
الوحدة الثالثة
التكامل والتفاضل
العددي

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**77**
تمهيد	77
أهداف الوحدة	79
1. التكامل العددي	**80**
1.1 طرق نيوتن كوتكس	**80**
2.1 قاعدة سمبسون	**83**
3.1 قوانين نيوتن كوتس المركبة	**88**
4.1 صيغة سمبسون المركبة	**90**
5.1 تكاملات رومبيرج	**95**
3. التفاضل العددي	**100**
1.3 حساب الفروق المنتهية	100
2.3 استخدام متسلسلة تايلر	101
3.3 أفضل اختيار للقيمة h	107
4.3 صيغة الثلاث نقاط لتقريب لمشتقة الثانية	111
5.3 استكمال ريتشاردسون	113
4. أمثلة عامة على الوحدة	**118**
الخلاصة	**129**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**131**
إجابات التدريبات	**132**
مسرد المصطلحات	**139**
المراجع	**140**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحبا بك إلى الوحدة الثالثة من مقرر التحليل العددي، والتي سنتناول خلالها موضوع "التكاملات والتفاضلات العددية".

ربما يكون موضوع التكامل مألوفا لك في مراحل دراستك السابقة، إلاّ أننا سنظهر في هذه الوحدة أهميّة إيجاد حلول عددية للتكاملات، وسنركز على التكاملات ذات المتغيّر الواحد، وسنعرض الموضوع عبر ستة أقسام رئيسة، ثم ننتقل بعد ذلك إلى موضوع التفاضل العددي في القسم السابع.

وجدنا أن أنسب مدخل لهذه الوحدة أن نبدأ بشرح طريقة نيوتن كوتس في إيجاد التكامل العددي، حيث تمثل هذه الطريقة ركنا أساسيا للإحاطة بموضوع الوحدة، ثم انتقلنا في القسم الثاني إلى استعراض طريقة محدة من تلك الطرق، ألا و هى قاعدة سمبسون وتعريفها وبعض الأمثلة عليها، وعند نهاية هذا القسم ستجد نفسك قادرا على الغوص بعمق في قسمين مشابهين لما سبق ولكن بمستوى أعلى، فالقسم الثالث يعتمد على القسم الأول، ويتناول قوانين نيوتن كوتس المركبة، والقسم الرابع يستعرض طريقة سمبسون المركبة.

في القسم الخامس نتناول تكاملات رومبيرج، ونشرحها شرحا وافيا مع ما يلزم ذلك من أمثلة، ثم ننتقل إلى تكاملات جاوس في القسم السادس، وبالتالي ننتهي من التكامل العددي، ونكون جاهزين للانتقال إلى القسم الأخير المتعلق بالتفاضل العددي.

سنتناول في القسم الأخير كيفية حساب الفروق المنتهية، واستخدام متسلسلة تايلر في هذا السياق، وكيف نستخدم صيغة النقاط الثلاث لتقريب المشتقة الثانية، وأخيرا استكمال ريتشاردسون.

وتكمن أهميّة هذه الوحدة في أنها تقدم حلولاً عددية لتكاملات يصعب معالجتها بالطرق التحليلية العادية، ويعتبر التحليل العددي الأسلوب الأمثل للتعامل معها. وقد

زودناك عزيزي الدارس بكل ما يلزم من امثلة وشروحات واشكال ستساهم بإذن الله في تقريب الصور المجردة إلى ذهنك ليسهل التعامل معها بيسر.

نأمل أن تعزز فهمك للموضوعات الواردة في الوحدة عبر الرجوع إلى بعض المراجع الواردة في نهاية كل وحدة، وهو ما سيؤهلك للاستدراك على بعض ما ورد في الوحدة من نقص هو من صفة البشر، فنأمل عندئذ أن لا تبخل علينا بأي نصح يساهم في إنضاج الوحدة وتطويرها مستقبلا. ومرحبا بك مرة أخرى.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- ⌘ **تشرح** أهميّة التكامل العددي والتفاضل العددي.
- ⌘ **تحل** مسائل على طرق التكامل العددي، وخصوصاً طريق نيوتن كوتس.
- ⌘ **تشرح** معنى قاعدة سمبسون، وتحل مسائل عليها.
- ⌘ **تعدد** قوانين نيوتن كوتس المركبة، وتشرح علاقتها بطريقة شبه المنحرف المركبة.
- ⌘ **تشرح** مفهوم تكامل رومبيرج، وتحل مسائل عليه.
- ⌘ **تعطي** أمثلة على تكاملات جاوس.
- ⌘ **تشرح** مفهوم التفاضل العددي وكيفية حساب الفروق المنتهية.
- ⌘ **تستخدم** متسلسلة تايلر في حساب التفاضلات العددية.
- ⌘ **تحل** مسائل على صيغ الثلاث نقاط والخمس نقاط لتقريب المشتقة الثانية.
- ⌘ **تشرح** مفهوم استكمال ريتشاردسون وتحل مسائل عليه.

1. التكامل العددي

عزيزي الدارس،،

إن حساب التكامل بطرق عددية من العمليات المهمة في الرياضيات، حيث تقضي دراسة مواد التفاضل والتكامل (Calculus) وقتاً طويلا لتعلم طرق ومهارات حساب هذا التكامل. وتكمن الحاجة لتعلم المهارات اللازمة لتقديم حلول عددية للتكاملات في الاستفادة من تلك المهارات في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية. كذلك تكمن أهمية دراسة التكامل العددي في إيجاد حلول تقريبية لتكاملات معقدة لا يمكن حلها بسهولة بالطرق التحليلية الاعتيادية، ومثال ذلك التكامل $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$ الذي لا يمكن حله بسهولة.

حالات أخرى تلزمنا في حساب التكامل بطرق عددية وليس بطرق تحليلية هي وجود بيانات مجدولة فقط عن الدالة المراد حساب تكاملها و دون معرفة بصيغة مباشرة للدالة.

1.1 طرق نيوتن كوتس (Newton - Cotes Methods)

عزيزي الدارس،

هذه مجموعة من الطرق تعتمد فى تقريبها للتكامل المحدود:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3.1)$$

باستخدام الاستكمال بالحدوديات لتقريب الدالة $f(x)$ بواسطة $p \in IP_n$ مستخدماً البيانات: $(x_i, f(x_i)); i = 0,1,.....n$، حيث $x_i = a + ih$، و $h = \frac{b-a}{n}$. أى أن النقاط $x_0 = a$، x_1، ....، $x_n = b$ متساوية البعد. من ثم يقرب التكامل (3.1) بالتكامل:

$$I_n(f) = \int_a^b p(x)\,dx$$

(3.2)

باستخدام صيغة لاجرانج $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{n,i}(x)$. إذن:

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{n,i}(x)\,dx = \sum a_{n,i} f(x_i)$$

(3.3)

حيث $a_{n,i} = \int_a^b L_{n,i}(x)\,dx \quad : \quad 0 \le i \le n$

(3.4)

المبرهنة التالية تعطى صيغة لـ $a_{n,i}$ تستفيد من تسوى البعد بين نقاط البيانات:

مبرهنة

$$a_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i} h}{i!(n-i)!} \int \frac{u(u-1).....(u-n)}{u-i}\,du$$

الإثبات:

$$a_{n,i} = \int_a^b L_{n,i}(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)....(x-x_{i-1})(x-x_{h+1})....(x-x_n)}{(x_i-x_0)....(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{h+1})....(x_i-x_n)}dx$$

(3.5)

الآن، ضـــع $x = a + uh$. إذن $dx = h\,du$ و عنـــد $x = a$ ، $u = 0$. و عنـــد $x = b$ ، $u = n$. أيضاً بتبسيط جبرى يمكن الوصول إلى أن:

إذن بالتعويض فى (3.5) نحصل على الصيغة المطلوبة■

تختلف الطرق باختلاف قيمة n . المثال الثالى يوضح ما يعرف بقاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule، و هى طريقة نيتوتن – كوتس التى تقابل $n = 1$.

◄◄ مثال:

جد طريقة نيوتن– كوتس المقابلة لـ $n=1$.

الحل:

$$I_1(f)=a_{1,0}f(x_0)+a_{1,1}f(x_1)$$

$$a_{1,0}=\frac{(-1)^{1-0}h}{0!(1-0)!}\int_0^1\frac{u(u-1)}{u-0}du=\frac{-h}{1\times1}\left[\frac{u^2}{2}-u\right]_0^1=-h\left[\frac{1}{2}-1\right]=\frac{h}{2}$$

$$a_{1,1}=\frac{(-1)^{1-1}h}{1!(1-1)!}\int_0^1\frac{u(u-1)}{u-1}du=\frac{h}{1\times1}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=h\left[\frac{1}{2}\right]=\frac{h}{2}$$

إذن $I_1(f)=\frac{h}{2}f(x_0)+\frac{h}{2}f(x_1)=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))$. لاحظ أن:

$x_0=a$ ، $x_1=b$ ، و أن $h=\frac{b-a}{1}=b-a$. عليه يمكننا كتابة:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$.

◄◄ مثال:

ليكن $f(x)=2+5x$ ، استخدم طريقة شبه المنحرف لحساب تكامل تقريبي للمقدار $\int_0^3(2+5x)dx$.

الحل:

$$\int_0^3 f(x)\,dx\approx\frac{3-0}{2}[f(0)+f(3)]=\frac{3}{2}[2+17]=28.5$$

◄◄ مثال:

استخدم طريقة شبه المنحرف لحساب تكامل تقريبي للمقدار $\int_1^2\ln x\,dx$.

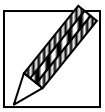
الحل:

$$I_2(f) = \frac{1}{2}[In1 + In2] = 0.3465736$$

بينما القيمة الدقيقة للتكامل:

$$\int_1^2 In\,x\,dx = [x\,Inx - x]_1^2 = 0.3862943$$

تدريب (1)



استخدام قاعدة شبه المنحرف لحساب قيمة تقريبية $\int_0^2 x^2 dx$ ثم أوجد قيمة الخطأ الناتج عن التقريب.

عزيزى الدارس، سنتطرق بشئ من التفصيل لطريقة خاصة من طرق نيوتن–كوتس، و التى تعرف عادة بطريقة سمبسون، و هى طريقة نيوتن–كوتس المقابلة لـ $n = 2$.

2.1 قاعدة سمبسون (Simpson's Rule)

عزيزي الدارس، كما أسلفنا فإن قاعدة سمبسون هى طريقة نيتوتن–كوتس المقابلة لـ $n = 2$. إذن:

$$I(f) \approx a_{2,0} f(x_0) + a_{2,1} f(x_1) + a_{2,2} f(x_2)$$

$$a_{2,0} = \frac{(-1)^{2-0} h}{0!(2-0)!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-0}du = \frac{h}{1\times 2}\int_0^2 (u^2 - 3u + 2)du$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 2u\right]_0^2 = \frac{h}{3}$$

$$a_{2,1} = \frac{(-1)^{2-1}h}{1!(2-1)!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-1}du = \frac{-h}{1\times 1}\int_0^2 (u^2 - 2u)du$$

$$= -h\left[\frac{u^3}{3} - u^2\right]_0^2 = \frac{4h}{3}$$

$$a_{2,2} = \frac{(-1)^{2-2}h}{2!(2-2)!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-2}du = \frac{h}{2\times 1}\int_0^2 (u^2 - u)du$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right]_0^2 = \frac{h}{3}$$

إذن

$$I_2(f) = \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

هنـــا $h = \frac{b-a}{2}$ ، $x_0 = a$ ، $x_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ ، و $x_2 = b$. عليـــه يمكننـــا كتاتبة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

◄◄ مثال:

استخدم قاعدة سمبسون لتقريب $\int_0^2 f(x)\,dx$ حيث $f(x) = x^3 - 5x + 6$.

الحل:

$$I_2(f) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \frac{2-0}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{0+2}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}[6 + 4\times 2 + 4) = 6]$$

الخطأ، R ، فى تقريب التكامل (3.1) بقاعدة سمبسون يعطى بـ:

$$R = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

و بدلالة $h\left(=\frac{b-a}{2}\right)$ يمكن كتابة:

$$R = R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[f(x_1-h) + 4f(x_1) + f(x_1+h)\right]$$

(3.6)

المبرهنة التالية تعطى صيغة أفضل، عملياً، من (3.6).

مبرهنة

لتكن $f(x)$ قابلة للاشتقاق باتصال للمشتقة الرابعة. عليه فإن الخطأ، $R(h)$، فى قاعدة سمبسون يعطى بـ: $R(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$، حيث $\eta \in (a,b)$.

الإثبات:

بتفاضل (3.6) ثلاث مرات بالنسبة لـ h، نحصل على

$$R'(h) = \left[f(x_1+h) + f(x_1-h)\right] - \frac{1}{3}\left[f(x_1-h) + 4f(x_1) + f(x_1+h)\right]$$
$$-\frac{h}{3}\left[-f'(x_1-h)\right] + f'(x_1+h)] = \frac{2}{3}[f(x_1-h) + f(x_1+h)]$$
$$-\frac{4}{3}f(x_1) - \frac{h}{3}\left[-f'(x_1-h)\right] + f'(x_1+h)],$$

$$R''(h) = \frac{2}{3}[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)] - \frac{1}{3}[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)]$$
$$-\frac{h}{3}[f''(x_1-h) + f''(x_1+h)]$$
$$= \frac{1}{3}[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)] - \frac{h}{3}[f''(x_1-h) + f''(x_1+h)],$$

و ذلك باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى، حيث $\xi_3 \in (x_1 - h, x_1 + h)$. إضافة لذلك يمكن إثبات أن $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$. الآن و بتتابع نكامل $R'''(h)$ و مستخدمين مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل لنحصل على

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)\,dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 f^{(4)}(\xi_3)\,dt$$

$$= -\frac{2}{3} f^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 f^{(4)}(\xi_2)$$

حيث $\xi_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$،

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)\,dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{(4)}(\xi_2)\,dt$$

$$= -\frac{2}{9} f^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18} h^4 f^{(4)}(\xi_1)$$

حيث $\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$،

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)\,dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{(4)}(\xi_1)\,dt$$

$$= -\frac{1}{18} f^{(4)}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

حيث $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$ ■

◄◄ مثال:

قارن بين قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون الثلثية للدوال 1، x، x^2، x^3 ، x^4 في الفترة [0, 2] مستخدماً h = 2 لقاعدة شبه المنحرف و h = 1 لقاعدة سمبسون.

الحل:

f(x)	الحل الدقيق	قاعدة شبه المنحرف	قاعدة سمبسون
1	2.000	2.000	2.000
x	2.000	2.000	2.000
x^2	2.667	4.000	2.667
x^3	4.000	8.000	4.000
x^4	6.400	16.000	6.667

تدريب (2)



قارن بين قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون الثلثية للدوال التالية:

$\frac{1}{x+1}$ ، $\sqrt{1+x^2}$ ، $\sin x$ ، e^x في الفترة $[0, 2]$

أسئلة تقويم ذاتي



1. اشرح مدى أهمية التكامل العددي.
2. اكتب صيغة نيوتن – كوتس.
3. ما المقصود بطريقة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule).
4. أثبت ان الخطأ فى طريقة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^{a+h} f(x)dx$ يعطى بـ $R(h) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$ ، حيث $\xi \in (a, a+h)$

3.1 طريقة شبه المنحرف المركبة

عزيزي الدارس،

لنفرض أن الفترة $[a,b]$ قسمت إلى فترات جزئية عددها m، كل منها بطول h بحيث: $x_i = a + ih; i = 0,1,2,....., m$ و $h = \frac{b-a}{m}$.

إذن:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)dx$$

والآن نطبق قاعدة شبه المنحرف على الفترات $[x_0, x_1]$، $[x_1, x_2]$، .....، $[x_{m-1}, x_m]$ لنحصل على:

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + ... + \frac{h}{2}(f(x_{m-1}) + f(x_m))$$

إذن

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) \right] \quad (3.7)$$

و هى قاعدة شبه المنحرف على فترات جزئية عددها m.

◄◄ مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة لتقريب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ باستخدام $h = \frac{1}{10}$.

الحل:

نحسب $f(x)=e^{-x^2}$ عند النقاط، $x_i=\frac{i}{10}$ ، حيث $i=0,1,.....,10$ لنحصل على:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0+2\left(f_1+f_2+.....+f_9\right)+f_{10}\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[1+2\left(0.9900498+0.9607894+.....+0.444858\right)+0.3678794\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[1+2\left(6.7781682\right)+0.36878794\right]=0.7462107$$

◄◄ مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف البسيطة والمركبة، مستخدماً $h=0.2$ لتقريب التكامل $\int_0^{1.2}\sin x\,dx$. وقارن بين الخطأين فى الحالتين.

الحل:

قاعدة شبه المنحرف المركبة:

$m=\frac{b-a}{h}$ لذلك n = 6 .

$$\int_0^{1.2}\sin x\,dx\approx\frac{(0.2)}{2}\left[0+2(0.198669+0.389418+0.564642+0.717356\right.$$

$$\left.+\,0.841471)+0.932039\right]=0.635515$$

قاعدة شبه المنحرف البسيطة: $\int_0^{1.2}\sin x\,dx\approx\frac{1.2}{2}\left[0+0.932039\right]=0.55922$

القيمة الدقيقة للتكامل: $\int_0^{1.2}\sin x\,dx=0.637642$

واضح أن القاعدة المركبة أكثر دقة.

التدريب (3)



أ. احسب $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام 6 نقاط، ثم قدر عدد الفترات الجزئية اللازمة لتقريب التكامل بحيث لا يتعدى الخطأ المقدار $\frac{1}{2}10^{-5}$؟

ب. أوجد قيمة للمقدار h بحيث تكون القيمة المطلقة للخطأ الناتج من تقريب التكامل: $I=\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ لا يتعدى 10^{-2} ثم احسب قيمة تقريبية لهذا التكامل.

4.1 طريقة سمبسون المركبة

عزيزي الدارس،،

إذا قسمنا الفترة [a, b] إلى فترات جزئية عددها $2m$ و ذلك بواسطة النقاط $x_0 = a$ ، $x_i = a + ih; \quad i = 1,2,.....,2m$ ، حيث $h = \frac{b-a}{2m}$ فإنه يمكن تعريف صيغة سمبسون المركبة على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{h}{3}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i) \right]$$

حيث $x_{2i-2} < c_i < x_{2i}$.

إذن يقرب التكامل فى طريقة سمبسون المركبة بـ:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})+ f(b)\right]$$

(3.8)

و بخطأ مركب، R ، يعطى بـ: $R=-\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(c_i)$. و إذا كانت $f^{(4)}(x)$ متصلة فى $[a,b]$، فإنه توجد $c\in[a,b]$ بحيث $\left|f^{(4)}(c)\right| \geq f^{(4)}(x)$ لكل $x\in[a,b]$ ، لذلك نحصل على:

$$|R| \leq \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m}\left|f^{(4)}(c_i)\right| \leq \frac{h^5}{90}\times m\left|f^{(4)}(c)\right| = \frac{h^5}{90}\times\frac{b-a}{h}\left|f^{(4)}(c)\right| = \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

الطرف الأيمن للمتباينة

$$|R| \leq \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

(3.9)

يعطى أكبر خطأ مطلق فى التقريب بطريقة سمبسون المركبة.

◄◄ مثال:

استخدم صيغة سمبسون المركبة لتقريب: $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}$ مستخدماً $h=\frac{1}{6}$

الحل:

نحسب $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$ عند النقاط $x_i=\frac{i}{6}$ حيث $i=0,1,....,6$ لنحصل على:

$$I(f)=\frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+4f_5+f_6]$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{1}{2}+4\left(\frac{36}{73}\right)+2\left(\frac{9}{19}\right)+4\left(\frac{4}{9}\right)+2\left(\frac{9}{22}\right)+4\left(\frac{36}{97}\right)+\frac{1}{3}\right]=0.43521$$

لاحظ أن القيمة الدقيقة للتكامل: $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.4352098$

مثال:

استخدم صيغة سمبسون المركبة لتقدير قيمة $\int_0^{1.2} \sin x\,dx$ باستخدام سبع نقاط ثم قدر قيمة الخطأ وحدوده.

الحل:

هناك 6 فترات جزئية لذلك باستخدام جدول القيم التالي:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x_i)$	0.0	0.198669	0.389418	0.564642	0.717356	0.841471	0.932039

إذن $\int_0^{1.2} \sin x\,dx \approx \frac{(0.2)}{3}[0.0+4(0.198669+0.564642+0.841471)$

$+2(0.389416+0.717356)+0.932039\ ]=0.637647$

حدود الخطأ: $\frac{(0.2)^4}{180}(1.2)\max_{x\in[0,1.2]}|\sin x| = \frac{(0.2)^4}{180}(1.2)(0.932039)=0.000020$

مثال:

قرب التكامل $\int_0^3 e^{x^2}\,dx$ باستخدام صيغة سمبسون المركبة و 6 فترات جزئية.

الحل:

$h=\frac{3-0}{6}=\frac{1}{2}$ نحصل على:

$$\int_0^3 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0)+f(3)+4\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right]+2[f(1)+f(2)]\right]=1722.31$$

◄◄ مثال:

قارن بين طريقتى شبه المنحرف المركبة وصيغة سمبسون المركبة عند تقريب: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ لدقة 2×10^{-5}.

الحل:

الخطأ المطلق، R، عند تقريب $\int_a^b f(x)dx$ بطريقة شبه المنحرف المركبة يحقق المتباينة: و عند التقريب بطريقة سمبسون العامة يحقق المتباينة: المقارنة ستكون فى قيمة h التى تقق الشرط $|R| < 2\times10^{-5}$ فى الحالتين. فالطريقة التى تكون فيها h أصغر هى الأفضل فى حل المسألة المعطاة.

الآن، $f(x) = \sin x$. إذن $f''(x) = -\sin x$ ، $f^{(4)}(x) = \sin x$. إذن فى الحالتين نحصل على $\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)| = \max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)| < 1$. فى طريقة سبه المنحرف المركبة h تحقق:

إذن: $\frac{\pi h^2}{12}\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)| < (2)(10^{-5})$

لذلك: $h < \sqrt{\frac{24x10^{-5}}{\pi}} \cong 8.74*10^{-3}$

في طريقة سمبسون المركبة:

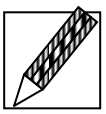
$$\frac{\pi h^4}{180}\max_{x\in[0,\pi]}|f^{(4)}(x)| < 2x10^{-5}$$

$$\frac{\pi h^4}{180} < 2*10^{-5} \Rightarrow h < 0.1839874$$

إذن يمكن استخدام قيم لـ h فى طريقة سمبسون المركبة أصغر من تلك التى يمكن استخدامها فى طريقة شبه المنحرف المركبة للوصول للدقة المطلوبة, مما يجعلنا نفضل

طريقة سمبسون المركبة فى حل تلك المسألة. السبب فى ذلك هو أن عدد التقسيمات سيكون أقل فى طريقة سمبسون المركبة.

تدريب (4)



أوجد قيم m ، h المناسبتين فى كل من:

(a) طريقة شبه المنحرف المركبة.

(b) طريقة سمبسون المركبة.

لتقريب $\int_0^2 x e^{-x}\,dx$ بدقة $5\text{x } 10^{-9}$

ملاحظة: إذا كان: $f(x) = x\,e^{-x}$ فإن: $f^{(k)}(x) = (-1)^k (x - k)\, e^{-x}$

تدريب (5)



أوجد قيمة h التي تجعل الخطأ في صيغة سمبسون المركبة لا يتجاوز $5\text{x}10^{-9}$ لحساب $\int_2^7 \frac{dx}{x}$.

أسئلة تقويم ذاتي



1. أعد اشتقاق قاعدة شبه المنحرف المركبة لتقريب التكاملات.
2. اكتب صيغة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات واشرح أهميتها.
3. أيهما أكثر دقة: طريقة شبه المنحرف المركبة أم طريقة سمبسون المركبة عند تقريب التكامل $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

2. تكامل رومبيرج Romberg Integration

عزيزي الدارس،،

طريقة تكامل رومبيرج هى طريقة لإيجاد تقريب للتكامل باستخدام الطرق المعروفة الأخرى بشكل متكرر. سنشرح بالتفصيل استخدام الطريقة مع طريقة شبه المنحرف المركبة. لتكن $T(m)$ القيمة المقربة لـ $\int_a^b f(x)dx$ بواسطة طريقة شبه المنحرف المركبة باستخدام m فترة جزئية. أى أن:

$$T(m)=\frac{b-a}{2m}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f\left(a+i\frac{b-a}{m}\right)\right\}$$

الآن، ضع $h=\frac{b-a}{2m}$. إذن:

$$T(m)=h\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(a+2ih)\right\}$$

(3.10)

و إذا أخذنا عدد الفترات الجزئية ليكون $2m$ فإن:

$$T(2m)=\frac{h}{2}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2m-1}f(a+ih)\right\}$$

(3.11)

من (3.10) و (3.11) نحصل على:

$$T(2m)-\frac{1}{2}T(m)=h\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)h)$$

(3.12)

تستخدم (3.12) فى الخطوات التالية لرومبيرج لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)dx$. عرف:

$$R(n,0)=T(2^n)\text{ ، }n=0,1,2,\ldots\ldots$$

إذن:

$$R(0,0)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$R(n,0)=\tfrac{1}{2}R(n-1,0)+\frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2^n}\right)$$

(3.13)

تحسب التقريبات $R(0,0)$ ، $R(1,0)$ ، $R(2,0)$ ، ..... ، $R(M,0)$ لقيمة مناسبة لـ M.

◄◄ مثال:

قرب $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ بـ $R(5,0)$.

الحل:

$$R(0,0)=\frac{\pi}{2}\left[\sin 0+\sin\pi\right]=0$$

$$R(1,0)=\frac{1}{2}\left[R(0,0)+\pi\sin\frac{\pi}{2}\right]=1.57079633$$

$$R(2,0)=\frac{1}{2}\left[R(1,0)+\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]=1.89611890$$

$$R(3,0)=\frac{1}{2}\left[R(2,0)+\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}\right]=1.97423160$$

$$R(4,0)=1.99357034$$

$$R(5,0)=1.99839336$$

وحيث أن القيمة الدقيقة للتكامل هي 2 فإن اقتراب الحل من الحل الدقيق هو اقتراب بطيء بالرغم من سهولة الحساب في الصيغة. ومن أجل تسريع الاقتراب نستخدم ما يعرف بطريقة الاستكمال الخارجي لريتشاردسون. لوصف هذه الطريقة مع طريقة شبه المنحرف

المركبة سوف نعتمد على الصيغة التالية لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)dx$ بشبه المنحرف المركبة باستخدام 2^n فترة جزئية:

$$I = R(n,0) + c_2h^2 + c_4h^4 + \ldots\ldots\ldots + c_{2k-2}h^{2k-2} + c_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi) \quad (3.14)$$

حيث $\xi \in (a,b)$. المقدار $E(h) = c_2h^2 + c_4h^4 + \ldots\ldots + c_{2k-2}h^{2k-2} + c_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi)$ يمثل الخطأ فى التقريب. إذا كان $k = 1$ فإن $E(h) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$. إثبات هذه الصيغة للخطأ خارج نطاق المقرر.

باستخدام 2^{n+1} فترة جزئية و بالتعويض فى (3.14) نحصل على:

$$I = R(n+1,0) + c_2\frac{h^2}{4} + c_4\frac{h^4}{16} + \ldots\ldots\ldots + c_{2k-2}\frac{h^{2k-2}}{2^{2k-2}} + c_{2k}\frac{h^{2k}}{2^{2k}} f^{(2k)}(\xi) \quad (3.15)$$

بضرب (3.15) فى 4 ثم طرح (3.14) من الناتج، و بع التبسيط، نحصل على:

بوضع $R(n+1,1) = \frac{4R(n+1,0) - R(n,0)}{3}$ يمكن كتابة:

$$I = R(n+1,1) + d_4h^4 + \ldots\ldots\ldots + d_{2k-2}h^{2k-2} + d_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi) \quad (3.16)$$

حيث $d_{2j} = \frac{1-2^{2j-2}}{2^{2j-2}}c_{2j}$ ، $j = 2,3,\ldots\ldots$.

الآن بمقارنة سريعة بين (3.14) و (3.16) نلاحظ أن $R(n,1)$ أدق فى تقريب I من $R(n,0)$ ، ذلك لأن $I - R(n+1,1) = O(h^4)$ و أن $I - R(n,0) = O(h^2)$.

يمكن تكرار ذلك للحصول على:

$$I = R(n+1,2) + e_6h^6 + \ldots\ldots\ldots + e_{2k-2}h^{2k-2} + e_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi) \quad (3.17)$$

حيـــــــــث $R(n+1,2)=\frac{16R(n+1,1)-R(n,1)}{15}$ ، و بدقـــــــــة أفضـــــــــل لأن $I-R(n+1,2)=O(h^6)$. و بتكرار ذلك مراراً نحصل على:

$$R(n,m)=\frac{4^m R(n,m-1)-R(n-1,m-1)}{4^m-1}$$

(3.18)

حيث $I-R(n,m)=O(h^{2m+2})$. فكلما كبرت m كانت الدقة أفضل.

باستخدام (3.18) يمكننا تكوين الجدول التالى الذى يعرف بجدول رومبيرج:

$R(0,0)$						
$R(1,0)$	$R(1,1)$					
$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$				
$R(3,0)$	$R(3,1)$	$R(3,2)$	$R(3,3)$			
$R(4,0)$	$R(4,1)$	$R(4,2)$	$R(4,3)$	$R(4,4)$		
M	M	M	M	M	O	
$R(M,0)$	$R(M,1)$	$R(M,2)$	$R(M,3)$	$R(M,4)$	Λ	$R(M,M)$

◄◄ مثال:

إذا عدنا إلى تقريب: $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ نستطيع التوصل إلى الجدول التالي باستخدام تكامل رومبيرج.

الحل:

0.00000000

1.57079633 2.09439511

1.89611890 2.00455976 1.99857073

1.97423160 2.00026917 1.99998313 2.00000555

1.99357034 2.00001659 1.99999975 2.00000001 1.99999999

1.99839336 2.00000103 2.00000000 2.00000000 2.00000000 2.00000000

◄◄ مثال:

استخدم تكامل رومبيرج لتقريب $\int_0^3 \frac{\sin(2x)}{1+x^5}dx$ بإكمال الجدول التالي:

J	$R(J,0)$	$R(J,1)$	$R(J,2)$	$R(J,3)$
0	-0.00171772			
1	0.02377300	*		
2	0.60402717	*	*	
3	0.64844713	*	*	*
4	0.66591329	*	*	*

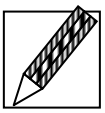
الحل:

الحل الدقيق هو $\int_0^3 \frac{\sin(2x)}{1+x^5}dx \approx 0.6717578646$ بتطبيق صيغة تكامل رومبيرج،

نحصل على:

J	$R(J,0)$	$R(J,1)$	$R(J,2)$	$R(J,3)$
0	-0.00171772			
1	0.02377300	0.03226990		
2	0.60402717	0.79744521	0.84845691	
3	0.64844713	0.66325379	0.65430770	0.65122596
4	0.66591329	0.67173534	0.67230077	0.67258638

التدريب (6)



استخدم جدول تكامل رومبيرج حتى $R(3,3)$ لتقريب $\int_1^2 \ln x\,dx$

أسئلة تقويم ذاتي



1. عرف تكامل رومبيرج.
2. ماذا يفيد استخدام استكمال ريتشاردسون الخارجي في عملية الاقتراب من الحل في تكامل رومبيرج؟

3. التفاضل العددي Numerical Differentiation

تتذكر عزيزي الدارس كيف كنّا نحسب المشتقة لدالة ما في مقرر التفاضل والتكامل (Calculus) ولعل أهم الأسباب التي تدفعك لتعلم حساب المشتقة بطرق عددية هو أن الأمر يتطلب في بعض الأحيان حساب المشتقة لدوال صعبة أو أن الدالة نفسها قد تكون غير معلومة وإنما يكون لدينا بعض البيانات المجدولة عنها.

1.3 حساب الفروق المنتهية

Finite Difference Calcuaus

لنفرض نقطة x_i تبتعد عن نقطة أخرى بمقدار h بحيث:

$$x_{i+1} - x_i = h\, x_i$$

وسوف ندرس هنا بعض الرموز المفيدة في حساب التفاضل.

المعنى	الرمز
الإزاحة	$E\ f(x) = f(x+h)$
فرق أمامي	$\Delta\ f(x) = f(x+h) - f(x)$
فرق خلفي	$\nabla\ f(x) = f(x) - f(x-h)$
فرق وسطي	$\delta\ f(x) = \left\{ f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right\}$
قيمة وسطية	$M\ f(x) = \frac{1}{2}\left\{ f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right\}$
اشتقاق	$D\ f(x) = f'(x)$

2.3 استخدام متسلسلة تايلر

إن استخدام مفكوك متسلسلة تايلر (Taylor Series Exparsion) في تقريب الاشتقاق العددي قد شاع؛ ذلك بسبب سهولة استخدامه ونتائجه الجيدة، وسنبدأ باستعراض تطبيقاته لإيجاد المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية.

ملاحظة

حينما نذكر الدالة f(x) فإننا نعني أنها وجميع مشتقاتها موجودة ومنتهية.

لنفرض أننا نريد حساب مشتقة دالة غير معلومة f'(x) عند النقطة x ، فإن متسلسلة تايلر:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c_1)h^2}{2}$$

وعند إعادة ترتيب المعادلة:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(c_1)h}{2}$$

حيث $c_1 \in [x, x + h]$ والعدد c_1 غير معروف، لذلك فإن حساب $f''(c_1)$ يبقى غير ممكن لذلك نهمل الحد الأخير، ولذلك فإن قيمة $f'(x)$ هي قيمة تقريبية، وإذا كان هناك حد (bound) لقيمة $f''(c)$ في الفترة $[x, x + h]$ فإن هذا الحد عبارة عن حد ثابت مضروب في h أي أن صيغة الفروق الأمامية.

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h)$$

ويسمى الخطأ الناتج عن إهمال $O(h)$ بخطأ البتر (Truncation Error) وهو ناتج عن استعمال عدد محدود من حدود متسلسلة لا نهائية.

وإذا استبدلنا x بـ x- h يصبح لدينا صيغة الفروق الخلفية:

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(c_2), x-h\le c_2\le x$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+\frac{h}{2}f''(c_2)$$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+O(h)$$

وإذا جمعنا صيغة الفروق الأمامية والخلفية يصبح لدينا:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{h}{4}[f''(c_2)-f''(c_1)]$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h)$$

وهذه تسمى صيغة الفروق الوسطى والحقيقة، وتأتي هذه الصيغة بخطأ $O(h^2)$ والسبب في ذلك هو أنه عندما تستخدم متسلسلة ما لمعرفة قيمة تقريبية للقيمة $f'(x)$ فإنه يلزمنا معرفة قيمة الدالة عند نقطتين في الصيغ الثلاث السابقة.

◄◄ مثال:

ليكن $f(x) = \cos x$ أوجد $f'(0.8)$ باستخدام الثلاث صيغ وقارنها بالإجابة الدقيقة حيث $h= 0.01$.

الحل:

نعلم أن $f'(x) = \sin x$ لذلك فإن الإجابة الدقيقة -0.71735609 .

صيغة الفروق الأمامية:

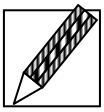
$$f'(0.8) \cong \frac{f(0.8+0.01)-f(0.8)}{0.01} = \frac{\cos(0.81)-\cos(0.8)}{0.01} = -0.7208$$

والخطأ هو 0.00347

صيغة الفروق الوسطى: $$f'(0.8) \approx \frac{f(0.8)-f(0.79)}{2(0.01)} = 0.717344$$

والخطأ هو 0.00001186

تدريب (7)



استخدم صيغة الفروق الأمامية والوسطى لتقريب f'(0.2) حيث:

$f(x) = x - e^x$ حيث $h = 0.01$

مثال:

استخدم صيغة الفروق الخلفية والوسطى لتقريب f'(13.1) للدالة: $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ حيث $h = 1$.

الحل:

صيغة الفروق الخلفية:

$$f'(13.1) \cong \frac{f(13.1) - f(12.1)}{2} \approx -0.0108277$$

صيغة الفروق الوسطى:

$$f'(13.1) \approx \frac{f(14.1) - f(12.1)}{2} \approx -0.01011$$

أما الإجابة الدقيقة فهي: -0.0100598

ونستطيع الحصول على دقة أفضل من خلال استخدام متسلسلة تايلر حول x للعدد x + 2h فيكون:

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\,f'(x) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \frac{(2h)^3}{6} f'''(c_1)$$

ولكن

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(c_2)$$

بضرب المعادلة الثانية بالعدد 4 وبطرح المعادلتين وجعل f'(x) في طرف ينتج

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\left(-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)\right)+\frac{h^2}{3}f'''(c) \qquad *$$

حيث $c \in [x, x+2h]$ وهذه الصيغة لها $O(h^2)$ ولكنها أقل دقة من صيغة الفروق الوسطى بالرغم من أن لهما درجة $O(h^2)$ والسبب في ذلك هو أننا نحسب قيم f على طرف واحد من x: $\{x, x+h, x+2h\}$ بينما في الصيغة الثانية نحسب القيم على طرفين من x: $\{x-h, x+h\}$ والخطأ في الصيغة الثانية يساوي نصف الخطأ في الصيغة الأولى.

ونستطيع أن نلاحظ أيضاً أن الصيغة الثانية تستخدم نقطتين بينما الصيغة الأولى ثلاث نقاط، ورغم ذلك فإنهما تسميان من صيغ الثلاث نقاط.

ملاحظة:

الصيغة (*) تستخدم في حال معلومات عن f(x+h) ، f(x+2h) في حال عدم وجودها فتستبدل h بالمقدار h- فنحصل على صيغة يلزم معها وجود بيانات أو معلومات عن القيم f(x-h)، f(x-2h).

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f(c_1)$$

$$f(x-h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f(c_2)$$

وبطرح المعادلتين وجعل f'(x) في طرف ينتج:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left(f'''(c_1)+f'''(c_2)\right)$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة (Intermediate Value Theorem) فإنه يوجد عدد c بين c_1, c_2 بحيث أن:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(c)$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2)$$

ولذلك نرى أن صيغة الفروق الوسطى هي أكثر دقة ($O(h^2)$) من طريقة الفروق الأمامية أو الخلفية ($O(h)$).

◄◄ مثال:

استخدم البيانات في الجدول التالي (والممثلة للدالة $f(x) = e^{\sin x}$) معتمداً على الصيغة السابقة لإيجاد f"(1).

الحل:

x	f(x)
0.8	2.049008
0.9	2.188742
1.0	2.319777
1.1	2.438072
1.2	2.539683

يفضل استخدام h = 0.1

الحل الدقيق f"(1) = -1.2748204

الحل العددي :

$$f''(1)\equiv\frac{1}{(0.1)^2}[f(0.9)-2f(1)+f(1.1)]=-1.2740232$$

التدريب (8)



استخدم البيانات في الجدول حيث h = 0.2

3.3 أفضل اختيار للقيمة h:

رأينا في ما سبق أنه كلما صغرت h كانت النتائج أفضل، ولكن اثبتت الحسابات بأن هذا الاستنتاج غير دقيق.

لنفرض أننا نود تقريب المشتقة الأولى لدالة ما f(x) بأفضل دقة باستخدام صيغة الفروق الأمامية:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

بالطبع مرّ بك سابقاً خطأ التقريب وهناك أيضاً خطأ البتر عند حساب المقدار f(x+h) - f(x) ولنفرض بأن خطأ التقريب لا يتجاوز $\in$ لذلك فإن خطأ التقريب للمشتقة لا يتجاوز $\frac{2\in}{h}=\frac{\in-(-\in)}{h}$ ولكن $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+....$

فيكون خطأ البتر للمقدار $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ لا يتجاوز المقدار $\frac{Mh}{2}$ حيث M هو أكبر قيمة للمقدار |f"(x)| لذلك فإن الخطأ الكلي لا يتجاوز $\frac{2\in}{h}+\frac{Mh}{2}$ وهذا المقدار يكون في أقل قيمة له عندما $h=2\sqrt{\frac{\in}{M}}\Leftarrow e(h)=\frac{2\in}{h}+\frac{Mh}{2}\Leftarrow\frac{de}{dh}=0\Leftarrow\frac{-\in}{h^2}+\frac{M}{2}=0$.

$$h=2\sqrt{\frac{\in}{M}}\Leftarrow\frac{h^2}{2}=\frac{\in}{M}\Leftarrow$$

◄◄ مثال:

في مثال سابق إذا كان f(x) = cos x وطبقنا صيغة الفروق الأمامية عند x = 0.8 مع قيم $10^{-1}h, 10^{-2}, ..., 10^{-11}$ فنحصل على الجدول.

لاحظ سلوك القيمة المطلقة للخطأ، لو أخذنا $\in$ = 2.2204x 10^{-16} (وجدت عن طريق الحاسب الالي) و M ≤ 1 = | f"(x) | فإن أفضل اختيار لقيمة h:

$h_{opt} = 2\sqrt{\frac{\in}{1}} \approx 2.980x10^{-8}$ والتي تؤكد المقدار

$\frac{|f'(x) - f(x + h_{opt}) - f(x - h_{opt})|}{2h_0} \approx 9.7789x10^{-9}$

وهذا ما يؤكده الجدول السابق.

لنفرض أننا نود أن نقرب قيمة المشتقة الأولى للدالة f(x) بحيث يكون التقريب أفضل ما يمكن باستخدام صيغة الفروق الوسطى.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

وهذه الصيغة لها خطأ البتر $\frac{-h^2 f'''(c)}{6}$ ومن خبرتنا في التحليلي السابق يكون مجموع الخطأ الكلي (خطأ البتر + خطأ التقريب) $\frac{\in}{h} + \frac{Mh^2}{6}$

$$h = \left(\frac{3\in}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftarrow h^3 = \frac{3\in}{M} \Leftarrow \frac{hM}{3} = \frac{\in}{h^2} \Leftarrow \frac{de}{dh} = 0 \Leftarrow eh = \frac{\in}{h} + \frac{Mh^2}{6}$$

حيث M هي أكبر قيمة للمقدار $|f'''(x)|$ والخطأ الكلي له قيمة دنيا عندما $h = \left(\frac{3\in}{M}\right)^{1/3}$.

◄◄ مثال:

استخدم الصيغة (*) لحساب f'(0.8) حيث f(x) = cos x حيث h= 0.01

الحل:

$$f'(0.8) \cong \frac{1}{2(0.01)}[-3f(0.8) + 4f(0.81) - f(0.82)] = -0.71738$$

ويستطيع الدارس التأكد من أن الخطأ هنا هو ضعف الخطأ الناتج عند استخدامنا صيغة الفروق الوسطى.

وتستطيع عزيزي الدارس استخدام صيغ أكثر دقة ولكن بمجهود أكبر لحساب المشتقة الأولى f'(x):

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x)$$

$$+ \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) \pm \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + O(h^6)$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + 2h^2 f(x) \pm \frac{8h^2}{6} f'''(x)$$

$$+ \frac{16h^4}{24} f^{(4)}(x) \pm \frac{32h^5}{120} f^{(5)}(x) + O(h^6)$$

وبالطبع f(x + h)، f(x- h) من بعضهما وكذلك f(x+2h)، f(x- 2h) وببعض الجبر يصبح لدينا صيغة الخمس نقاط لحساب المشتقة الأولى:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}\left(f(x) - 2h\right) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\ )$$

مع خطأ التقريب: $\frac{h^4}{30} f^{(4)}(c)$.

ملاحظة:

سبب تسميتها صيغة الخمس نقاط بالرغم من استخدمنا 4 نقاط هو طريقة اشتقاق الصيغة التي تحتم وجود النقاط الخمس.

◄◄ مثال:

استخدم الصيغة السابقة لتقريب f'(0.8) حيث f(x) = cos x و h= 0.01.

$$f'(0.8) \approx \frac{1}{12(0.01)}\left(f(0.78) - 8f(0.79) + 8f(0.81) - (0.82)\right) = -0.71735609$$

ملاحظة:

تستخدم هذه الصيغة قيم f على طرفي x وإذا تعذر وجود مثل هذه القيم فإننا نستخدم صيغة أخرى تستخدم قيم f على يمين x: $x + h$، $x + 2h$، $x+3h$, $x + 4h$:

وهذه الصيغة أيضاً ذات خمس نقاط.

$$f'(x)=\frac{-25f(x)+48f(x+h)-36f(x+2h)+16f(x+3h)-3f(x+4h)}{12h}$$

$$+\frac{f^{(5)}(c)}{5}h^4 : c\in[x, x+4h]$$

4.3 صيغة الثلاث نقاط لتقريب المشتقة الثانية

إذا جمعنا مفكوك متسلسلة تايلر للمقدارين:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

يصبح لدينا بعد جعل f''(x) في طرف:

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}(f(x-h)-2f(x)+f(x+h))-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

حيث: $c\in [x-h, x+h]$

مثال:

احسب f''(0.5) حيث $f(x) = xe^{2x} - \sin x$ ، $h = 0.05$

الحل:

الإجابة الدقيقة: $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - \cos x$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(e^{2x} + 2xe^{2x}) + \sin x$

$f''(0.5) = 16.78911651$

الحل العددي:

$$f''(0.5)\cong \frac{1}{(0.05)^2}[f(0.45)-2f(0.5)+f(0.55)]=16.81168$$

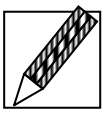
مثال:

احسب f''(0.5) حيث $f(x) = xe^{2x} - \sin x$ و $h = 0.5$

الحل:

$$f''(0.5) \cong \frac{1}{(0.5)^2}[f(0) - 2f(0.5) + f(1)] = 19.1526$$

التدريب (10)



في المثال السابق احسب f''(0.5) حيث h = 0.01

ملاحظة:

إعتماداً على وجود بيانات عند قيم معينة أو عدم وجودها يتم اختيار الطريقة المناسبة، فمثلاً عدم وجود معلومات عن قيم الدالة عند f(x) يتحتم علينا البحث عن صيغ لا تتطلب معرفة f(x) مثل صيغة الفروق الوسطى:

$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

◄◄ مثال:

ليكن f(x) = cosx، عند تطبق صيغة الفروق الوسطى عند x = 0.8 لتقريب f'(0.8) لقيم h: 10^{-1} ، 10^{-2}، .... ، 10^{-8}.

Step-Size	*Numerical Approximation*	*Absolute Error*	*Error* $\div h^2$
10^{-1}	-0.7161610951	$1.195e-03$	0.119499583
10^{-2}	-0.7173441350	$1.196e-05$	0.119558751
10^{-3}	-0.7173559713	$1.196e-07$	0.119559373
10^{-4}	-0.7173560897	$1.196e-09$	0.119560950
10^{-5}	-0.7173560909	$1.489e-11$	0.148872026
10^{-6}	-0.7173560909	$1.842e-11$	18.41937713
10^{-7}	-0.7173560906	$2.591e-10$	25913.63790
10^{-8}	-0.7173560967	$5.847e-09$	58470902.56
10^{-9}	-0.7173560634	$2.746e-08$	27459600482

إذا أخذنا $\epsilon = 2.2204 \times 10^{-16}$ واستخدمنا $|f'''(x)| \le M = 1$ فإن أفضل خيار لقيمة h هو:

$$h_{opt} = \left(\frac{3\epsilon}{1}\right)^{\frac{1}{3}} \cong 8.7335 \times 10^{-6}$$

أيضاً قيمة المقدار:

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h_{opt}) - f(x-h_{opt})}{2h_{opt}} \right| \approx 7.888 \times 10^{-12}$$

تتناسب مع النتائج المدونة في الجدول السابق.

درست عزيزي الدارس، كيف نستفيد من مفكوك متسلسلة تايلر في تقريب اشتقاق الدالة. ومن الطرق المستخدمة أيضاً إيجاد حدودية استكمال للبيانات المجدولة، وأشهرها حدودية لاجرانج للاستكمال وهي تعتمد على عمل حدودية $P_n(x)$ لها نفس قيم $f(x)$ عند $n+1$ من النقاط.

طريقة أخرى تستخدم في تقريب التكاملات من خلال تحديد المعاملات (undetermined Coefficients) وسنكتفي هنا بشرح إحدى الطرق الفاعلة وهي عنوان القسم القادم.

5.3 استكمال ريتشاردسون

Richardson Extrapolation

تعتبر طريقة استكمال ريتشاردسون من الطرق التي تعطي نتائج أفضل من نظيراتها مقارنة مع كمية الحسابات البسيطة المرافقة لها.

لنفرض أن $R(h)$ هي صيغة لها $O(h^2)$ لتقريب القيمة T: لتكن صيغة الخطأ لتقريب $R(h)$ إلى T هي كما يلي:

$$T = R(h) + C_1h^2 + O(h^4) \qquad (*)$$

حيث C_1 ثابت. لنستبدل h بالمقدار $\frac{h}{2}$ ونحصل على تقريب أفضل:

$$T = R\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\frac{h^2}{4} + O(h^4)$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بالمقدار (4) وطرح المعادلتين:

$$T = \frac{4R\left(\frac{h}{2}\right) - R(h)}{3} + O\left(h^4\right)$$

لنعرف: $R_1(h) = R(h)$ ثم $R_2(h) = \frac{4R_1\left(\frac{h}{2}\right) - R_1(h)}{3} + O\left(h^4\right)$

ولذلك نستطيع أن تعرف متتالية من التقريب إلى T كما في الجدول:

$R_1(h)$	
$R_1(h/2)$	$R_2(h)$
$R_1(h/4)$	$R_2(h/2)$
$R_1(h/8)$	$R_2(h/4)$

ولعلك تلاحظ، عزيزي الدارس، بأن المقدار $R_1(h/2^k)$ سيكون له رتبة $O\left(\left(\frac{h}{2k}\right)^2\right)$ بينما $R_2\left(\frac{h}{2^k}\right)$ له رتبة $O\left(\left(\frac{h}{2^k}\right)^4\right)$

لنفرض أن المعادلة (*) يمكن أن تحوي ثابت C_2 بحيث أن:

$$T = R(h) + C_1h^2 + C_2h^4 + O(h^6)$$

وهذا سيؤدي بالتأكيد إلى إمكانية إضافة عمود ثالث في الجدول أعلاه يحوي المدخلات $R_3(h)$ ، $R_3(h/2)$ عن طريق تعريف:

$$R_3(h) = \frac{4^2 R_2\ (h/2) - R_2(h)}{4^2 - 1}$$

ولاحظ أن: $R_3\left(\frac{h}{2^k}\right)$ سيكون له رتبة $O\left(\left(\frac{h}{2^k}\right)^6\right)$

ويمكن الاستمرار بإضافة عدد m من الأعمدة بشرط أن:

$$T = R(h) + \sum_{j=1}^{m-1} C_j\, h^{2j} + O(h^{2m})$$

حيث C_j ثوابت معينة، ويمكن التعبير عن استكمال ريتشاردسون

$$R_j(h) = \frac{4^{j-1} R_{j-1}\ (h/2) - R_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

حيث $j = 2, 3, ..., m$

◄◄ مثال:

ليكن $x = 2.0$ ، $h = 0.2$ و $f(x) = xe^x$

إن صيغة الفروق الوسطى التي لها $O(h^6)$ تكتب على النحو التالي:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + O(h^6)$$

وبمقارنة استكمال ريتشاردسون مع المعلومات أعلاه:

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$C_1 = -\frac{1}{6} f^{(''')}(x) \quad \text{و} \quad C_2 = -\frac{1}{120} f^{(4)}(x)$$

لاحظ أن:

$$R(h) = R(0.2) = \frac{f(2.2) - f(1.8)}{0.4} = 22.414160$$

أيضاً:

$R(0.1) = 22.228780$

$R(0.05) = 22.182564$

وتستطيع إكمال بقية الحسابات لنحصل على الجدول التالي:

$R_1(0.2) = 22.414160$	
$R_1(0.1) = 22.228786$	$R_2(0.2) = 22.166995$
$R_1(0.05) = 22.182564$	$R_2(0.1) = 22.167157$
	$R_3(0.2) = 22.167168$

مع العلم بأن الحل الدقيق هو:

$f'(2.0) = 22.167168$

وهذا ما أكدنا سابقاً بأن هذه الطريقة فعّالة في الحصول على إجابات ذات أخطاء قليلة.

◄◄ مثال:

لنعرّف الرمز: $D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

لذلك:

$f'(x) \approx D(h) + Ch^2 \qquad (*)$

وباستخدام $2h$

$f'(x) \approx D(2h) + 4Ch^2$

وبضرب المعادلة (*) بالمقدار (4) وطرحها من المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$3f'(x) \approx 4D(h) - D(2h) = 4\left(\frac{f_1 - f_{-1}}{2h}\right) - \frac{f_2 - f_{-2}}{4h}$$

لذلك:

$$f'(x) \approx \frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2}{12h}$$

وهذه صيغة الفروق الوسطى من الرتبة الرابعة.

لكنك تعلمت من الأمثلة السابقة بأنه عندما $f(x) = \cos x$ و $h = 0.01$

فإن: $D(h) = -0.717344150$ كذلك تستطيع حساب:

$$D(2h) = \frac{\cos(0.82) - \cos(0.78)}{0.04} = -0.717308275$$

لذلك:

$$f'(0.8) = \frac{4D(h) - D(2h)}{3} = -0.717356108$$

تدريب (10)



ليكن $f(x) = xe^x$

(1) كوّن جدول قيم f في الفترة [1.8, 2.2] و $h = 0.1$

(2) قرّب $f'(2.0)$ باستخدام صيغ ذات نقطتين – ثلاث نقاط وخمس نقاط.

(3) قرّب $f''(2.0)$ باستخدام صيغ ذات ثلاث نقط وخمس نقاط علماً بأن:

$f'(2.0) = 22.167168$, $f''(2.0) = 29.556224$

أسئلة تقويم ذاتي

1- لماذا نلجا إلى استخدام التفاضل العددي؟

2- ما سبب شيوع استخدام مفكوك متسلسلة تايلر في تقريب الاشتقاق العددي؟

3- ماذا نعني بخطأ البتر Truncation Error؟

4- اشرح باختصار طريقة استكمال ريتشاردسون؟

4. أمثلة عامة على الوحدة

◄◄ مثال (1)

لتكن $f(t) = \cosh t$ أوجد $f'(3.1)$ ؟

h	القيمة الأمامية	القيمة الوسطية	القيمة الخلفية	القيمة الحقيقية	الخطأ
0.05	11.06687	11.08107	11.06756	11.07645	0.00958, 0.00642, 0.00889
0.0025	11.0741	11.07761	11.07419	11.07645	0.00235, 0.00116, 0.00226

◄◄ مثال (2)

اشتق الفروق الوسطى لثلاثة نقاط، بحيث أن:

$$f'(t) \cong a_{-1} f(t-h) + a_0 f(t) + a_1 f(t+h)$$

الحل:

الآن باستخدام قاعدة تايلر:

$$f(t-h) = f(t) - f'(t)h + \frac{1}{2}f''(t)h^2 - \frac{1}{6}f'''(t)h^3 + \ldots$$

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2}f''(t)h^2 + \frac{1}{6}f'''(t)h^3 + \ldots$$

$\Rightarrow a_{-1} f(t-h) + a_0 f(t) + a_1 f(t+h)$

$= a_{-1}\left[f(t) - f'(t)h + \frac{1}{2} f''(t)h^2 - \frac{1}{6} f'''(t)h^3 + \ldots \right] + a_0 f(t) + a_1 \left[f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2} f''(t)h^2 + \frac{1}{6} f'''(t)h^3 + \ldots \right]$

$= (a_{-1} + a_0 + a_1) f(t) + (a_1 - a_{-1}) hf'(t) + \frac{1}{2}(a_{-1} + a_1) h^2 f''(t) + \frac{1}{6}(a_1 - a_{-1}) f'''(t) h^3 + O(h^4)$

بما أننا نجد قيمة تقريبية لـ $f'(t)$، لذلك سيتكون النظام التالي بالنسبة لـ a_0 ، a_1، a_{-1}

1

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = 0$$
$$(a_1 - a_{-1})h = 1$$
$$a_{-1} + a_1 = 0$$

بعد حل هذا النظام سينتج:

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2h}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{2h}$$

$$a_0 = 0$$

$$\Rightarrow f'(t) \cong a_{-1} f(t-h) + a_0 f(t) + a_1 f(t+h) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

مع وجود الخطأ التالي:

$$f'(t) - \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} = O(h^2)$$

◄◄ مثال (3)

إذا كانت: $f(t) = e^t$، أوجد $f'(0.5)$

الحل:

في هذا المثال قيم الأخطاء تكون متناقضة بداية، ولكن عندما نختار قيمة ابتدائية $h = 0.01$ فإن الخطأ سوف يتزايد. بما أن $|f^{(3)}(t)| = e^t \leq 2.01376$

$\forall\ t \in [0.5, 0.7]$

واستخدمنا خمسة قيم رقمية، بمعنى:

$$\in = \frac{1}{2} \times 10^{-5} = 0.000005$$

فإن:

$$h^* = \left(\frac{6 \in}{M}\right)^{1/3} = 0.0246$$

◄◄ مثال (4)

قانون شبه المنحرف:

$$E(f) = \frac{-h^3}{12} f^{(4)}(n)$$

$$\Rightarrow E(P_k) = 0 \qquad , k = 0, 1, 2, 3,$$

◄◄ مثال (5)

أوجد: $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

n	Closed error	Open error
0		0.2146018
1	0.0353981	0.0107556
2	0.0020648	0.0020528
3	0.0007828	0.0013353
4	0.0001312	0.0051343
5	0.0000715	0.0001985

* صيغة النقطتان المغلقة (قانون شبه المنحرف)

$$h = \frac{(b-a)}{1}$$

$$\Rightarrow -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(n) = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(n) = -0.0833(b-a)^3 f^{(2)}(n)$$

* صيغة النقطتان المفتوحة التي تملك خطأ (n =1) داخل الجدول:

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{h^3}{2} f^{(2)}(n) \int_{-1}^{2} s(s-k)\,ds = \frac{(b-a)^3}{36} f^{2}(n) = 0.0278(b-a)^3 f^{(2)}(n)$$

* صيغة (4) نقاط المفتوحة:

$$h = \frac{(b-a)}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(n) \quad \frac{19(b-a)^5}{9000} f^{(4)}(n) = 2.1111\times 10^{-004} (b-a)^5 f^{(4)}(n)$$

* صيغة (4) نقاط المغلقة:

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-3h^5}{80} f^{(4)}(n) = \frac{-(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(n) = -1.5432 \times 10^{-004} (b-a)^5 f^{(4)}(n)$$

* صيغة (5) نقاط المغلقة:

$$h = \frac{(b-a)}{4}$$

$$-5.1670 \times 10^{-007} f^{(6)}(n)$$

* صيغة (5) نقاط المفتوحة:

$$h = \frac{(b-a)}{6}$$

$$\Rightarrow 1.0462 \times 10^{-006} f^{(6)}(n)$$

◄◄ مثال (6)

لديك الفترة [a, b] داخل القوة n ، بمعنى

الفترة k^{th} $(k \geq 1)$ هي فترة $[x_{k-1}, x_k]$ ، حيث:

$$x_k = a + kh$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} I^{(k)}(f)$$

حيث:

$$I^{(k)}(f) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\ dt$$

لديك قاعدة شبه المنحرف:

$$I^{(k)}(f) \cong \frac{h}{2} \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right]$$

وهذه تقابل:

$$I(f) \cong \hat{I}_T(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_{k-1} + f(x_k)\right] = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + h\sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2} f(x_k)$$

◄◄ مثال (7)

$$I(f) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt$$

كم عدد الفترات لحساب التكامل مع خطأ 0.0002؟

$$\left|f^{(2)}(t)\right| = |\cos t| \le 1 \qquad \Rightarrow M=1$$

بما أن $\in = 0.0002$ ، $b-a=\frac{\pi}{2}$ ، إذاً:

$$\sqrt{\frac{M(b-a)^3}{12 \in}} = 40.18$$

إذا يوجد على الأقل (41) فترة سوف تستعمل.

في الحقيقة يوجد فقط (33) فقرة.

والسبب أن (41) قيمة مرتفعة؛ لأن الحسابات تكون (based) لأكبر قيمة لـ $|f^{(2)}(t)|$.

◄◄ مثال (8)

قارن باستخدام قانون شبه المنحرف:

$$\int_0^1 t^{1/4} \, dt$$

h	I_n	$R_{\frac{h}{4}}$	P
$\frac{1}{2}$	0.6704482		
$\frac{1}{4}$	0.7448520		
$\frac{1}{8}$	0.7765077	2.33	1.22
$\frac{1}{16}$	0.7900672	2.35	1.23
$\frac{1}{32}$	0.7958100	2.36	1.24
$\frac{1}{64}$	0.7982348	2.37	1.24
$\frac{1}{128}$	0.7992570	2.37	1.25
$\frac{1}{256}$	0.7996873	2.38	1.25

$p \cong 1.25$

$$E(f) = \frac{-(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(n)$$

سوف نستثني الرتبة المتقاربة $p = 2$

هذه الدالة قيمتها متصلة على الفترة $[a,b]$ $f^{(2)}(t)$.

لكن $f(t) = t^{\frac{1}{4}}$ غير قابل للاشتقاق عندما $(t = 0)$.

◄◄ مثال (9)

الفروق الوسطية لثلاثة نقاط:

$$I \equiv f'(t) \approx \frac{f'(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

⇐ باستخدام قانون تايلر:

$$f(t+h) = \sum_{k=0}^{6} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + O(h^7)$$

$$f(t-h) = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-h)^k}{k!} f^{(k)}(t) + O(h^7)$$

$$\Rightarrow \frac{f(t+h) - f(t-h)}{h} = f'(t) + \frac{1}{6} h^2 f^{(3)}(t) + \frac{1}{120} h^4 f^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$\Rightarrow I - \frac{f(t+h) - f(t-h)}{h} = -\frac{1}{6} h^2 f^{(3)}(t) - \frac{1}{120} h^4 f^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{1}{6} f^{(3)}(t)$$

$$k_2 = -\frac{1}{120} f^{(5)}(t)$$

لديك $f(t) = t^3 e^{2t}$، لحساب $f'(0.5)$:

$$R_{0.0} = I_{0.1}^{(0)} = \frac{f(0.6) - f(0.4)}{(2)(0.1)} = 2.8735532$$

– الجدول الآتي يمثل الخطأ في الفروق الوسطية لثلاثة نقاط:

$R_{0,0}$	$R_{1,0}$	$R_{2,0}$
1.5527e-1	3.858e-2	9.63 e-3
	$R_{1,1}$	$R_{2,1}$
	3.0 e-4	1.93 e-5
		$R_{2,2}$
		7.15 e-8

$$R_{1,0} = I_{0.05}^{(0)} = \frac{f(0.55) - f(0.45)}{(2)(0.05)} = 2.7568679$$

$$R_{2,0} = I_{0.025}^{(0)} = \frac{f(0.525) - f(0.4475)}{(2)(0.025)} = 2.7279139$$

$$R_{1,1} = I_{0.05}^{(1)} = \frac{4R_{1,0} - R_{0,0}}{3} = 2.7179728$$

$$R_{2,1} = I_{0.025}^{(1)} = \frac{4R_{2,0} - R_{1,0}}{3} = 2.7182626$$

$$R2,2 = I_{0.025}^{(2)} = \frac{16R_{2,1-} R_{1,1}}{15} = 2.7182819$$

ملاحظة: الحل الدقيق للدالة f'(0.5) هو:

f'(0.5) = 2.71828183

◄◄ مثال (10)

من خلال طريقة جاوس لنقطة واحدة:

قيمة $t_0 = 0$ بالنسبة للدالة: $P1(t) = t$

الآن، باستخدام (Convection) (الانتقال).

$$L_{0,0}(t) = 1$$

إذا:

$$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{0,0}(t)dt = \int_{-1}^{1} 1dt = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx 2f(0)$$

* درجة التقريب ≤ 1.

ملاحظة:

طريقة جاوس لنقطة واحدة هي صيغة المنتصف للنقطة.

* في طريقة جاوس لنقطتين تكون قيم $t_0 = 0$ ، $t_1 = 0$

$$\Rightarrow P_2(t) = \frac{1}{3}\left(3t^2 - 1\right)$$

$$t_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad , t_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{1,0}(t)dt = 1$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} L_{1,1}(t)dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)dt \cong f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

* درجة التقريب ≤ 3 .

◄◄ مثال (11)

أوجد

$$I = \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\, dt$$

الحل:

إفرض: $u = \sqrt{t}$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^1 e^{u^2}\, du$$

بالمقارنة مع قاعدة سمبسون من أجل (32) فترة تكون قيمة الحساب 2.925304

◄◄ مثال (12)

$$I=\int_0^2 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

الحل:

إفرض: $u=\sqrt{1-t}$

$$\Rightarrow I=2\int_0^1 e^{u^2-1}\,du$$

◄◄ مثال (13)

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt=\int_0^{\pi} e^{\cos(\theta)}\,d\theta$$

◄◄ مثال (14)

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

هذا المقدار يملك قيمة غير معرفة عندما $(t = 0)$.

بما أن $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ ، إذاً ربما نحسب $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ ، حيث:

$$f(t)=\begin{bmatrix} \frac{\sin t}{t} & , & t\neq 0 \\ 1 & , & t\neq 0 \end{bmatrix}$$

الخلاصة

عزيزي الدارس،،،

بدأنا دراسة التكاملات العددية وبالطريقة العامة (نيوتن – كوتس) وهي على الصيغة التالية: $I(f) \cong I_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ حيث $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ هي أوزان للمجموع و $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ هي نقاط تنتمي إلى [a,b] ومرتبة: $x_1 < x_2 < .... < x_n$.

تم عرجنا على حدودية لاجرانج: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ وكيفية استخدامها في حساب التكامل العددي، للوصول إلى صيغة شبه المنحرف التالية:

$$I_2(f) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right] dx$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

شرحنا بالتفصيل بعد ذلك قاعدة سمبسون:

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

وتوصلنا إلى النظرية التالية لحساب التكامل العددي:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + E_{n+1}(f)$$

ثم شرحنا كيف نحصل على قاعدة شبه المنحرف المركبة على الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c)$$

وكذلك صيغة سمبسون المركبة على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)dx$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{h}{3} \left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_j) \right]$$

ودرسنا حدود الخطأ في كثير من الطرق وكيفية التحكم فيه، وكذلك شرحنا طريقة تكامل رومبيرج، وبينا أهميته في تقليل الأخطاء، وهو دمج لصيغة شبه المنحرف مع استكمال ريتشاردسون الخارجي، ثم وصلنا إلى الصيغة التالية:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2} \right) h_{k-1} \right) \right]$$

واختتمنا التكامل العددي بدراسة تكاملات جاوس، والتي ظهرت على الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

أما بالنسبة للتفاضل العددي فدرسنا الفروق المنتهية والتي اعتبرت أساساً في حساب التفاضل العددي في هذه الوحدة، واستخدام مفكوك متسلسلة تايلر، ومنها أيضاً طرق الثلاث نقاط والخمس نقاط وغيرها واختتمنا هذه الوحدة بدراسة استكمال ريتشاردسون الخارجي.

نأمل أن تكون حققت الأهداف التي وضعت بداية الوحدة.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،

تبحث الوحدة الدراسية الرابعة في الحلول العددية لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية، وسنقسم الدراسة إلى طرق مختلفة، منها طرق الخطوة الواحدة، والطرق متعددة الخطوات، وذلك لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، ثم نعرّج على الحلول العددية لحل معادلات تفاضلية من رتب أعلى (ثانية).

إجابات التدريبات

التدريب (1)

$$I_2(f) = \frac{2}{2}\left[0^2 + 2^2\right] = 4$$

لحساب قيمة الخطأ الناتج نوجد القيمة الدقيقة للتكامل.

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

ونستطيع هنا تطبيق صيغة حساب الخطأ $-\frac{1}{12}f''(c)h^3$ فنجد:

$$-\frac{1}{12}f''(c)h^3 = \frac{-1}{12}(2)(2^3) = -1.33$$

أي أن قيمة خطأ التكامل لا يمكن أن تتجاوز 1.33- وللتأكد:

تكون قيمة الخطأ الناتج Error هي:

$$\text{Error} = \int_0^2 f(x)\,dx - I_2(f)$$

$$= 2.67 - 4 = -1.33$$

التدريب (2)

f(x)	الحل الدقيق	قاعدة شبه المنحرف	قاعدة سمبسون الثلثية
$\frac{1}{x+1}$	1.099	1.333	1.111
$\sqrt{1+x^2}$	2.958	3.326	2.964
sin x	1.416	0.909	1.425
e^x	6.389	8.389	6.421

التدريب (3)

أ. نحسب قيم الدالة كما يلي:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.0	0.99335	0.97355	0.94107	0.8967	0.84147

وبالتالي:

$$I_2(f)=\frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_6)\right)+h\sum_{i=2}^{5}f(x_i)$$

$$= 0.2\ (3.80467) + 0.1\ (1.84147) = 0.94508$$

حسب متسلسلة تايلور:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}$$

$$f'(x)=-\frac{2x}{3!}+\frac{4x^3}{5!}-\frac{6x^5}{7!}+\frac{8x^7}{9!}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{3!}+\frac{12x^2}{5!}-\frac{30x^4}{7!}+\frac{56x^6}{9!}$$

في الفترة [0,1] فإن $|f''(x)|$ لا تتجاوز $\frac{1}{2}$ لأن:

$$-\frac{2}{3!}+\frac{12}{5!}-\frac{30}{7!}+\frac{56}{9!}+\ldots+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.\right)<\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن حدود الخطأ:

$$\frac{h^2}{12}|f''(c)|<\frac{h^2}{24}<\frac{1}{2}\,10^{-5}$$

لذلك $h < \sqrt{1.2}\ 10^{-2}$ أو $n = 92$ من الفترات الجزيئة كحد أدنى.

ب. نعلم أن: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ ، $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

كذلك:

$$\max_{[1,2]} |f''(x)| = 2$$

إذن: $$(b-a)\frac{h^2}{12}\max_{[1,2]}|f''(x)| = \frac{h^2}{6} < 10^{-2}$$

لذلك: $$h < \sqrt{0.06}$$

وباختيار $h = 0.2$ نجد أن:

$$I_2(f) = \frac{0.2}{2}\left[\frac{1}{1.0} + 2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8}\right) + \frac{1}{2.0}\right]$$
$$= 0.6956$$

بينما القيمة الدقيقة:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2) - \ln(1) = 0.6931$$

لذلك فإن الخطأ 0.0025 لا يتجاوز 10^{-2} كما توقعنا.

التدريب (4)

صيغة شبه المنحرف المركبة على فترات جزئية عددها m :

$$|f''(x)| = |(x-2)\, e^{-x}| \le 2 \;\forall\; x \in [0, 2]$$

$$\frac{(b-a)h^2}{12}\max_{[0,2]}|f''(x)| \le 5\times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{4h^2}{12} \le 5\times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow h < 0.000122474$$

$$\Rightarrow M \ge 16330 \qquad \left(M = \frac{2}{h}\right)$$

صيغة سمبسون المركبة على فترات عددها 2M $\left(M = \frac{1}{h}\right)$

$$|f^{(4)}(x)| = |(x-4)\, e^{-x}| \le 4 \quad \forall \quad x \quad \in \quad [0, 2]$$

$$\frac{(b-a)\,h^{(4)}}{180}\ \max_{[0,2]}|f^{(4)}(x)| \le 5\times10^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{4h^4}{90} \le 5\times10^{-9}$$

$$\Rightarrow h < 0.0181818$$

$$\Rightarrow M \ge 55$$

التدريب (5)

لاحظ بداية أن:

$$\min_{[2,7]} f^{(4)}(x) = \min_{[2,7]} \frac{24}{x^5} = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}$$

لذلك:

$$(b-a)\ \frac{h^4}{90}\left|f^{(4)}(c)\right| \le (7-2)\ \frac{h^4}{90}\ \frac{3}{4} = \frac{h^4}{48}$$

ولكن: $h = \frac{5}{2M}$ لذلك $\frac{625}{768M^6} \le 5\times10^{-9}$ أو $M \ge 113$ لذلك $h = \frac{5}{226}$

ولكن:

$$\int_2^7 \frac{1}{x}dx \approx \frac{h}{3}\left[f(2) + f(7) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$

$$= 1.252762969$$

بينما الحل الدقيق هو:

$$In(7) - In(5) = 1.252762968$$

التدريب (6)

نبدأ: $R_{1.1} = \frac{2-1}{2}\left[In(1) + In(2)\right] = 0.346574$

ثم نكمل لنحصل على:

J	$R(J,1)$	$R(J,2)$	$R(J,3)$
1	0.346574		
2	0.376019	0.385835	
3	0.383700	0.386260	0.386288

بينما القيمة الدقيقة للتكامل

$$\int_1^2 \text{Inx}\, dx = \left[x\,\text{Inx} - x\right]_1^2 = 0.386294$$

التدريب (7)

الإجابة الدقيقة: f'(0.2) = - 0.2214

صيغة الفروق الخلفية:

$$f'(0.2) \approx \frac{f(0.21) - f(0.2)}{0.01}$$

$$= - 0.22753018$$

وقيمة الخطأ: 0.00613

صيغة الفروق الوسطى

$$f'(0.2) \approx \frac{f(0.21) - f(0.19)}{0.02}$$

$$=- 0.22142311$$

وقيمة الخطأ: 0.00002

التدريب (8)

$$f''(1) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[f(0.8) - 2f(1) + f(1.2)\right]$$

$$= -1.27156$$

التدريب (9)

الحل العددي هو:

$$f''(1) \approx \frac{1}{(0.01)^2}\left[f(0.49) - 2f(0.5) + f(0.51)\right]$$

$$= 16.7900$$

نلاحظ أنه كلما كانت h اصغر كان الخطأ أقل.

التدريب (10)

.1

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
f(x)	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

.2 نستخدم $h = 0.1$، $x = 2.0$

صيغة النقطتين: $f'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(C_1)$

$$\cong \frac{1}{0.2}\left[f(2.1) - f(1.9)\right] = 22.228790$$

صيغة الثلاث نقاط:

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(C_2)$$

$$\cong \frac{1}{0.2}\left[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)\right] = 22.032310$$

صيغة الخمس نقاط:

$$f'(x) = \frac{1}{12h}\left[f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(C_3)$$

$$\cong \frac{1}{0.2}\left[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)\right] = 22.166999$$

3. أما لتقريب f"(2.0) نستخدم أولاً h = 0.2 ثم h = 0.1:

h = 0.2

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(C_4)$$

$$\cong \frac{1}{0.04}\left[f(1.6) - 2f(2.0) + f(2.2)\right] = 29.704275$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(C_5)$$

$$\cong \frac{1}{0.01}\left[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)\right] = 29.593200$$

مسرد المصطلحات

الفروق المنتهية Finite Difference

مقدار الخطأ الناتج عن استخدام قاعدة سمبسون.

دالة وزنية Weight Function

هي دالة تم تعريفها عند شرح حدوديات لجندر، ويمكن عبرها تحديد الأوزان w_i عند معرفة النقاط x_i ضمن شروط خاصة.

خطأ البتر Truncations Error

وهو خطأ ينتج عن استخدام عدد محدود من حدود متسلسلة لا نهائية وحذف الباقي.

المراجع

- Epperson, **An Introduction to Numerical Methods and Analysis**. 1st ed., 2002.
- Hornbeck, **Numerical Methods**. 1st ed., 1975.
- Acton, **Numerical Methods that *Usually* Work**. 1st ed., 1970
- Burden and Faires, **Numerical Analysis**. 8th ed., 2005
- James L. Buchanan and Peter R. Turner. **Numerical Methods and Analysis**. McGraw-Hill: 1992.
- Samuel D. Conte and Carl de Boor. **Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach**. 3rd ed., Tokyo: McGraw-Hill, 1980.
- Lee W. Johnson and R. Dean Riess, **Numerical Analysis**. 2nd ed, Masachusetts: Addison-Wesley, 1982.
- J. L. Buchanan and P. R. Turner, **Numerical Mathods and Analysis**, McGraw-Hill, 1992.
- R. L. Burden and J. D. Faires, **Numerical Analysis**, 6th ed., Brooks/Cole, 1997.
- E. W. Cheney and D. Kincaid, **Numerical Mathematics and Computing**, 3rd ed., Brooks/Cole, 1994.
- L. V. Fausett, **Applied Numerical Analysis Using MATLAB**, Prentice-Hall, 1999.
- G. H. Golub, ed., **Studies in Numerical Analysis, MAA Studies in Math.**, v. 24, Mathematical Association of America, 1984.
- R. W. Hamming, **Introduction to Applied Numerical Analysis**, McGraw-Hill.
- F. B. Hildebrand, **Introduction to Numerical Analysis**, Dover, 1987.