريف السابق أنه إذا أعطينا سؤالاً له حل وحيد فإن أي تغيير بسيط في قيمة f ينتج عنه تغيير بسيط وليس كبيراً في الحل.

نظرية:

ليكن $D: \{(t, y) \quad : a \leq t \leq b \ , -\infty < y < \infty \}$ فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ : a \leq t \leq b \ , y(a) = y_0$$

موضوعة جيداً عندما تكون f متصلة وتحقق شرط ليبشيتز في المتغير y في المنطقة D.

◄◄ مثال:

هل تحقق مسألة القيمة الابتدائية شرط ليبشيتز

$y'(t) = \sqrt{y} \quad , \quad y(0) = 0$

نفرض: $f(t, y) = \sqrt{y}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \lim_{y_2 \to y_1} \frac{\left|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}\right|}{|y_2 - y_1|} \qquad \text{ولنأخذ} \quad y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \lim_{y_2 \to 0} \frac{\left|\sqrt{y_2}\right|}{|y_2|} = \infty$$

(وهذه القيمة ليست أقل من L)

◄◄ مثال:

استخدم صيغة أويلر لتقريب حل:

$$\frac{dy}{dt} = t + \sin t \quad : \; y(0) = 1$$

استخدم $h = 0.5 , 0.25$

الحل:

$h = 0.5$

$t_1 = t_0 + 0.5 = 0 + 0.5 = 0.5$

$y_1 = y_0 + h\, f(t_1) = 1 + 0.5\,(0 + \sin 0) = 1$

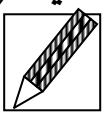
$t_2 = t_1 + 0.25 = 0.5$

$y_2 = y_1 + h\, f(t_1) = 1 + 0.25\,(0.25 + \sin 0.25) = 1.12435$

$t_3 = 0.75 \Rightarrow y_3 = y_2 + h\, f(t_2) = 1.36921$

$t_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 1.72712$

تدريب (1)



كرر المثال السابق مستخدماً h = 0.1 وقارن مع نتائجh = 0.25

قاعدة (1):

لكل $x \geq -1$: $0 \leq (1 + x)^m \leq e^{mx}$ حيث m عدد صحيح موجب.

البرهان:

لنطبق مفكوك متسلسلة تايلر للدالة $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c \qquad : \quad 0 < c < x$$

إذن: $$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c = e^x$$

ولأن $1 + x \geq 0$ فإن $0 \leq (1+ x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}$

قاعدة (2):

إذا كان s, m عددان حقيقيان موجبان، و $\{a_n\}_0^k$ متتالية $(a_0 \geq 0)$ تحقق

$$a_{n+1} \leq (1 + m)\, a_n + s$$

لكل $n = 0, 1, \ldots, k$ فإن:

$$a_{n+1} \leq e^{(n+1)m} \left(\frac{s}{m} + a_0 \right) - \frac{s}{m}$$

البرهان:

لنفرض أن n قيمة معينة (fixed)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq (1 + m)\, a_n + s \\ &\leq (1 + m)\, [(1 + m) a_{n-1} + s] + s \\ &\leq (1 + m\, \{(1 + m)\, [\, (1 + m)\, a_{n-2} + s\,] + s\, \} + s \\ &\text{M} \end{aligned}$$

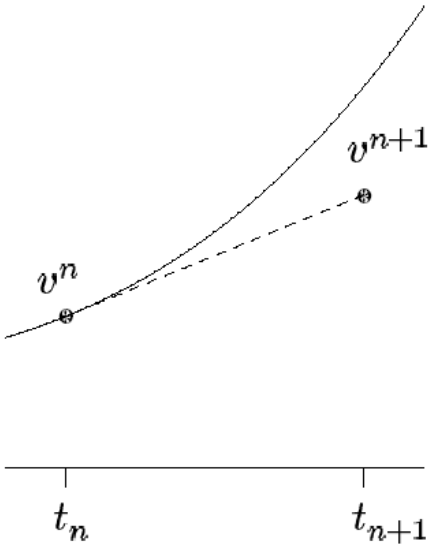
$$\leq (1 + m)^{n+1} a_0 + s \sum_{j=0}^{n} (1+m)^j$$

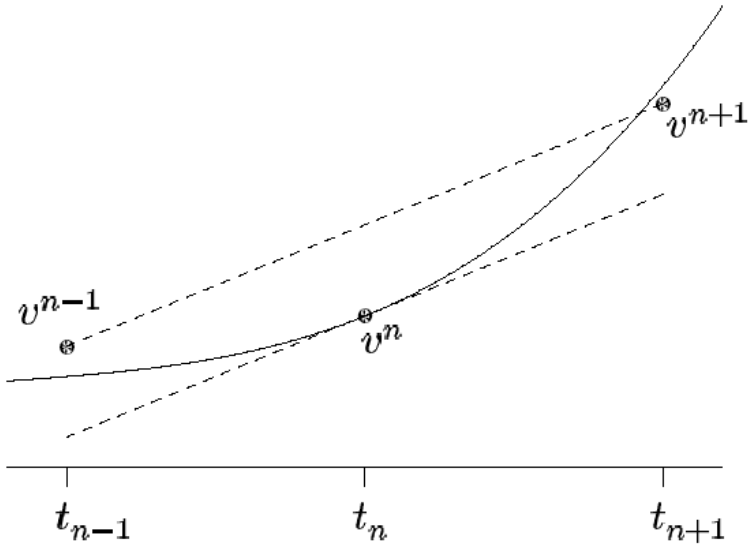
وباعتبار $f_n = f(t_n , y_n)$ فإن طريقة أويلر يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$y_{n+1} = y_n + h f_n \quad : n \geq 0$$

حيث: $y_0 = y(0)$

هندسياً، يمكن تفسير هذه الطريقة على الفترة الجزئية $[t_n, t_{n+1}]$ او حتى على مجموع كل الفترات الجزئية $[a, b]$ (انظر الشكل).





◄◄ مثال:

استخدم طريقة أويلر لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية:

$y' = -t\,y^2 \quad : \quad y(2) = 1$

ثم احسب قيمة الخطأ إذا علمت بان الحل الدقيق هو:

$y(t) = \frac{2}{t^2 - 2} \quad : \; t > \sqrt{2}$

ملاحظة:

استخدم: $t^2 - 2$, $h = 0.1$, $N = 5$

الحل:

نستخدم: $t_n = 2 + nh$

$y_1 = y_0 + h\,f_0 = y_0 + h\,(-t_0\ y_0^2) = 1 + 0.1\,(-2) = 0.8$

$y_2 = y_1 + h\,f_1 = y_1 + h\,(-t_1\,y_1^2) = 0.8 + 0.1\,(-1.344)$

$= 0.6656$

$y_3 = y_2 + h\,f_2 = y_2 + h\,(-t_2\,y_2^2) = 0.6656 + 0.1\,(-0.97465)$

= 0.56813

وبإكمال العملية نحصل على الجدول التالي:

t_n	y_n	$y(t_n)$	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
2.0	*1.0000*	*1.0000*	
2.1	*0.8000*	*0.8299*	*0.0299*
2.2	*0.6656*	*0.7042*	*0.0386*
2.3	*0.5681*	*0.6079*	*0.0398*
2.4	*0.4939*	*0.5319*	*0.0380*
2.5	*0.4354*	*0.4706*	*0.0352*

◄◄ مثال:

كرر السؤال السابق على المسألة: $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt} = t - 2y$ في الفترة $[0, 1]$ مستخدماً $h = 0.2$ علماً بأن الحل الدقيق:

$$y = \frac{2t - 1 + 5e^{-2t}}{4}$$

الحل:

h = 0.2

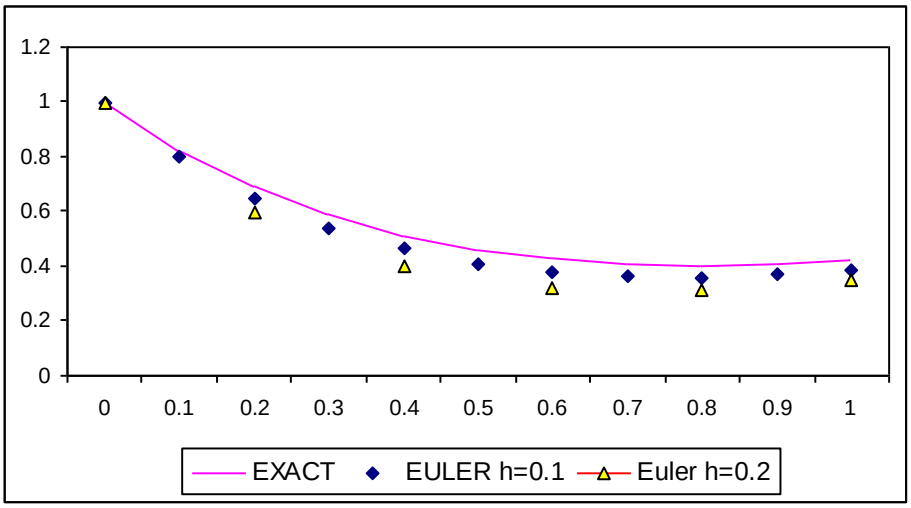
t	**y_Euler**	**y_exact**	**error**
0	1	1	0.0000
0.2	0.6	0.6879	-0.0879
0.4	0.4	0.511661	-0.1120
0.6	0.32	0.426493	-0.1060
0.8	0.312	0.402371	-0.0904
1	0.3472	0.419169	-0.0720

Max error = -0.1120 for h = 0.2

h = 0.1

t	y_Euler	y_exact	error
0	1	1	0.00000
0.1	0.8	0.823413	-0.02340
0.2	0.65	0.6879	-0.03790
0.3	0.54	0.586015	-0.04600
0.4	0.462	0.511661	-0.04970
0.5	0.4096	0.459849	-0.05020
0.6	0.37768	0.426493	-0.04880
0.7	0.362144	0.408246	-0.04610
0.8	0.359715	0.402371	-0.04270
0.9	0.367772	0.406624	-0.03890
1	0.384218	0.419169	-0.03500

أكبر خطأ: -0.05020 for h = 0.100000



تدريب (2)

أن تطبيق صيغة أويلر للمسألة (h = 0.1)

$y' = -y + t + 1$, $y(0) = 1$ $t \in [0, 1/2]$

يعطي حدوداً خطأ يمكن التنبؤ بها. وضح ذلك.

ولكن من عيوب النظرية الأخيرة هو صعوبة الحصول على (y″) في مسائل كثيرة، أو حتى الحصول على حد أعلى M له، وكذلك الحال بالنسبة للعدد L. ظهرت طرق حسابية أخرى لحساب الخطأ وتحليله وسنتابعها في المفاهيم التالية.

تعريف:

إن قيمة خطأ البتر الموضعية (Local Truncation error) للعلاقة:

$$y_0 = \alpha$$
$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \quad : n = 0, 1, \ldots N-1$$

هو المقدر:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1} - (y_n + h\, f(t_n, y_n))}{h}$$
$$= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(t_n, y_n) \quad : n = 0, 1, \ldots, N-1$$

وسمي بالخطأ الموضعي لأنه يقصد به حساب الخطأ عند خطوة معينة، على افتراض أننا نعرف القيمة الدقيقة للحل عند الخطوة السابقة،وذلك لمنع تراكم الأخطاء والناتجة قبل الوصول عند تلك الخطوة المعينة. ولا ننس أنه خطأ بتر نتج عن متسلسلة لا نهائية كما سبق ذكرها.

والآن لنحسب خطأ البتر الموضعي، لصيغة أويلر: سبق أن تعلمنا أن:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(c_n)$$

وبسهولة نرى أن:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h}{2} y''(c_n) \quad : c_n \in (t_n, t_{n+1})$$

ولذلك فإنه خطأ البتر الموضعي لصيغة أويلر لها رتبة O (h).

ملاحظة:

إذا كان: $|y''(t)| \le M$ في الفترة $[a, b]$ فإن:

$$|\tau_{n+1}(h)| \le \frac{h}{2} M$$

ولكن:

$$\sum_{j=0}^{n} (1+m)^j = \frac{(1+m)^{n+1} - 1}{m}$$

وباستخدام المساعدة السابقة بالصيغة:

$$0 \le (1+m)^{n+1} \le e^{(n+1)m}$$

نحصل على:

$$a_{n+1} \le e^{(n+1)m} \left(\frac{s}{m} + a_0 \right) - \frac{s}{m}$$

نظرية:

ليكن $y(t)$ هو الحل الوحيد لمسالة القيمة الابتدائية الموضوع جيداً:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , y(a) = y_0$$

وليكن $\{y_n\}_0^N$ هو متتالية للحلول ناتجة عن استخدام صيغة أويلر

$$y_{n+1} = y_n + h f_n$$

إذا حققت f شرط ليبشيتز، وكان L ثابت ليبشيتز في المنطقة:

$$D = \{(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , \quad -\infty < y < \infty \}$$

وإذا وجد ثابت M بحيث:

$$|y''(t)| \le M \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

فإن:

$$|y(t_n) - y_n| \le \frac{h M}{2L} \{ e^{L(t_n - a)} - 1 \}$$

النظرية السابقة تحدد حدود الخطأ في صيغة تايلر لأي قيمة عند t_n وهي تأكيد على أن رتبة الخطأ هي O(h).

◄◄ مثال:

أوجد حدود الخطأ ثم طبق النتائج على صيغة أويلر:

$$h = 0.2 \; : \quad y' = y - t^2 + 1 \quad : \quad 0 \le t \le 2 \quad , y(0) = 0.5$$

الحل:

الحل الدقيق:

$$y = (t + 1)^2 - \frac{1}{2} e^t$$

كذلك:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 1 = L$$

$$|y''(t)| = |2 - \frac{1}{2} e^t| \le \frac{1}{2} e^2 - 2 \quad \forall \, t \in [0, 2]$$

وأخيراً: $h = 0.2$

$$\frac{h M}{2L} \left[e^{L(t_n - a)}\right]$$

عند تطبيق صيغة أويلر ينتج ما يلي:

t_n	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
قيمة الخطأ	0.0293	0.06209			
حدود الخطأ	0.03752				

ويمكننا تعريف خطأ البتر المتراكم ليكون مجموع أخطاء البتر الموضعية السابقة أما خطأ البتر الكلي فهو خطأ البتر الموضعي زائداً مجموع أخطاء البتر الموضعية السابقة.

تعريف:

ان صيغة θ (θ - Scheme) : $0 \le \theta \le 1$ هي صيغة من خطوة واحدة على شكل:

$$y_{n+1} = y_n + h \{(1 - \theta) f_n + \theta f_{n+1} \} \quad : n \ge 0$$
$$y_0 = y(0)$$

وأشهر صيغ θ:

(1) صيغة أويلر $(\theta = 0)$.

(2) صيغة شبه المنحرف:

(Trapezoidal Rule) $(\theta = \frac{1}{2})$

وتعطي بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

(3) صيغة أويلر الخلفية $(\theta = 1)$ (Backward Euler Scheme). ويعطي بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + n f_{n+1}$$

ملاحظة:

نعلم أن: $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$ لذلك فإن y_{n+1} تظهر في طرفي الصيغ (2) و (3) لذلك تسميان صيغ ضمنية (Implicit methods) بينما الصيغة (1) هي صيغة واضحة (Explicit Method) وسيأتي دراسة الطرق الضمنية فيما بعد.

◄◄ مثال:

أوجد صيغة تتابعية للمعادلة $y' = y$ باستخدام صيغة أويلر الخلفية ثم أوجد خطأ البتر الموضعي ورتبته.

الحل:

طريقة أويلر الخلفية تعطي بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$$
$$= y_n + h\, y_{n+1}$$

إذن: $y_{n+1} - h\, y_{n+1} = y_n$ أو:

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-h} y_n$$

لحساب خطأ البتر الموضعي نستخدم مفكوك متسلسلة تايلر حول t_n

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{1}{2} h^2\, y''(t_n) + O(h^3)$$

$$= y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} h^2\, y''(t_n) + O(h^3)$$

لكن طرح القيمة التقريبية من الدقيقة: $\tau_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y(t_{n+1})}{h}$

$$= \frac{1}{2}[y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) - y_n - h\, f(t_n, y_n) - \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) - O(h^3)]$$

$$= f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_n, y_n) - \frac{1}{2} h\, y''(t_n) - O(h^2)$$

والآن نستخدم مفكوك f حول (t_n, y_n):

$$f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)$$
$$= f(t_n, y_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)$$

ونعوض قيمة $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ في معادلة خطأ البتر الموضعي:

$$\tau_{n+1} = [\, f(t_n, y_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)\,] - f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}\, h\, y''(t_n) - O(h^2)$$

$$= \frac{1}{2}\, h\, y''(t_n) + O(h^2) = O(h)$$

لذلك فإن هذه الطريقة لم تحسن قيمة الخطأ عن طريقة أويلر الأمامية. وهندسياً تعتمد على ميل المماس في نهاية الفترة عند t_{n+1} وليس عند t_n كما في طريقة أويلر الأمامية.

2.2 طريقة هن Heun's Method (أو طريقة أويلر المحسنة)

وهي طريقة ضمنية عبارة عن المتوسط بين صيغة أويلر الأمامية والخلفية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

ويمكن كتابتها على شكل معادلتين معاً لتوقع الحل (Predictor) ومعادلة أخرى لتصحيحه (Corrector) قدر الإمكان:

المتوقع $\quad y^0_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\, h$

المصحح $\quad y_{n+1} = y_n + \dfrac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^0_{n+1})\, h}{2}$

مثال:

استخدم طريقة هن لحل $y(0) = 1 : y' = y - \frac{2}{y}\ , h = 0.1$

الحل:

$n = 0$ $\quad y_1^0 = y_0 + f(t_0, y_0)\, h$

$= 1 + (1)(0.1) = 1.1$

$$y_1 = 1.1 + \frac{f(0.1) + f(0.1,1.1)}{2}(0.1) = 1.1459$$

$n = 1$ $\quad y_2^0 = y_1 + f(t_1, y_1)\, h = y_1 + f)\,(0.1, 1.1459)\, h$

$= 1.1459 + f(0.1, 1.1459) = 1.2430$

$$y_2 = y_1 + \frac{f(t_1, y_1) + f(t_2, y_2^0)}{2}$$

$$= 1.1459 + \frac{f(0.1,1.1459) + f(0.2,1.2430)}{2} h$$

$= 1.2405$

والآن نعوّض مفكوك f_{n+1} في المعادلة الأخيرة:

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{2}(f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{2} h\, y''(t_n) - \frac{1}{3} h^2\, y''(t_n) + O(h^3)$$

$$= \frac{1}{2}[\, h\, y''(t_n) + \frac{1}{2} h^2\, y'''(t_n) + O(h^3)\,] - \frac{1}{2} h y''(t_n) - \frac{1}{3} h^2 y'''(t_n) + O(h^3)$$

$$= -\frac{1}{12} h^2\, y'''(t_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

3.2 صيغة متسلسلة تايلر من الرتبة

m^{th} Order Taylor Series (m)

إن مفكوك متسلسلة تايلر من الرتبة m لحل $y(t)$ حول t_n عند t_{n+1} هو:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + .. + \frac{h^m}{m!}\, y^{(m)}(t_n) +$$

$$\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(c_n) \quad : c_n \in (t_n, t_{n+1})$$

نعلم أن:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y''(t) = f'(t, y(t))$$

وبصفة عامة:

$$y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t))$$

لذلك:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f'(t_n, y(t_n)) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(t_n, y(t_n))$$
$$+ \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(c_i, y(c_i))$$

تعلم بان الحد الأخير يمكن تجاهله للحصول على حل تقريبي، ونحصل على صيغة تايلر من الرتبة m:

$$y_0 = \alpha$$
$$y_{n+1} = y_n + h\, T^{(m)}(t_n, y_n) \qquad : n = 0, 1, \ldots, m-1$$

حيث:

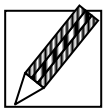
$$T^{(m)}(t_n, y_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(t_n, y_n) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{m!} f^{(n-1)}(t_n, y_n)$$

لاحظ أن صيغة أويلر هي من الرتبة الأولى.

ويمكن التعبير عن صيغة هن بمعادلة واحدة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h \left[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)) \right]$$

تدريب (3)



استخدم طريقة هن لتقريب $y(0.2)$, $y(0.4)$

$h = 0.2$, $y(0) = 0$, $y' = y + e^t$

◄◄ مثال:

أوجد رتبة خطأ البتر الموضعي لطريقة هن:

الحل:

مفكوك متسلسلة تايلر

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$= y_n + h f_n + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{3}h^3 y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y'(t_{n+1})$$

$$= y'(t_n) + h\,y''(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y'''(t_n) + O(h^3)$$

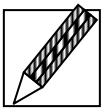
إذن

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}(y_{n+1} - y(t_{n+1}))$$

$$= \frac{1}{h}[y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) - y_n - h f_n - \frac{1}{2}h^2 y'''(t_n) - \frac{1}{3}h^3 y'''(t_n) - O(h^4)]$$

$$= \frac{1}{2}(f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{2}h\,y''(t_n) - \frac{1}{3}h^2 y'''(t_n) - O(h^3)$$

تدريب (4)



ليكن $y' = y + e^t + ty$

$y(1) = 2$: $1 \le t \le 3$

استنبط طريقة متسلسلة تايلر من الرتبة 4 ثم أوجد قيمة تقريبية للمقدار $y(1.2)$ حيث $h = 0.01$.

◄◄ مثال:

استخدم متسلسلة تايلر من الرتبة الثانية (h = 0.5) لتقريب:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \qquad : \; y(2)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$y''(t) = f_t(t, y) + f_y(t, y)\, y'(t)$$

لذلك:

$$y(t_{n+1}) \cong y(t_n) + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} [\; (f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n) f(t_n, y_n)) \;]$$

لذلك:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} + \frac{h^2}{2}(-2t_n \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} + 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} (1 - h\, t_n)$$

n = 0 $y_1 = y_0 + h \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} (1 - h\, t_0) = 0 + 0.5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} (1 - 0.5(0)) =$ 0.564189

n = 1 $y_2 = 0.564189 + 0.5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0.5^2} (1-(0.5)(0.5) = 0.893733$

n = 2 $y_3 = 0.9975099$

n = 3 $y_4 = 1.012376$

إذن: $y(2) \approx y_4 = 1.012376$

4.2 صيغة رنج–كتا Runge - Kutta method

ربما تكون رنج – كتا من أكثر الطرق العددية استخداماً لحل المعادلات التفاضلية العادية، ويعود السبب في ذلك إلى كونها طرق ذات رتب عالية وحسابات ليست معقدة إذا ما قورنت مثلاً بكمية الحسابات الكثيرة في طريقة متسلسلة تايلر.

نظرية تايلر:

ليكن $f(t, y)$ وجميع مشتقاتها الجزئية متصلة من الرتبة $m + 1$ أو أقل في المنطقة: $D = \{ (t, y) : a \le t \le b \;, c \le y \le d \}$

وليكن $(t_0, y_0) \in D$ فإنه $\forall (t, y) \in D$ توجد نقطة (ζ, η) بحيث:

$$f(t, y) = P_m(t, y) + R_m(t, y)$$

حيث:

$$P_m(t, y) = f(t_0, y_0) + (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left((t - t_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2(t - t_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y} + (y - y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$+ \ldots + \left[\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(t-t_0)^{m-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^m f}{\partial t^{m-j}\,\partial y^j}(t_0, y_0)\right]$$

$$R_m(t, y) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}(t-t_0)^{m+1-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1-j}\partial y}(\zeta, \eta)$$

والدالة $P_m(t, y)$ ما هي إلاّ حدودية تايلر من الرتبة m في متغيرين، و $R_m(t, y)$ هو الباقي (Remainder) المرتبط مع $P_m(t, y)$

إن الصيغة العامة لطريقة رنج – كتا هي: $y_{n+1} = y_n + \phi(t_n, y_n, h)\,h$

وتمثل الدالة ϕ قيمة الميل في الفترة الجزئية $[t_n, t_{n+1}]$ وصيغتها العامة:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_m k_m$$

حيث a'_s هي ثوابت و k'_s هي كما يلي:

$$k_1 = f(t_n , y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \alpha_2 h , y_n + \beta_{21} k_1 h)$$
$$k_3 = f(t_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31} k_1 h + \beta_{32} k_2 h)$$
$$\vdots$$
$$k_m = f(t_n + \alpha_m h , y_n + \beta_m k_1 h + \gamma_{m,2} k_2 h + \dots + \gamma_{m,m} k_{m-1} h)$$

فمثلاً إذا كان $a_2 = \frac{1}{2}$ فإن $a_1 = \frac{1}{2}$ و $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$ ويصبح لدينا:

$$y_{n+1} = y_i + (\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2) h$$
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + h, y_n + k_1 h)$$

ولاحظ أن: k_1, k_2 هو الميل عند بداية الفترة الجزئية ونهايتها على التوالي، وهي نفس صيغة هن.

إذا كان $a_2 = 1$ فإن $a_1 = 0$ ، $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$ ويصبح لدينا صيغة المنتصف حيث:

$$y_{n+1} = y_n + k_2 h$$
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2} h, y_n + \frac{1}{2} k_1 h)$$

وهي تحسب الميل عن منتصف الفترة الجزئية.

وأخيراً إذا كان $a_2 = \frac{2}{3}$ فإننا سنحصل على أقل خطأ بتر للصيغة العامة من الرتبة الثانية.

◄◄ مثال:

استخدم صيغة المنتصف ومقياس المرحلة $h = 0.25$ للمسألة

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t \qquad , \quad y(1) = 2$$

صيغة المنتصف:

$$y(t + h) = y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y + h\, f(t, y) / 2\right)$$

ونبدأ من عند $(t_0, y_0) = (1, 2)$ ، $y(1.25)$

$y(1.25) = y(1) + (0.25)\ f(1.125, 2 + 0.125\ f(1, 2))$

$f(1, 2) = -3$

$y(1.25) = 2 + (0.25)\ f(1.125, 1.625) = 2 + (0.25)\ (-2.125) = 1.4688$

$y(1.5) = y(1.25) + (0.25)\ f(1.375, 1.4688 + 0.125\ f(1.25, 1.4688))$

$f(1.25, 1.4688) = -1.6876$

$y(1.5) = 1.4688 + (0.25)\ f(1.375, 1.2579) = 1.4688 + (0.25)\ (-1.1408) = 1.1836$

$y(1.75) = y(1.5) + (0.25)\ f(1.625, 1.1836 + 0.125\ f(1.5, 1.1836))$

$f(1.5, 1.1836) = -0.8672$

$y(1.75) = 1.1836 + (0.25)\ f(1.625, 1.0752) = 1.1836 + (0.25)(-0.5254) = 1.0522$

$y(2) = y(1.75) + (0.25)\ f(1.875, 1.0522 + 0.125\ f(1.75, 1.0522))$

$f(1.75, 1.0522) = -0.3544$

$y(2) = 1.0522 + (0.25)\ f(1.875, 1.0079) = 1.0522 + (0.25)\ (-0.1408) = 1.0170$

رنج – كتا من الرتبة الثالثة:

إذا كان $m = 3$ سنحصل على صيغة رنجا – كتا من الرتبة الثالثة وأحد الصيغ:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\ (k_1 + 4k_2 + k_3)\ h$$

حيث:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h\ ,\ y_n + \frac{1}{2}k_1\ h\right)$$

$$k_3 = f(t_n + h\ ,\ y_n - k_1 h + 2k_2\ h)$$

اشتقاق صيغة رنج – كتا من الرتبة الثانية:

إن صيغة رنج – كتا من الرتبة الثانية تكون على النحو التالي:

$$y_{n+1} = y_n + (a_1k_1 + a_2k_2)\, h \quad \ldots\ldots(1)$$

حيث:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1 h)$$

ويتبقى علينا تحديد قيم الثوابت: $\beta_{21}, \alpha_2, a_2, a_1$ عن طريق مساواة هذه الصيغة بصيغة تايلر من الرتبة الثانية والتي هي:

$$y_{n+1} = y_n + h\, T^{(2)}(t_n, y_n)$$

ولكن

$$T^{(2)}(t_n, y_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(t_n, y_n)$$

ولكن باستخدام قاعدة السلسلة (Chain Rule):

$$f'(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

فإن:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \ldots\ldots(2)$$

والآن قبل أن نساوي المعادلتين (1)، (2) معاً، نستخدم نظرية تايلر لمفكوك المتسلسلة بمتغيرين للمقدار k_2 حول $f(t_n, y_n)$

$$f(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1 n) = f(x_n, y_n) + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial t} + \beta_{21} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

والآن (1) يمكن إعادة كتابتها:

$$y_{n+1}=y_n+[a_1 f(t_n , y_n) + a_2 f(t_n, y_n) h + a_2 \alpha_2 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 \beta_{21} h^2 f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$$

$$= y_n+[a_1 f(t_n, y_n)+a_2 f(x_n, y_n)] h + [a_2 \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 \beta_{21} f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}] h^2+O(h^3) \quad ..(3)$$

والآن نقارن المعادلتين (2) و (3) لنحصل على:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad a_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

وأصبح لدينا ثلاث معادلات وأربعة مجاهيل ونستطيع تعيين أي قيم لها، وتبقى الصيغة الناتجة من إحدى صيغ رنج – كتا من الرتبة الثانية.

صيغة رنج – كتا من الرتبة الرابعة:

لعل أشهر صيغ رنج– كتا هي الصيغة الكلاسيكية من الرتبة الرابعة:

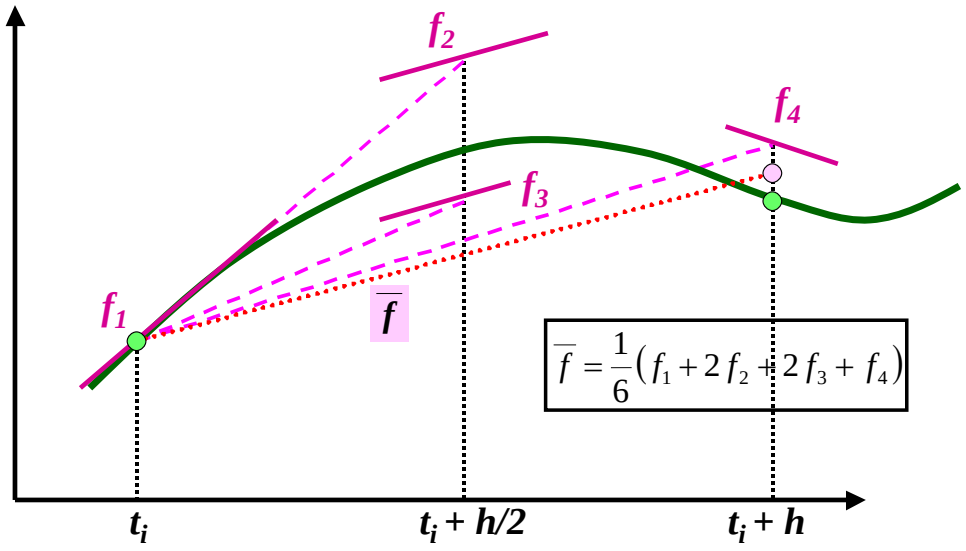
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h$$

$$k_1 = f(t_n , y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3 h)$$



والجدول التالي يوضح العلاقة بين عدد الحسابات لكل مقياس مرحلة h من صيغ رنج – كتا المختلفة وأفضل رتبة لخطأ البتر الموضعي:

عدد الحسابات للكل خطوة	2	3	4	$5 \le n \le 7$	$8 \le n \le 9$
أفضل رتبة لخطأ البتر الموضعي	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$

ملاحظة:

هناك بعض المراجع تكتب صيغ رنج – كتا بحيث تكون مقياس الخطوة (h) ضمن قيم k's أي أن:

$$y_{n+1} = y_n + \phi\,(t_n, y_n, h)$$

حيث:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_mk_m$$

$$k_1 = h\,f\,(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h\,f\,(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21}k_1)$$

$$k_3 = h\,f\,(t_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2)$$

δm_1 m k_{m-1}

$$k_m = f\,(t_n + \alpha_m h, y_n + \beta_{m,1}k_1 + \gamma_{m,2}\,k_2 + \ldots + \gamma_{m,m}\,k_{m-1}$$

◄◄ مثال:

استخدم الصيغة الأخيرة لرنج – كتا من الرتبة الرابعة لتقريب (1) y مستخدماً $h = 0.25$ للمسألة $y' = t^2 - e^y \sin t \quad : y(0) = 1$

الحل:

في الفترة [0, 1]:

$$n = \frac{b - a}{h} = 4 \qquad , b = 1 \qquad , a = 0$$

لذلك فإننا سنحتاج لحساب: y_1, y_2, y_3, y_4 وسنبدأ بأن $y(0) = 1$

$y_1 : k_1 = h f(t_0, y_0) = (0.25) f(0.1) = 0$

$k_2 = h f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = f(0.125, 1) = -0.373276$

$k_3 = h f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$

$= 0.25 f(0.125 , 1 + 0.5 (-0.373276)) = -0.373276$

$k_4 = h f(t_0 + h, y_0 + k_3) = 0.25 f(0.25 , 1-0.373276)$

$= -0.309854$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$= 1 + \frac{1}{6} (0 + 2 (-0.373276) + 2 (-0.373276) - 0.309854) =$ 0.923911

$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$

x_2:

$k_1 = h f(t_1, y_1) = (0.25) f(0.25 , 0.923911) = -0.560741$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_1, y_1) = 0.25 * f(.25, 0.923911) = -0.560741 \\
k_2 &= hf(t_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&= f(0.125, 0.923911 + 0.5(-0.560741)) = -0.719601 \\
k_3 &= hf(t_1 + \tfrac{1}{2}h, x_1 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
&= 0.25f(0.125, 0.923911 + 0.5(-0.719601)) = -0.702688 \\
k_4 &= hf(t_1 + h, y_1 + k_3) \\
&= 0.25f(0.5, 0.923911 - 0.702688) = -0.763158 \\
x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.923911 + \tfrac{1}{6}(-0.560741 + 2 * (-0.719601) + 2 * (-0.702688) - 0.763158) \\
&= 0.750224 \\
t_2 &= t_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5
\end{aligned}
$$

y_3:

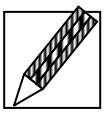
$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_2, y_2) = 0.25 * f(.5, 0.750224) = -0.765171 \\
k_2 &= hf(t_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&= f(0.625, 0.750224 + 0.5(-0.765171)) = -0.735295 \\
k_3 &= hf(t_2 + \tfrac{1}{2}h, x_2 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
&= 0.25f(0.625, 0.750224 + 0.5(-0.735295)) = -0.739508 \\
k_4 &= hf(t_2 + h, y_2 + k_3) \\
&= 0.25f(0.75, 0.750224 - 0.739508) = -0.637224 \\
y_3 &= y_2 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.750224 + \tfrac{1}{6}(-0.765171 + 2 * (-0.735295) + 2 * (-0.739508) - 0.637224) \\
&= 0.568891 \\
t_3 &= t_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75
\end{aligned}
$$

y_4:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_3, y_3) = 0.25 * f(0.75, 0.568891) = -0.641483 \\
k_2 &= hf(t_3 + \tfrac{1}{2}h, y_3 + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&= f(0.875, 0.568891 + 0.5(-0.641483)) = -0.485628 \\
k_3 &= hf(t_3 + \tfrac{1}{2}h, y_3 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
&= 0.25f(0.875, 0.568891 + 0.5(-0.485628)) = -0.510243 \\
k_4 &= hf(t_3 + h, y_3 + k_3) \\
&= 0.25f(1, 0.568891 - 0.510243) = -0.308297 \\
x_4 &= x_3 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.568891 + \tfrac{1}{6}(-0.641483 + 2 * (-0.485628) + 2 * (-0.510243) - 0.308297) \\
&= 0.446327 \\
t_4 &= t_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1.0
\end{aligned}
$$

إذن الحل هو تقريب $y(1)$ أو $y(1) \approx 0.446327$

تدريب (5)



استخدم رنج – كتا من الرتبة الرابعة لتقريب حل المسألة:

$y' = t - 2y$: $y(0) = 1$: $h = 0.2$: $[0, 1]$

مثال:

مستخدماً مقياس خطوة $h = 0.1$ طبق رنج – كتا من الرتبة الرابعة لتقريب $y(0.5)$ للمسألة.

$$y' = -2t - y \quad , \quad y(0) = -1$$

ثم قارن الإجابة مع الحل الدقيق.

الحل:

الحل الدقيق: $y(0.5) = -0.81959$

t_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
0.1	0.1	0.085	0.0858	0.0714	-0.9145
0.2	0.0715	0.0579	0.0586	0.0456	-0.8562
0.3	0.0456	0.0333	0.034	0.0222	-0.8225
0.4	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011	-0.811
0.5	0.0011	-0.009	-0.0085	-0.0181	-0.8196

مثال:

$$y' = -5ty^2 + \frac{5}{t} - \frac{1}{t^2}, \qquad y(1) = 1$$

Exact solution $y(t) = \frac{1}{t}$. Compute errors at $t = 25$.

h	Euler	Rate	RK2	Rate	RK4	Rate
0.2	.40e-2		.71e-3		.66e-6	
0.1	.65e-6	12.59	.33e-6	11.08	.22e-7	4.93
0.05	.32e-6	1.00	.54e-7	2.60	.11e-8	4.34
0.02	.13e-6	1.00	.72e-8	2.20	.24e-10	4.16
0.01	.65e-7	1.00	.17e-8	2.08	.14e-11	4.07
0.005	.32e-7	1.00	.42e-9	2.04	.89e-13	3.98
0.002	.13e-7	1.00	.66e-10	2.02	.13e-13	2.13

The displayed "Rates" are computed as follows: If the error at fixed t is $e(h) = ch^p$ then with step size $2h$, $e(2h) = c(2h)^p = 2^p e(h)$. Thus, calculate

$$\text{Rate}(h) = \log_2\left(\frac{e(2h)}{e(h)}\right).$$

مثال:

أوجد قيمة تقريبية للمقدار $y\,(0.5)$ مستخدماً $h = 0.1$ للمسألة:

$$y'(t) = t^2 \quad , \quad y(0) = 1$$

باستخدام طريقة أويلر ورنج – كتا من الرتبة الرابعة ثم قارن بين الطريقتين أيهما أدق؟

الحل:

صيغة أويلر $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$: $n = 0, 1, 2, \ldots$.

ولكن $f(t_n, y_n) = y^2_n$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$ سنحصل على الجدول التالي:

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1
2	0.2	1.221
3	0.3	1.3700841
4	0.4	1.557797144
5	0.5	1.800470338

بينما صيغة رنج – كتا من الرتبة الرابعة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad : n = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث:

$$k_1 = h\, f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h\, f\left(t_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h\, f\left(t_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h\, f(t_n + h,\ y_n + k_3)$$

وبعد الحسابات نحصل على الجدول التالي:

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1111105
2	0.2	1.249998
3	0.3	1.4285662
4	0.4	1.6666533
5	0.5	1.9999633

ولاحظ بان الحل الدقيق هو: - $y(t) = -\frac{1}{t-4}$

لذلك: $y(0.5) = 2$

والخطأ في صيغة أويلر عند $t = 0.5$ هو 0.19952966

والخطأ في صيغة رنج – كتا من الرتبة الرابعة هو 0.00003674

والسبب أن الأولى لها رتبة $O(h)$ والثانية لها رتبة $O(h^4)$.

◄◄ مثال:

استنتج رنج – كتا من الرتبة الثالثة على الصورة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)$$

حيث:

$$k_1 = h\, f(t, y)$$

$$k_2 = h\, f\left(t + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h\, f\left(t + \frac{3}{4}h,\ y + \frac{3}{4}k_2\right)$$

الحل:

صيغة رنج – كتا من الرتبة الثالثة له صيغة عامة

$$y_{n+1} = y_n + h\,(w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3)$$

حيث:

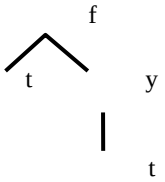
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \alpha_2 h,\ y_n + h\,\beta_{21}k_1)$$

$$k_3 = f(t_n + \alpha_3 h,\ y_n + h\,\beta_{31}k_1 + h\,\beta_{32}k_2)$$

نعلم أَن: $D = \frac{\partial}{\partial t} + f_n \frac{\partial}{\partial y}$

$$D_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}\right) f_n \frac{\partial}{\partial y}$$



وباستخدام مفكوك تايلر مع الصيغتين السابقتين حتى الرتبة الثالثة:

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h f + \frac{h^2}{2} D f + \frac{h^3}{6}(D^2 f + f_y D f) + O(h^4)$$

.....(*)

والآن نستخدم مفكوك متسلسلة تايلر في متغيرين حتى الرتبة الثانية للمقادير $k_3, k_2,$ k_1

$$k_1 = f(c)$$

$$k_2 = ftn + \alpha_2 h, y_n + h \beta_{21} k_1) = f(t_n, y_n) + \boxed{\alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial t} + \beta_{21} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y}} + \frac{h^2}{2} D^2{}_2 f + O(h^3)$$

hD_2f

$$k_3 = f + h D_3 f + \frac{h^2}{2}(D_3^2 f + 2 \beta_{32} f_y D_2 f) + O(h^3)$$

وبتعويض تلك القيم الثلاث في الصيغة العامة أعلاه

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 f + w_2 f + w_3 f) + h^2 (w_2 D_2 f + w_3 D_3 f) + \frac{h^3}{2}(w_2 D_2^2 f + w_3 D_3^3 f) + h^3 (w_3 \beta_{32} D_2 f f_y)$$

وبمقارنة المعادلة الأخيرة مع (*) من خلال العوامل h^3, h^2, h نجد:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_2 D_2 f + w_3 D_3 f = \frac{1}{2} D f$$

$$2 w_2 D_2^2 f + 3 w_3 D_3^2 f = D^2 f$$

$$w_3 \beta_{32} D_2 ff_y = \frac{1}{6} D ff_y$$

ولكن تذكر ان اختيار $\beta_{ij}, \alpha_i, w_i$ يجب أن لا يعتمد على f، لذلك فإن قيم $\frac{D_2 f}{Df}$ و $\frac{D_3 f}{Df}$ هي ثابتة.

فلو اخترنا $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta ij$ فإن $\frac{D_2 f}{Df}$ و $\frac{D_3 f}{Df}$ هي ثوابت، وأيضاً $D_i = \alpha_i D$ ولذلك يمكن التبسيط إلى العلاقات:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_2 \alpha_2 + w_3 \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 \alpha_2^2 + w_3 \alpha_3^2 = \frac{1}{3}$$

ومن خلال المقارنة مع الصيغة الواردة في السؤال:

$$w_1 = \frac{2}{9} \ , w_2 = \frac{1}{3} \ , w_3 = \frac{4}{9}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \ , \alpha_3 = \frac{3}{4}$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2} \ , \beta_{31} = 0 \ , \beta_{32} = \frac{3}{4}$$

◄◄ مثال:

استخدم $h = 0.1$ لتقريب $y\ (0.5)$ للمسألة:

$$y' = -2t - y \quad , y\ (0) = -1$$

باستخدام رنج – كتا من الرتبة الرابعة ثم قارن مع الحل الدقيق:

$$y = -3e^t - 2t + 2$$

x_n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{n+1}
0.1	0.1	0.085	0.0858	0.0714	-0.9145
0.2	0.0715	0.0579	0.0586	0.0456	-0.8562
0.3	0.0456	0.0333	0.034	0.0222	-0.8225
0.4	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011	-0.811
0.5	0.0011	-0.009	-0.0085	-0.0181	-0.8196

علماً بأن الحل الدقيق: $y(0.5) = -0.81959$

أسئلة تقويم ذاتي

1- ماذا نعني بطرق التقريب ذات الخطوة الواحدة؟

2- برهن القاعدة: لكل $x \geq -1$: $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$

حيث m عدد صحيح موجب.

3- ماذا نعني بقيمة خطأ البتر الموضعية؟ وخطأ البتر المتراكم؟

4- اشرح المقصود بطريقة أويلر الخلفية؟

5- اكتب مفكوك متسلسلة تايلر من الرتبة m لحل $y(t)$ حول t_n عند t_{n+1} ؟

6- اكتب الصيغة العامة لطريقة رنج – كتا؟

3. طرق الخطوات المتعددة Multistep Methods

عزيزي الدارس،

لقد تعلمنا فيما سبق تقريب الحل y عند النقطة t_{n+1} مستخدمين بيانات عن الفترة الجزئية $[t_n, t_{n+1}]$ وعن النقطة t_n فقط، لذلك فإن تلك الطرق كانت تسمى طرق

الخطوة الواحدة، لكننا في خطوات سابقة كنّا نحصل على القيم y_{n-1} , … , y_2, y_1 عند النقاط

t_{n-1}, … , t_2, t_1 ، فلماذا لا نستخدم تلك النقط؟

إن الطريقة التي تستخدم y_{n-1}, … , y_1, y_0 تسمى طريقة ذات n من الخطوات ويجب التذكير دائماً بأن الطريقة التي نحصل فيها على تلك القيم الابتدائية هي من إحدى طرق الخطوة الواحدة.

1.3 طريقة آدم – باشفورث ذات الخطوتين

2-Steps Adam - Bashforth Method

لنفرض أن لدينا قيم تقريبة للمقدار y' عند t_n, … , t_1, t_0 . لنكامل $y' = f(t, y)$ من t_n إلى t_{n+1} فنحصل على:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

ولأن الطريقة ذات خطوتين نستخدم آخر قيمتين للاقتران f وبالتحديد f_n . f_{n-1} ثم نوجد حدودية استكمال تمر بالنقطتين (t_{n-1}, f_{n-1}) و (t_n, f_n) والطبع في هذه الحالة، فإن الحدودية هي خط مستقيم:

$$f(t, y(t)) \approx \frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} f_{n-1} + \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} f_n$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} f_{n-1} + \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} f_n \right] dt$$

$$= \left[\frac{(t-t_n)^2}{-2h} f_{n-1} + \frac{(t-t_{n-1})^2}{2h} f_n \right]_{t_n}^{t_{n+1}}$$

$$= \frac{3h}{2} f_n - \frac{h}{2} f_{n-1}$$

بمعنى أن:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\, 3f_n - f_{n-1}\,]$$

وهي كما ترى صيغة صريحة.

ملاحظات على صيغة آدام – باشفورث ذات المرحلتين (AB2)

1. الطريقة من الرتبة الثانية لأن لها خطأ البتر الموضعي من الرتبة $O(h^3)$
2. الطريقة تحتاج قيمتين ابتدائيتين، الأولى نأخذها من الشرط الابتدائي، والثانية نأخذها من أي طريقة ذات خطوة واحدة من نفس رتبة AB2.

لاحظ أن حدودية الاستكمال التي استنبطنا الطريقة منها قد تكون حدودية لاجرانج، او تايلر، أو صيغة نيوتن الأمامية أو الخلفية أو غيرها.

وبصفة عامة، إذا كان اهتمامنا هو استنتاج طريقة من الرتبة $m + 1$ (m مرحلة) فإننا سنعمل على تقريب الدالة $f(t, y(t))$ باستخدام حدودية استكمال تمر بعدد $m + 1$ من النقاط:

$$(t_n, f_n) , \dots , (t_{n-m} , f_{n-m})$$

ثم نجري التكامل كما فعلنا في AB2. هنا سنستخدم حدودية الاستكمال في صيغة الفروق المقسومة، ويمكن تعريف الفروق المقسومة، كما تعلم، بطريقة تتابعية متداخلة:

$$\Delta f_k = \begin{cases} f_k & : i = 0 \\ \Delta^{i-1} f_{k+1} - \Delta^{i-1} f_k & : i > 0 \end{cases}$$

لذلك فإن جدول الفروق المقسومة يكون على الشكل التالي:

t_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
t_0	f_0					
		Δf_0				
t_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
t_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$
t_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		
t_4	f_4		$\Delta^2 f_3$			
		Δf_4				
t_5	f_5					

وتتميز عملية استخدام الفروق المقسومة بأنه لا توجد قسمة أثناء العمليات.
ويستطيع الدارس كتابة ($f_I = f(t_I, y_I)$) حدودية استكمال من الرتبة m تمر بالنقاط (t_i, f_i) حيث $i = n - m , \dots , n$ كما يلي:

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_{n-k}$$

حيث:

$$k \geq 1 : \binom{-s}{k} = \frac{(-s)(-s-1)\dots(-s-k+1)}{k} \quad , s = \frac{t - t_n}{h}$$

وحيث أن: $dt = h\, ds$ فإن:

$$y_{n+1} = y_n + h \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_{n-k}\, ds + \int_0^1 \frac{h^{m+1}}{m!} s(s+1)\dots(s+m-1)\, f^{(m)}(c_i, y(c_i))\, ds$$

حيث $t_n < c_i < t_{n-m}$

$$y_{n+1} \cong y_n + h \{\gamma_0 f_n + \gamma_1 \Delta f_{n-1} + \dots + \gamma_m \Delta^m f_{n-m}\} \qquad (*)$$

حيث: $\gamma_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$

والمتتالية $\{\gamma_k\}$ هي أرقام يمكن حسابها مسبقاً (انظر الجدول التالي) ولاحظ أيضاً أنه في المعادلة (*) إذا كان $m = 0$ فنحصل على صيغة أويلر.

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

$$\gamma_0 = 1 \quad , \gamma_1 = \int_0^1 (-s)\,ds = \frac{1}{2} \quad , \gamma_2 = \int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)}{2} ds = \frac{5}{12}$$

وهكذا $$\gamma_3 = -\int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{6} ds = \frac{3}{8}$$

وإذا عوضنا $m = 2$ في (*)

$$y_{n+1} \approx y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2}\right]$$

لكن:

$$\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1}$$
$$\Delta^2 f_{n-2} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\Delta^3 f_{n-3} = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

إذن: $y_{n+1} = y_n + h\,[f_n + \frac{1}{2}[f_n - f_{n-1}] + \frac{5}{12}[f_n - 2f_{n-1} + f_n]]$

$$= y_n + \frac{h}{12}[\,12f_n + 6f_n - 6f_{n-1} + 5f_n - 10f_{n-1} + 5f_n\,]$$

وهي AB3

$$= y_n + \frac{h}{12}[23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}]$$

صيغة

ولعل أشهر صيغ AB هي صيغ AB4 (بالتعويض m = 3) نحصل على:

$$y_{n+1} = y_n + h\,(f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{n-3})$$

$$= y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

ومقدار خطأ البتر الموضعي لصيغة آدام باشفورث هو كما في الجدول:

الطريقة	AB2	AB3	AB4	AB5
خطأ البتر الموضعي	$h^2 \frac{5}{12} y(c_i)$	$\frac{3}{8} y^{(4)}(c_i)h^3$	$\frac{251}{720} y^{(5)}(c_i)h^4$	$\frac{45}{288} y^{(6)}(c_i)h^5$

ملاحظة:

جميع الصيغ السابقة AB هي صيغ مباشرة Explicit Method لعدم وجود y_{n+1} على طرفي الصيغة بل في الطرف الأيسر فقط.

◄◄ مثال:

استخدم AB4 لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y^2 \quad , \quad y(1) = 1$$

في الفترة [1, 2] حيث h = 0.1

الحل:

نحتاج إلى قيمة f (t, y) عند t_3, t_2, t_1, t_0 وسنحتاج إلى إحدى طرق الخطوة الواحدة من الرتبة الرابعة (نفس رتبة AB4) ولتكن Rk4.

استخدام Rk4 سيعطي الجدول التالي:

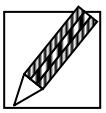
x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
1.0	1.0	−1.0	1.0
1.1	0.90909	−0.82645	0.90909
1.2	0.83333	−0.69445	0.83333
1.3	0.76923	−0.59172	0.76923

ثم نستخدم تلك القيم كمقادير ابتدائية يتم تعويضها في صيغة AB4 لنحصل على الجدول التالي:

AB4

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
1.0	1.0	−1.0	1.0
1.1	0.90909	−0.82645	0.90909
1.2	0.83333	−0.69445	0.83333
1.3	0.76923	−0.59172	0.76923
1.4	0.71444	−0.51042	0.71429
1.5	0.66686	−0.44470	0.66667
1.6	0.62525	−0.39093	0.625
1.7	0.58848	−0.34631	0.58824
1.8	0.55580	−0.30892	0.55556
1.9	0.52655	−0.27726	0.52632
2.0	0.50023	−0.25023	0.5

تدريب (6)



طبق AB4 لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية:

$y' = -y + t + 1 \quad , y(0) = 1$

في الفترة [0, 1] مستخدماً $h = 0.1$ ومعتمداً على الحل الدقيق:

$y = e^{-t} + t$

في الحصول على القيم الابتدائية المطلوبة من الصيغة.

وهناك صيغ أخرى من نفس عائلة صيغ آدم وهي صيغ ضمنية (Implicit) لأن y_{n+1} تظهر فيها على طرفي المعادلة وتسمي تلك الصيغ بطرق آدم–مولتون (Adam - Moulton).

سنبدأ من:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \cong \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

ثم نقرب f باستخدام حدودية تمر بنقاط ثم تقريب قيم y عندها.

2.3 آدم مولتون من الرتبة الثانية AM2

لاشتقاق آدم، مولتون من الرتبة الثانية (AM2) سنختار حدودية تربيعية تمر بالنقاط (t_{n+1}, f_{n+1}) ، (t_n, f_n) ، (t_{n-1}, f_{n-1}) ، وصيغة هذه الحدودية هي إذن:

$$P(t) = (t - t_n)(t - t_{n+1})\frac{f_{n-1}}{2h^2} - (t - t_{n-1})(t - t_{n+1})\frac{f_n}{h^2} + (t - t_n)(t - t_{n-1})\frac{f_{n+1}}{2h^2}$$

والآن نحسب المقدار: $\int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t)\,dt$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t)dt = \frac{f_n - 1}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n+1}) - \frac{fn}{h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_{n-1})(t-t_{n+1})dt + \frac{f_{n+1}}{2h^2}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n-1})dt$$

وباستخدام التعويض $x = t-t_n$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t)dt = \frac{f_{n-1}}{2h^2}\int_{0}^{t_{n+1}-t_n} t_n(x)(x+t_n-t_{n+1})dt -$$

$$\frac{fn}{h^2}\int_{0}^{t_{n+1}-tn} (x+t_n-t_{n-1})(x+t_n-t_{n-1})dt + \frac{f_{n+1}}{2h^2}\int_{0}^{t_{n+1}-t_n} (x)(x+t_n-t_{n-1})dt$$

$$= \frac{f_n-1}{2h^2}\int_0^h (x)(x-h)\,dt - \frac{f_n}{h^2}\int_0^h (x+h)(x-h)\,dt + \frac{f_n+1}{2h^2}\int_0^h (x)(x+h)\,dt\,,$$

$$= \frac{f_n-1}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}h\right)\Big|_0^h - \frac{f_n}{h^2}\left(\frac{x^3}{3} - h^2x\right)\Big|_0^h + \frac{f_n+1}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}h\right)\Big|_0^h\,,$$

$$= \frac{5}{12}f_{n+1}h + \frac{2}{3}f_nh - \frac{1}{12}f_{n-1}h\,.$$

لذلك فإن صيغة AM2 يمكن كتابتها على الشكل.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$$

وبنفس طريقة استنتاج AM2 يمكننا الحصول على الطرق التالية:

طريقة آدم مولتون من الرتبة الثالثة: AM3

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9\,f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 19\,f(t_n, y_n) - 5\,f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-2}, y_{n-2})$$

طريقة آدم – مولتون من الرتبة الرابعة AM4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}[251\,f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 646\,f(t_n, y_n) - 264\,f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 106\,f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 19\,f(t_{n-3}, y_{n-3})]$$

وفي هذه الصيغ AM يمكننا الحصول على مقدار y_{n+1} بأي طريقة والاستفادة منها في الصيغة مرة أخرى، فالأولى تسمى قيمة للتخمين (Predictor) والقيمة الثانية للتصحيح (Corrector). فمثلاً في AM4 يلزمنا في البداية قيم ابتدائية للمقادير y_3, y_2, y_1, y_0 قبل حساب الصيغة AM4 ويمكننا حساب تلك المقادير عن طريق RK4 ثم نستخدم تلك القيم لتقريب المقدار y_4 والمسمى مخمناً ونرمز له بالرمز $y_4^{(0)}$ ثم نعوضه في صيغة المخمن:

$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}[\ 55f(t_3, y_3) - 59f(t_2, y_2) + 37f(t_1, y_1) - 9f(t_0, y_0)\ ]$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[\ 9f(t_4, y_4^{(0)}) + 19f(t_3, y_3) - 5f(t_2, y_2) + f(t_1 y_1)\ ]$$

فالصيغة الأولى مخمنة والثانية مصححة والصيغتان معاً تسميان صيغة آدم باشفورث مولتون المخمنة المصححة Adam - Bashforth - Molton Corrector Predictor Method:

◄◄ مثال:

استخدم AM3 لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t + 1 \quad , \quad y(0) = 1$$

في الفترة $[0,1]$ مستخدماً $h = 0.1$ ومعتمداً على الحل الدقيق

$$y = e^{-t} + t$$

لحساب القيم الابتدائية اللازمة.

الحل:

AM3:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[\ 9\ f_{n+1} + 19\ f_n - 5\ f_{n-1} + f_{n-2}\ ]$$

نوجد y_1, y_2, y_3 أو $y(0.1), y(0.2), y(0.3)$ من الحل الدقيق ثم نوجد f_1, f_2, f_3 ونعوض في الصيغة السابقة فنحصل على الجدول:

t_n	y_n	error
0.3	1.140818012	2.146×10^{-7}
0.4	1.07031966	3.846×10^{-7}
0.5	1.10653014	5.213×10^{-7}
0.6	1.14881101	6.285×10^{-7}
0.7	1.19658459	7.106×10^{-7}
0.8	1.24932819	7.714×10^{-7}
0.9	1.30656885	8.141×10^{-7}
1	1.3678786	8.418×10^{-7}

◄◄ مثال:

في مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -2ty^2 \quad , y(0) = 1$$

أوجد الحل (1) y مستخدماً AB4 كمخمن وAM3 مصححاً مستعيناً بـ RK4 لإيجاد القيم الابتدائية $h = 0.25$

RK4 ستحصل على:

$y_0 = 1$	$f_0 = 0$
$y_1 = 0.9411540130$	$f_1 = -0.442885438$
$y_2 = 0.7999481032$	$f_2 = -0.639916968$
$y_3 = 0.6399738841$	$f_3 = -0.614349858$

وبالتعويض في المخمن AB4

$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}\left[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0\right]$$

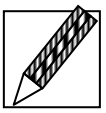
$$= 0.5105894849$$

ثم نحسب: $f_4 = f(t_4, y_4^{(0)}) = f(1, 0.5105894849)$

$= 0.5214$

ثم المصحح $y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1] = 0.4982178726$

تدريب (7)



استخدم RK4 كمخمن ثم AM4 كمصحح للمسألة

$y' = t + y \quad , y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.1$

لإيجاد $y(0.4)$ ثم قارن مع الحل الدقيق $y(t) = 2e^t - t - 1$

أسئلة تقويم ذاتي



1- اشرح باختصار صيغة آدام – باشفورث ذات المرحلتين **(AB2)؟**

2- ماذا نعني بقيمة التخمين (Predictor) وقيمة التصحيح (Corrector) ضمن صيغ AM.

4. حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا وأنظمة المعادلات

عزيزي الدارس،

سنقدم في هذا الجزء مقدمة للطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية ذات القيم العليا وأنظمة المعادلات. ويعتمد الحل على تحويل مسائل القيم الابتدائية من رتب عليا إلى أنظمة معادلات تفاضلية، وقبل مناقشة التفاصيل لنتعرف على بعض المفاهيم.

تعريف:

إن نظام من الرتبة m من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى هو:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1 (t, y_1, y_2 , \dots , y_m)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2 (t, y_1, y_2, \dots , y_m)$$

N

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m (t, y_1, y_2 , \dots , y_m)$$

حيث $a \le t \le b$. وبالطبع إضافة عدد m من الشروط الابتدائية:

$$y_1(a) = \alpha_1 , y_2 (a) = \alpha_2, \dots , y_n (a) = \alpha_m$$

يجعلنا نسمي النظام بمسألة القيمة الابتدائية.

في النظام السابق هناك m من الدوال المجهولة $y_1, y_2, \dots , y_m$ والمراد تقريبها، وهي كلها دوال بمتغير واحد t فمثلاً:

نظام من الرتبة الثانية من المعدلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 + 4y_2 - e^t$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 + 2e^t$$

له الحل العام:

$$y_1 = 2ae^{3t} - 2ba^{-t} - 2e^t$$

$$y_2 = ae^{3t} + be^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

والنظرية القادمة توضح متى يكون لنظام المعادلات التفاضلية حل وحيد، لكن قبل ذلك سنتعرف على مفهوم شرط ليبشيتز على النظام.

تعريف:

الدالة $f(t, y_1, \dots, y_m)$ المعرفة على المجموعة

$D = \{\{t, u_1, \dots, u_m \mid a \le t \le b \ , -\infty < u_i < \infty \ : i = 1, 2, \dots, m\}$

تحقق شرط ليبشيتزفي D بالمتغيرات $u_m, \dots, u_2, u_1$ إذا وجدنا ثابت $L > 0$ بحيث:

$$| f(t, u_1, \dots, u_m) - f(t, z_1, \dots, z_m) | \le L \sum_{j=1}^{m} | u_j - z_j |$$

لكل: $(t, u_1, \dots, u_m)$, $(t, z_1, \dots, z_m)$ في D

نظرية:

لتكن $D = \{(t, y_1, y_2, \dots, y_m) : a \le t \le b , -\infty < u_n < \infty : n = 1, 2, \dots, m\}$

ولتكن $f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$, $n = 1, 2, \dots, m$ متصلة في D وتحقق شرط لينتيز في D، إن نظام المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (انظر التعريف) له حل وحيد.

$a \le t \le b : u_m(t), \dots, u_2(t), u_1(t)$

◄◄ مثال:

استخدم طريقة أويلر لحل نظام المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dy_1}{dt} = -0.5\, y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 4 - 0.3\, y_2 - 0.1\, y_1$$

$$y_1(0) = 4,\ y_2(0) = 6$$

أوجد $y_1(2)$, $y_2(t)$ مستخدماً $h = 0.5$.

الحل:

نطبق صيغة أويلر على كل معادلة:

$$y_1(0.5) = 4 + [-0.5(4)\ ]0.5 = 3$$

$$y_2(0.5) = 6 + [4 - 0.3(6) - 0.1(4)]0.5 = 6.9$$

لاحظ أننا استخدمنا $y_1(0) = 4$ في المعادلة الثانية بدلاً من $y_1(0.5) = 3$ المحسوبة من المعادلة الأولى. سنكمل خطوات الحساب ونحصل على الجدول التالي:

t	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

ويمكننا استخدام رنج – كتا من الرتبة الرابعة لحل لنظام السابق. ليكن N هو عدد تقسيمات (الفترات الجزئية) للفترة [a, b] بحيث $h = \frac{b-a}{N}$، $t_j = a + jh : j = 0, 1, \ldots,$

N. سوف نستخدم الرمز y_{ij} أو $y_{i,j}$ ليمثل الحل للمتغير y_i عند النقطة t_j، أو تقريباً للحل $y_i(t_j)$,

إذن: $y_{m,0} = \alpha_m , \dots , y_{2,0} = \alpha_2 , y_{1,0} = \alpha_1$

والخطوة التالية هي أنه عند حساب القيم $y_{1,j} , y_{2,j} , \dots , y_{m,j}$ فتنقل إلى حساب $y_{1,j+1} , y_{2,j+1} , \dots , y_{m,j+1}$ عن طريق حساب (i= 1, 2, …, m).

$$k_{1,i} = h\, f_i(t_j, y_{1,j} , y_{2,j} , \dots , y_{m,j})$$

$$k_{2,i} = h\, f_i(t_j + \frac{h}{2}, y_{1,j} + \frac{1}{2} k_{1,1} , y_{2,,j} + \frac{1}{2} k_{1,2} , \dots , y_{m,j} + \frac{1}{2}\ k_{1,m})$$

$$k_{3,i} = h\, f_i\ (t_j + \frac{h}{2}, y_{1,j} + \frac{1}{2}\ k_{2,1} , y_{2,j} + \frac{1}{2} k_{2,2} , \dots\ y_{m,j} + \frac{1}{2} k_{2,m})$$

$$k_{4,i} = h\, f_i\ (t_j + h, y_{1,j} + k_{3,1} , y_{2,j} + k_{3,2} , \dots\ y_{m,j} + k_{3,m})$$

لذلك: RK4 لنظام المعادلات:

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6} [k_{1,i} , 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}]$$

◄◄ مثال:

أعد حل المثال السابق مستخدماً RK4 (m = 2) معادلتين:

$$y_{1,0} = y_1 (0) = 4$$

$$y_{2,0} = y_2 (0) = 6$$

$$k_{1,1} = 0.5\, f_1 (t_0, y_{1,0} , y_{2,0})$$

$$= 0.5 f_1 (0, 4, 6) = -1$$

$$k_{1,2} = 0.5\, f_2 (t_0, y_{1,0} , y_{2,0})$$

$$= 0.5\, f_2 (0, 4, 6) = 0.9$$

والآن نوجد $k_{2,1} , k_{2,2}$ عن طريق:

$$k_{2,1} = h\, f_1\ (t_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{1}{2} k_{1,1} , y_{2,0} + \frac{1}{2}\ k_{1,2})$$

$$= 0.5\, f_1\ (0.25, 3.5 , 6.45) = -0.875$$

$k_{2,2} = h\, f_2\,(0.25,\ 3.5,\ 6.45) = 0.8575$

والآن: $k_{3,2}\ ,\ k_{3,1}$

$$k_{3,1} = h\, f_1\,(t_0 + \frac{h}{2}\ ,\ y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}\ ,\ y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2})$$

$$= h\, f_1\,(0.25\ ,\ 3.\ 5625,\ 6.42875) = -0.890625$$

$$k_{3,2} = h\, f_2\,(0.25,\ 3.5625,\ 6.42875) = 0.8575625$$

والآن: $k_{4,2}\ ,\ k_{4,1}$

$$k_{4,1} = h\, f_1\,(t_0 + h\ ,\ y_{1,0} + k_{3,1}\ ,\ y_{2,0} + k_{3,2})$$

$$= h\, f_1\,(0.5\ ,\ 3.109375\ ,\ 6.857563) = -0.777344$$

$$k_{4,2} = h\, f_2\,(0.5\ ,\ 3.109375\ ,\ 6.857563) = 0.815897$$

والآن:

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})$$

$$= 4 + \frac{1}{6}\ (-5.308594) = 3.115234333$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{6}\ (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})$$

$$= 4 + \frac{1}{6}\ (5.146022) = 6.85767$$

والآن انتهينا من حساب $y_{1,1} \cong y_1\,(0.5)$, $y_{2,1} \cong y_2(0.5)$

ويمكننا إكمال الحساب لنحصل على الجدول:

t	**y_1**	**y_2**
0	4	6
0.5	3.115234	6.85767
1.0	2.426171	7.632106
1.5	1.889523	8.326886
2.0	1.471577	8.946865

في أحيان كثيرة يتطلب تقديم حلول عددية لمسائل فيزيائية وهذه تكون على صيغة معادلة من رتب أكثر من واحدة. إن مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة m:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \qquad : a \le t \le b$$

مصحوبة بالشروط الابتدائية $y^{(m-1)}(a) = \alpha_m, \dots, y'(a) = \alpha_2, y(a) = \alpha_1$.

يمكن حلها عن طريق إعادة كتابة المسألة بنظام من الرتبة m مكون من معادلات تفاضلية من الرتب الأولى وإليك الطريقة.

ليكن $u_1(t) = y(t)$, $u_2(t) = y'(t)$ ، وهكذا $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$ وعند كتابتها على الصورة .

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3$$

$$\frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m$$

وأخيراً:
$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y_1, y', \dots, y^{(m-1)})$$

$$= f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

مع الشروط $u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m, \dots, u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, u_1(a) = y(a) = \alpha_1$

فإننا سنحصل على نظام معادلات يمكن حله كما في الأمثلة السابقة.

◄◄ مثال:

حوّل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية إلى نظام معادلات تفاضلية كما في الشرح التوضيحي.

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t} \sin t \qquad 0 \le t \le 1$$

$$y(0) = -0.4 \quad , y'(0) = -0.6$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t)$$

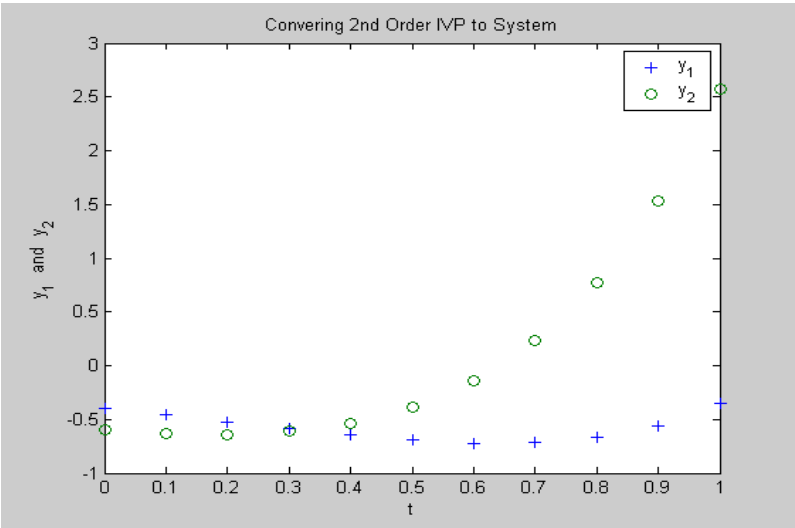
$$\frac{du_2}{dt} = e^{2t}\sin t - 2u_1(t) - 2u_1(t) + 2u_2(t)$$

$$u_1(0) = -0.4 \;,\; u_2(0) = -0.6$$

مثال:

حل النظام السابق ومنه استنتج الحل للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ثم الرسمة معها.

t_n	$y_1 = y(t)$	$y_2 = y'(t)$
0	-0.4	-0.6
0.1	-0.4617	-0.6316
0.2	-0.5256	-0.6401
0.3	-0.5886	-0.6137
0.4	-0.6466	-0.5366
0.5	-0.6936	-0.3887
0.6	-0.7212	-0.1444
0.7	-0.7182	0.229
0.8	-0.6697	0.772
0.9	-0.5564	1.5348
1	-0.3534	2.5788



تدريب (8)



استخدم Rk4 في حل نظام المعادلات:

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 e^{1-t} + 0.8\, y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2^3$$

$$y_1(0) = 0 \quad , y_2(0) = 2 \quad , \quad h = 0.2$$

أسئلة تقويم ذاتي



1- متى يكون لنظام المعادلات التفاضلية حل وحيد؟

2- اشرح الخطوات اللازمة لاستخدم طريقة أويلر لحل نظام المعادلات التفاضلية؟

5. أمثلة عامة على الوحدة

◄◄ مثال (1)

استخدم صيغة أويلر لإيجاد حل تقريبي للمسألة:

$y' = \sin t + t^2$

حيث $y(0) = 1$, $n = 0.1$

الحل:

$y_1 = 1 + 0.1 (\sin 1 + 1^2) = 1.184$

$y_2 = 1.184 + 0.1 (\sin 1.184 + (1.184)^2) = 1.4169$

$y_3 = 1.4169 + 0.1 (\sin 1.4169 + (1.4169)^2) = 1.7166$

ملاحظة:

الحسابات هي بالتقدير الدائري (radians)

◄◄ مثال (2)

استخدم صيغة شبه المنحرف لإيجاد حل تقربي للمسألة

$y' = \sin t + t2$

حيث $y(0) = 1$, $h = 0.1$

الحل:

صيغة شبه المنحرف يمكن كتابتها على الشكل:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(h f (t_0 , y_0) + h f (t_0 + h, y_0 + k_1)$$

$k_1 = h\, f_0$

$k_2 = h\, f\,(t_0 + h,\ x_0 + k_1)$

$k_1 = 0.1\,(\sin 1 + 1^2) = 0.184$

$k_2 = 0.1\,(\sin 1.184 + (1.184)^2) = 0.2328$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0.184 + 0.2328) = 1.2084$$

والخطوة التالية:

$k_1 = 0.1\,(\sin 1.2084 + (1.2084)^2) = 0.23952$

$k_2 = 0.1\,(\sin 1.44792 + (1.44792)^2) = 0.30889$

لاحظ ان: $y_1 + k_1 = 1.2084 + 0.23952 = 1.44972$

$$y_2 = 1.2084 + \frac{1}{2}(0.23952 + 0.30889) = 1.482605$$

◄◄ مثال (3)

استخدم رنج – كتا من الرتبة الرابعة لحل:

$y' = \sin t + t^2$

$h = 0.1 \quad ,\ y(0) = 1$

الحل:

$k_1 = 0.1\,(\sin 1 + 1^2) = 0.18141$

$k_2 = 0.1\,(\sin 1.09071 + (1.09071)^2) = 0.20766$

$k_3 = 0.1\,(\sin 1.10383 + (1.10383)^2) = 0.21114$

$k_4 = 0.1\,(\sin 1.10557 + (1.10557)^2) = 0.21160$

$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\,(0.18141 + 2\,(0.20766) + 2\,(0.21114) + (0.21160) =$ 1.20510

◄◄ مثال (4)

استخدم استكمال حدودية لاجرانج لتقريب قيمة y (4.5):

	1	3	6
f(x)	1	5	10

	1	3	6
f(x)	1	5	10

الحل:

$$P_2(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)}(1) + \frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)}(5) + \frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)}(10)$$

$$= \frac{1}{10}(x^2 - 9x + 18) - \frac{5}{6}(x^2 - 9x + 6) + \frac{10}{15}(x^2 - 4x + 3)$$

$$= -\frac{1}{15}(x^2 - 34x + 18)$$

◄◄ مثال (5)

اكتب خوارزمية تعبر عن $P_2(4.5) = 7.65$ باستخدام حدودية لاجرانج.

الحل:

1. *Input* $\{x_i, f_i\}$ *and* x^*
2. $p^* = 0$
3. *For* $i = 1, 2, \ldots, n+1$,
   - 3.1 $p \leftarrow 1$
   - 3.2 *For* $j = 1, 2, \ldots, n+1$,
     - *if* $j \neq i$,
       - $p \leftarrow p(x^* - x_i)/(x_i - x_j)$;
       - $p^* \leftarrow p^* + f_i p$
4. *Output* $\{x^*, p^*\}$

◄◄ مثال (6)

اكتب خوارزمية لحساب الفروق المقسومة.

الحل:

Algorithm 3.1 *To compute* $f[x_1, \ldots, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$:

1. *Input* $\{x_i, f_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$
2. *For* $j = 1, 2, \ldots, n+1$

   $d_i \leftarrow f_j$.
3. *For* $k = 1, 2, \ldots, n$

   For $j = n+1, n, \ldots, k+1$

   $d_j \leftarrow (d_j - d_{j-1})/(x_i - x_{j-k})$
4. *Output* $\{d_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

◄◄ مثال (7)

اكتب خوارزمية لحساب الاستكمال باستخدام صيغة نيوتن.

الحل:

1. *Input* $\{x_i, d_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$
2. *Until no more values of* x

   Input $\{x\}$

   $p \leftarrow d_{n+1}$

   For $i = n, n-1, \ldots, 1$

   $p \leftarrow p(x - x_i) + d_i$

   Output $\{x, p\}$
3. *Stop*

◄◄ مثال (8)

إذا كان $f(x) = x^3$ فأثبت أن:

$f[x, y] = x^2 + xy + y^2$

$f[x, y, z] = x + y + 2$

$f[x, y, z, w] = 1$

$f[x, y, z, w, v] = 0$

الحل:

$$f[x,y] = \frac{y^3 - x^3}{y - x}$$

$$= x^2 + xy + y^2$$

$$f[x, y, z] = \frac{f[y,z] - f[x,y]}{z - x}$$

$$= \frac{(y^2 + yz + z^2) - (x^2 + xy + y^2)}{z - x}$$

$$= x + y + z$$

$$f[x, y, z, w] = \frac{f[y,z,w] - f[x,y,z]}{z - x}$$

$$= \frac{(y + z + w) - (x + y + z)}{w - x}$$

$$= 1$$

$f[x, y, z, w, v] = 0$

الخلاصة

عزيزي الدارس،

بدأنا الوحدة بمعرفة ماهية مسائل القيم الابتدائية ووجود حلول لتلك المسائل بالاعتماد على شرط ليبشيتز ودرسنا بعض الطرق والتي أبسطها صيغة أويلر بأنواعها وهي رنج – كتا وغيرها من الطرق ذات الرتب المختلفة، ثم استطعنا الاستفادة من تلك الطرق في تطوير صيغ أخرى وفي حل أنظمة معادلات تفاضلية أو معادلات تفاضلية ذات رتب أعلى. وفيما يلي أبرز ما ورد في الوحدة.

- الدالة $f(t, y)$ تحقق شرط ليبشيتز (Lipschitz Condition) في المتغير التابع y في المجموعة $D \subseteq R^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D .

- المجموعة $D \subseteq R^2$ تسمى محدبة (Convex) إذا كان لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D فإن النقطة $[(1 - \lambda) t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2]$، والمعنى الهندسي لمجموعة محدبة هو أنه أي نقطتين تقعان في المجموعة D فإن الخط الواصل بينهما يقع بأكمله في D.
- إذا كان $D = \{(t, y) : a \leq t \leq b , -\infty < y < \infty \}$ وكانت $f(t, y)$ دالة متصلة في D. إذا حققت الدالة f شرط ليبشيتز في D بالنسبة للمتغير y فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , a \leq t \leq b \quad , y(a) = y_0$$

لها حل وحيد هو $y(t)$ حيث $a \leq t \leq b$.

- إذا كان $D: \{(t, y) \quad : a \leq t \leq b \quad , -\infty < y < \infty \}$ فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ : a \leq t \leq b \ , y(a) = y_0$$

موضوعة جيداً عندما تكون f متصلة وتحقق شرط ليبشيتز في المتغير y في المنطقة D.

- إذا كان s, m عددان حقيقيان موجبان، و $\{a_n\}_0^k$ متتالية $(a_0 \geq 0)$ تحقق

$$a_{n+1} \leq (1 + m)\, a_n + s$$

لكل $n = 0, 1, \ldots, k$ فإن:

$$a_{n+1} \leq e^{(n+1)m} \left(\frac{s}{m} + a_0\right) - \frac{s}{m}$$

- إذا حققت f شرط ليبشيتز وكان L ثابت ليبشيتز في المنطقة

$$D = \{(t, y) : a \leq t \leq b \ , \quad -\infty < y < \infty\}$$

وإذا وجد ثابت M بحيث:

$$|y''(t)| \leq M \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

فإن:

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2L}\{e^{L(t_n - a)} - 1\}$$

- يمكن التعبير عن صيغة هن بالمعادلة التالية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right]$$

- نظرية تايلر:

$$R_m(t, y) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}(t - t_0)^{m+1-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1-j}\partial y}(\zeta, \eta)$$

حيث أن الدالة $P_m(t, y)$ ما هي إلاّ حدودية تايلر من الرتبة m في متغيرين، وكذلك: $R_m(t, y)$ هو الباقي (Remainder) المرتبط مع $P_m(t, y)$.

- طريقة آدم – باشفورث ذات الخطوتين:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\,3f_n - f_{n-1}\,]$$

- صيغة AM2 يمكن كتابتها على الشكل. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$

إجابات التدريبات

التدريب (1)

t	y_Euler	delete	y_exact	error
0	1	1	1	0.0000
0.1	1	1.004996	1.009996	0.0100
0.2	1.019983	1.019933	1.039933	0.0199
0.3	1.05985	1.044664	1.089664	0.0298
0.4	1.119402	1.078939	1.158939	0.0395
0.5	1.198344	1.122417	1.247417	0.0491
0.6	1.296287	1.174664	1.354664	0.0584
0.7	1.412751	1.235158	1.480158	0.0674
0.8	1.547173	1.303293	1.623293	0.0761
0.9	1.698908	1.37839	1.78339	0.0845
1	1.867241	1.459698	1.959698	0.0925

التدريب (2)

الحل الدقيق: $y(t) = t + e^{-t}$

$$|y''(t)| = |e^{-t}| \le 1 = M \text{ on } [0, 1/2]$$

$$\frac{0.1(1)}{2(1)}\left[e^{(1)(t_n)} - 1\right] \Leftarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-1| = L$$

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
0	0.0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.000000	1.004837	0.004837
2	0.2	1.010000	1.018731	0.008731
3	0.3	1.029000	1.040818	0.011818
4	0.4	1.056100	1.070320	0.014220
5	0.5	1.090490	1.106531	0.016041

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	error	bound
0	0	1	1	0	0
1	0.1	1	1.004837	0.004837	0.005259
2	0.2	1.01	1.018731	0.008731	0.01107
3	0.3	1.029	1.040818	0.011818	0.017493
4	0.4	1.0561	1.07032	0.01422	0.024591
5	0.5	1.09049	1.106531	0.016041	0.032436

التدريب (3)

n = 0 باستخدام الصيغة السابقة

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h [f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + h f(t_0, y_0))]$$

$$= 0 + \frac{0.2}{2} [y_0 + e^{to} + y_0 + h(y_0 + e^{to}) + e^{to+h}]$$

$$= (0.1) [0 + 1 + 0 + 0.2(0 + 1) + e^{0.2}] = 0.24214$$

n = 1

$$y(0.2) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{2} h [f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, y_1 + h f(t_1, y_1))]$$

$$f(t_1, y_1) = y_1 + e^{t1} = 0.24214 + e^{0.2} = 1.46354$$

$$y_1 + h f(t_1, y_1) = 0.24214 + (0.2)(1.46354)$$

$$= 0.53485$$

$$f(t_1 + h, y_1 + h f(t_1, y_1)) = f(0.4, 0.53485)$$

$$= 0.53485 + e^{0.4} = 2.02667$$

$$y(0.4) \approx y_2 = 0.24214 + (0.1) [1.46354 + 2.02667]$$

$$= 0.59116$$

التدريب (4)

$t_0 = 1$, $y_0 = 2$ ، نحسب المشتقات الأربع الأولى للحل y:

$$y'(t) = (t + 1)\, y + e^t$$
$$y''(t) = (t^2 + 2t + 2)\, y + (t + 2)\, e^t$$
$$y'''(t) = (t^3 + 3t^2 + 6t + 4)\, y + (t^2 + 3t + 5)\, e^t$$
$$y^{(4)}(t) = (t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 16t + 10)x + (t^3 + 4t^2 + 11t + 12)\, e^t$$

لذلك:

$$y_{n+1} = y_n + h\,[\,(t_n + 1)\, y_n + e^{t_n}\,] + \frac{h^2}{2}\,[\,t_n^2 + 2t_n + 2)\, y_n + (t_n + 2)e^{t_n}] + \frac{h^3}{6}$$
$$[(\,t_n^3 + 3\,t_n^2 + 6t_n + 4)\, y_n + (\,t_n^2 + 3t_n + 5)\, e^{t_n}\,] + \frac{h^4}{24}\,[\,t_n^4 + 4\,t_n^3 + 12\,t_n^2 + 16t_n +$$
$$10)\, y_n + (\,t_n^3 + 4\,t_n^2 + 11t_n + 12)\, e^{t_n}\,]$$

$n = 0, 1, \ldots, 20$

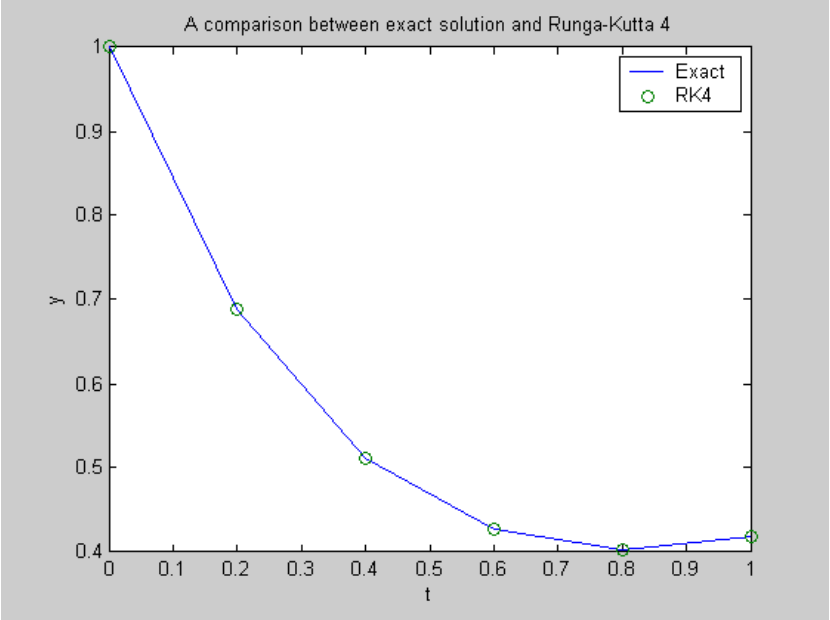
سنحصل على الجدول التالي:

n	t_n	y_n
0	1	2
1	1.01	2.068099
2	1.02	2.138068
3	1.03	2.20996
4	1.04	2.283833
5	1.05	2.359744
6	1.06	2.437755
7	1.07	2.517928
8	1.08	2.600327
9	1.09	2.685018
10	1.1	2.772069
11	1.11	2.861552
12	1.12	2.953539
13	1.13	3.048105
14	1.14	3.145327

15	1.15	3.245287
16	1.16	3.348067
17	1.17	3.453751
18	1.18	3.562429
19	1.19	3.674192
20	1.2	3.789132

التدريب (5)

t	y_RK4	y_exact	error
0	1	1	0.000000
0.2	0.688	0.6879	0.000100
0.4	0.511795	0.511661	0.000134
0.6	0.426628	0.426493	0.000135
0.8	0.402491	0.402371	0.000120
1	0.41927	0.419169	0.000101



التدريب (6)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[\,55\, f_n - 59\, f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}]$$

نستخدم $y_0 = y(0) = 1$

$n = 3$: $f_{n-3} = f_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 0$

$f_{n-2} = f_1 = f(t_1, y_1) = f(0.1 , y(0.1))$

$y(0.1) = e^{-(0.1)} + (0.1) = 1.0048374$

$f_1 = 0.0951625$

$f_{n-1} = f_2 = 0.181269$ وبالمثل:

$f_n = f_3 = 0.25918$

$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[7.081]$ لذلك

$= 1.0408 + 0.0295 = 1.070322387$

وبإكمال باقي القيم نحصل على الجدول مع الأخطاء مقارنة بالحل الدقيق:

t_n	y_n	error
0.4	1.07032292	2.874 × 10−6
0.5	1.10653548	4.816 × 10−6
0.6	1.14881841	6.722 × 10−6
0.7	1.19659339	8.090 × 10−6
0.8	1.24933816	9.192 × 10−6
0.9	1.30657961	9.954 × 10−6
1	1.36788996	1.052 × 10−5

التدريب (7)

Rk4

$k_1 = h\, f(t_n, y_n) = 0.1\,(t_n + y_n)$

$k_2 = h\, f(t_n + h/2\,,\, y_n + k_1/2) = 0.1\,(t_n + 0.05 + y_n + k_1/2)$

$k_3 = h\, f(t_n + h/2\,,\, y_n + k_2/2) = 0.1\,(t_n + 0.05 + y_n + k_2/2)$

$k_4 = h\, f(t_n + h\,,\, y_n + k_3) = 0.1\,(t_n + 0.05 + y_n + k_3)$

سنحصل على الجدول التالي:

n	x_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
0	0	0.1	0.11	0.1105	0.12105	1.110341667
1	0.1	0.121034167	0.132085875	0.13263846	0.144298013	1.242805142
2	0.2	0.144280514	0.15649454	0.157105241	0.169991038	1.399716994
3	0.3	0.169971699	0.183470284	0.184145214	0.198386221	1.58364848
4	0.4	0.198364848	0.21328309	0.214029003	0.229767748	1.797441277

ثم نحسب:

$f_0 = t_0 + y_0 = 1$

$f_1 = t_1 + y_1 = 1.210341667$

$f_2 = t_2 + y_2 = 1.442805142$

$f_3 = t_3 + y_3 = 1.699716994$

إذن القيمة المخمنة:

$$y_4^{(0)} = 1.399716994 + \frac{0.1}{24}[44.14157297] = 1.583640125$$

$$\Rightarrow f_4 = 1.983640215$$

ثم القيمة المصححة:

$$y_4 = 1.399716994 + \frac{0.1}{24}[44.14370078] = 1.583649081$$

$$\Rightarrow f_4 = 1.983649081$$

وبنفس الطريقة القيمة المخمنة للمقدار:

$$y_5^{(0)} = 1.583649081 + \frac{0.1}{24}[51.30811207]$$

$$= 1.79743288$$

$$\Rightarrow f_5 = 2.29743288$$

القيمة المصححة:

$$f_5 = 1.58364908 + \frac{0.1}{24}[51.31044864]$$

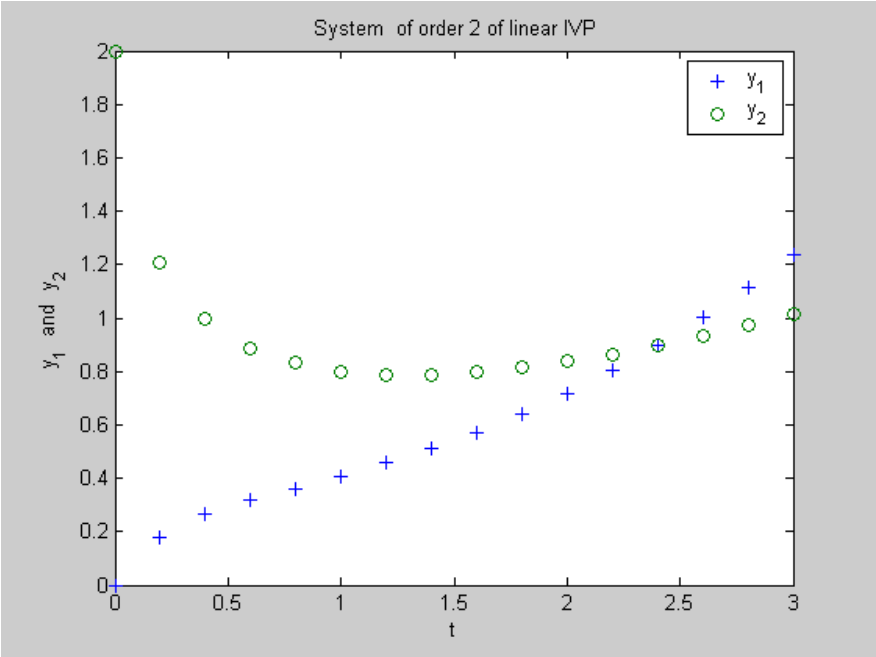
$$= 17944261$$

وبمقارنة الحل الدقيق: 1.79744254

التدريب (8)

تتبع الخطوات السابقة ونحصل على الجدول التالي:

t_n	y_1	y_2
0	0	2
0.2	0.1805	1.2094
0.4	0.2635	0.9948
0.6	0.3172	0.8886
0.8	0.3625	0.8307
1	0.4076	0.8
1.2	0.4563	0.7868
1.4	0.5104	0.7864
1.6	0.5714	0.7957
1.8	0.6399	0.8129
2	0.7167	0.8364
2.2	0.8022	0.8651
2.4	0.897	0.8998
2.6	1.0012	0.9034
2.8	1.115	0.9723
3	1.2386	1.0121


System of order 2 of linear IVP
y1
y2
y1 and y2
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

المراجع

- Kincaid and Cheney, **Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing**. 3rd ed., 2002.
- Schilling and Harris, **Applied Numerical Methods for Engineers: Using Matlab and C**. 1st ed., 2000.
- C. Butcher, **The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and general linear methods**. Wiley, 1987.
- K. Dekker and J. G. Verwer, **Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations**. North Holland, 1984.
- S. O. Fatunla, **Numerical Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations**. Academic Press, 1988.
- C. W. Gear, **Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations**. Prentice Hall, 1971.
- E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, **Solving Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag; I: nonstiff problems (1993), II (1991).
- Peter Henrici, **Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations**. Wiley, 1962.
- Iserles, **A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations**. Cambridge University Press, 1996.
- J. D. Lambert, **Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem**. Wiley, 1991.
- J. Lambert, **Computational Methods in Ordinary Differential Equations**.
- W. E. Milne, **Numerical Solutions of Differential Equations**, 2nd ed. Dover, 1970.
- L. Shampine, **Numerical solution of ordinary differential equations**, Chapman & Hall, 1994.
- L. Shampine and M. Gordon, **Computer Solution of Ordinary Differential Equations**. Freeman, 1975.