الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

تمارين شاملة في القراءة البيانية

تمرين 01

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، (C_f) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل .
المستقيم (T) مماس لـ (C_f) عند النقطة $w(-2;1)$.

I- بقراءة بيانية :

① عين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}} f(x)$.

② عين كل من : $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(-2+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h<0}} \frac{f(2+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}} \frac{f(2+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{h\to0} \frac{f'(-2+h)+1}{h}$ ،
$\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)+1}{x-3}$ ، $\lim\limits_{x\to-2} \frac{f(x)^{2025}-1}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{f(x^2)+1}{x^2-3}$ ، $\lim\limits_{x\to-2} \frac{f(x)-f(-2)}{2x+4}$ ، ثم اعط تفسيرا هندسيا لكل نتيجة .

③ هل الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ؟

④ شكل جدول تغيرات الدالة f .

⑤ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in]-\infty;0[$ و $\beta\in]1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن :
$-2<\alpha<0$ و $2<\beta<3$.

⑥ إستنتج إشارة $f(x)$.

⑦ احسب كل من : $\lim\limits_{x\to4} f(\sqrt{x})$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(2\cos 3x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-2x+3)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(|x|)$

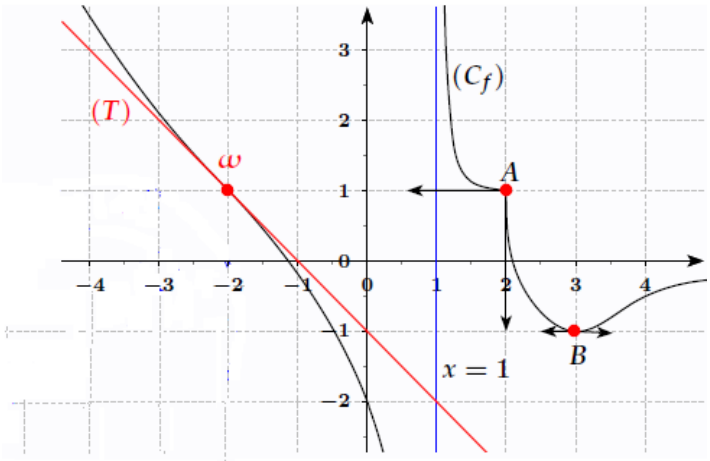
⑧ اكتب معادلة المماس (T) .

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كمايلي $g(x)=f(|x|)$ ، وليكن (C_g) تمثيلها البياني .

✍ بين كيف يمكن رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه .

III- لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ كمايلي : $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني

✍ ادرس تغيرات الدالة h دون حساب عبارة $h'(x)$.



من أساء إليك فقد فك وثاقك
فإن الإحسان قيد

تـمرين 02

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ، (C_f) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل .

I- بقراءة بيانية :

① عين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

② جد معادلة المستقيم (Δ) ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$.

③ عين : $f'(-3)$ ، $f'(-1)$ ، $f'_d(-4)$.

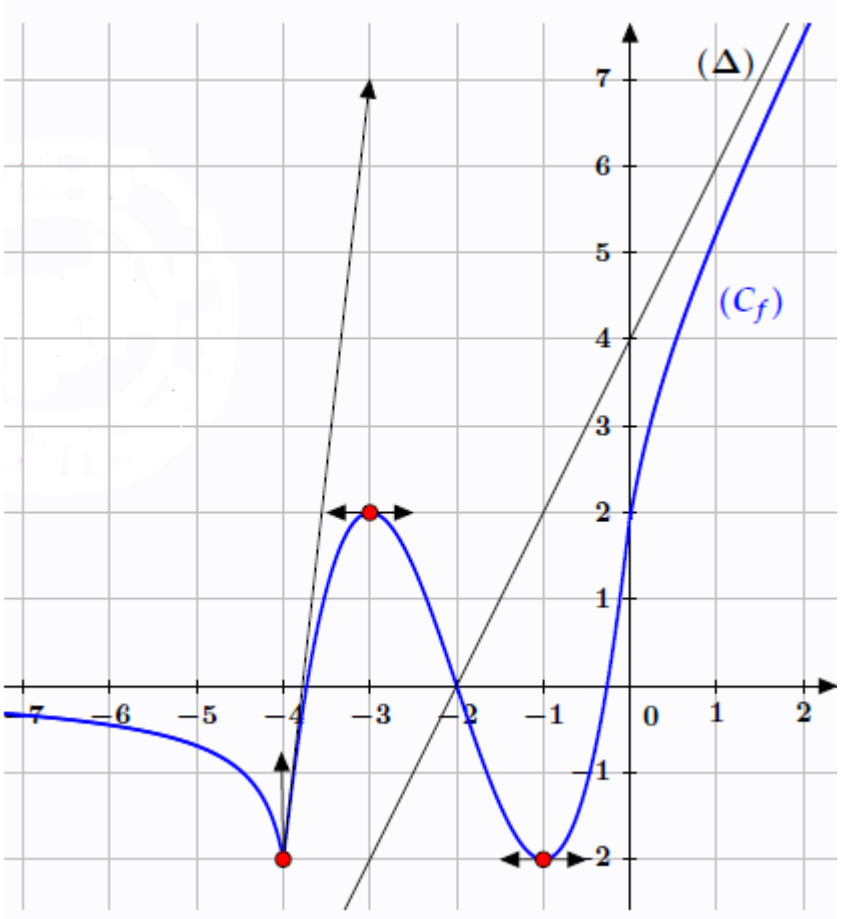
④ هل الدالة f تقبل الإشتقاق على يسار -4 ؟ برر إجابتك .

⑤ عين : $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ <}} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4}$.

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=x^2f(x)$

① بين أن : $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=4$.

② أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_g) الممثل للدالة g في النقطة ذات الفاصلة -1 .



كان هناك رجل جالس مع كلبه ، فمر عليه أستاذ فلسفة وقال له :

هل تعلمه الخيانة أم يعلمك الوفاء ؟

رد عليه الرجل : تابع طريقك وإلا سأجعله يعلمك سباق الحواجز .

حل تمرين 01

① بقراءة بيانية : تعيين كلا من :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

② تعيين كلا من :

✍ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = f'(-2)$

نختار نقطتين من المماس (T) وليكن $(-2;1)$ و $(0;-1)$ ونحسب ميل المماس . أي

$$f'(-2)=\frac{1-(-1)}{-2-0}=-1$$

ومنه $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-1}{h} = -1$

ومنه (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه -1 عند النقطة ذات الفاصلة -2 .

✍ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(2+h)-1}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'_g(2)=0$

ومنه (C_f) يقبل نصف مماس أفقي على يسار $x_0=2$

✍ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(2+h)-1}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'_d(2)=-\infty$

ومنه (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل على يمين $x_0=2$.

✍ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(-2+h)+1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(-2+h)-(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(-2+h)-f'(-2)}{h} = f''(-2)=0$

ومنه المماس يخترق المنحنى (نقطة إنعطاف) .

✍ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-(-1)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)=0$

ومنه (C_f) يقبل مماس أفقي عند $x_0=3$.

✍ $\lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)^{2025}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)^{2025}-f(-2)^{2025}}{x-(-2)} = (f^{2025}(-2))' = 2025\times f'(-2)\times f(-2)^{2024}$

$$= 2025(-1)(1)^{2024} = -2025$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه -2025 عند النقطة ذات الفاصلة -2 .

✍ $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \frac{f(x^2)+1}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \frac{f(x^2)-(-1)}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \frac{f(x^2)-f(3)}{x^2-3}$

بوضع $t=x^2$ ، لما $x\to\sqrt{3}$ فإن $t\to 3$ ، ومنه

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{f(x^2)-f(3)}{x^2-3} = \lim_{t\to 3} \frac{f(t)-f(3)}{t-3} = f'(3)=0$$

✍ $\lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{2x+4} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{2(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{2}\times\left(\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\right) = \frac{1}{2}f'(-2) = -\frac{1}{2}$

ومنه (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه $-\frac{1}{2}$ عند النقطة ذات الفاصلة -2 .

③ هل الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ؟

بما أن (C_f) يقبل نصف مماس عمودي على يمين $x_0=2$ فإن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند يمين $x_0=2$ ومنه الدالة f لا تقبل الإشتقاق على $]1;+\infty[$.

④ شكل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\|\|$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘		-1 ↗		0

⑥ إستنتاج إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$		

⑦ حساب النهايات .

$$\lim_{x\to 4} f(\sqrt{x}) = \lim_{X\to 2} f(X) = 1$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} f(2\cos 3x) = \lim_{X\to -2} f(X) = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(-2x+3) = \lim_{X\to -\infty} f(X) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(|x|) = \lim_{X\to +\infty} f(X) = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to -\infty} f(X) = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to +\infty} f(X) = 0$$

⑧ كتابة معادلة المماس (T) عند $x_0 = -2$.

$$(T): y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$$
$$(T): y = -1(x+2) + 1$$
$$(T): y = -x - 1$$

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي $g(x) = f(|x|)$ ، وليكن (C_g) تمثيلها البياني .

✍ بين كيف يمكن رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه .

أولا نكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة $g(x) = \begin{cases} f(x) & si: \ x \geq 0 \\ f(-x) & si: \ x \leq 0 \end{cases}$

لما يكون $x \in [0;1[\cup]1;+\infty[$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) ، وبما أن g زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

III- لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0;1\}$ كمايلي : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ،

✍ ادرس تغيرات الدالة h دون حساب عبارة $h'(x)$.

لدينا : $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

✍ لدينا : $f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ من أجل $\frac{1}{x} = 3$ أي أن $x = \frac{1}{3}$

✍ لدينا : $f'\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ من أجل $\frac{1}{x} > 3$ أي أن $x \leq \frac{1}{3}$

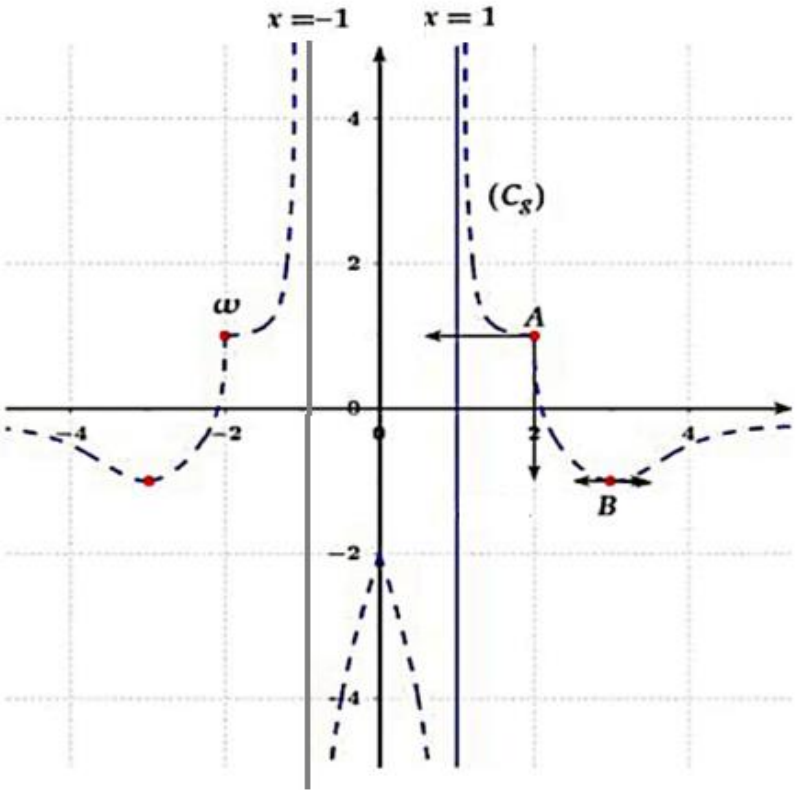
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $-\frac{1}{x^2} < 0$ فإن إشارة $h'(x)$ عكس إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$. ومنه

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$h(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	-1	↗	‖	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{X\to 0^<} f(X) = -2$$
$$\lim_{x\to 0^<} h(x) = \lim_{X\to-\infty} f(X) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^>} h(x) = \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$$
$$h\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) = -1$$
$$\lim_{x\to 1^<} h(x) = \lim_{x\to 1^>} f(X) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^>} h(x) = \lim_{X\to 1^<} f(X) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{X\to 0^>} f(X) = -2$$

إنشاء (C_g)



حل تمرين 02

I- بقراءة بيانية :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

② جد معادلة المستقيم (Δ)

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y = ax + b$

✍ إيجاد a : نختار نقطتين وليكن مثلا $(-2;0)$ و $(0;4)$ ومنه $a = \frac{4-0}{0-(-2)} = 2$ ، ومنه $y = 2x + b$

لدينا b هي ترتيبة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع محور التراتيب ، إذن $b = 4$

ومنه نستنتج أن معادلة المستقيم (Δ) هي $y = 2x + 4$.

✍ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 2x]$.

نلاحظ أن المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) أي $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (2x+4)] = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = 4$

③ عين : $f'(-3)$ ، $f'(-1)$ ، $f'_d(-4)$.

✍ لدينا (C_f) يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة -3 ومنه $f'(-3) = 0$

✍ لدينا (C_f) يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة -1 ومنه $f'(-1) = 0$

✍ لحساب $f'_d(-4)$ نحسب ميل نصف المماس

نختار نقطتين وليكن مثلا $(-4;-2)$ و $(-3;7)$ ومنه $f'_d(-4) = \frac{7-(-2)}{-3-(-4)} = 9$

④ الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يسار -4 لأنها تقبل نصف مماس عمودي على يسار -4

⑤ $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ <}} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = -\infty$.

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = x^2 f(x)$

① بين أن : $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = 4$.

لدينا : $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$ ، لدينا : $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = g'(-1)$

ومنه $g'(-1) = 2(-1) \times f(-1) + f'(-1) = -2(-2) + 0 = 4$ ، و . هـ . م

② أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g في النقطة ذات الفاصلة -1 .

$$(T): y = g'(-1)(x+1) + g(-1)$$
$$(T): y = 4(x+1) - 2$$
$$(T): y = 4x + 2$$

جهازنا المناعي يراقب أكثر من 30000 مليار خلية مبرمجة
لو خرجت واحدة منهن عن السيطرة فستكون بداية السرطان عافانا الله وإياكم
لو حمدنا الله بقدر عدد الخلايا لكنا مقصرين