بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السّودان المفتوحة

برنامج الحاسوب وتقنية المعلومات

الرياضيات المتقطعة

رمز المقرر ورقمه: ريض 1043

إعداد المادة العلمية: د. عمار حسن خميس

التحكيم العلمي: د. معاوية الفكي يحيى

التصميم التعليمي: أ. هبة عوض عثمان محمد علي

التنضيد الطباعي: هادية عوض حسين

التصميم الفني: هبة حسن محمد خير

منشورات جامعة السّودان المفتوحة

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج أيّ جزء من هذا الكتاب، وبأيّ وجه من الوجوه، إلاّ بعد الموافقة المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

الحمد لله بجميع محامده كلها ما علمت منها وما لم أعلم والصلاة والسلام على خير معلمٍ سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد، نرحب بك عزيزي الدارس، إلى هذا المقرر "الرياضيات المتقطعة" آملين أن تجد فيه الفائدة المرجوة.

يهدف هذا المقرر إلى إكسابك بعض المفاهيم المنطقية والأساليب في الرياضيات المتقطعة وهذه المفاهيم مما لا شك فيه لها كبير صلة بالحاسوب الذي أصبح لغة العصر وأيضاً تساعد في فهم بعض المواد الرياضية المتعلقة بها كالجبر والتحليل. كما أنه يهدف أيضاً إلى إكسابك المعرفة بكيفية حل المسائل والمعضلات المتعلقة بهذه المفاهيم عن طريق بعض القوانين والرموز الجديدة عليك. وهذا سيمكنك من التعامل مع لغة جديدة هي لغة الرياضيات ويضيف اليك طريقةً جديدةً في التفكير وهي التفكير الرياضي.

الأهداف العامة لهذا المقرر



بعد فراغك من دراسة هذا المقرر ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- تتعرّف الأنواع المختلفة للمجموعات وتتمكن من التعبير عن العمليات الأساسية فيها بالكتابة أو بالتخطبط
- تميّز الأنواع المختلفة لمجموعات الأعداد
- تصف المتباينات وتشرح علاقة الأعداد في الفترات المختلفة.
- تعرّف الدالة وتفرّق بين أنواع الدوال المختلفة وتعبر عنها كتابةً وتخطيطاً.
- توضح تعريف العلاقات في المجموعات وتفرّق بين أنواعها المختلفة.
- تتعرف على القضايا و الروابط المنطقية، و تشرح كيفية إنشاء جداول الصواب والخطأ وكيفية إثبات تكافوء القضايا.
- تشرح و تقارن بين أنواع القياس المختلفة ونتمكن من نفي القضايا متى ما تعين عليك ذلك.
- تستحدم الطرق المختلفة المذكورة فى البرهان الرياضي لإثبات صحة الجمل الرياضبة.
- تحل المسائل وتثبت النظريات لكل المفاهيم السابقة مستخدماً القوانين المناسبة.

مقرر الرياضيات المتقطعة يتألف من سبع وحدات، فالوحدة الأولى تتناول بالشرح الوافي الأنواع المختلفة للمجموعات، طرق كتابتها وتطبيق العمليات الأساسية عليها.

سنتعرف على الأنواع المختلفة للدوال والتعبير كتابة وتخطيطاً في الوحدة الثانية.

الوحدة الثالثة ستجد فيها تعريفاً للعلاقات في المجموعات ولتتمكن من أن تفرق بين الأنواع المختلفة لتلك العلاقات.

الوحدة الرابعة توضح لك التباين في الأعداد وعلاقة الأعداد في الفترات المختلفة كما أنها أيضاً تصف لك أنواع المجموعات المختلفة للأعداد وصفاتها المتباينة. كما أنك ستتبين شرحاً لماهية القضايا وعلاقاتها وأنواعها المختلفة وكيفية إنشاء جداول الصواب والخطأ وكيفية تطبيق القوانين الجبرية للقضايا وهذا في الوحدة الخامسة. أما الوحدة السادسة نتناول توضيحاً للقياس وأنواعه المختلفة وتطبيقاً لنفي القضايا. الوحدة السابعة والأخيرة ستمكنك من دراسة البرهان الرياضي شرحاً وتطبيقاً وذلك بمعرفة الطرق المحتلفة لإثبات صحة القضايا.

نورد لك عناوين الوحدات الواردة في هذا المقرر:

محتويات المقرر

متسلسل	الوحدة	الصفحة
1	**الوحدة الأولى** : المجموعات *Sets*	***1***
2	**الوحدة الثانية** : الدوال *Functions*	***65***
3	**الوحدة الثالثة** : العلاقات *Relations*	***107***
4	**الوحدة الرابعة** : المتباينات *Inequalities*	***139***
5	**الوحدة الخامسة** : المنطق الرياضي *Mathematical Logic*	***167***
6	**الوحدة السادسة** : منطق الاسناد *Quantification Logic*	***207***
7	**الوحدة السابعة** : البرهان الرياضى *Mathematical Proof*	***229***

ستجد أن المقرر يحتوي تدريبات في ثنايا الوحدات وأسئلة للتقويم الذاتي ترد في نهاية الأقسام مع وجود حلول لها في نهاية كل وحدة كما أنك ستتحصل على تعينات من مشرفك. ستتبين أيضاً عدداً من الأمثلة المحلولة تتخلل مادة المقرر وهذا كله من شأنه تعزيز وترسيخ المفاهيم والقوانين الرياضية التي يحتويها المقرر.

هذا المقرر عملنا على تبسيطه لك ووضعه بصورة تسهّل عليك فهمه واستيعابه ومن ثم تطبيق قواعده ونظرياته من غير الحاجة إلى معين. ولكي تجني نتائج مثمرة في تعلم هذه المادة لا بد لك من معينات ليس في فهم المادة وحسب ولكن في التطبيق الصحيح للعمليات. عليك بالتؤدة ووالروية والصبر عندما تتعامل مع هذه المادة فذلك هو الطريق الوحيد لفهم وترسيخ المادة في ذهنك – تصح باستعمال الورقة والقلم.

نرجو أن تستمتع بدراسة هذه المادة وأن تجد فيها ما ترضى. كما يسرنا عدم تحرجك في الاتصال مشرفك الأكاديمى لمناقشة الصعوبات التي قد تواجهك. أيضاً مدّك لنا بالآراء والمقترحات يساعد في تطوير مناهجنا والإرتقاء بها.

وفي الختام مرحباً بك ثانيةً إلى مقرر الرياضيات المتقطعة !


الوحدة الأولى
المجموعات
Sets

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**4**
تمهيد	4
أهداف الوحدة	5
1. الانتماء	**7**
2. طرق كتابة المجموعات	**8**
1.2 طريقة رصد العناصر	8
2.2 طريقة الصفة المميزة	9
3.2 طريقة شكل ڤن	10
3. أنواع المجموعات	**11**
1.3 المجموعة المنتهية	11
2.3 المجموعة غير المنتهية	11
3.3 أنواع خاصة من المجموعات	12
4.3 المجموعة الجزئية	13
4. العمليات الأساسية في المجموعات	**16**
1.4 الاتحاد	17
2.4 التقاطع	18
3.4 الفرق	20
4.4 التتمة	22
5.4 التساوي	24
5. أشكال ڤن والعمليات في المجموعات	**30**
6. رتبة المجموعات	**37**

7. قوة المجموعة	40
8. مجموعة المجموعات	41
9. الحاصل الكارتيزي	42
الخلاصة	45
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	47
إجابات التدريبات	48
إجابات إسئلة التقويم الذاتي	54
مسرد المصطلحات	61
المراجع	64

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

بين يديك الوحدة الأولى من مقرر الرياضيات المتقطعة وهي وحدة المجموعات التي تتألف من تسعة أقسام رئيسة تتناول علاقة العناصر بالمجموعات والإنتماء وعدمه ثم طرق كتابة المجموعات وكيفية تمثيل ذلك رياضياً أو بطريقة شكل فن.

ستتعرف أنواع المجموعات المنتهية، غير المنتهية، الخالية، الشاملة والجزئية، وطريقة التعبير عنها بالرموز.

ثم تنتقل بك الوحدة إلى العمليات الأساسية في المجموعات وهو القسم الأكثر أهمية وفيه ستفرق بين خمسة عمليات هي الاتحاد، التقاطع، الفرق، التتمة والتساوي، وسندرس أيضاً في هذا القسم كيفية تركيب الجمل من أكثر من عملية من هذه العمليات.

في القسم الخامس سنتمكن من تحويل الجمل في المجموعات إلى أشكال فن وسنريك كيف تثبت النظريات والجمل.

أما كيفية ايجاد رتبة وقوة مجموعة ما ستجده في القسمين التالين. وذلك بطريقة رصد العناصر في الحالة الأولى وبمقدرة المجموعة في إنشاء مجموعات جزئية من المجموعة الأصلية.

وفي القسم الذي يعالج مجموعة المجموعات ستتبين أن هذه المجموعة هى المجموعة التي عناصرها أيضاً مجموعات.

الحاصل الكارتيزي هو القسم الأخير في هذه الوحدة حيث تدرس كيفية تكوين مجموعة جديدة من حاصل ضرب مجموعتين بما يعرف بعناصر الأزواج المرتبة.

وضعنا عدداً كبيراً من الأمثلة المحلولة في محاولةٍ منا لتسهيل وتوصيل مادة الوحدة اليك فى بساطةٍ ويسر. أمّا التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي الواردة في ثنايا الوحدة الغرض منها تدعيم وتعزيز عملية التعلم لديك فرجاءً عليك الاهتمام بحلها.

أهلاً بك مرة أخرى الى هذه الوحدة، آملين أن تجد فيها مبتغاك – علماً أنّ تقييمك ونقدك لما جاء بالوحدة – يفيداننا.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1. تصف مفهوم المجموعات وتشرح علاقة مجموعة ما بعناصرها
2. تعبر عن المجموعات بثلاث طرق، طريقة الصفة المميزة، طريقة رصد العناصر وطريقة شكل ڤن إذا كانت جملاً مركبة أو غير مركبة
3. تميز الأنواع المختلفة للمجموعات وتكتب رموزها
4. تفرق بين الاتحاد، التقاطع، الفرق، التتمة والتساوي
5. تستخدم القوانين والقواعد لايجاد رتبة مجموعة ما وقوتها
6. تصف مفهوم مجموعة المجموعات ومفهوم الحاصل الكاريتزي وطريقة ايجاده
7. تحل المسائل المرتبطة بالقوانين الواردة في هذه الوحدة وتعطي أمثلة للحالات المختلفة متى ما تعين ذلك.

المجموعات Sets

مفهوم المجموعات مفهوم أساسي في التفكير الرياضي ويمكننا أن نعرف المجموعة كالآتي:

المجموعة: هي مجموعة من الأشياء أو الوحدات ذات الصلة

ونقرب لك ذلك ببعض الأمثلة:

1. مجموعة الطلاب في جامعة السودان المقترحة
2. مجموعة الأعداد الأولية

مجموعة الحروف التي تكون كلمة السودان

لعلك لاحظت من التعريف أعلاه والأمثلة التالية له أن كل المجموعات أعلاه تربطها صفة واحدة أي أن الطلاب **تضمهم** الجامعة المفتوحة ومجموعة الأعداد **تضمها** مجموعة الأعداد الأولية و الأحرف "ا ل س و د ا ن" تضمها كلمة السودان. **بمعنى آخر** هؤلاء الطلبة **ينتمون** إلى جامعة السودان المفتوحة ومجموعة الأعداد **تنتمي** إلى الأعداد الأولية والأحرف "ا ل س و د ا ن" **تنتمي لكلمة** السودان.

يرمز **للمجموعة** بالحروف الكبرى في اللغة الانجليزية A, B, C,...etc كما ويرمز للوحدات التي تكونها وتسمى **بالعناصر** (مفردها عنصر) بالحروف الصغيرة في اللغة الانجليزية x, y,...etc.

1. الإنتماء belong to

مما سبق يتضح لك جلياً أن هنالك **<u>علاقة بين العناصر ومجموعاتها</u>** وهذه العلاقة هي ما يسمى **<u>بالانتماء</u>**.

إذا كان العنصر x داخل المجموعة A، فإنك تقول أن العنصر x ينتمي (belongs to) ألى المجموعة A وتكتب:

$$x \in A$$

وتقرأ: العنصر x ينتمي للمجموعة A.

أما إذا كان العنصر y غير موجود أو لا ينتمي للمجموعة A فيكتب:

$$y \notin A$$

وتقرأ: العنصر y ليس عنصراً في المجموعة A.

تدريب (1)



في رأيك هل هنالك علاقة بين كتاب الرياضيات المتقطعة ومجموعة كتب الرياضيات في مكتبة جامعة السودان المفتوحة؟ صف هذه العلاقة.

هنالك بعض المجموعات التي كثيراً ما تقابلك في علم الرياضيات ويكثر تكرارها، لذلك رأينا من المناسب أن نوردها لك برموزها المعيارية وهذه المجموعات هي:

N: مجموعة الأعداد الطبيعية، وهي تمثل الأرقام (1, 2, 3,... etc)

Z: مجموعة الأعداد الصحيحة (العدد 0 (صفر) وكل الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة)

Q: مجموعة الأعداد القياسية "الكسور"

R: مجموعة الأعداد الحقيقية

R^+: مجموعة الأعداد الحقيقية الغير سالبة.

فمثلاً، $x \in R$

تعني، أن العدد x هو عدد حقيقي. هل تستطيع أن تضيف وصفاً □اخر لذلك؟

2. طرق كتابة المجموعات

هنالك عدة طرق لكتابة المجموعات، لكن فيما يلي ستتعرف على **الأنواع الثلاثة** الأكثر شيوعاً.

1.2 طريقة رصد العناصر Listing Method

قد تتساءل عزيزي الدارس، عن ما هي طريقة رصد العناصر؟

طريقة رصد العناصر هي كتابة العناصر بين قوسين معقوفين من النوع

"{ }"

وكما تلاحظ وجود فاصلة من النوع "," وهذه تستعمل لفصل العناصر عن بعضها البعض

فمثلاً:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$،

تمثل المجموعة المكونة من الأعداد الطبيعية. 1, 2, 3, 4, 5

يمكنك أن تستخدم " النقاط" إذا كانت المجموعة تحتوي على عدد كبير من العناصر **فمثلاً:**

$A = \{1, 2, 3,..., n\}$ (ترمز لأي مجموعة منتهية في الأعداد الطبيعية)

$N = \{1, 2, 3,... \}$ (ترمز لمجموعة الأعداد الطبيعية فهي غير منتهية)

$Z = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$ (ترمز لمجموعة الأعداد صحيحة وهي أيضاً غير منتهية).

2.2 طريقة الصفة المميزة Property Method

وتعرَّف على أنها:

طريقة الصفة المميزة هي كتابة صفة معينة معرفة لعناصر المجموعة تميزها وتكون مشتركة بينها وذلك بوضعها بين قوسين معقوفين { , }

مثلاً:

$$A = \{x1x>10, x \in N\}،$$

الصفة المميزة هنا أن: x أكبر من 10 وتنتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية وتقرأها هكذا:

x حيث x عدد طبيعي أكبر من 10.

مثال آخر:

S = {x/x طالب في الجامعة المفتوحة}

المجموعة S تعني أن أي عنصر في المجموعة S يجب أن يكون طالباً في الجامعة المفتوحة أي أن الصفة المميزة هنا هي انتماؤهم للجامعة المفتوحة.

أمثلة محلولة:

أ- أعد كتابة المجموعة التالية بالصفة المميزة:

$$B = \{2, 4, 6, 10\}$$

الحل:

الصفة المميزة للعناصر أعلاه هي أن العنصر عدد طبيعي زوجي أقل من أو يساوي 10 عليه يمكن كتابة المجموعة كالآتي:

B = {x/x عدد طبيعي زوجي أقل من أو يساوي 10}

ب- أعد كتابة المجموعة التالية بطريقة رصد العناصر:

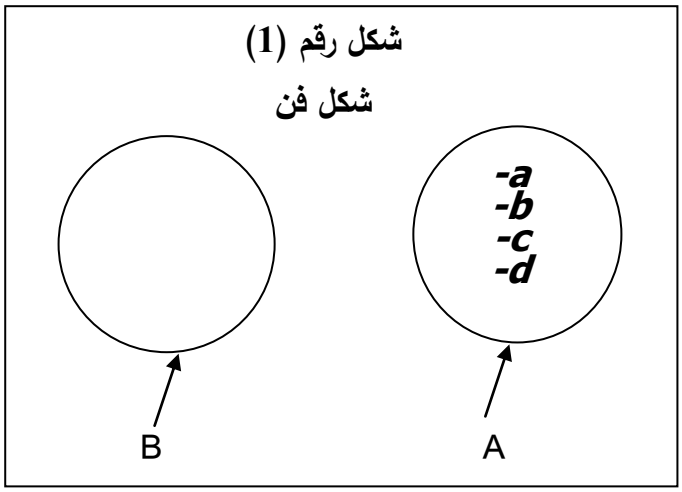
D = {x/x حرف في كلمة Probability}

الحل: لعلك تلاحظ أن عدد أحرف Probability أحد عشر حرفاً ولكن حرف الـ b يتكرر مرتين وحرف الـ i يتكرر مرتين لذلك ترصد تسعة أحرف فقط لأن الحرف المكرر يكتب مرة واحدة فقط فتكتب المجموعة كالآتي:

$$D = \{P, r, o, b, a, i, l, t, y\}$$

3.2 طريقة شكل ڤن Venn Diagram

طريقة شكل ڤن هي طريقة رمزية تمكنك من تمثيل المجموعة داخل شكل دائري يتضمن أو لا يتضمن العناصر (شكل (1)



سنتعرض لهذه الطريقة بشئ من التفصيل في القسم السادس من هذه الوحدة.

تدريب (2)



1- هل تستطيع أن تميز طريقة رصد العناصر من طريقة الصفة المميزة في كتابة المجموعات؟ إذا كان جوابك بالإيجاب فهل يمكنك أن تكتب ذلك؟

2- أعد كتابة المجموعة التالية بطريقة الصفة المميزة:

$P = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

3. أنواع المجموعات

في هذا القسم ستتعرف أنواع بعض المجموعات، رموزها وطريقة كتابتها.

1.3 المجموعة المنتهية Finite set

هل تعرف ما هي المجموعة المنتهية؟

هي المجموعة التي تحتوي على عددٍ محدود من العناصر، مثل:

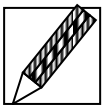
$$X = \{x / x^2 2x + 3 = 0\}$$

2.3 المجموعة غير المنتهية Infinite set

هي المجموعة التي تحتوى على عددٍ غير محدود من العناصر، **مثل:**

N = {1, 2, 3.....}

تدريب (3)



من خلال ما استوعبته في الفرق بين المجموعة المنتهية والمجموعة غير المنتهية، هل لك أن تحدد ما هي المجموعة المنتهية والمجموعة غير المنتهية في المجموعات الآتية؟ ولماذا هذا التحديد؟

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $B = \{7, 14, 21,...\}$
3. $C = \{1, 2, 3, 4,....20\}$

أنواع خاصة من المجموعات

سوف نوضح لك هنا نوعين من المجموعات:

أ- المجموعة الخالية Empty set

ونعني بها المجموعة التي لا عناصر فيها ويمكنك كتابتها على النحو التالي:

ϕ أو $\{\ \}$

حيث أن ϕ حرف إغريقي يسمى "فاي".

مثال:

إذا كانت S ترمز للمجموعة من الدارسين الذين تبدأ أسماؤهم بحرف ج، فإن المجموعة تسمى خالية إذا لم يكن من بين الطلبة من اسمه يبدأ بحرف ج، وتكتب:

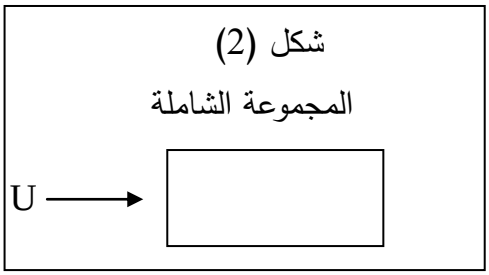
$S = \{\ \}$ أو ϕ

ب- المجموعة الشاملة Universal set

هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر ويرمز لها بالرمز

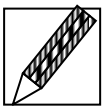
$\cup$

ولتوضيح ذلك أكثر يمكن التعبير عن المجموعة الشاملة في شكل فن ، بواسطة مستطيل أي:



وأي عنصر ينتمي لهذه المجموعة تستطيع أن أن ترمز له بنقاط داخل المستطيل بينما المجموعات الجزئية من المجموعة الشاملة، تمثل بداوئر داخل المستطيل.

تدريب (4)



لعلك هنا تود معرفة مدى إستيعابك لمفهوم المجموعة الشاملة وذلك لأنها أم المجموعات. تمعن هذه المعطيات قبل أن تشرع في اجابة السؤال:
عائلة **عبدالله** عائلة كبيرة سميت باسم الجد الأكبر وهذه العائلة تضم داخلها عائلات كثيرة منها عائلة **عبد الرحمن** وعائلة **عبد الملك** عبر عن هذه العلاقة بشكل فن

4.3 المجموعة الجزئية Subset

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين وكانت كل عناصر المجموعة A تنتمي للمجموعة B، فإنك تقول A مجموعة جزئية من B وتكتب هذه العلاقة كالآتي:

$$\mathbf{A \subset B}$$

وتقرأها A مجموعة جزئية من المجموعة.B وهذا يعني أن لكل عنصر $x \in A$ يقتضي أن $x \in B$.
ولنقرب لك هذا المفهوم أو هذه العلاقة أدعوك الى تمعن هذا المثال.

مثال:

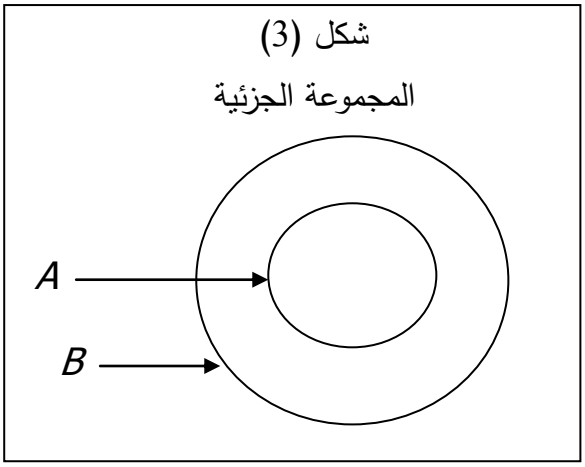
إذا كانت:

$$A = \{ 1 , 2\}$$

$$،B = \{1, 2, 3\}$$

فإن المجموعة A في هذه الحالة جزئية من المجموعة B لأنك إذا رجعت للمثال تلاحظ أن 1 و 2 هما عنصري A وفي الوقت نفسه يوجدان في المجموعة B. وفي هذه الحالة كما ذكرنا آنفاً يمكنك أن تكتب هذه العلاقة بصورة $A \subset B$.

وباستطاعتك التعبير عن هذه العلاقة بشكل فن على النحو التالي:



شكل (3)

المجموعة الجزئية

أما إذا كانت المجموعة E غير جزئية من المجموعة B فإنك تكتبها

$$\mathbf{E \not\subset B}$$

وتقرأها المجموعة E غير جزئية من المجموعة B

تدريب (5)



هل تتفضل عزيزي الدارس بالرجوع إلى التدريب (4)؟ أقرأ السؤال الوارد به مرةً أخرى ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

1. إختر الاجابات الصحيحة فيما يلي:
   أ. عائلة عبد الرحمن جزئية من عائلة عبد الملك.
   ب. عائلة عبد الله جزئية من عائلة عبد الملك.
   ج. عائلة عبد الرحمن جزئية من عائلة عبدالله.
   د. عائلة عبد الملك جزئية من عائلة عبد الله.
   هـ. عائلة عبدالله جزئية من عائلة عبد الرحمن.
   و. عائلة عبد الملك جزئية من عائلة عبد الرحمن.
2. عبر عن علاقة عائلة عبد الله بكل من عائلة عبد الرحمن وعائلة عبد الملك بالرمز الرياضي.
3. عائلة محمد عائلة صغيرة تنتمي لعائلة عبد الرحمن عبر عن هذه العلاقة رمزاً وبشكل ڤن.
4. عبر عن علاقة عائلة عبد الرحمن بعائلة عبد الملك بالرمز الرياضي.

أسئلة تقويم ذاتي (1)

بعد دراستك للانتماء وطرق كتابة المجموعات وأنواعها، توقّف لحظة لتختبر معلوماتك بالأجابة عن الأسئلة التالية:

1- عبر عن الجمل الآتية مستخدماً رموز المجموعات:

أ. العنصر x لا ينتمي للمجموعة A

ب. المجموعة F مجموعة غير جزئية من المجموعة G

ج. المجموعة R تشمل المجموعة S

د. العنصر d عنصر في المجموعة G

هـ. المجموعة P مجموعة ليس بها عناصر.

2- أعد كتابة المجموعات التالية بطريقة رصد العناصر.

أ. $P = \{x/x^2 x - 2 = 0\}$

ب. $Q = \{x/x$ "follow" حرف في كلمة $\}$

ج. $R = \{x/x^2 = g, x - 3 = 5\}$

3- وضح أي من هذه المجموعات مجموعة منتهية ولماذا؟

أ. الشهور في السنة.

ب. $\{x/x$ عدد زوجي $\}$

ج. $\{1, 2, 3, \ldots\ldots, 100\}$

د. $\{2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

4. العمليات الأساسية في المجموعات

Basic Operations in Sets

كما تعودت على إجراء العمليات الرياضية في الأعداد من جمع وطرح وضرب وقسمة، كذلك فإنه توجد الكثير من العمليات الطبيعية التي يمكنك أن تجريها على المجموعات والتي تقتضي ارتباط المجموعات بطرق مختلفة والحصول على مجموعات جديدة تختلف عن الأصلية. في هذا الجزء سنتعرض بشئ من التفصيل لهذه العمليات فهلاّ أثبت معي؟

1.4 الإتحاد) ∪ Union (

يمكنك أن تعرف الاتحاد كالآتي:

إتحاد مجموعتين غير خاليتين A و B هو **المجموعة** التي عناصرها هي نفس العناصر الموجودة أما في A أو B (أو الاثنين معاً).

وهذه المجموعة الجديدة يرمز لها بـ

A U B

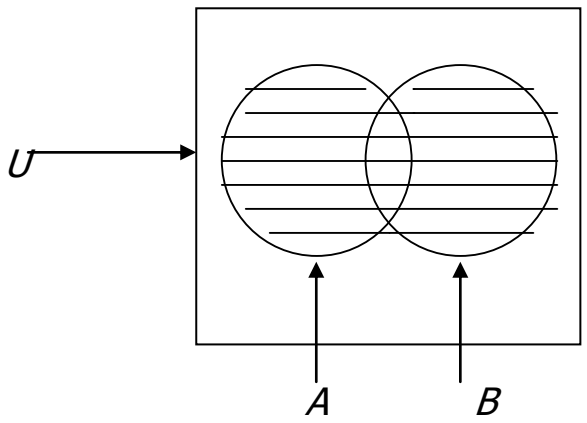
وتقرأ A اتحاد B ويمكنك أن تمثلها:

أولاً: رياضياً

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

ثانياً: بشكل فن

شكل (4) AUB



وبشكل فن يمكن تقريب مفهوم الاتحاد لذهنك فكما ترى في الشكل (4)، فإن AUB يمثل كل المنطقة المظللة بما في ذلك المنطقة المشتركة ين الدائرتين.

2.4 التقاطع Intersection (∩)

والآن بعد أن عرفت ما هو الاتحاد، نأتي للتقاطع. هل تعرف ماذا نعني به؟ للإجابة على هذا السؤال، أرجو منك التركيز لتفهم ما هو التقاطع

تقاطع مجموعتين غير خاليتين A و B هو المجموعة التي عناصرها هي نفس العناصر الموجودة في A و B معاً "أي العناصر المشتركة بينها"

ويمكنك أن ترمز للتقاطع بـ:

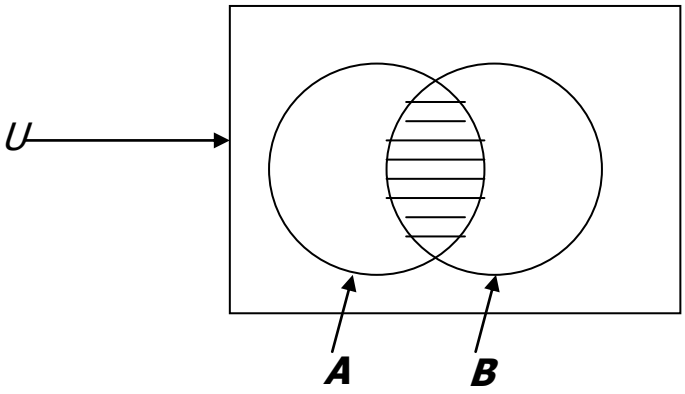
$$A \cap B$$

وتقرأها A تقاطع B وتمثلها:

أولاً: رياضياً

$$A\cap B=\{ x/x \in A \wedge x\in B\}$$

ثانياً: بشكل فن



شكل (5) A∩B

وكما هو واضح من الشكل فلإن $A \cap B$ تمثل بالمنطقة المشتركة بين المجموعة A والمجموعة B "المنطقة المظللة".

مثال:

هذا المثال عزيزي الدارس، من شأنه تعزيز وتوضيح ما عرفته عن علاقة مجموعتين في حالتي الاتحاد والتقاطع. اذن إلى المثال:

إذا كان:

$$S = \{a, b, c, d\}$$

$$T = \{f, b, d\}$$

أوجد $S \cup T$ و $S \cap T$

الحل:

$$T = \{a, b, c, d, f, g\} \cup S$$
$$T = \{a, d\} \cap S$$

تلاحظ من المثال أعلاه أن:

$$S \cap T = T \cap S$$
$$S \cup T = T \cup S$$

كما تلاحظ أيضاً:

$$T) \subset T \cap (S$$

و

$$T) \subset S \cap (S$$

والآن ادعوك إلى هذا التدريب لتتأكد أنك قد فهمت ما جاء آنفاً عن الاتحاد والتقاطع.

أوصيك بالتركيز فإنه يزيد من ترسيخ المعلومة لديك فإلى التدريب:

تدريب (6)



المجموعة A في جامعة السودان المفتوحة تتكون من أعضاء يمثلون لجنة مسئولة عن مادة **الحاسوب** و B مجموعة أعضاء يمثلون لجنة مسئولة عن مادة **الرياضيات** وفي هاتين اللجتين يوجد هنالك أعضاء مشتركون إذا كان:

$A =$ {صالح، عبد المنعم، مختار، أحمد، الأمين، عبدالله، محمد}،

$B =$ {محمد، صالح، مصطفى، عثمان، عبد الرحيم، أحمد، عصام}

أ. وأعلن في الجامعة عن اجتماع يضم اللجنتين ما هي مجموعة الأعضاء الذين سوف يحضرون الاجتماع؟

ب. وإذا أعلن عن اجتماعين منفصلين للجنتين في نفس الزمن ما هي المجموعة التي ستعارض ذلك وهي حريصة أن تحضر الاجتماعين؟

- ملحوظة: الاسم الذي يتكرر في المجموعتين هو لنفس الشخص.

3.4 الفرق Difference (–)

في البدء نوضح لك تعريف الفرق في المجموعات

الفرق بين مجموعتين غير خاليتين A و B هو المجموعة التي عناصرها موجودة في المجموعة A وليست في B

ويعبَّر عنها كالآتي:

$$\mathbf{A - B}$$

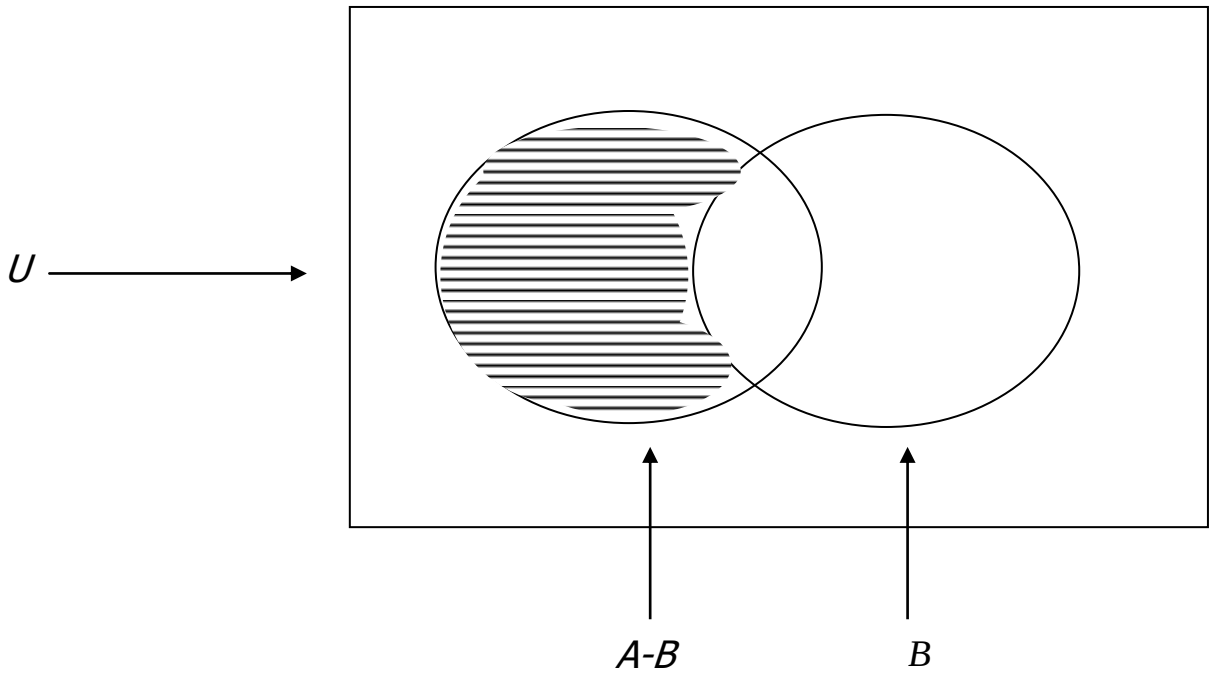
وتقرأ A فرق B، وتعني:

أولاً: رياضياً

$$A - B = \{x/x \in A, x \notin B\}$$

ثانياً: بشكل فن

$(A - B)$ (شكل (6)



ومما يتضح لك من شكل فن أعلاه، أن $A-B$ ممثلة بالمنطقة المظللة وهذا يعني أن المجموعة $A-B$، عناصرها موجودة في المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B.

مثال:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

و

$B = \{1, 3, 4, 6, 9\}$،

فأوجد:

أ. $A - B$

ب. $B - A$

الحل:

أ. $A - B = \{2 , 5\}$

ب. $B - A = \{6 , 9\}$

تلاحظ على وجه العموم أن:

$$A - B \neq B - A$$

تدريب (7)

أعد النظر في التدريب (6) وبعد التأني في قراءته مرة أخرى، هلاّ تفضلت بإجابة السؤال التالي:

أوجد:

أ. A – B

ب. B – A

3.4 التتمة Complement

بماذا تعرف التتمة؟

ا التتمة هى مجموعة قل – A' – تتم المجموعة الغير خالية A لتصبح مجموعة شاملة U أي أنها هي مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U ولا توجد في A.

وتكتب:

$$A' = U - A$$

ويمكنك تمثيل هذه المجموعة:

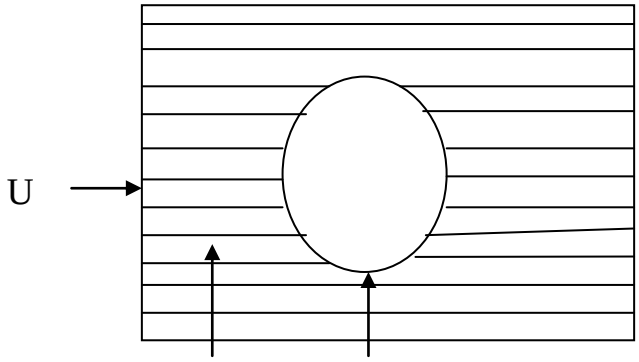
أولاً: رياضياً

$$A = \{x / x \notin A\}$$

ثانياً: بشكل ڤن

شكل (7)

$$A' = U - A$$



كما ترى في الشكل الفائت A و A' مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة U أي:

$$A \subset U$$

$$A' \subset U$$

ملحوظة: A' (المجموعة المتمة) ممثلة بالمنطقة المظللة وأيضاً: $U = A + A'$

أي $A' = U - A$

أمثلة محلولة

إذا كانت $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

و

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

و

XXX

$$B = \{3,4,5,6\}$$

هل يمكنك ايجاد: A' و B'

الحل:

$$A' = U - A$$

بما أن A' هي مجموعة العناصر في المجموعة الشاملة عدا عناصر المجموعة A،

$$\therefore A' = \{6,7,8,9,10\}$$

أيضاً

$$B' = U - B$$

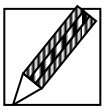
بما أن B' هي مجموعة العناصر في المجموعة الشاملة عدا عناصر المجموعة B،

$$\therefore B' = \{1,2,7,8,9,10\}$$

والآن تدبر معي هذا التدريب واقرأه أكثر من مرة ثم ابدأ الحل:

إلى التدريب:

تدريب (7)



في محطة الحافلات هنالك مجموعة من الشركات المالكة للحافلات التي تسافر بتنظيم معين في الخطوط العاملة عليها أي أن مجموعة من الحافلات تسافر والأخرى تكون في راحة وهكذا. شركة X من ضمن الشركات العاملة على هذه الخطوط وتمتلك ثلاث عشر حافلة مرقمة من $6\text{-}18$ وكانت الرحلة في يوم الجمعة لمجموعة الحافلات من $9\text{-}13$ بطريقة التتمة والمجموعة الشاملة، أوجد مجموعة الحافلات التي تكون في الراحة في ذلك اليوم.

5.4 التساوي Equality (=)

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين ويمتلكان نفس العناصر فإننا نقول المجموعة A تساوي المجموعة B ويمكنك كتابتها كالآتي: **A = B**

إذا، وفقط إذا، كان:

$$A \subset B$$

و

$$B \subset A$$

أنواع الجمل في العمليات

العمليات السابقة كانت تحتوي على رمز عملية واحد كما هو واضح في كل أنواع العمليات، والجمل التي من هذا النوع تسمى جملاً غير مركبة. إذن **الجمل غير المركبة** يمكن تعريفها كالآتي:

الجمل غير المركبة: **هي الجمل التي تحتوي على رمز عملية واحدة**

أمثلة لهذا النوع من الجمل: $A \cup B, A \cap B, A - B, A^{c}$

أيضاً هنالك نوع آخر من الجمل يسمى **الجمل المركبة**.

إليك تعريف على هذا النوع من الجمل إليك تعريف هذا النوع من الجمل:

الجمل المركبة: هي الجمل التي تحتوي على أكثر من رمز من رموز العمليات

أمثلة لهذا النوع من الجمل: $(A')' , (A \cup B)^{c} \cap (A \cup B)'$

ملاحظة

في حالة العمليات المركبة التي تحتوي على أكثر من رمز للعمليات نقوم أولاً باجياد قيم الأقواس ثم نواصل ايجاد باقي العملية. ولتوضيح كيفية إجراء العمليات في الجمل المركبة نسوق اليك هذا المثال ونحاول تطبيق عدد من الجمل المركبة عليه.

مثال

معطى المجموعات التالية:

$$U=\{a,b,c,d,e\}$$

و

$$A=\{a,b,d\}$$

و

$$B=\{b,d,e\}\text{ ،}$$

أوجد المجموعات الجديدة الآتية:

1- $A'-B$ 2- $(A\cap B)'$ 3- $A'\cap B'$

الحل

إذا تمعنت عزيزي الدارس هذه الجمل تجد أنها جمل مركبة تحتوي على أكثر من رمز عملية فمثلاً:

$A'-B$ −1

في هذه الجملة تقوم أولاً بايجاد قيمة A' التي تتحصل عليها كما يلي:

$$A'=U-A=\{a,b,c,d,e\}-\{a,b,d\}$$

$$A'=\{c,e\}$$

ثم تقوم ثانياً بايجاد قيمة $A'-B$ حيث:

$$A'-B=\{c,e\}-\{b,d,e\}=\{c\}$$

$(A\cap B)'$ −2

وفي هذه الجملة تجري العملية $A\cap B$ أولاً:

العناصر المشتركة في $B = B \square A \cap A$

$= \{b, d\}$

ثم تجد $(A\cap B)'$:

$$(A\cap B)'=U-A\cap B=\{a,b,c,d,e\}-\{b,d\}$$

$$\therefore (A\cap B)'=\{a,c,e\}$$

$A'\cap B'$ −3

تجد أولاً A'، حيث:

$$A' = U - A = \{a,b,c,d,e\} - \{a,b,d\}$$
$$\therefore A' = \{c,e\}$$

ثم نجد ثانياً B'، حيث

$$B' = U - B = \{a,b,c,d,e\} - \{b,d,e\}$$
$$B' = \{a,c\}$$

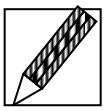
وأخيراً تجرى العملية $A' \cap B'$:

العناصر المشتركة في A' و B' = $A' \cap B'$

$$\therefore A' \cap B' = \{C\}$$

لعلك تفضل أن نتوقف هنا قليلاً لنتأكد من أنك فهمت ما عنينا بالجمل المركبة ولتتأكد أيضاً من قدرتك على حل المسائل التي على هذه الشاكلة.
تمعن التدريب التالي ومن ثم أجب عن السؤال:

تدريب (8)



فنان تشكيلي رسم لوحتين مستخدماً علبة ألوان ماء تحتوي على مجموعة من الألوان وهي: الأصفر، الأحمر، الأخضر، الأزرق، الأسود، البرتقالي، البني والرمادي في رسم اللوحة **الأولى** استخدم الفنان الألوان، الأحمر، الأخضر الأسود، البني والرمادي في رسم اللوحة **الثانية** استخدم مجموعة الألوان: الأصفر، الأزرق، الأسود، البرتقالي والبني.
إذا أسمينا مجموعة الألوان المستخدمة في رسم اللوحة الأولى بالمجموعة A والمستخدمة في رسم اللوحة الثانية بالمجموعة B ومن المعطيات أعلاه أجب عن الآتي:
أختر من القائمة (ب) ما هو حل صحيح للجمل المركبة في القائمة (أ) وضع رقم الاجابة الصحيحة في الصندوق المجاور للجمل المركبة:

	(أ)	(ب)
☐	$(A-B)'$	1. (أحمر، أخضر، أسود، بني، رمادي)
☐	$A \cap B'$	2. (أصفر، أحمر، أخضر، أزرق، برتقالي، رمادي)
☐	$(A')'$	3. (أسود، بني)
☐	$A' \cup B'$	4. (أصفر، أزرق، أسود، برتقالي، بني)
☐	$A' - B$	5. (أحمر، أخضر، رمادي)

أسئلة تقويم ذاتي (2)

بعد هذا القدر من المعلومات وحلول الأمثلة على العمليات الأساسية في المجموعات وقبل أن نبدأ في القسم التالي دعنا عزيزي الدارس نعطيك هذه المسائل التي هي بمثابة مراجعة لكل العمليات في القسم الفائت.

معطى المجموعات التالية:

$$U = \{ 1,2,3,....8,9\}$$

و

$$A = \{1,2,3,4\}$$

و

$$B = \{2,4,6,8\}$$

و

$$C = \{3,4,5,6\}،$$

أوجد المجموعات الآتية:

1- $A \cup B$ 2- $C \cap A$ 3- $B - C$

4- A' 5- B' 6- $A' - B$

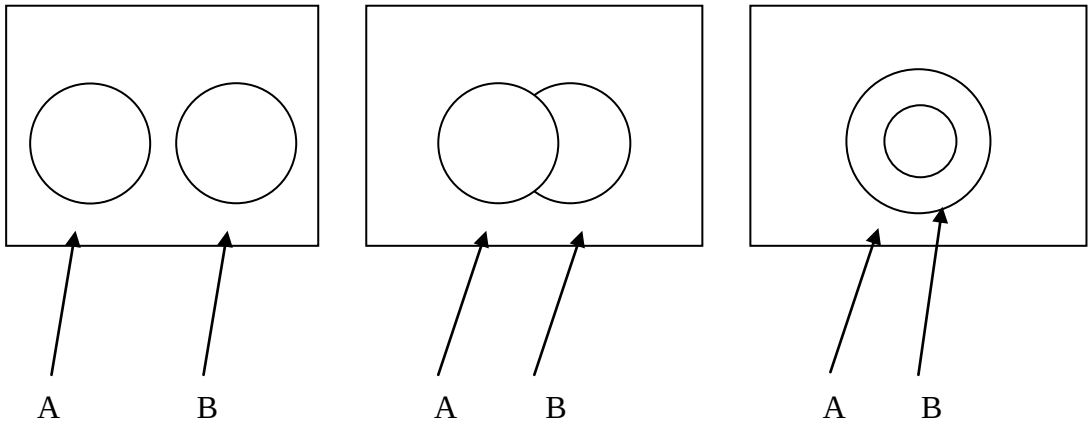
7- $B' \cup C$ 8- $(B')'$ 9- $A' \cap C'$

10- $(B - C) \cup A$

5. أشكال فن والعمليات في المجموعات

نلاحظ مما تقدم ذكره في طرق كتابة المجموعات وعملياتها الأساسية أنه يمكنك أن تعبِّر عنها باستخدام أشكال فن، حيث أننا أوضحنا أن المستطيل في شكل فن يمثل المجموعة الشاملة (U) وأي مجموعة أخرى تنتمي للمجموعة الشاملة يمكنك تمثيلها بوسطة دائرة داخل المستطيل.

فإذا كانت A و B مجموعتين تنتميان للمجموعة الشاملة U، فإن العلاقة بينهما تكون، حسب شكل فن ، واحدة من ثلاثة احتمالات. أشكال فن الثلاثة القادمة توضح هذه الاحتمالات:



شكل رقم (8) الحالة الأولى شكل رقم (9) الحالة الثانية شكل رقم (10) الحالة الثالثة

الحالة الأولى:

وهي حالة خاصة تعني أن المجموعة A جزئية من المجموعة B (شكل 8).

الحالة الثانية:

وهي حالة عامة، وفيها تكون المجموعتان في حالة تقاطع وهي الصورة الأكثر استخداماً في العمليات المعبر عنها بأشكال فن. شكل (9).

الحالة الثالثة:

وهي حالة خاصة تعني أن المجموعتين غير متقاطعتين. شكل (10).

في الأقسام السابقة تعرفت على كيفية التعبير عن العمليات بشكل فن في الجمل التي تحتوي على رمز عملية واحد "مثلاً $A\cap B$..الخ) لكن في هذا القسم نحن بصدد التعرف على كيفية التعبير عن العمليات في المجموعات التي تحتوي على أكثر من رمز من رموز العمليات.
تفضل معي إلى **الأمثلة التالية** ودعني **أوصيك** بشدة على التركيز والمتابعة لكن تثبت الخطوات في ذهنك.

أمثلة محلولة

مستخدماً أشكال فن عبر عن المجموعات التالية إذا كانت A، B، C مجموعات غير خالية:

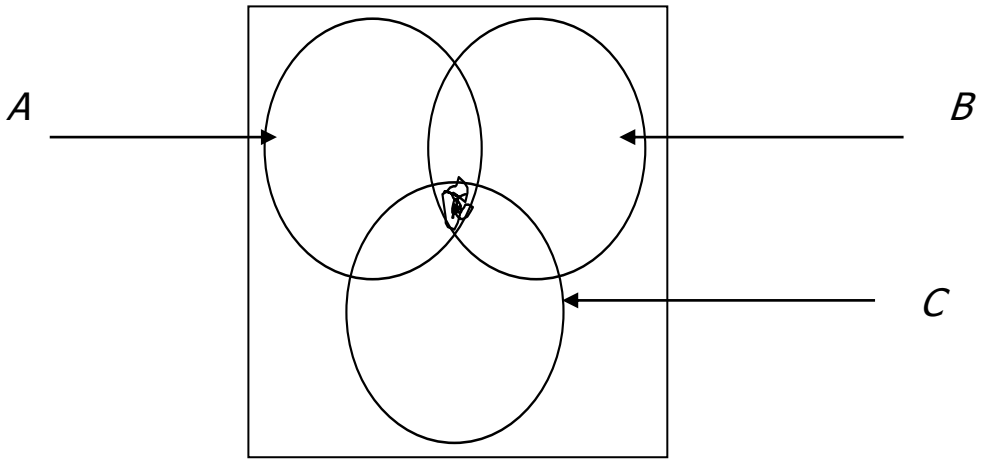
1- $A\cap B\cap C$ 2- $(A\cap C)\cup(B\cap C)$

3- $(A-B)\cup C'$ 4- $(A-B)\cap C'$

الحل: بجب أن نعبر عن كل هذه الجمل مستخدمين الصورة العامة (الحالة الثانية):

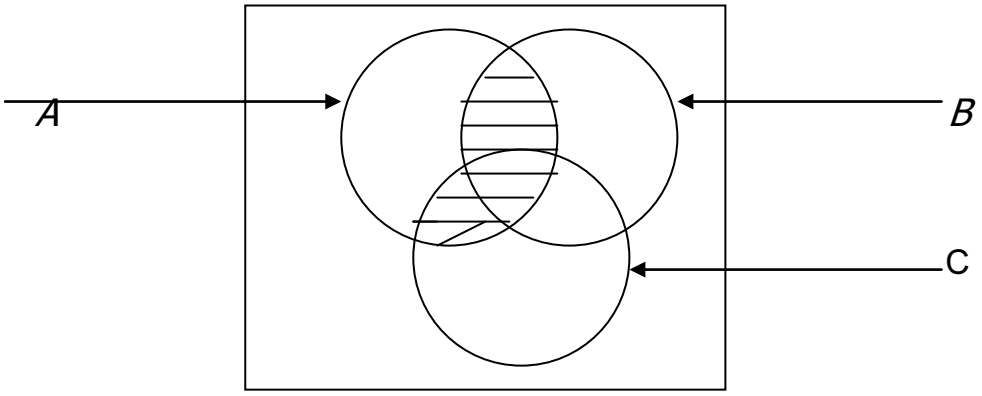
.1

A ∩B∩ C(شكل11)

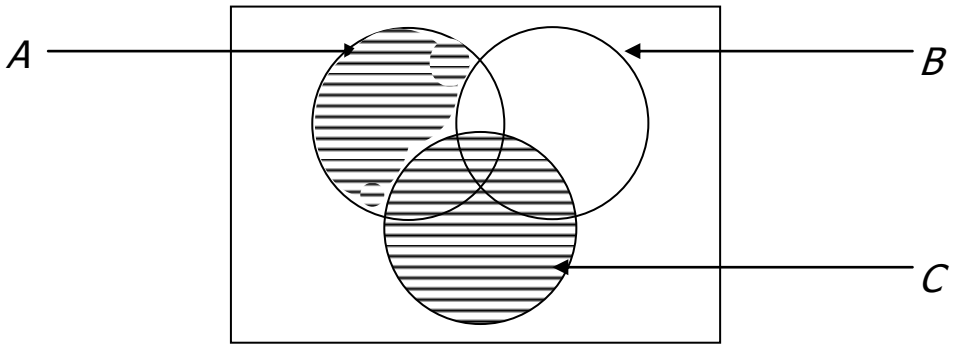


.2

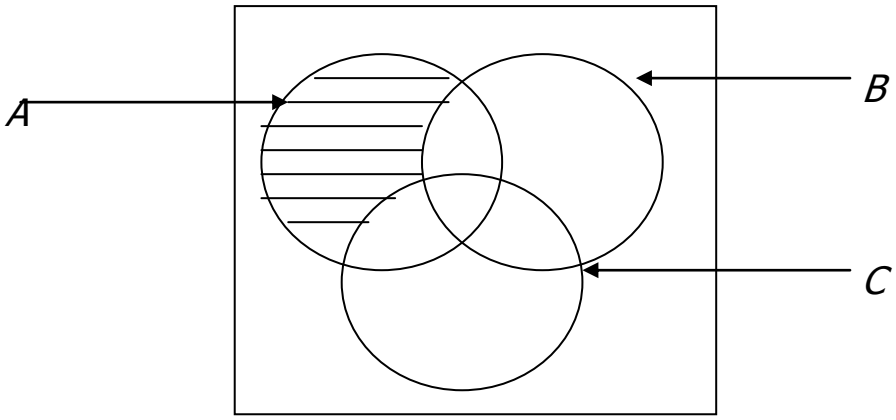
شکل (12) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$



شکل 13 (A–B)∪ C



شکل (14) ´(A–B) ∩C



ملحوظة هامة:

لا تنسى عزيزي الدارس أن تجري العمليات داخل الأقواس أولاً ثم تكمل باقي العمليات خارج الأقواس.

تدريب (9)



بعد أن درست أشكال فن وكيفية التعبير بها عن المجموعات، نرجو أن تحل معي لتحل هذا التدريب مستعملاً أشكال فن، عبر عن العلاقات الآتية في المجموعات:

أ. $B \cap (C-A)$

ب. $C \cup (A-B)$

ج. $(A \cup B) \cup C$

نظرية:

هنالك نظرية تلخص الحقائق الأساسية للعمليات التي تجرى على المجموعات، فإلى النظرية التي تقول:

إذا كان A، B، C مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة U فإن هذه العلاقة يمكن أن تترجم في شكل قوانين يمكن أن نوضحها لك فيما يلي:

a. قانون التجميع: (Associative laws)

1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

b. قانون التبديل: (Commutative laws)

3) $A \cup B = B \cup A$

4) $A \cap B = B \cap A$

c. قانون التوزيع: (Distributive laws)

5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d. قانون ديمورقن: (Demorgan laws)

7) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

8) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

e. قانون التتمة: (Complementation laws)

9) $A \cup A' = U$

10) $\varnothing\ A \cap A' =$

f. قانون الانعكاس الذاتي (Self-inverse laws)

11) $(A')' = A$

كل هذه القوانين المذكورة في النظرية السابقة يمكن إثباتها بعدة طرق (أشكال ڤن، أو التحليل الرياضي)، ونحن هنا سوف نقوم بإثبات أحد هذه القوانين مستخدمين التحليل الرياضي:

مثال:

أثبت: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

لاثبات هذه الجملة يجب أن نذكر نقطتين مهمتين:

أولاً: لأي مجموعة B,A

A = B إذا وفقط إذا كان $A \subset B, B \subset A$ فيصبح من الضروري إثبات ثم $B \subset A$ وهذه هي المرحلة الأساسية لهذه الإثبات.

ثانياً: $A \subset B$ تعني إذا أخذنا أي عنصر بطريقة عشوائية من المجموعة A يجب أن يكون هذا العنصر في المجموعة B.

الحل:

الإثبات:

افرض أن العنصر $x \in (A \cup B)'$

وهذا يعني $x \notin (A \cup B)$

وهذا يعني $x \notin A' X \notin B$

وهذا يعني $x \in A' X \in B'$

وهذا يعني $x \in A' \cap B'$

لكن هذا العنصر موجود في $(A \cup B)'$، فذلك يعني:

$$(A \cup B)' \subset A' \cap B' \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

الآن أخذ العنصر x من الطرف الآخر، أي:

$$x \in A' \cap B'$$

وهذا يعني $x \in A', X \in B'$

وهذا يعني $x \notin A, X \notin B$

وهذا يعني $x \notin (A \cup B)$

وهذا يعني $x \in (A \cup B)'$

ولكن العنصر X أخذ من المجموعة $A' \cap B'$ ووجد في $(A \cup B)'$ وهذا يعني:

$$(A' \cap B') \subset (A \cup B)' \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من (1) و(2) فإن: $(A \cup B) = A' \cap B'$ وهذا هو المطلوب.

وبنفس هذه الطريقة يمكنك أن نقوم باثبات كل القوانين السابق ذكرها.

أسئلة تقويم ذاتي (3)

1- معطى المجموعات التالية:

∪ = {1, 2, 3, ...10}

و

A = {1, 4, 7, 10}

و

B = {1, 2, 3, 4, 5}

و

C = {2, 4, 6, 8}،

أوجد المجموعات الآتية:

أ. A–B ب. ∪ –C ج. $B' \cap A(C-A)$ د. $A \cap (B \cup C)$

هـ. $(A \cap B)' - C$ و. $(A \cup B)$ ز. A) ∩ B)

2- مستخدماً أشكال فن ارسم الجمل التالية:

أ. B∪ A C∪ ب. $(A \cap B) \cup C$

ج. (A–B)–C د. – A– (B∩ C)′

هـ. $(A \cap B)' - C$ و. $(A \cup B)$

ز. $(A \cap B)$

3 - أثبت القوانين الآتية:

أ. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب. $A \cup A' = \cup$ ج. $(A \cap B) = A' \cup B'$

6. رتبة المجموعة Order of set

عزيزي الدارس إليك تعريف رتبة المجموعة:

رتبة المجموعة (مثلاً A): هي عدد العناصر الموجودة في المجموعة A.

ويرمز لها بالرمز:

$$/A/$$

وتقرأ رتبة المجموعة A.

مثال:

إذا كانت

$$A = \{a, 1, b, 3, c\}$$

فأوجد $/A/$ رتبة المجموعة A.

الحل:

لايجاد رتبة المجموعة A $/A/$ فإنك تحسب عدد عناصرها

$$\therefore \quad /A/ = 5$$

نظرية:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فإن رتبة العناصر الناتجة من اتحادهما تساوي رتبة العناصر الموجودة في A زائداً رتبة العناصر الموجودة في B ناقصاً رتبة العناصر المشتركة بينهما.

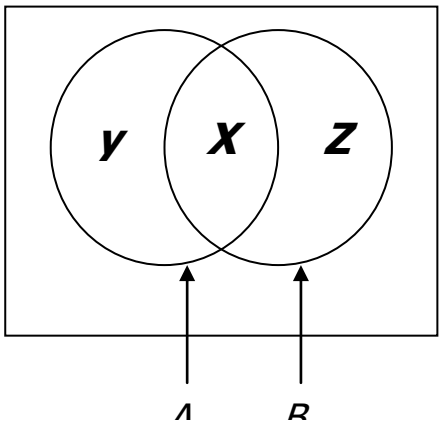
لترجمة هذا رياضياً فإن:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

الإثبات:

لإثبات هذه النظرية ولتقريب مفهومها سوف نستخدم شكل ڤن التالي:

شكل (15): $|A \cup B|$



اذ فرضت أن:

$$|A \cap B| = X,$$
$$|A - b| = Y,$$
$$|B - A| = Z,$$

كما هو موضح بالشكل (15)

فإن: $X + Y + Z = |A \cup B|$

لكن:

$$Y = /A/ - X \qquad \text{……..} \qquad (1)$$
$$Z = /B/ - X \qquad \text{……..} \qquad (2)$$

يجمع المعادلتين (1) و (2) تتحصل على:

$$Y + Z = |A| + |B| - 2X$$

باضافة X لطرفي المعادلة الفائتة نتحصل على:

$$X + Y + Z = |A| + |B| - X \quad \text{……..} \quad (3)$$

لكن $X = |A \cap B|$ "فرضاً"

في المعادلة (3)، إذا بدلت X بـ $|A \cap B|$ سوف تتحصل على:

$$X + Y + Z = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{…….} \quad (4)$$

بما أن: $X+Z+Y=|A\cup B|$

و

$$X+Z+Y=|A|+|B|-|A\cap B|$$

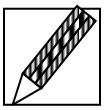
وطرفي المعادلتين الأيسر متساويين،

إذن الطرفين الأيمنين للمعادلتين بالضرورة متساويين:

إذن: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

وهذا هو المطلوب اثباته.

تدريب (10)



أظن أنه يستحسن بك أن تتوقف هنا لحل هذا التدريب الذي يخص رتبة المجموعة:

مختبر متخصص في البحوث الطبية به مجموعة من فئران التجارب التي تجرى عليها البحوث وكانت هذه الفئران موضوعة في أقفاص وكل فأر يحمل ديباجة بها حرف لا يتكرر في أي فأر آخر. من هذه الأقفاص قفص به مجموعة من الفئران أراد الباحثون اجراء فحص معين عليها فاختيرت عينة عشوائية من القفص فكانت الفئران المختارة تحمل أحرف: **a, b, d, g, h**. بعد اجراء الفحص أرجعت الفئران وتم اختيار مجموعة أخرى لفحص آخر وكانت تحمل أحرف **b, d, h, m, p** من هذه المعطيات عزيزي الدارس أوجد رتبة اتحاد المجموعتين.

7. مجموعة قوة المجموعة Power set of a set

في هذا القسم سنتعرف على مجموعة قوة المجموعة ونبدأ أولاً بتعريفٍ لها:

مجموعة قوة المجموعة A: هي المجموعة التي تحتوي على كل المجموعات الجزئية للمجموعة الغير خالية A.

وقوة المجموعة بذلك تعني قدرة المجموعة في انشاء مجموعات جزئية من المجموعة A فتكون هذه المجموعات الجزئية عبارة عن عناصر لهذه المجموعة الجديدة.

ويرمز لها بـ:

P(A)

وتقرأ مجموعة قوة المجموعة.

والمجموعات الجزئية (Sebsets) للمجموعة A هي كل الاحتمالات الممكنة لتكوين مجموعات من عناصر المجموعة A ابتداءً من المجموعة الخالية مروراً بالاحتمالات الأخرى وانتهاءً بالمجموعة المكونة من كل العناصر مجتمعة.

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3\}$

فإوجد قوة المجموعة A

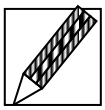
الحل:

$A = \{1, 2, 3\}$ "معطى"

منها:

$$P(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{1,2,3\},\{\}\}$$

تدريب (11)



في مؤسسة أعلنت وظائف للسيدات وكانت المتقدمات لتلك الوظائف كثيرات جداً وكان أن وضعت لجنة المعاينة معايير لإختيار اللاتي سيدخلت المعاينة الأولى وكانت هذه المعايير (A) هي: أن تكون جامعية، متزوجة، العمر> 25 من هذه المعطيات، أوجد P(A) (مجموعة كل الاحتمالات الممكنة لهذه الصفات التي يمكن للمتقدمات للوظيفة امتلاكها.

8. مجموعة المجموعات Set of Sets

تعرف مجموعة المجموعات على أنها:

مجموعة المجموعات: هي المجموعة التي عناصرها أيضاً مجموعات

مثال لذلك:

$$A = \{\phi, \{1,2\}, \{5\}, \{6,7\}\}$$

في هذه المجموعة:

$\phi \in A$ " ϕ عنصر لذلك ينتمي للمجموعة A ولكن باقي العناصر كلها عبارة عن مجموعات لذلك تكتب:

$\{\{1,2\}\} \subset A$ ، $\{\{5\}\} \subset A$ ، $\{\{6,7\}\} \subset A$ أي أن كل هذه العناصر عبارة عن مجموعات جزئية من المجموعة A.

9. الحاصل الكارتيزي Cartesian Product

إننا عادة ما تستعمل مصطلح الزوج المرتب في الحاصل أو الناتج الكارتيزي، وإليك عزيزي الدارس معنى الزوج المرتب. فالزوج المرتب مثلاً للعنصرين *a&b* معرضات على هذا الترتيب، هو *(a,b)* وفي هذه الحالة *(b,a)* لا يحل محل *(a,b)* لأن ترتيب العناصر في هذه الحالة مهم وهذا يعني أن:

$$(a,b)\neq(b,a)$$

فقط وفقط إذا كان $a=b$

وكلمة المرتب تميز الزوج المرتب *(a,b)* عن الزوج غير المرتب *{a,b}* الذي يسمى بالزوج فقط أي أنه في *{a,b}* الترتيب الذي تجئ به العناصر *a&b* غير مهم فنجد في هذه الحالة *{a,b}* *.= {b,a}*

لتتعرف على ما هو الحاصل الكارتيزي، دعنا نسوق اليك هذا التعريف:

الحاصل الكارتيزي للمجموعتين غير الخاليتين Aو B، هو مجموعة كل العناصر المرتبة من النوع (a,b) حيث a∈A و b∈B ويرمز له بـ AXB

ويعبر عن الحاصل الكارتيزي رياضياً كالآتي:

$$AXB=\{x/(a,b),a\in A\,\&\,b\in B\}$$

مثال (1)

إذا كانت المجموعتيان *B,A* يحتويان على العناصر الآتية:

$$A=\{a,b\}\,\&\,B=\{1,2,3\}$$

فأوجد الحاصل الكارتيزي لـ:

AxB −1 BxA −2

الحل:

$$\underline{AXB} = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

$$\underline{BXA} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

تلاحظ من المثال السابق أن: $AXB \neq BXA$

فمثلاً لدينا $(a,b) \in AXB$ ولكن $(a,1)$ لا تنتمي لـ $BXA \left((a,b) \notin BXA\right)$

مثال (2)

من معطيات المثال السابق، أوجد الحاصل الكارتيزي لـ $AXAXA$.

الحل:

$$AXAXA = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a)(a,b,b)(b,b,b),(b,b,a),(b,a,b)(b,a,a)\}$$

ومن المثالين السابقين

$$|AXB| = |A|X|B|$$

و

$$|AXAXA| = |A|X|A|X|A|$$

تدريب (12)

بعد هذا الشرح وحلول الأمثلة في الحاصل الكارتيزي، دعنا نحاول حل هذا التدريب:

إذا كانت المجموعة A={a,b,c} مجموعة ثلاثة من دارسي الحاسوب في جامعة السودان المفتوحة والمجموعة B={1,2,3} مجموعة ثلاث مقررات عليهم دراستها. أوجد الحاصل الكارتيزي لكل احتمالات التزاوج بين الدارسين والمقررات.

أسئلة تقويم ذاتي(4)

1- إذا كانت A={b,2,c,4,d,6} فأوجد |A|.

2- إذا كانت C,B,A ثلاث مجموعات غير خالية، فأوجد $|A \cup B \cup C|$.

3- إذا كانت A مجموعة وكان $/A/=n$ أكتب القانون العام لرتبة قوة المجموعة A أي $/P(A)/$.

4- إذا كانت المجموعة B معطاة على النحو التالي:

$B=\{x/x$ "follow" حرف فى كلمة$\}$، فاكتب قوة المجموعة B أي P(B)

5- معطى $A=\{1,5,4\}$ و $B=\{2,1,3\}$

أوجد، AXAXB, AXB, BXA, BXBXB, BXAXB

الخلاصة

ما الذي ناقشناه في هذه الوحدة؟

هل يمكنك عزيزي الدارس، مراجعة الأهداف التعليمية لهذه الوحدة؟ حاول ذلك. والآن بعد أن راجعتها هل شعرت أنك قد حققتها من خلال دراستك لوحدة المجموعات؟

على أية حال لنلخص هذه الوحدة وبعدها قرر هل تطابق ما جاء بها مع ما استوعبته؟ آملين أن يكون ذلك كذلك.

عرفنا المجموعة على أنها هي مجموعة من الأشياء أو الوحدات ذات الصلة وأوضحنا أننا نرمز لها بالحروف الكبرى في اللغة الانجليزية *(A, B,..)* ولوحداتها (التي تسمى العناصر) بالحروف الصغرى *(x, y,..)* كما أننا بيّنا إذا كان هنالك عنصر *x* داخل مجموعة *A*، فإننا نقول أن العنصر x ينتمي للمجموعة *A* وعبرنا عنه كتابة.

كما أننا ذكرنا **أنواع مجموعات** الأعداد **ورموزها** وبيّنا أن *N* ترمز للأعداد الطبيعية، *Z* للأعداد الصحيحة، *Q* للأعداد القياسية و *R* للأعداد الحقيقية وتعرفنا على الأرقام التي تضمها كل مجموعة.

تعرضنا **لثلاث طرق** تكتب بها المجموعات، الأولى طريقة **رصد العناصر** *A = {1, 2, 3,...}*، الثانية طريقة **الصفة المميزة** *A= {x/x* { طالب في الجامعة المفتوحة والثالثة طريقة **شكل فن** وقلنا أنها طريقة رمزية لتمثيل المجموعة داخل دوائر تتضمن أو لا تتضمن العناصر.

انتقلنا بعد ذلك الى بعض أنواع المجموعات وذكرنا أن المجموعة **المنتهية** هي المجموعة التي تحتوي على عدد محدود من العناصرمثل $Y= \{x/ x^2 -2x+3=0\}$ والمجموعة **غير المنتهية** هي التي تحتوي على عدد غير محدود من العناصر مثل *N = {1, 2, 3,..}*. وأيضاً وصفنا المجموعة **الخالية** بأنها المجموعة التي لا عناصر فيها وبيّنا أنها تكتب *{}* أو ϕ وذكرنا أن المجموعة **الشاملة** تحتوي على جميع العناصر ويرمز لها بـ *U*. وأوضحنا أنه إذا كانت هنالك مجموعتان غير خاليتين *A* و *B* وكانت كل عناصر *A* موجودة في *B* فإننا نقول المجموعة *A* جزئية من المجموعة *B*.

ثم تناولنا العمليات الرياضية في المجموعات وذكرنا أمكانية التعبير عن هذه العمليات بأي واحدة من الطرق الثلاثة التي تم ذكرها آنفاً. وأوضحنا أن هذه العمليات هي **علاقة أو** ارتباط بين مجموعتين غير خاليتين مثلاً A و B وذكرنا كل حالة ورمزها وبيناها بالرسم وهي:

أ- الاتحاد ($\cup$)، ب- التقاطع ($\cap$)، ج- الفرق ($-$)، د- التتمة، هـ- التساوي ($=$)

وأيضاً تعرفت على الجمل **غير المركبة** وقلنا أنها هي التي تحتوي على رمز عملية واحدة (مثل $A \cup B$) **والجمل المركبة** وقلنا أنها هي التي تحتوي على أكثر من رمز مثل $(A \cup B) - C$ وأوضحنا أننا نقوم أولاً بايجاد قيم الأقواس ثم نجري باقي العملية وكذلك تناولنا بالشرح الكيفية التي نعبر بها عن المجموعات التي تمثل جملاً مركبة مستخدمين أشكال ڤن وذلك بتظليل المنطقة المشتركة بين المجموعات.

كما بينا كيفية **اثبات نظرية** أو قانون في نظرية وذلك بأخذ أحد طرفي المعادلة المتساويين والعمل عليه الى أن تثبت أنه يساوي الطرف الآخر.

كذلك تعرفت على **رتبة المجموعة** التي هي عدد العناصر الموجودة بتلك المجموعة ورمزها $/A/$ (إذا كانت المجموعة A) أيضاً تعرفت على **قوة المجموعة** التي هي المجموعة التي تحتوي على كل المجموعات الجزئية لهذه المجموعة ورمزها $P(A)$ (إذا كانت المجموعة A).

مجموعة المجموعات ذكرنا أنها هي المجموعة التي عناصرها أيضاً مجموعات. اخيراً كان ختام وحدتنا الحاصل الكارتيزي الذي عرفناه بأنه هو مجموعة العناصر المرتبة للمجموعات المعينة ورمزه AXB إذا كانت المجموعتان المعنيتان هما A و B.

أتمنى أن تجده ملخصاً مفيداً شاملاً يجمل ما تناولته الوحدة في وضوح ويسر.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

في الوحدة القادمة "الوحدة الثانيه" سنركز على الدوال. سنتناول بالشرح والأمثلة مفهوم الدالة، تعريفها وكيفية كتابتها وقراءتها. كذلك سوف تتعرف على مصطلح مدى الدالة وكيفية ايجاده من الدوال. أبضاً ستجد توضيحاً لبعض أنواع الدوال مثل الدوال المتساوية دالة واحد لواحد، الدوال الشاملة، الدالة المتماثلة، الدالة الثابتة، الدالة المركبة والدالة العكسية. وكيفية التفريق بينها. أتمنى أن تجد هذه الوحدة مفيدة وسهلة للاستيعاب.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

نعم هنالك علاقة، فكتاب الرياضيات المتقطعة ينتمي لكتب الرياضيات والصيغة الرياضية لهذه العلاقة هي:

$$x \in A$$

x في هذه الحالة تشير الى كتاب الرياضيات المتقطعة الذي يمثل العنصر في هذه الحالة بينما A تشير الى كتب الرياضيات التي تمثل المجموعة.

تدريب (2)

1- نعم يمكن أن أميز بين طريقة رصد العناصر وطريقة الصفة لمميزة في كتابة المجموعات.

طريقة رصد العناصر هي كتابة العناصر بين قوسين معقوفين من النوع {..,..} مثل {1,2,3,4,5}. بينما في طريقة الصفة المميزة نكتب صفة تميز عناصر المجموعة وتكون مشتركة بينها وتوضع أيضاً بين قوسين معقوفين {..,..} مثل {طالب في الجامعة المفتوحة S={x/x، أي أن الصفة المميزة كونهم طلبة في الجامعة المفتوحة.

2/ P={1,3,5,7}، الصفة المميزة للعناصر هي: العنصر عدد طبيعي فردي اقل من أو يساوي 7 عليه يكتب: {عدد طبيعي فردي أقل من أويساوى 7 x/x}=P.

تدريب (3)

1- A = {1,2,3,4,}

مجموعة منتهية لأنها تحتوي على عدد محدود من العناصر.

2- B = {7,14,21,..}

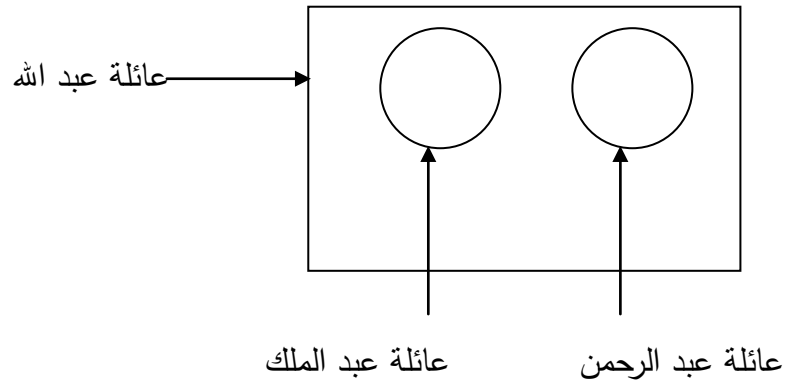
مجموعة غير منتهية لأنها تحتوي على عد غير محدود من العناصر.

3- C={1,2,3,4,..20}.

مجموعة منتهية لأنها تحتوي على عدد محدود من العناصر.

تدريب (4)

نعتبر أن عائلة عبدالله مجموعة شاملة لأنها تضم كل العوائل الصغيرة الأخرى كمجموعات جزئية من العائلة الكبرى عليه يمكننا أن نمثل هذه العلاقة كالآتي:



تدريب (5)

الاجابات الصحيحة هي:

1- ج و د بينما كل الاجابات الأخرى غير صحيحة.

2- علاقة عائلة عبد الله بعائلة عبد الرحمن: عائلة عبد الرحمن جزئية من عائلة عبد الله وبالرمز تكون:

عائلة عبد الله ⊂ عائل عبد الرحمن.

"تقرأ من اليسار لليمين"

علاقة عائلة عبد الله بعائلة عبد الملك: أيضاً عائلة عبد الملك جزئية من عائلة عبد الله وتكتب رمزاً:

عائلة عبد الله ⊂ عائلة عبد الملك.

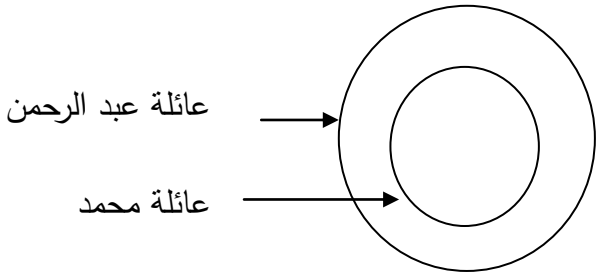
"وأيضاً تقرأ من اليسار لليمين"

3- علاقة عائلة محمد بعائلة عبد الرحمن رمزاً:

عائلة عبد الرحمن ⊂ عائلة محمد.

فعائلة محمد جزئية من عائلة عبد الرحمن.

وهذه العلاقة بشكل فن تكون



4- علاقة عائلة عبد الرحمن بعائلة عبد الملك:

$$E \not\subset B$$

حيث E تمثل عائلة عبد الرحمن وهي لا تنتمي لـ B التي هي عائلة عبد الملك فهما جزئيتات من العائلة الكبرى.

تدريب (6)

أ- بما أن الاجتماع تضم اللجنتين معاً، ففي هذه الحالة مجموعة الأعضاء الذين يحضرون الاجتماع هي اتحاد المجموعتين أي $A \cup B$:

فتكون المجموعة هي: $A \cup B$= {صالح، عبد المنعم، مختار، أحمد، الأمين، عبد الله، محمد، مصطفى، عثمان، عبد الرحيم، عصام}

ب- المجموعة التي ستعارض الاجتماع هي المجموعة المشتركة بين المجموعتين وهي عبارة عن تقاطع المجموعتين أي $A \cap B$:

فتكون المجموعة هي $A \cap B$: {محمد، صالح، أحمد}

تدريب (7)

تعتبر مجموعة البصات هي المجموعة الشاملة U.

إذن: $U = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$، حيث الأعداد تمثل أرقام الحافلات

الحافلات التي عليها الرحلة هي مجموعة جزئية من U:

$A = \{9,10,11,12,13\}$

$A' = U - A$

حيث A' هي المجموعة المتمة لـ A ليصبح مجموعة شاملة U

$\therefore A' = \{6,7,8,14,15,16,17,18\}$

وهي أرقام الحافلات التي تكون في الراحة في ذلك اليوم.

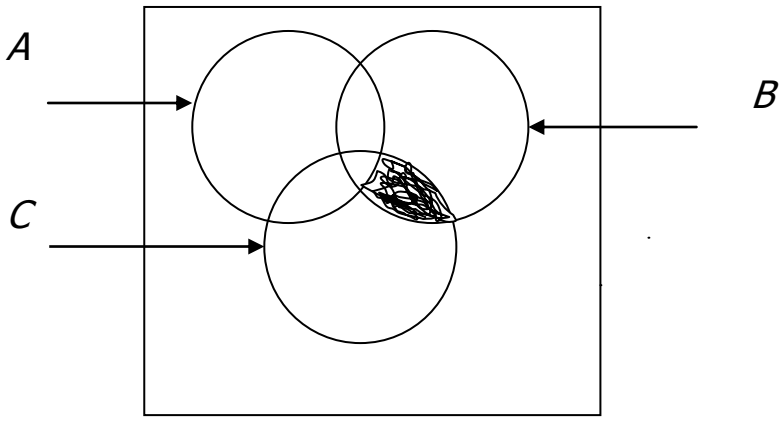
تدريب (8)

حل القائمة أ و القائمة ب:

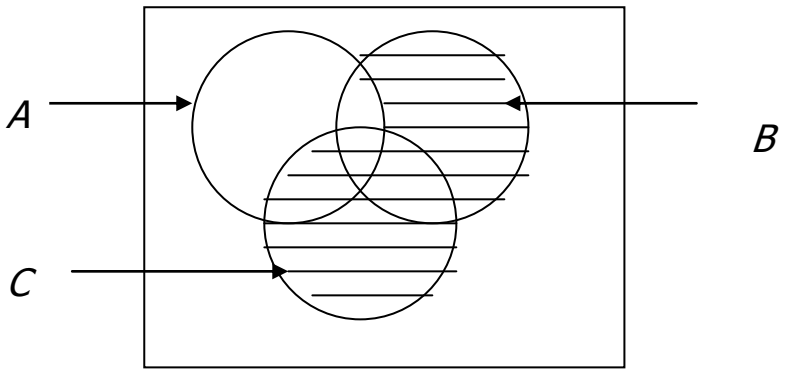
	(أ)		(ب)
4	$(A-B)'$	1.	(أحمر، أخضر، أسود، بني، رمادي)
5	$A \cap B'$	2.	(أصفر، أحمر، أخضر، أزرق، برتقالي، رمادي)
1	$(A')'$	3.	(أسود، بني)
2	$A' \cup B'$	4.	(أصفر، أزرق، أسود، برتقالي، بني)
3	$A' - B$	5.	(أحمر، أخضر، رمادي)

تدريب (9)

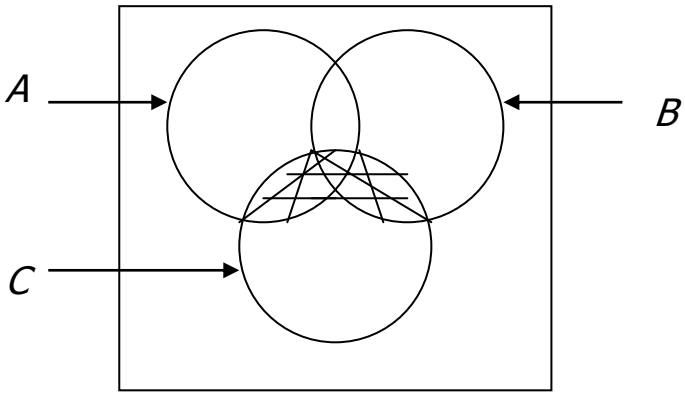
أ- $(C-A) \cap B$



ب- $C \cup (A-B)$



ج - $(A \cup B) \cap C$



تدريب (10)

إذا أسمينا مجموعة الفئران الأولى A والثانية B،

فإن:

$A = \{a,b,d,g,h\}$

$B=\{b,d,h,m,P\}$ و

اتحادالمجموعتين أي ($A \cup B$) هو:

$A \cup B = \{a,b,d,g,h,m,p\}$

رتبة المجموعة هي عدد عناصرها.

$|A \cup B|=7$

تدريب (11)

تعتبر مجموعة الصفات مجموعة وتسميها A:

A = {جامعية، متزوجة، 25<}

منها

P(A) = {{ }, {25<العمر},{متزوجة},{جامعية},{جامعية،العمر<25},

{{جامعية، متزوجة<25},{متزوجة<25},{جامعية،متزوجة}

P(A) هي مجموعة كل الاحتمالات الممكنة للصفات التي يمكن للمتقدمات للوظيفة امتلاكها.

تدريب (12)

مجموعة الدارسين A = {a, b, c}

مجموعة المقررات B = {1, 2, 3}

الحاصل الكارتيزي

AXB = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3)}

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

التقويم الذاتي (1)

1.

(أ) $x \notin A$

(ب) $F \not\subset G$

(ج) $S \subset R$

(د) $d \in G$

(ه) $P = \{\}$

2.

(أ) $P = \{2\}$

(ب) $Q = \{f, o, l, w\}$

(ج) $R = \{3,8\}$

3. (أ) و (ج) مجموعتان منتهيتان لأنهما يحتويان على عدد محدود من العناصر، بينما (ب) و (د) يحتويان على عدد غير محدود من العناصر.

التقويم الذاتي(2)

1. A∪B={1, 2, 3, 4, 6, 8}
2. A∩C= {3, 4}
3. B-C = {2, 8}
4. A′ = {5, 6, 7, 8, 9}
5. B′ = {1, 3, 5, 7, 9}

التقويم الذاتي (3)

.1

A – B = { 1 , 7 , 10 } (أ)

U – C = { 6 , 7 , 8 , 9 , 10} (ب)

$B^1 \cap (C – A)$
B^1 = { 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 10}
C – A = { 2, 3 , 5}
$\therefore B^1 \cap (C - A) = \{3,5\}$ (ج)

$A \cap (B \cup C)$
A = {1, 4, 7, 10}
BUC = {1, 2, 3, 4, 5,6, 8}
$\therefore A \cap (BUC) = \{1,4\}$ (د)

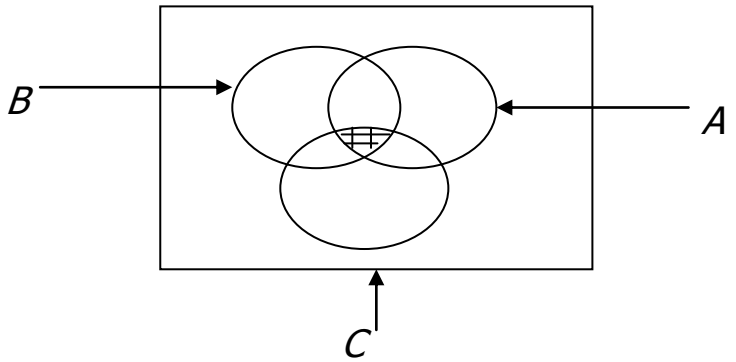
($A \cap B$) = {4}
$(A \cap B)'$ = {1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10}
$(A \cap B)' - C$ = {6 , 7 , 8 , 9 , 10} (ه)

AUB = {1 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10} (و)

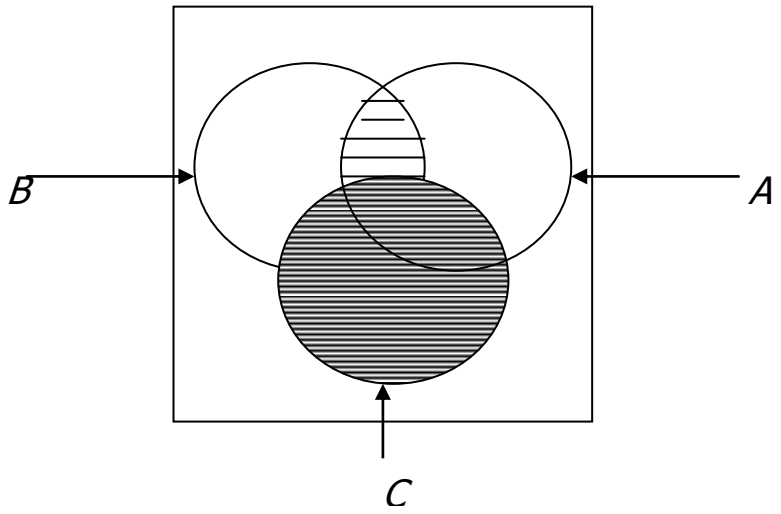
$A \cap .B$ ={ 4 } (ز)

.2

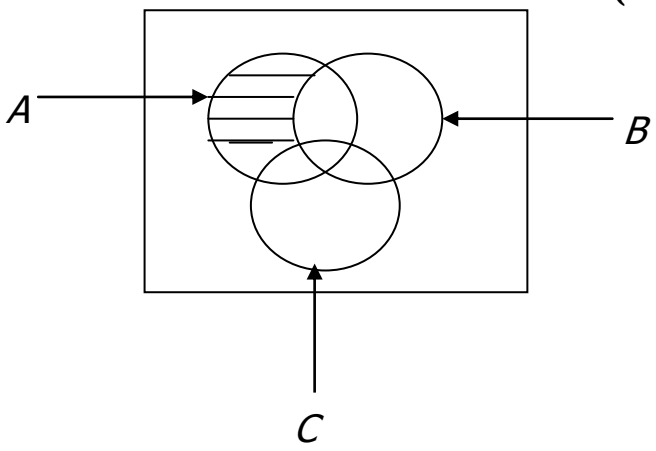
(AUBUC) (أ)



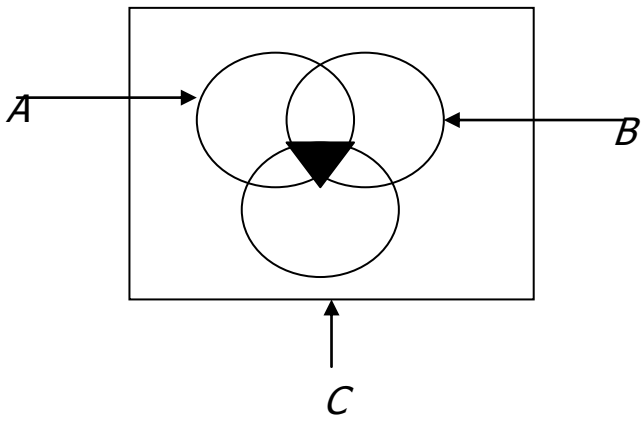
(A∩B) U C (ب)



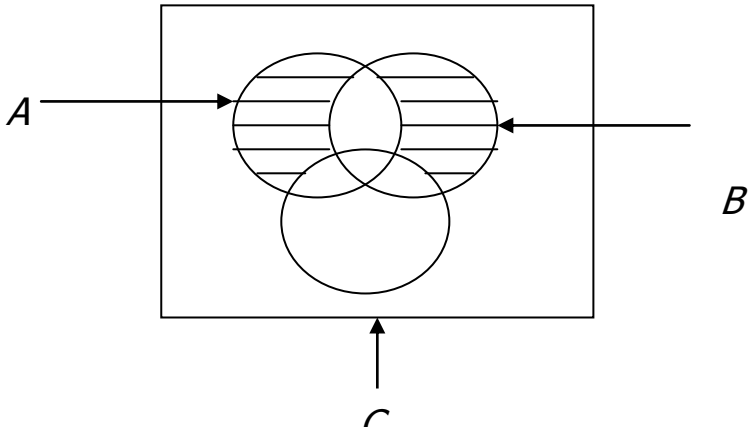
(A – B) – C (ج)



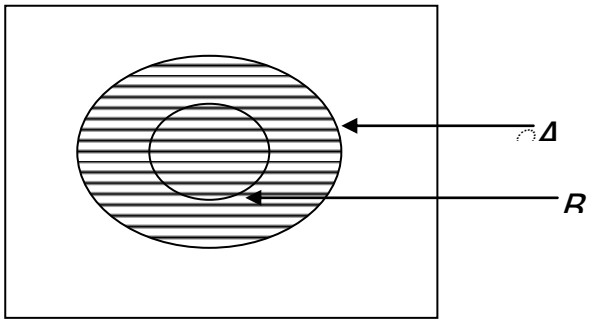
A – (B ∩ C)′ (د)



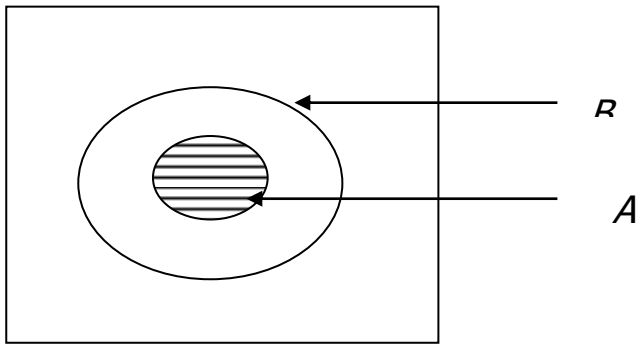
(A ∩ B)' – C (هـ)



AUB = A (و)



B∩A=A (ز)



3. أثبت **القوانين** وحاول مناقشتها مع مشرفك الأكاديمى.

التقويم الذاتى (4)

1. $|A| = 6$

2.

$$|AUBUC| = |AU(BUC|$$
$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3. تمثل عدد المجموعات الجزئية من $|P(A)|$=A

$$\therefore |P(A)| = 2^{|A|}$$

.4

B = {f , o , e , w}
P(A) = { ϕ, {f, o , e , w}, {f , o , e} , {f , o , w} , {o , w , e}
{w, e , f) , {f, o} , {f , e} , {f , w} , {o , e} , {o , w}
{f} , {o} , {e} , {w} , {e, w}}

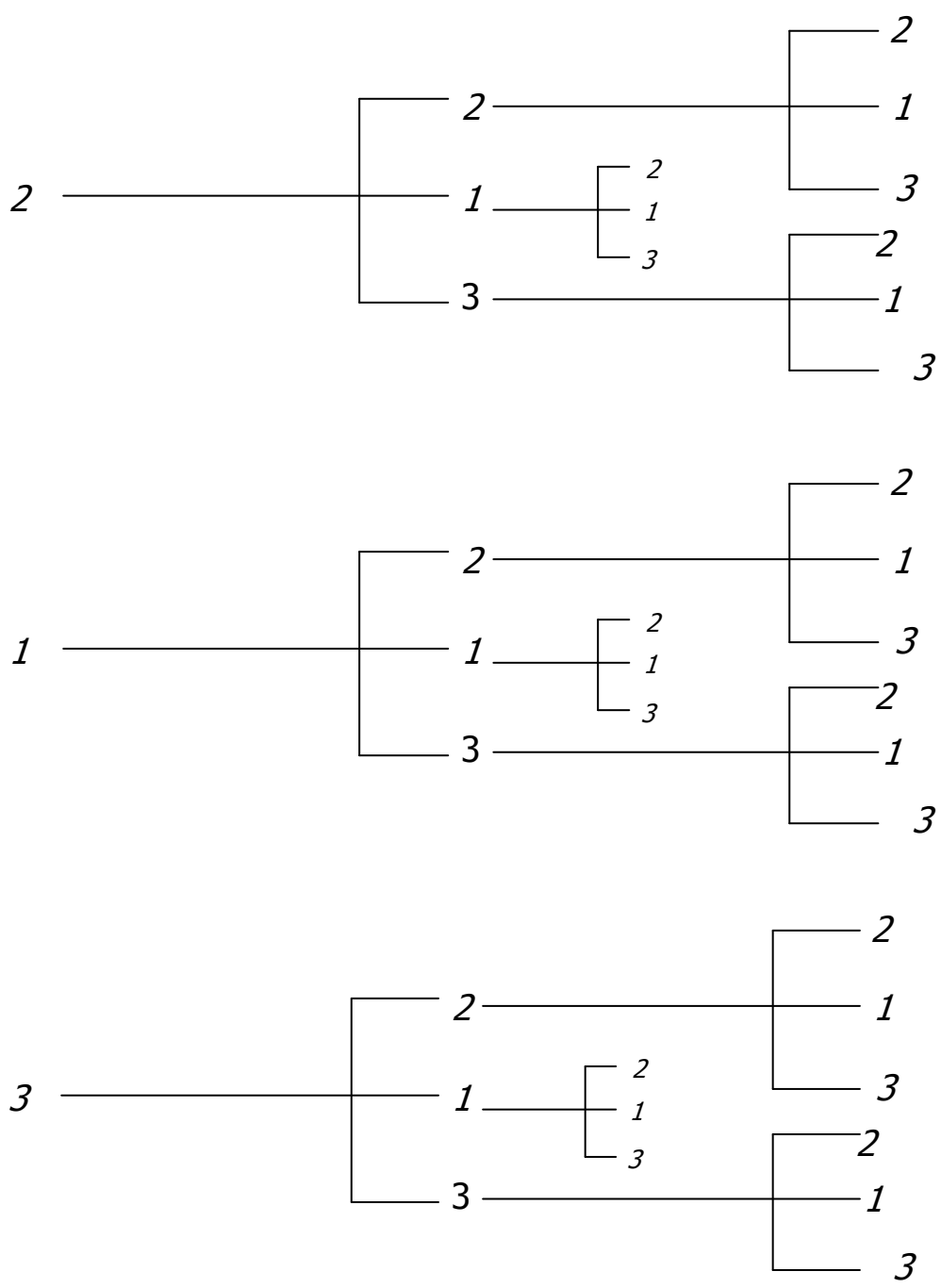
.5

A x A x B = {(1 ,1, 2) , (1,1, 1) , (1, 1, 3), (1 , 5 , 2) , (1 , 5 , 1), (1 , 5 , 3)
(1, 4 , 2) , (1 , 4 , 1) , (1 , 4 , 3) , (5 , 1 , 2) , (5, 1, ,1) , (5 , 1 , 3) ,
(5 , 5 , 2) , (5 , 5 , 1) , (5 , 5 , 3), (5 , 4 , 2) , (5 , 4 ,1) , (5 , 4 , 3),
(5 , 4 , 2) , (5 , 4, 1) , (5 , 4, 3) (4, 1, 2) , (4 , 1,1), (4, 1 ,3) ,
(4, 5, 2) , (4 , 5 , 1) , (4 , 5 , 3) , (4 , 4 ,2),(4 , 4, 1) , (4 , 4 , 3)}

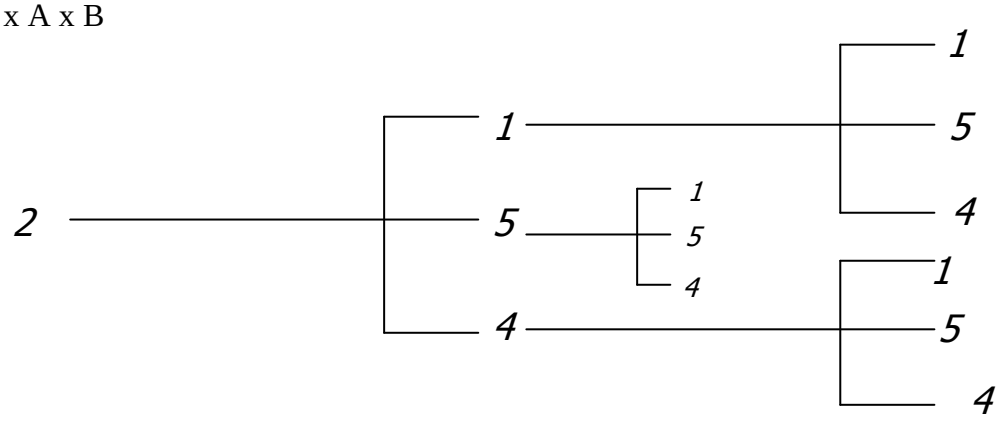
BxA = { (2, 1) , (2 , 5) , (2, 4) , (1, 1) , (1 , 5) , (1 , 4) , (3 , 1) ,
(3, 5) , (3 , 4).

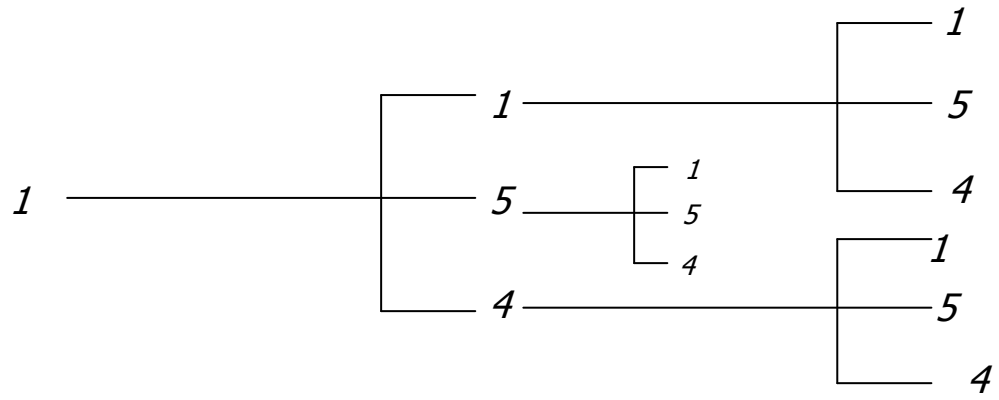
A x B = { (1 , 2) , (1 , 1) , (1 , 3) , (5, 2) , (5 , 1) , (5 , 3) , (4 , 2), (4 , 1) , (4 , 3) }.

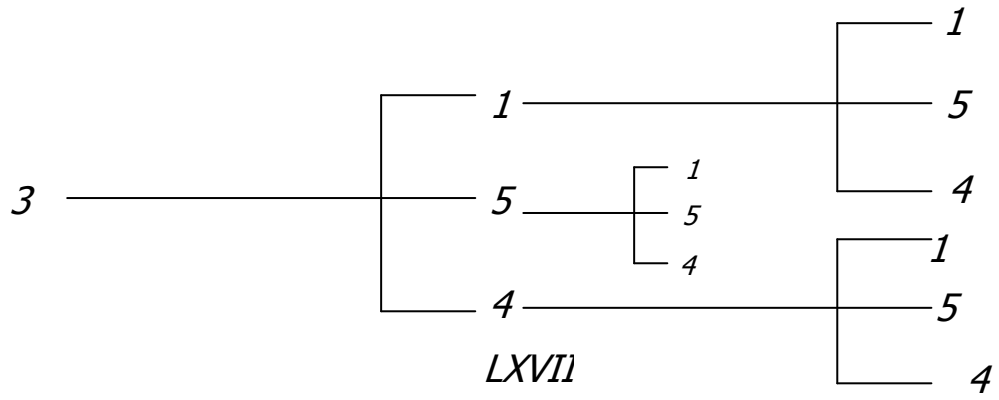
B x B x B لإيجاد ذلك نتبع الشجرة التالية:



B x A x B







مسرد المصطلحات

المجموعة (A, B, C...)

هي مجموعة من الأشياء أو الوحدات (العناصر) ذات الصلة

ينتمي إلى Belong to (∈)

إذا كان العنصر x فى أو داخل المجموعة A، فإنك تقول أن العنصر x ينتمي الى المجموعة A ويكتب: $x \in A$ (belongs to)

طريقة رصد العناصر Listing Method

هي كتابة العناصر بين قوسين معقوفين من النوع {..,..} مثل $A= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

طريقة الصفة المميزة Property Method

هي كتابة صفة معينة معرفة لعناصر المجموعة تميزها وتكون مشتركة بينها وذلك بوضعها بين قوسين معقوفين {..,..} مثل: $A = \{x/x > 10, x \in N\}$

طريقة شكل ڤن Venn Diagram

هي طريقة رمزية تمكن من تمثيل المجموعة داخل شكل دائري يتضمن أو لا يتضمن العناصر.

المجموعة المنتهية Finite set

هي المجموعة التي تحتوي على عدد محدود من العناصر مثل $Y = \{x/x^2-2+3=0\}$

المجموعة غير المنتهية Infinite set

هي المجموعة التي تحتوي على عدد غير محدود من العناصر مثل:

$N= \{1, 2, 3,...\}$

المجموعة الخالية Empty ({ } أو ϕ)

ونعني بها المجموعة التي لا عناصر فيها ويمكن كتابتها على النحو التالي: $\{\ \}$ أو ϕ

المجموعة الشاملة Universal Set ($\cup$)

هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر وتمثل بمستطيل.

المجموعة الجزئية Subset ($\cup$)

هي المجموعة التي عناصرها توجد في مجموعة أخرى (أي تنتمي لها) فمثلاً نقول $A \subset B$ وتقرأ A مجموعة جزئية من المجموعة B وهذا يعني أن لكل عنصر $x \in A$ يقتضي أن $x \in B$.

الاتحاد Union ($\cup$)

اتحاد مجموعتين غير خاليتين A و B هو المجموعة التي عناصرها هي نفس العناصر الموجودة أما في A أو B (أو الاثنين معاً) ويرمز لها بـ $A \cup B$.

التقاطع Intersection ($\cap$)

تقاطع مجموعتين غير خاليتين A و B هو **المجموعة** التي عناصرها هي نفس العناصر الموجودة في A و b معاً (أي العناصر المشتركة بينهما).

الفرق Difference (–)

الفرق بين مجموعتين غير خاليتين A و b هو المجموعة التي عناصرها موجودة في المجموعة A وليست المجموعة B ويعبر عنها بـ $A-B$ والعكس

التتمة Complement

هي مجموعة غير خالية (قل A′) تكمل المجموعة الغير خالية A لتصبح شاملة U. أي أنها هي مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U ولا توجد في A

التساوي Equality (=)

تساوي مجموعتين غير خاليتين A و B هو أنهما يمتلكان نفس العناصر وتكتب: $A = B$، إذا وفقط إذا، كان: $A \subset B$ و $B \subset A$

الجمل غير المركبة

هي الجمل الرياضية في المجموعات التي تحتوي على رمز عملية واحدة مثل $A-B$

الجمل المركبة

هي الجمل التي تحتوي على أكثر من رمز من رموز العمليات مثل $A'-B$

رتبة المجموعة Order of set ($|A|$)

رتبة المجموعة،A، مثلاً هي عدد العناصر الموجودة في المجموعة A ويرمز لها بـ $/A/$

قوة المجموعة Power of Set (P(A))

هي **المجموعة** التي تحتوي على كل المجموعات الجزئية للمجموعة الغير خالية A

مجموعة المجموعات Set of Sets

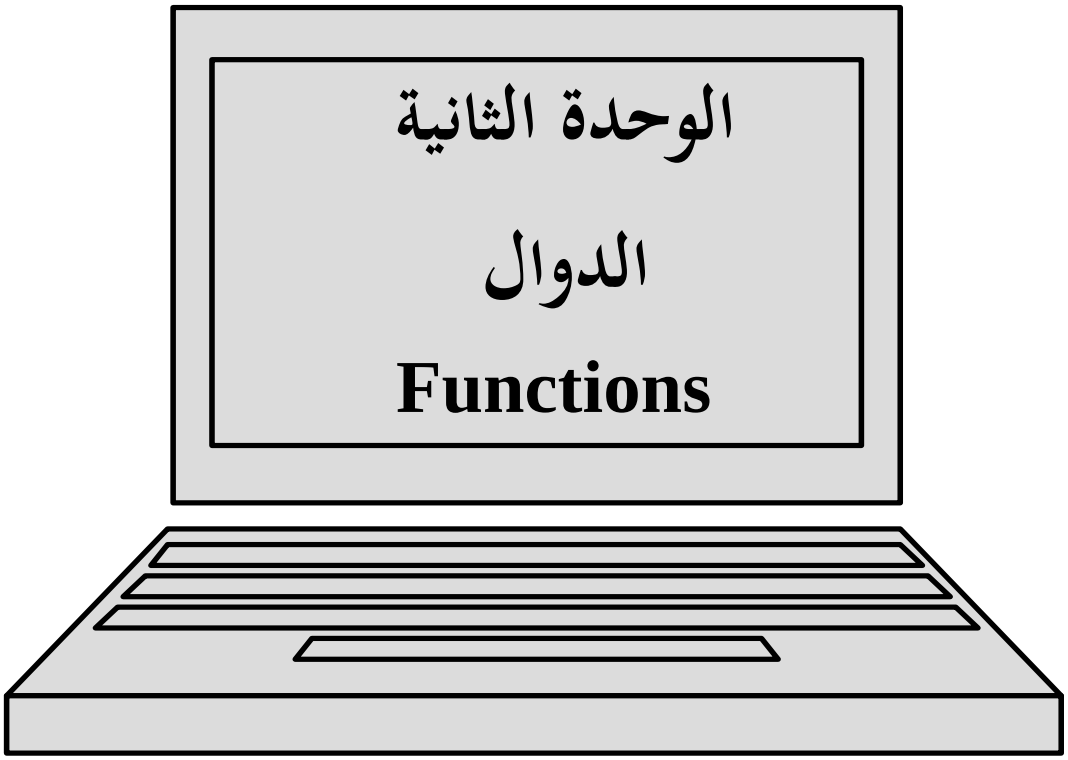
هي المجموعة التي عناصرها أيضاً مجموعات

الحاصل الكارتيزي Cartesian Product

الحاصل الكارتيزي للمجموعتين غير الخاليتين A و B هو **مجموعة** كل العناصر المرتبة من النوع (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ ويرمز له بـ AXB.

المراجع

1. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
2. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
3. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
4. **Finite Mathematics**, Shaum Series
5. **Set Theory**, Shaum series.


الوحدة الثانية
الدوال
Functions

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**67**
تمهيد	67
أهداف الوحدة	68
1. مفهوم الدالة	**69**
2. مدى الدالة	**72**
3. أمثلة لبعض أنواع الدوال	**75**
1.3 الدوال المتساوية	75
2.3 الدالة واحد لواحد	77
3.3 الدالة الشاملة	79
4.3 الدالة المتماثلة	84
5.3 الدالة الثابتة	84
6.3 الدالة المركبة	87
7.3 الدالة العكسية	90
الخلاصة	**95**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**96**
إجابات التدريبات	**97**
إجابات التقويم الذاتي	**99**
مسرد المصطلحات	**103**
المراجع	**105**

المقدمة

تمهيد

عزيزى الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

بعد أن درست وحدة المجموعات سننتقل بك إلى وحدة الدوال التي هي الوحدة الثانية من مقرر الرياضيات المتقطعة. والتعريف بالدوال هو تدرج واضح وطبيعي فى المعرفة للوحدة السابقة لأن الدوال ما هي إلا علاقات ثنائية بين المجموعات. ومن هنا تجئ أهمية هذه الوحدة كمواصلة لما سبق من معلومات.

تعرفك هذه الوحدة إبتداءً بماهية الدالة وهو القسم الأول وفيه أيضاً تتعرف على رموز الدوال وطرق كتابة الدالة وتمثيلها بالأشكال.

وفى القسم الثانى ستجد توضيحاً لمصطلح رياضي مهم فى الدوال هو مدى الدالة الذى ستدرس كيفية إيجاده مستعملاً بعض القوانين.

أطول هذه الأقسام هو القسم الثالث والأخير الذى ستتبين فيه شرحاً بالأمثلة لبعض أنواع الدوال وفيه توضح الدوال الأحوال المختلفة للعلاقة بين المجموعات وعناصرها والتى منها جاءت التسميات المختلفة للدوال. ستجد أيضاً تمثيلاً لهذه العلاقات عن طريق الأشكال مما يكون له أثر عميق فى زيادة الفهم لديك.

ستتبين أننا وضعنا لك عدداً كبيراً من الأمثلة وحلولها النموذجية علها تساعدك على ترسيخ القوانين فى ذهنك. كما أن التدريبات التي ترد فى ثنايا المادة وأسئلة التقويم الذاتي في نهاية الأقسام، أيضاً سيعزز ما درسته.

نرحب بك ثانيةً فى هذه الوحدة، متمنين، أن تفيد منها وتستمتع بدراستها ولا تنسى! رأيك فى تقييم الوحدة يفيدنا كثيراً.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن

تكون قادراً على أن:

1. تتعرف مفهوم الدالة، تعريفها، كيف تكتب وكيف تقرأ.
2. تعرِّف مدى الدالة وتبين كيفية إيجاده.
3. تفرِّق بين سبعة أنواع من الدوال، المتساوية، دالة واحد لواحد، الشاملة، المتماثلة، الثابتة، المركبة والدالة العكسية.
4. تستخدم المخطط السهمى للتعبير عن أى نوع من أنواع الدوال.
5. تميز الأنواع المختلفة للدوال وتشرح لماذا تنتمى دالة ما لنوع معين من الدوال.
6. تحل المسائل المرتبطة بمفهوم الدالة متى ما تعين ذلك.

الدوال Functions

1. مفهوم الدالة (Function Concept)

مفهوم الدالة من الأعداد الحقيقية إلى الأعداد الحقيقية لا شك أنه معروف لديك مسبقاً. فمثلاً

$$y = x^2 + x + 1,$$

تمثل دالة من الأعداد الحقيقية إلى الأعداد الحقيقية.

في هذه المعادلة لكل قيمة لـ x في الأعداد الحقيقية، يمكنك حساب قيمة y بإبدال القيمة الحقيقية لـ x وهذه المعادلة هي صورة عامة لحساب القيم.

الدوال من الأعداد الحقيقية ألى الأعداد الحقيقبة التي تعرَّف بالمعادلات على هذا النحو،هي **حالات خاصة** لمفهوم الدالة الذي نعرضه فى الأسطر القادمة.

اذن ما هي الدالة؟

الدالة *(Function)* ، من المجموعة ***A*** **إلى** ***B***، هي: قاعدة أو علاقة ثنائية تربط المجموعتين غير الخاليتين ***A*** **و** ***B*** بحيث أنه يكون لكل عنصر a في A هنالك عنصر واحد فريد ***(Unique)*** b في B

ونرمز لهذا الارتباط بـ f .

وفي هذه الحالة (a,b)موجودة في f أي $(a,b) \in f$والدالة f من Aإلى Bتكتب:

$$f : A \to B$$

وتقرأ f دالة منA إلى B

وفي حالة المعادلة التي سبق ذكرها، تكون الدالة:

$$(f : R \to R)$$

وتكون المعادلة كالأتي:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

إذا كانت

$$f : A \to B \text{ ، }$$

فأنَّ المجموعة A تسمى **بمجال** (Domain) اللدالة f والمجموعة B تسمى **بالمجال المصاحب** (Co domain) للدالة f .

إذا كان $a \in A$ فإن العنصر الفريد في B المرتبط بالعنصر a يسمى قيمة الدالة أو **صورة** (image) العنصر a ويرمز له بـ :

$$\boxed{f(a)}$$

ويقرأ دالة a.

عزيزي الدارس لعلك فهمت ماذا تعني الدالة وإليك عدداً من الأمثلة علها تفيدك وترسخ لك هذا المفهوم.

مثال (1)

إذا كانت الدالة f من الأعداد الحقيقية إلى الأعداد الحقيقية

$(f : R \to R)$معرفة على النحو التالي:

$$f(x) \; x^2 =$$

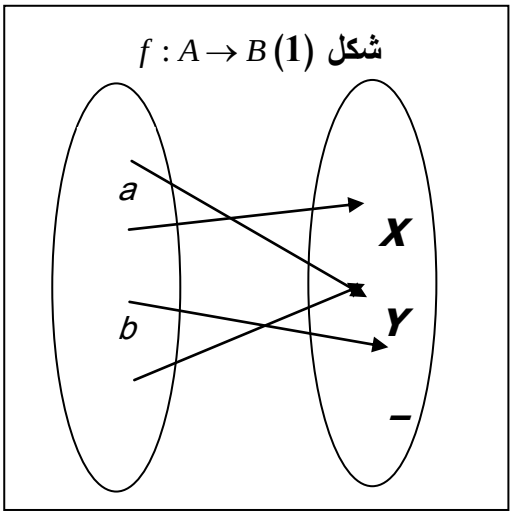
فأن أي عنصر في المجال x يرتبط بمربعه في المجال المصاحب والتعريف للدالة بهده الطريقة يسمى بقاعدة الاقتران.

مثال (2)

إذا كان $A = \{a,b,c,d\} \quad B = \{x,y,z\}$,

وكانت الدالة f من A إلى B : $(f : A \to B)$

معرفة بالمخطط السهمي التالي:



فأن: A تمثل المجال، B تمثل المجال المصاحب فيه:

$$f(d) = f(a) = y, \quad f(b) = x, \quad f(c) = z$$

تلاحظ في هذا المثال أنَّنا عرفنا الدالة بالمخطط السهمي (الشكل (1) أعلاه حيث عناصر A (المجال) تمثل في الجهة اليسرى وعناصر B (المجال المصاحب أو الصورة المطابقة) في الجهة اليمنى.

مثال (3)

إذا كانت $A = \{-1,1\}$ معطى، فأن الدالة $(f : R \to R)$ لأي عدد قياسي في R ويرتبط بالعدد 1 وأي عدد غير قياسي في R يرتبط بـ 1- فإنَّ الدالة تعرَّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ , إذا كان x قياسي} \\ -1 \text{ , إذا كان } x \text{ غير قياسي} \end{cases}$$

2. مدى الدالة Function Range

تعال نتعرف على مصطلح اخر ذي أهمية فى دراسة الدوال وهو المدى.

اذا كانت الدالة f من A إلى B معرفة على النحو التالي:

$$f : A \to B$$

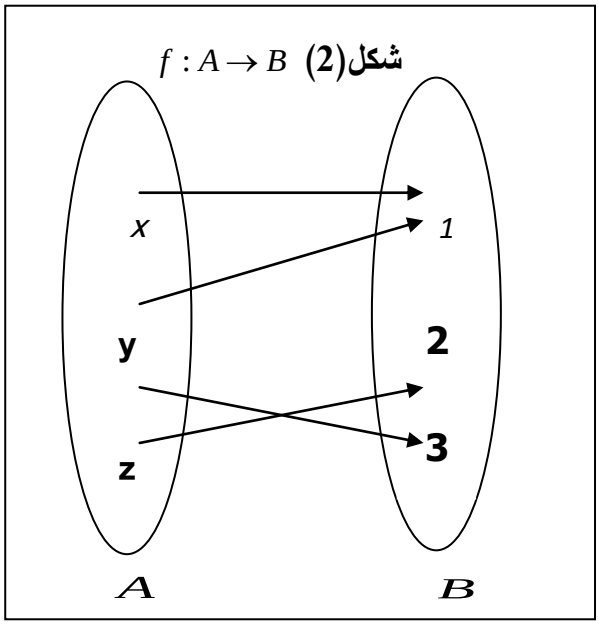
فأن:

مدى الدالة f **:** هو مجموعة العناصر الصور في B **أى** مجموعة العناصر التى فى المجال المصاحب المرتبطة بعناصر فى المجال ويرمز لها بـ $f[A]$

بعد أن تعرفت على المدى إليك الآن الأمثلة التي تفيدك في هذا المنحى.

مثال (4)

إذ ا كانت الدالة f معرفة بالمخطط السهمي التالي (شكل 2)،



شكل(2) $f : A \to B$

فإن مدى الدالة f : $f(A) = \{1,3,5\}$

أي أنَّه يساوي مجموعة العناصر التي في المجال المصاحب المرتبطة بعناصر في المجال.

مثال (5)

إذا كانت الدالة f دالة من الأعداد الحقيقية R إلى الأعداد الحقيقية R $(f : R \to R)$،

معرفة على النحو التالي:

$$= f(x)\ x^2\ ,$$

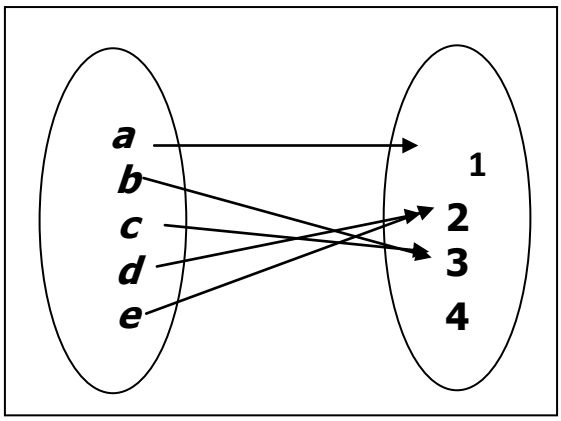
فإن مدى الدالة f هو الأعداد الموجبة التي تنتمي للأعداد الحقيقية متضمنة الرقم صفر أي:

$$f(R) = \{x | x \geq 0\}$$

تدريب (1)

الآن قف لحظة لتتأكد من مدى فهمك واستيعابك لما سبق من مفاهيم ومصطلحات.

1. في هذا الشكل:



A B

A مجموعة من المنازل و B مجموعة من الألوان. والدالة من A إلى B تشير إلى ألوان طلاء المنازل. من هذه المعطيات:

1. وضح مجال الدالة

2. وضح المجال المصاحب للدالة

3. أكتب الدوال من A إلى B

4. بين مدى الدالة

2. معطى الدالة:

$$f= \{(-2, 3),\ (-1, 3), (0, 2), (1, 2)\}$$

أوجد:

أ. مجال الدالة

أسئلة تقويم ذاتي (1)

إذا كان $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{x, y, z\}$

والعلاقة من A إلى B $(f:A\to B)$ هي:

$f(a) = f(c) = x$, $f(b) = z$, $f(d) = y$

1. عرَّف هذه العلاقة "الدالة" بالمخطط السهمي.
2. عيِّن مدى الدالة
3. وضِّح مجال الدالة

3. أمثلة لبعض أنواع الدوال

في هذا القسم سنعرفك على بعض أنواع الدوال وسنوضح لك بالتعريف والأمثلة الفرق بينها.

1.3 الدوال المتساوية Equal Functions

تسمى الدالتان f,g **دالتين متساويتين** إذا كانتا معرفتان في نفس المجال *(domain) (D)* ونفس المجال المصاحب *(Co domain)* وكان لكل $a\in D$ تكون $f(a)=g(a)$

لتوضيح ذلك أكثر نعطيك هذا المثال

مثال (6)

إذا كان للدالة f مجال**D** ومجال مصاحب **D** وقانون

$$f(a) = a^2 - 2a + 1$$

وللدالة g مجال **D** ومجال مصاحب **D** وقانون

$$g(a) = (a \ -1)^2$$

فإننا نقول أن الدالتين f و g متساويتان

فكما تلاحظ في هذه الحالة االدالتان f و g لهما نفس المجال والمجال المصاحب لكن قانونين مختلفين.

في الحالتين إذا حاولت تعويض a بأى عدد مثلاً 4 لتتحصل على $f(4)$ في الحالة الأولى و $g(4)$ في الحالة الثانية، فإنَّك تقوم بأجراء عمليات مختلفة في الحالتين لكن بالتأكيد من العمليتين سوف تتحصل على نفس القيم في كل حالة وهي القيمة 9. في هذه الحالة نقول لكل $f(a) = g(a), a \in N$

لذلك تساوي الدوال يعتمد على كون المجال متساوياً، المجال المصاحب متساوياً والفعل (actions) متساوياً ولا يتطلب هذا تطابق في القوانين.

مثال (7)

إذا كانت $f : R^{/} \to R$ ، معرَّفة على النحو التالي:

$$f(x) = x^2$$

والدالة $g : R^{-} \to R$ ، معرَّفة على النحو التالي:

$$g(y) = y^2$$

وكانت

$$x = y,$$

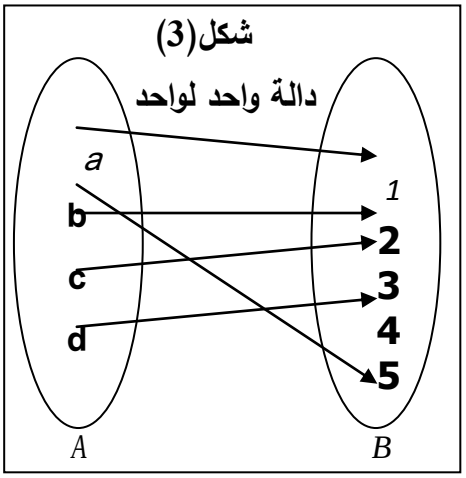
فإنَّ:

$$f = g$$

2.3 الدالة واحد لواحد One -to- One Function

متى تسمى الدالة دالة لواحد؟

تسمى الدالة من A إلى B $(f: A \to B)$ **بدالة واحد لواحد *(One-to-One)***، إذا كان لا يوجد بها عنصران من A لهما نفس الصور ة في B –أي أن كل عنصر من A له صورة لوحده.



الشكل (3) يمثل دالة واحد لواحد حيث أي عنصر في A (المجال) يرتبط بعنصر في B (المجال المصاحب) وليس هنالك عنصرين من A يرتبطان مع **صورة** واحدة في B وهذا يعنى أن العناصر المختلفة فى المجال ترتبط بعناصر مختلفة فى المجال المصاحب.

إذا كان

$$f(x) = f(y), x, y \in A$$

فإن:

$$x = y$$

وإذا كان

$a, b \in A$ وكان $a \neq b$ ،

فإن: $f(a) \neq f(b)$

ولذا لا يرتبطان مع نفس **الصورة** في المجال المصاحب وهذا يكون في حالة الداله واحد لواحد.

مثال (8)

إذا كانت الدالة $f : R \to R$ معرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية، على النحو التالي

$$f(x) = x^2$$

فإنَّ هذه الدالة لا تمثل دالة واحد لواحد لأنَّ التعويض بقيم مختلفة لـ x يمكن أن يقود لنفس القيمة. مثلاً إذا عوضنا x مرةً بـ2 ومرةً بـ2− فالنتيجة تكون:

$$f(2) = f(-2) = 4$$

وهذا يعطينا عددين (2,-2) مرتبطان بنفس الصورة (4) وهذة دلالة على أنها ليست دالة واحد لواحد التى فيها عنصر واحد من a يرتبط بصورة واحدة من b.

لاحظ أنَّ كون الدالة تكون دالة واحد لواحد، يعتمد أساساً على المجال وليس فقط على القانون.

مثال (9)

إذا كانت الدالة $g = R \to R^+$ معرفة على النحو التالي:

$$g(x) = x^2,$$

فإنها دالة واحد لواحد لأننا استبعدنا الأعداد الحقيقية السالبة فعند التعويض بقيم مختلفة موجبة فإنك تتحصل على قيم مختلفة ولذلك يكون عنصر واحد في المجال A يرتبط بعنصر واحد في المجال المصاحب B.

مثال (10)

إذا كانت الدالة $f : R \to R$ معرفة بالقانون

$$f(x) = x^3$$

فإنها تمثل دالة واحد لواحد، حيث أنَّ لكل

$x, y \in R$ ، نجد أن $x \neq y$

وعليه

$$f(x) \neq f(y)$$

3.3 الدالة الشاملة Onto function

هنالك حالات لا تكون فيها كل عناصر B منتجة فعلاً بواسطة الدالة وهذا يعني أنه في بعض الأحوال بعض عناصر B قد لا تكون صورة لأي عنصر من A .

ففى أي حالة من الحالتين أعلاه – تعتقد عزيزي الدارس، أن الدالة تسمى بالدالة الشاملة؟

للإجابة على هذا السؤال اليك **التعريف** الآتي:

إذا كانت الدالة من A إلى B معرفة كالآتي: $f : A \to B$ ، فان الدالة (f) تسمى **دالة شاملة** (*onto*) إذا كان كل عناصر B تمثل قيمة للدالة في بعض عناصر A.

وأيضا هنالك تعريف آخر:

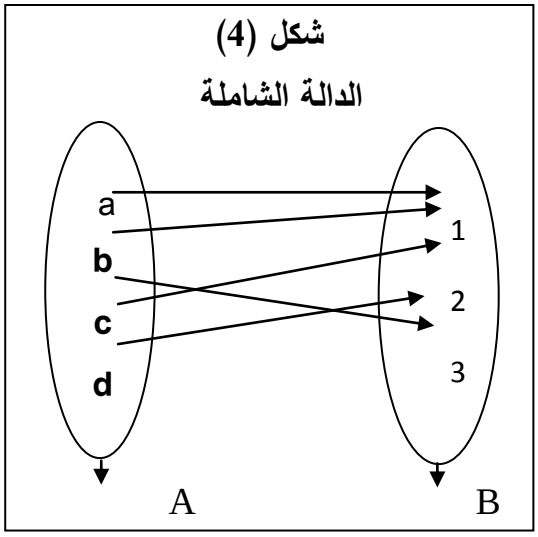
الدالة الشاملة: هي الدالة التي مداها ومجالها المصاحب متطابقان أو متساويان.

أي :

$$f\ (A) = B$$

وذلك يعنى أنه كل عناصر B صوراً، أي أن كل عناصر المجال المصاحب مرتبطة بعناصر في المجال.

$$f\ (A) = B$$



الشكل (4) يمثل دالة شاملة حيث أن أي عنصر في B هو صورة لعنصر واحد أو اكثر في A .

مثال (11)

إذا كانت الدالة ($f : z \to z$) في مجموعة الأعداد الصحيحة Z معرفة كالأتي:

$$f(x) = x^2 \text{ ، }$$

فإن هذه الدالة ليست دالة شاملة لأن أي عدد صحيح سالب يجب أن لا يمثل قيمة للدالة لأي عنصر في A فالدوال تعطى قيما غير سالبة (أي موجبة).

وبذا تكون الأعداد الصحيحة السالبة في المجال المصاحب ليست صورا لاي عنصر في المجال.

مثال(12)

الدالة f:R→R في الأعداد الحقيقية المعرفة كالآتي:

$$f(x)=x^2 \text{ ، }$$

ليست دالة شاملة لأن الأعداد السالبة لا تكون صوراً لأي عنصر في المجال.

مثال (13)

في الجانب الآخر، الدالة:

$$g: R \to R^{+}$$

معرفة بنفس المعادلة:

$$g(x) = x^{2},$$

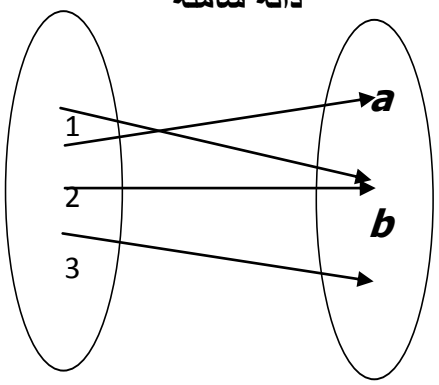
تمثل دالة شاملة طالما أن كل عدد حقيقي غير سالب (موجب) هو قيمة للدالة في أي عنصر من عناصر المجال.

مثال (14)

معطي الدالة $f : A \to B$ معرفة بالمخطط السهمي التالي:

شكل (5)

دالة شاملة



تلاحظ في هذه الدالة أن مدى الدالة يساوي المجال المصاحب

$$f(A) = \{a,b,c\}$$

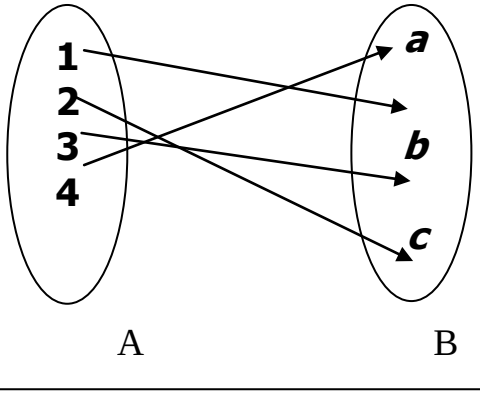
$$f(A) = B \text{ أي}$$

وفى هذه الحالة تكون الدالة دالة **شاملة** لأن كل عناصر B هي صوراً لعناصر من A .

الدالـة من A إلـى B تسمى **دالـة واحـد لواحـد الشـاملة** إذا كانـت تمثل دالـة واحد لواحد والدالـة الشـاملة فـي نفـس الوقـت. والشـكل (6) يوضـح هـذه الدالـة ففيهـا تـرى أن الدالـة لا يوجـد بهـا عنصـران مـن A لهمـا نفس الصـورة فـي B وفيهـا أيضـاً كـل عناصـر B تمثل قيمـة للدالـة فـي عناصر A .

شكل (6)

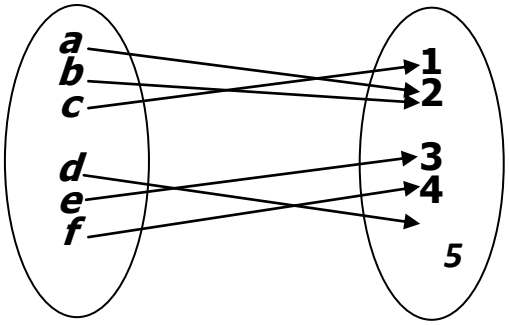
دالـة واحد– واحد الشاملـة

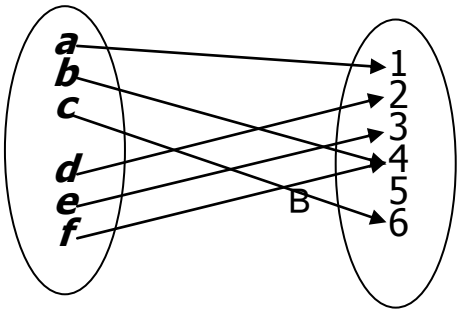


تدريب (2)

من فهمك للدالة واحد – واحد الشاملة والدالة الشاملة والدالة التي يمكن أن تتكون من هما. (دالة واحد واحد الشاملة) بين أي الدوال الآتية والمعرفة بالمخططات السهمية هي دالة واحد – واحد، أيها شاملة وأيها واحد– واحد الشاملة مع ايراد السبب الذي بنيت عليه تسميتك لكل دالة

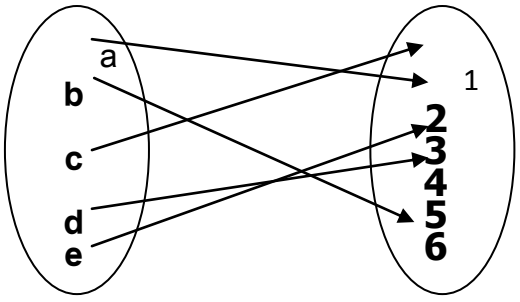
.1





A

.2



4.3 الدالة المتماثلة Symmetric Function

الدالة المتماثلة هي الدالة التي توجد في نفس المجموعة فتكون دالة من A إلى A $(f=A\to A)$

وتعرف كالآتي:

$$f(x) = x \text{ ، }$$

وفيها يكون المجال هو المجال المصاحب.

3.5 الدالة الثابتة Constant function

الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B $(f:A\to B)$، تسمى دالة ثابتة إذا كان العنصر $b\in B$ يرتبط بكل العناصر الموجودة في المجال.

وتعرف كالآتي:

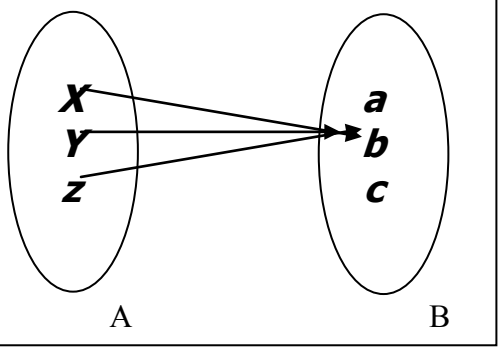
$$f(x) = b \text{ لكل عناصر } x\in A$$

مثال (15)

الدالة g من المجموعة A إلى المجموعة B أي $(g: A\to B)$ ، المعرفة بالمخطط السهمي التالي:

شكل (7)

الدالة الثابتة



XC1

تسمى دالة ثابتة لأن فيها عنصر واحد (b) يرتبط بكل عناصر المجال,

تدريب (3)



للتتأكد أنك تفرق بين الدالة المتماثلة والثابتة إليك هذا التدريب:

معطى الدالتين:

1. $f(x) = f(y) = f(3) = 5$

و

2. $f = \{(1,1),(2,2) , (3,3) \}$

أي الدالتين متماثلة وايها ثابتة ؟ ولماذا ؟

أسئلة تقويم ذاتي (2)

(1) أفرض أن الدالة $f : R \to R$ معرفه على النحو التالي:

$$f(x)= \begin{cases} 3x - 1, & x > 3 \\ x^2 - 2, & -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3, & x < -2 \end{cases}$$

أوجد:

$$f(4), f(-1), f(-3)$$

(2) إذا كان $V = \{2, 1, 0, -1, -2\}$ و الدالة g من V إلى R معرفة على النحو التالي: $(g : V \to R)$

$$g(x) = x^2 + 1$$

أوجد مدى الدالة g.

(3) وضح فيما إذا كانت الدوال التالية تمثل دالة واحد لواحد

(a) لكل فرد في الكرة الأرضية ارتباط الشخص بعمره

(b) لكل قطر في العالم ارتباط القطر بعدد سكانه .

(c) لكل قطر في العالم ارتباط رئيس الدولة ببلده .

(4) إذا كان المجموعة $A = [-1, 1]$ والدالة F، g، h معرفة من A إلى A على النحو التالي:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^3, h(x) = \sin x$$

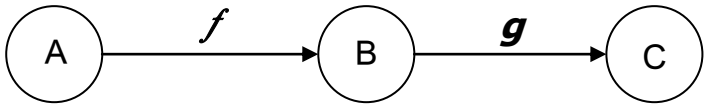
أي هذه الدوال شامله ولماذا ؟

6.3 الدالة المركبة Composite Function

إذا كانت هنالك دالة f من A إلى B (f:A→B) ودالة أخرى g من B (المجال المصاحب للدالة f) إلى C (المجال المصاحب للدالة g) أي g :B→C ، فان B تكون أيضاً مجالاً للدالة g و العلاقة بين هاتين الدالتين يمكن توضيحها أكثر بالشكل (8) التالي:

شكل (8)

العلاقة بين دالتين f و g



إذ كان $a\in A$ فصورته تكون $f(a)\in B$ وفى نفس الوقت $f(a)\in B$ هو عنصر في مجال الدالة g. وبالمثل يمكن ايجاد صورة العنصر $f(a)\in B$ بالنسبة للدالة g والتي هي $g(f(a))\in C$ ومن ثم يمكن إيجاد قاعدة ارتباط بين العناصر $a\in A$ وبين العناصر $g(f(a))\in C$ أي يمكننا أن نعرف دالة جديدة من A إلى C ويمكن أن نسميها h (h:A→C) والدالة h المعرفة بهذه الطريقة نرمز لها بـ:

$$(g\ o f) \quad \text{أو} \quad (gf)$$

وعليه ،

$$h\ (a) = (f(a))$$

وتسمى هذه **الدالة بالدالة المركبة من g و f** (composite function)

بصورة أوضح:

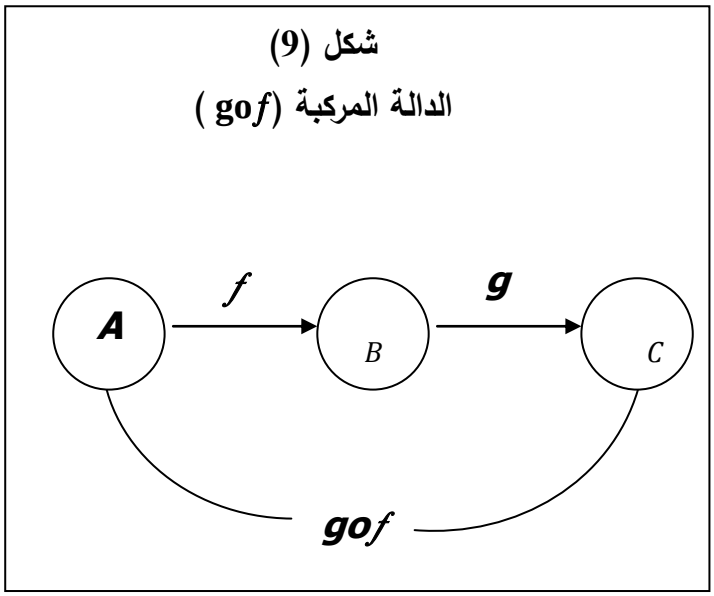
إذا كان لدينا دالتان

$$f\colon A\to B,\ g\ :B\to C$$

فإن الدالة المركبة منهما هي:

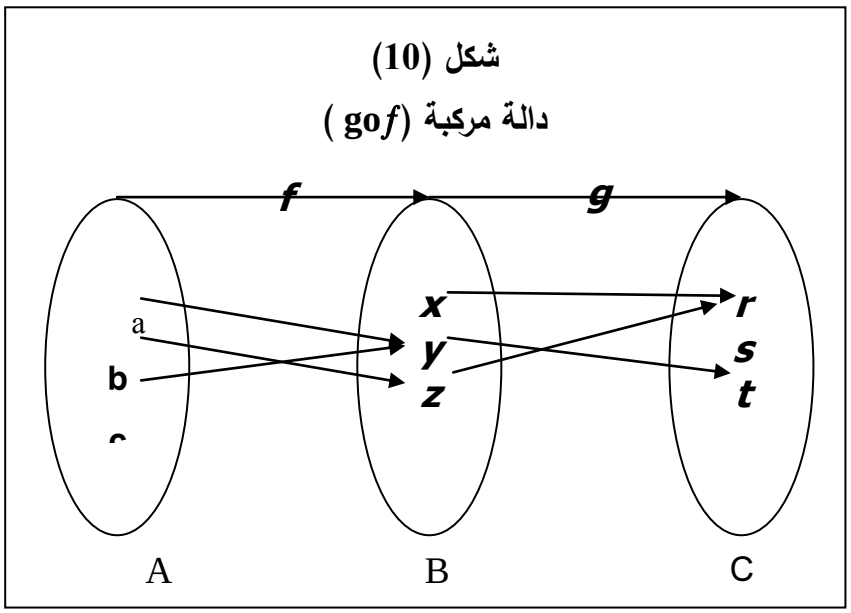
$$(go f)\ :\ A\to C\ (a)$$

تمعن الشكل (9) الآتي علـه يعزز من فهمك لهذه العلاقة فهو يلخص لك كل ما تحدثنا عنـه بخصوص الدالة المركبة:



مثال(16)

معطى دالتين، $f: A \to B$, $g: B \to C$ و معرفتان بالمخطط السهمي التالي:



في هذه الحالة يمكنك تعريف $(g\circ f):A\to C$ كالآتي:

$$(g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$

$$(g\circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$$

$$(g\circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

مثال (17)

إذا كان الدالة $f=R\to R$ في الاعداد الحقيقية معرفة كالآتي:

$$f(x)=x^2،$$

والدالة $g=R\to R$ في الاعداد الحقيقية معرفة كالآتي:

$$g(x) = x+3،$$

فإن $(g\circ f) = R\to R$ تكون معرفة أيضاً فى الأعداد الحقيقية وتحسب بالطريقة الآتية:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+3$$

ويمكن تعريف عكس هذه الدالة أي $(f\circ g)$ ، كالآتي:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3)^2 = x^2+6+9$$

تنبيه:

من المهم ملاحظة أن الترتيب الذي جاءت به كتابة الدالتين في الدالة المركبة $g\circ f$ ، هو عكس ترتيبهم في التطبيق الذي فيه f تتبع بـ g في المركبة ولكن الرمز اختير ليتطابق مع الرمز الطبيعي لتطبيق الدالة والذي يقرأ:

$$g\circ f\ (x) = g(f(x))$$

تدريب (4)



والان عزيزى الدارس إلى هذا التدريب:

1. معطى الدالتين: $f(x) = x^{10}$

و

$g(x) = 3x^4 - 1$،

أوجد: $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$

2. أوجد: $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$

للدالتين: $f(x) = x^7$

و

$g(x) = x^2 - x + 1$

3. أوجد $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$

للدالتين: $f(x) = x^{12}$

و

$g(x) = 2x^3 - 5$

7.3 الدالة العكسية Inverse Function

هنالك سؤال مهم في الدوال وهو هل يمكن الرجوع بالتغيرات التي نتجت بواسطة الدالة؟ بمعنى أنه هل يمكننا أن نرجع للوراء من القيمة النهائية إلى القيمة الأولى في المجال الذى نتجت عنه هذه القيمة؟

للاجابة على هذا السؤال ومعرفة كيفية الرجوع وراءً عليك بالتركيز ومن ثم تتبع شرحنا الآتي:

معطى الدالة f معرفة من المجموعة A إلى المجموعة B على النحو التالي

$$f : A \to B$$

يمكننا القول بان هنالك دالة عكسية (f^{-1}) لهذه الدالة معرفة كالآتي:

$$f^{-1}: B \to A$$

بحيث أن لكل $a \in A$ و $b \in B$ يكون الآتي:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

في هذه الحالة يمكننا القول أن f^{-}دالة عكسية لدالة f .

أي بمعنى انه إذا كانت f دالة واحد لواحد ودالة شاملة فان الدالة العكسية f^{-1} موجودة وتعرف على النحو التالي

$$f^{-1} = B \rightarrow A$$

أي إذا كان $b \in B$ صورة للعنصر $a \in A$ فان الدالة العكسية للدالة

$$f(a) = b \text{ ، }$$

هي

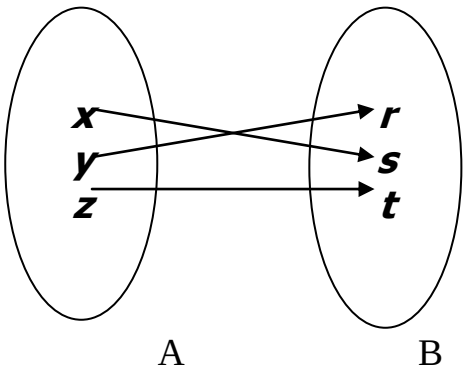
$$f^{-1}(b) = a$$

مثال (18)

معطى الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B $(f: A \rightarrow B)$ معرفة بالمخطط السهمي التالي:

شكل (11)

f: A→B



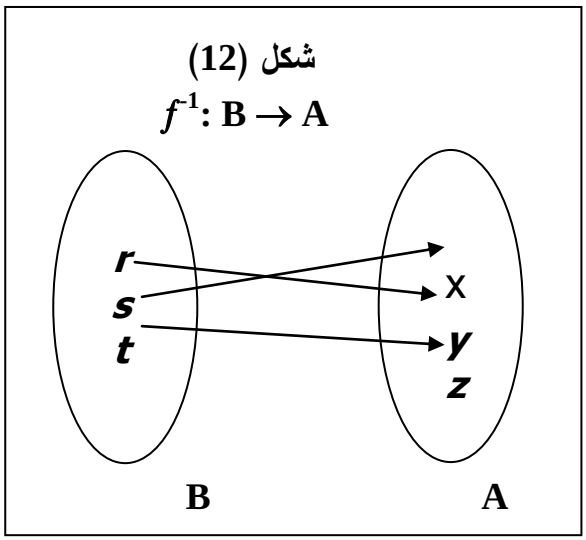
منها عرف الدالة العكسية f^{-1}

الحل:

الدالة العكسية f^{-1} تعرف كالآتي:

$$f^{-1}: B \to A$$

ويعبر عنها بالمخطط السهمي التالي:



لاحظ أننا تمكنا من الرجوع خلفاً من القيمة النهائية إلى القيمة الأولى في المجال.

مثال (19)

إذا كان الدالة $f: R \to R$ معرفة في الأعداد الحقيقية كالآتي:

$$f(x) = 2x+3 ،$$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} .

الحل:

الدالة العكسية f^{-1} في الأعداد الحقيقية هي $f^{-1}: R \to R$ ومعرفة كالآتي:

$$f^{-1}(x) = (x-3)/2$$

لاحظ: في حالة دالة معطاة على شكل $y=f(x)$ ، يجب أن نوجد كمية معاكسة لايجاد x.

لذلك في المثال الأعلى إذا عبرنا عن الدالة الاصلية f^{-1} بطريقة المعادلة الآتية:

$$y = 2x+3$$

حل x سيعطى قيمة f^{-1} (x)

$$x = (y–3) /2$$

بمعنى أن الدالة العكسية هي الدالة $f^{-1}R \to R$ معرفة بالآتي:

$$f^{-1}(y) = (y–3) /2$$

أسئلة تقويم ذاتي (3)

(1) افرض أن الدوال f و g معرّفة على النحو التالي

$f:R\to R$ حيث $f(x)=2x+1$

$g:R\to R$ حيث $g(x)=x^2-2$

أوجد $(gof),(fog)$

(2) الدالتان f و g معرفتان على النحو التالي

$f:R\to R$ حيث $f(x)=x^2+2x-3$

$g:R\to R$ حيث $g(x)=3x-4$

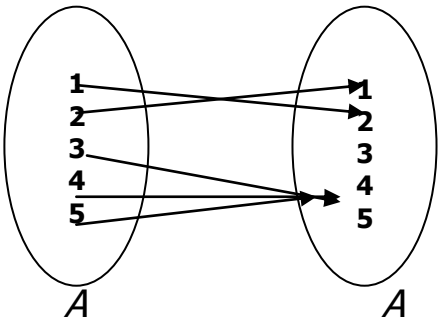
(a) أوجد: (fog) و (gof)

(b) اثبت من (a) أعلاه $(gof)(2)=g(f(2))$

$(fog)(2)=f(g(2))$

(3) إذا كان $A=\{1,2,3,4,5,\}$ افرض أن الدالة $f:A\to A$

معرفة حسب المخطط السهمي التالي:



أوجد :

$f^{-1}(2),\ f^{-1}(3),\ f^{-1}(4),\ f^{-1}\{1,2\},\ f^{-1}\{2,3,4\}$

(4) إذا كانت الدالة $f:R\to R$ معرفة على النحو التالي

$f(x)=x^2$

أوجد $f^{-1}(25),\ f^{-1}(-9),\ f^{-1}([-1,1]),\ f^{-1}([-\infty,0])$

(5) إذا كان $f:R\to R$ معرفة بالقانون

$f(x)=2x-3$ اثبت ان الدالة f دالة واحد لواحد ودالة شاملة ومن ثم أوجد القانون العام للدالة f^{-1} .

الخلاصة

ناقشنا في الوحدة الثانية موضوع الدوال وفيه تناولنا بالشرح والقوانين والأمثلة عدة مفاهيم ترتبط بذات الموضوع ونرجو أن نكون قد وفقنا في تحقيق ما جاءت به الأهداف لهذه الوحدة. على اية حال سنزودك بملخص لأهم ما جاء بهذه الوحدة من نقاش ومفاهيم وقوانين.

في هذه الوحدة نخلص إلى الآتي:

ذكرنا أن **الدالة** من المجموعة غير الخالية A إلى B تعرف على أنها قاعدة لربط المجموعتين A و B بحيث أنه يكون لكل عنصر a في A هنالك عنصر واحد فريد $f(a)$ في B يسمى قيمة الدالة (f) في a . وبينا أن $\boldsymbol{f:A\rightarrow B}$ تكتب للدلالة على أن f دالة من A إلى B وأيضا أوضحنا لك أن المجموعة A تسمى **المجال** والمجموعة B تسمى **المجال المصاحب** للدالة f .

إضافة إلى كل ذلك تعرفت على **مدى الدالة** الذى هو مجموعة العناصر الصور فى B وعرفت أنه يمكنك أن ترمز له ب f [A]

كما انك أيضاً درست كيفية إنشاء **مخطط سهمي** لأي دالة وذلك بأن تشير بالاسهم من العناصر في المجموعة A إلى العناصر والصور المرتبطة معها في المجموعة B وكل مجموعة تضعها داخل شكل بيضاوي.

انتقلت بك الوحدة بعد ذلك إلى الأنواع المختلفة للدوال وتناولت بالشرح والأمثلة الفرق بين الدوال المختلفة. فأوضحنا أن كل دالتين يقال انهما **متساويان** إذا كانتا معرفتان في نفس المجال ونفس المجال المصاحب وكانت $f(a) = g(a)$ لكل $a\in D$. وذكرنا أن دالة **واحد لواحد** هي الدالة التي لا يوجد بها عنصران من A يرتبطان بنفس الصورة في B . **والدالة الشاملة** عرفناها على انها هي الدالة التي فيها كل عناصر B تمثل صوراً لعناصر A أي أن مداها ومجالها المصاحب متطابقان. وأوضحنا أن هنالك دالة يمكن أن تأتي من دمج الدالتين السابقتين وهي **دالة واحد لواحد الشاملة** فهي دالة لا يوجد بها عنصران من A لهما نفس الصورة في B وايضا فيها كل عناصر B تمثل قيمة للدالة في عناصر A .

الدالة التي توجد في نفس المجموعة قلنا انها هي **الدالـة المتماثلـة** التي يكون فيها المجال هو المجال المصاحب، بينما **الدالـة الثابتـة** أوضحنا انها هي الدالة ($f: A\to B$) التي فيها عنصر واحد من B ($b\in B$) يرتبط بكل العناصر الموجودة في المجال.

تناولنا **الدالة المركبة** بالشرح وقلنا انها هي دالة جديدة من A إلى C ($h: A\to C$) ، إذا كانت لدينا اصلا دالتان $g: B\to C$ و $f: A\to B$ و رمزنا لها بـ (gof). كما اننا تطرقنا **للدالـة العكسية** وذكرنا انها هي دالة عكسية للدالة $f: A\to B$ وتكتب $f^{-1}: B\to A$ و فيها يكون لكل $a\in A$ و $b\in B$ يكون الحال كالآتي:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

نتمنى أن يكون هذا الملخص مفيدا لك ومحققاً للأهداف التي جاءت بها الوحدة.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحـدة القادمــة سـتعرفك بمفهـوم العلاقـات وتوضـح لـك الأنـواع المختلفـة للعلاقـات مـع ذكـر الاختلافات بينها.

نأمل أن تجدها وحدة سهلة واضحة وان تفيد منها كثيراً.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1. أ. مجال الدالة = {a,b,c,d,e} .

ب. المجال المصاحب للدالة هو {1,2,3,4} .

ج. الدوال من A إلى B هي $f(a) = 1, f(b) = f(c) = 3, f(d) = f(e) = 2$

د. مدى الدالة هو : $f(A) = \{1,2,3\}$.

2. الدالة :$f=\{(-2,3),(-1,3),(0,2),(1,2)\}$

أ. مجال الدالة = {-2,-1,0,1}

ب. مدى الدالة = $f(A) = \{2,3\}$.

ج. المجال المصاحب = {1,2,3,4} .

تدريب (2)

في المخطط السهمي

1- الدالة دالة شاملة: لأن كل عناصر B صور لعناصر A.

2- الدالة دالة واحد لواحد الشاملة: لأن كل عناصر B صور لعناصر A لا يوجد عنصران في A لهما الصورة نفسها في B.

3- الدالة دالة واحد لواحد: لأن لا يوجد بها عنصران في A لهما الصورة في B.

تدريب (3)

الدالة $f(x) = f(y) = f(z) = 5$.

هي دالة ثابتة لان فيها عنصر واحد (5) يرتبط بكل العناصر .

2- الدالة: $f = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

هي دالة متماثلة لان المجال قيها = المجال المصاحب.

= {1,2,3} وهي معرفة في نفس المجموعة.

تدريب (4)

1. $g(x) = 3x^4 - 1$ و $f(x) = x^{10}$

$fog(x) = f(g(x) = (g(x)^{10} = (3x^4 - 1)^{10}$
$gof(x) = g(f(x) = 3\,(f(x)^4 - 1 = 3(x^{10})^4 - 1 = 3x^{40} - 1$

2. $g(x) = x^2 - x + 1$ و $f(x) = x^7$

$(fog)\,(x) = f(g(x) = (g(x)^7 = (x^2 - x + 1)^7$
$(gof)\,(x) = g(f\,(x) = (f\,(x)^7 + 1 = (x^2 - x)^7 + 1 = x^{14} - x^7 + 1$

3. $g\,(x) = 2x^3 - 5$ و $f(x) = x^{12}$
$(fog)\,(x) = f(g(x) = g(x)^{12} = (2x^3 - 5)^{12}$
$(gof)\,(x) = g(f\,(x) = g(x)^{12} = (x^5)^{12} = 2x^{60} - 5$

تدريب (5)

1- الدالة f معرفة كالآتي: $f(x) = 13\,x + 7$

$f^{-1}(x) = (x-7)/13$

2- $f(x) = x^2$ و $x \geq 0$

a) $f\text{-}1(x) = x$

b) $(fof^{-1}(3) = f(f^{-1}(3) = f^{-1}(3)2 = (3)^2 = 3$.

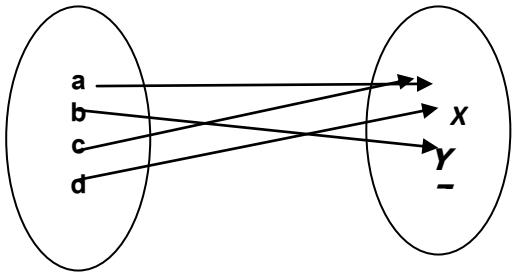
c) $f^{-1}(4) = 4 = 2$.

d) $(fof\text{-}1)(x) = f(f\text{-}1(x) = (f\text{-}1(x)\,2 = x = (x)2$.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

التقويم الذاتي (1)

1. المخطط السهمى لتعريف الدالة هو:



A B

2. مدى الدالة هو f(x, y, z } = (a }
3. مجال الدالة هو a, b, c, d } = A }
4. المجال المصاحب هو x, y, z } { x, y, z } = B }

التقويم الذاتي (2)

.1

$$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x>3\\ x^2-2, & -2\le x\le 3\\ 2x+3, & x<-2\end{cases}$$

f (4) = 3 x 4 – 1 = 11
f (-1) = $(-1)^2$ – 2 = - 1
f (-3) = 2 (-3) + 3 = - 3

2. (2) مدي الدالة $g(v) = \{5 , 2 , 1\}$

3. (a) هذه الدالة ليست دالة واحد لواحد

(b) هذه الدالة ليست دالة واحد لواحد

(c) هذه الدالة دالة واحد لواحد

4. $f(x) = x^{2*}$

هذه الدالة غير شاملة لأن كل العناصر السالبة في المجال المصاحب ليست صوراً .

$g(x) = x^{2*}$

هذه الدالة تمثل دالة شاملة لأن $g(A) = A$

$b(x) = \sin x^{*}$

لا تمثل دالة شاملة لأنه لا يوجد عدد في A حيث $\sin x = 1$

التقويم الذاتي (3)

(1) $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x^2 - 2$

$g \text{ of } (x) = g[f(x)] = g[2x + 1]$

$= g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 2$

$gof(x) = 4x^2 + 4x - 1$

$fog(x) = f[g(x)] = f[x^2 - 2]$

$= 2(x^2 - 2) + 1$

$= 2x^2 - 4 + 1$

$= 2x^2 - 3$

(2) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$g(x) = 3x - 4$

(a) $gof(x) = g[f(x)] = g[x^2 + 2x + 3]$

$= 3 (x^2 + 2x + 3) – 4$
$= 3 x^2 + 6x + 9 – 4$
$= 3 x^2 + 6x + 5$

$fog(x) = f [g(x)] = f[3x – 4]$
$= (3x – 4)^2 + 2 (3x – 4) + 3$
$= 9x^2 – 24x + 16 + 6x – 8 + 3$
$= 9x^2 – 18x + 11$

$gof (2) = g [f(2)] = 12 + 12 + 5 = 29$ (b)
$fog (2) = f [g(2)] = 36 – 36 + 11 = 11$

(3) f^{-1} تتكون من العناصر التي صورتها 2 فقط 4 في هذه الحالة أي،

$f^{-1}(2) = \{4\}$
$f^{-1}(3) = \phi$
$f^{-1}(4) = \{1,3,5\}$
$f^{-1}\{1,2\} = \{1,2\}$
$f^{-1}\{2,3,4\} = \{4,1,3,5\}$

$f(x) = x^2$ (4)

$f^{-1}(25) = \{5\}, \qquad f^{-1}(-9) = \phi$

$f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$

$f^{-1}((-\infty,0]) = [-\infty,0]$

$f = R \to R$, $f(x) = 2x - 3$ (5)

أفرض أن الدالة ليست واحد لواحد فهذا يعني يوجد عنصران

$x_1, x \in R \qquad x_1 \neq x_2$

لكن

$f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$ لا يتأتي إلا إذا كان $x_1 = x_2$

إذاً الدالة واحد لواحد

لكل $y \in R$` في المجال المصاحب يوجد عنصر x في R

y صور له

$y = 2x - 3$

$$x = \frac{y+3}{2}$$

طالما y عدد حقيقي فإن $\frac{y+3}{2}$ أيضاً عدد حقيقي .

اذن الدالة شاملة

أما الدالة العكسية

$$f^{-1}(x) = \frac{y+3}{2}$$

CX

مسرد المصطلحات

الدالة function من المجموعة A إلى المجموعة B

هي قاعدة أو علاقة ثنائية تربط بين المجموعتين غير الخاليتين A و B بحيث أنه يكون لكل عنصر a في A هنالك عنصر واحد فريد b في B .

مدى الدالة function range

في الدالة $f: A \rightarrow B$ مدى الدالة هو مجموعة العناصر في B ويرمز لها بـ $f[A]$.

المجال Domain

إذا كانت هنالك دالة $f: A \rightarrow B$ من A إلى B ، فان المجموعة A تسمى بالمجال.

المجال المصاحب Co Domain

إذا كانت هنالك دالة من A إلى B $(f: A \rightarrow B)$ ، فإن المجموعة B هي المجال المصاحب.

الصورة Image

في الدالة $f: A \rightarrow B$ العنصر الفريد b في المجموعة B الذي يرتبط بالعنصر a في المجموعة A ، يسمى صورة العنصر a أو قيمة الدالة ويرمز له بـ $f(a)$ ، ويقرأ دالة a .

الدوال المتساوية Equal function

تسمى الدالتان f و g دالتين متساويتين إذا كانتا معرفتان في نفس المجال (D) ونفس المجال المصاحب وكان لكل $a \in D$ ، $f(a) = g(a)$.

الدالة واحد لواحد One to one Function

الدالة من A إلى B $(f: A \rightarrow B)$ تسمى بدالة واحد لواحد، إذا كان لا يوجد بها عنصرين من A لهما نفس الصورة في B أي أن كل عنصر من A له صورة لوحده.

الدالة الشاملة Onto Function

في الدالة المعرفة من المجموعة A إلى المجموعة B ($f: A \to B$) ، الدالة تسمى بالشاملة إذا كان كل عناصر B تمثل قيمة للدالة (أي انها صور) في بعض عناصر A وهي أيضاً الدالة التي مداها ومجالها المصاحب متطابقان أي $f(a) = b$.

الدالة المتماثلة Symmetric Function

هي الدالة التي توجد في نفس المجموعة ($f: A \to A$) أي $f(x) = x$ وفيها يكون المجال هو المجال المصاحب.

الدالة الثابتة Constant Function

هي الدالة التي فيها العنصر $b \in B$ ، يرتبط بكل العناصر الموجودة في المجال وتعرف كالآتي : $f(x)=b$ لكل عناصر $x \in A$.

الدالة المركبة Composite Function

إذا كانت لدينا دالتان : $f: A \to B$ و $g: B \to c$ ، يمكننا أن نعرف دالة جديدة من A إلى C يرمز لها بـ (gof) وتسمى الدالة المركبة.

الدالة العكسية Inverse Function

إذا كان هنالك دالة معرفة من المجموعة A إلى المجموعة B ($f: A \to B$) فالدالة العكسية لها هي $f^{-}: B \to A$ أي أنه لكل $a \in A$ و $b \in B$ يكون:

$$f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$$

المراجع

6. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
7. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
8. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
9. **Finite Mathematics**, Shaum Series
10. **Set Theory**, Shaum series.


الوحدة الثالثة
العلاقات
Relations

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**110**
تمهيد	110
أهداف الوحدة	111
1. مفهوم العلاقة	**112**
1.1 تعريف العلاقة	112
2.1 أزواج العناصر المرتبة	113
3.1 الحاصل الكارتيزى	113
2. العلاقة الثنائية	**114**
3. صفات العلاقات الثنائية	**120**
1.3 العلاقة العكسية	120
2.3 العلاقة المنعكسة	121
3.3 العلاقة المتماثلة	122
4.3 العلاقة غير المتماثلة	122
5.3 العلاقة المتعدية	123
6.3 العلاقة المتكافئة	125
7.3 التجزئة	126
8.3 العلاقة بين العلاقة المتكافئة وبين التجزئة	127
الخلاصة	**130**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**131**
إجابات التدريبات	**132**
إجابات التقويم الذاتي	**133**
مسرد المصطلحات	**136**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

تحتوي هذه الوحدة ثلاثة أقسام رئيسة تتناول بالشرح والتوضيح موضوع العلاقات واستخدامها فى الرياضيات المتقطعة.

فالقسم الأول يتناول بالتعريف مفهوم العلاقات فى المجموعات. أضف إلى ذلك أنه يبين لك ما هو زوج العناصر المرتبة وما هو الحاصل الكارتيزى وما العلاقة بينهما.

القسم الثانى تجد به تعريفاً للعلاقة الثنائية على أساس زوج العناصر المرتبة والحاصل الكارتيزى. ويوضح لك أيضاً مكونات العلاقة الثنائية الأساسية. كما أنه يعرفك بكيفية كتابة وقراءة هذه العلاقات.

القسم الثالث وهو أطول الأقسام جميعها، يحتوي ثمانية أقسام فرعية عمدنا على وضعها فى قسم واحد لما لها من وثيق صلةٍ ببعضها. فأنواع العلاقات أوصفاتها هو ما يخصه هذا القسم بالشرح والنقاش حيث ستتمكن من معرفة طريقة كتابة كل نوع من هذه العلاقات ومن الكيفية التي تثبت بها علاقةٍ ما إعتماداً على المعطيات المصاحبة لها.ستتبين أننا زودناك بأمثلة إضافية من أجل تعزيز وتدعيم الفهم لديك. ستلاحظ أيضاً أننا وضعنا عدد من التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي وحلولها علها تكون لك معيناً لترسيخ المفاهيم والقوانين.

مرةً أخرى، أهلاً بك إلى هذه الوحدة علنا نكون قد وفقنا في إيصال ما نرمى إليه. نقدك وتحليلك لمادة الوحدة لاشك سوف يساعد في تطويرها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن

تكون قادراً على أن:

5. تعرِّف العلاقة بين مجموعتين.
6. تعرِّف الزوج المرتب والحاصل الكارتيزى.
7. تشرح العلاقة الثنائية إعتماداً على الحاصل الكارتيزى.
8. تصف العلاقة العكسية بين المجموعتين A و B.
9. تفرق بين خمسة أنواع من العلاقات، العلاقة المنعكسة، العلاقة المتماثلة، العلاقة غير المتماثلة، العلاقة المتعدية والعلاقة المتكافئة.
10. تبين ما هى التجزئة وتوضح شروطها.
11. تصف العلاقة بين العلاقة المتكافئة والتجزئة.
12. تستخدم الرموز للتعبير عن أى نوع من أنواع العلاقات وكل المفاهيم الواردة أعلاه.
13. تحل المسائل المرتبطة بالعلاقات متى ما تعين عليك ذلك.

العلاقات Relations

1. مفهوم العلاقة Relation Concept

1.1 تعريف العلاقة

فى كثير من المسائل التي تخص العناصر المتقطعة (discrete objects) غالباً ما تكون هنالك علاقة بين هذه العناصر. فإذا كان هنالك مجموعتين A و B، فالعلاقة الثنائية بينهما تعرف كالآتى:

العلاقة (relation) بين A و B هى:العلاقة التى تربط عناصر معينة من A بعناصر معينة من B .

قمثلاً (1)

بين مجموعة كتب الرياضيات يمكننا ان نقول ان اثنين من هذة الكتب **ذات علاقة** أو **صلة** إذا كانا يقتسمان أو يتشاركان فى بعض **الوحدات** وليس بينهما صلة اخرى.

مثال (2)

إذا كان A هى مجموعة كل الناس فى الخرطوم و B هى مجموعة كل العربات الموجوده بها. فعندئذ **الملكيه** بين A وB هى **علاقة** بين A وB .وفى هذه الحاله الرجل p له **علاقة** مع العربه x إذا كان p يملك x .

في النقاش الرياضي عموماً نرجع للعلاقة بين المجموعة A و المجموعة B على أساس **الحاصل_الكارتيزى** ونعني بها العلاقة في $A \times B$ ولكي نوضح ذلك أكثر لابد لك عزيزي الدارس من أن تلم بمفهومين هما **زوج العناصر المرتبة والحاصل الكارتيزى** وعلاقتهما بمفهوم **العلاقة** relation فإلى هذين المصطلحين الرياضيين.

2.1 أزواج العناصر المرتبة Ordered pairs of objects

ماهو زوج العناصر المرتبة؟

> **زوج العنصر المرتب** هو زوج من العنصر موضوع أو منظم بترتيب ثابت نستعمل الرمز (a,b)للاشارة للزوج المرتب الذي فيه العنصر الأول هوa والعنصر لثاني هو b .

لاحظ أنَّ الزوج **المرتب** يختلف من مجموعة عنصرين. فالترتيب للعناصر في حالة الزوج المرتب مهمة جداً. لذلك (a,b) و (b,a) زوجين مرتبين مختلفين. أيضاً أنّ العنصرين في الزوج المرتب لآيحتاجان إلى تمييز فالزوج (a,a) هو زوج مرتب.

3.1 الحاصل الكارتيزى Cartesian product

إذا اخذناAو B مجموعتين غير خاليتين فالناتج الكارتيزي لهاتين المجموعتين يرمز له بـ $A\times B$ ويعرَّف على أنه:

> **الحاصل الكارتيزي** هو مجموعة كل العناصر المرتبة من النوع (a,b) حيث $a\in b,b\in a$

مثال(3)

معطى $A=\{a,b\}$

و

$B=\{a,c,d\}$ ،

أوجد الحاصل الكارنيزي$A\times B$ لهاتين المجموعتين

الحل

$$A \times B = \{a,b\} \times \{a,c,d\}$$
$$= \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d)\}$$

2. العلاقة الثنائية Binary relation

بعد ان عرفت ماهو الزوج المرتب وماهو الحاصل الكارتيزي، إليك العلاقة أو الصلة بين **العلاقة الثنائية والحاصل الكاتيزي**.

فالعلاقة الثنائية ماهي إلاَّ **مجموعة جزئية *(Subset)*** من الحاصل الكارتيزي $A \times B$ (أي أنها مجموعة مرتبة من العناصر).

إذا تمعنت هذا التعريف ستجد أنَّه قريب من التعريف السابق فيما عدا أننا في هذا التعريف عرفنا العلاقة الثنائية اعتماداً على الحاصل الكارتيزي.
ونسوق إليك هذا التعريف بالرموز علَّه يرسخ لك أكثر.
إذا كان A وB مجموعتين غير خاليتين، فإنَّ العلاقة الثنائية R المعرفة بين المجموعتين A وB هي **مجموعة جزئية** من الحاصل الكارتيزي AXB أي أنَّ :

$$R \subset A \times B$$

حيث الجملة الخبرية $P(x,y)$ تكون صحيحة فى العلاقة R ، إذا كان العنصر $(a,b) \in A \times B$ هو أيضاً عنصر في العلاقة R بمعنى أنَّ $(a,b) \in R$ أيضاً.
من هذا كله يتضح لك أنَّ العلاقة الثنائية حقيقةً ما هي إلاَّ تشكيل لنظرية البدهية التي تقول أنَّ **بعض العناصر** في A ذات علاقة **ببعض العناصر** في B. فالعلاقة R هي علاقة ثنائية من A إلى B وإذا كان الزوج المرتب (a,b) في R ، تقول في هذه الحالة أنَّ العنصر a ذا صلةٍ بالعنصر b .

مثال(4)

أفرض أنَّ:

$A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,5,3,7\}$

ومنهما أوجد العلاقة R

$R \subset A \times B$ المعرَّفة كالاتي:

$$x < y$$

الحل

أولاً نوضح ماذا تعني $x < y$ ؟

العلاقة R هي مجموعة عناصرها هي أزواج العناصر المرتبة فكل زوج مرتب في R يتكون من عنصرين ففي هذا المثال سميَّ العنصر من A بـ x والعنصر من B بـ y

وعليه $x < y$ تعني أنَّ كل زوج مرتب في R يجب أن يكون $x < y$ وهذا يعني أنَّ كل زوج مرتب فيه x أكبر من أو تساوي y لايدخل في هذه العلاقة أى $(x \not\geq y)$.

لذا فإنَّ المجموعة تتكون من:

$$R = \{(1,5),(1,3),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7),(4,5),(4,7)\}$$

تلاحظ من المثال السابق أن العنصر $(4,1) \notin R$ مثلاً وايضاً العنصر $(1,1) \notin R$

ينتميان لـ $A \times B$ $(1,1) \in A \times B$ و$(1,4) \in A \times B$. لكن حسب قانون الإرتباط، المكون الأول للزوج المرتب يجب أن يكون أصغر من المكون الثاني في نفس الزوج المرتب. فهذان العنصران حسب هذه المعطيات ليسا عنصرين في هذه العلاقة. لك

تدريب (1)



لعلك تحب أن تتوقف هنا لتتأكد أنك قد إستوعبت ما سبق عن العلاقة الثنائية، حاول حل هذا التدريب لتتأكد من ذلك:

أ. إذا كانت المجموعة $A = \{a,b,c,d\}$ وكانت هى مجموعة برامج كمبيوتر هذه البرامج تلتقى فى صفات وتختلف فى أخرى، عين العلاقة R فى هذه المجموعة بحيث أن كل برنامج له علاقة فقط مع البرنامج الذى يليه.

ب. معطى المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ ، أوجد العلاقة R فى A المعرفة كالآتى:

xRy أى أن $x \leq y$ ،

و يمكنك القول أنَّ **العلاقة الثنائية** R تتكون من:

1- المجموعة غير الخالية A

2- المجموعة غير الخالية B

3- الجملة الخبرية $P(x,y)$ التي فيها $P(a,b)$ إمَّا جملة صحيحة أو خاطئة لأى زوج مرتب $(a,b)\in A\times B$

في هذه الحالة تسمى R علاقة ثنائية من A إلى B ويمكنك كتابتها على النحو التالي:

$$R=(A,B,P(x,y))$$
$$R=(A,B,P(x,Y))$$

أو يمكنك أن تكتبها كالاتي:

إذا كان R علاقة **ثنائية** بين **مجموعتين** خاليتين A و B فإن R يعبَّر عنها **بالمجموعة** الاتية:

$$R=\{(a,b)\in A\times B/aRb\}$$

لذلك لأي عنصر $a\in A$ و $b\in B$، فإن الحال كالاتي:

aRb iff $(a,b)\in R$ (iff تعني فقط وفقط إذا كان)

لذلك إذا كانت الجملة $P(a,b)$ صحيحة يمكن كتابتها:

$$aRb$$

وتقرأ a ترتبط (أو ذات علاقة) بـ b

وإذا كانت الجملة $P(f,d)$ غير صحيحة، فإننا نعبر عن ذلك كالاتي:

$$f \not R d$$

وتُقرأ f **ليست** في ارتباط (أو ليست لها علاقة) مع d

مثال (5)

إذا كان $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{a,b\}$

والعلاقة بينهما هي $R=\{(1,a),(1,b),(3,a)\}$

فإنَّ عناصر المجموعة الجزئية الاخرى المكملة لهذه العلاقة في الحاصل الكارتيزي، **لا تكون** ذات ارتباط أو صلة مع بعضها.

بمعنى أنَّ:

$$1Ra,1Rb,2\not Ra,2\not Rb,3Ra,3\not Rb$$

مثال (6)

معطى العلاقة $R=[R,R,P(x,y)]$ المعرَّفة على النحو التالي:

$$x>y$$

ففي هذه العلاقة:

$$5R3,-2R-5,-2\not R-1$$

مثال (7)

إذا كانت R معرفة في مجموعة الاعداد الحقيقية كالاتي:

$$y<y+1$$

فإنَّ:

$$R=\{x|(a,b),b-a>0\}$$

تدريب (2)



أدعوك إلى حل هذا التدريب علَّك توفق في حله.

1- أوجد العلاقة الثنائية من المجموعة A إلىA إذاكان

A مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة من 8-1 وكانت العلاقة

R معرَّفة كالاتي: (a,b) في R أي aRb فقط وفقط إذا كان $a-b\geq 5$.

2- إذا كان $A=\{A,B,C\}$ مجموعة لثلاثة دارسين في جامعة السودان المفتوحة وكان $B=\{C_1,C_2,C_3,C_4\}$ مجموعة لاربعة مقررات وكانت المجموعة:

$$C=\{(a,c_1),(a,c_4),(b,c_2),(b,c_2),(b,c_4),(c,c_1),(c,c_3)\}$$

تمثل المقررات التي لاتخص الدارسين الثلاثة (أي أنَّه **ليست** بينهم **علاقة**)، من هذه المعطيات، أوجد المقررات التي تنصب في مجال الدارسين الثلاثة (c,b,a)

قبل أن ننتقل إلى موضوع آخر نحب أن نوضح لك بعض الامور المهمة التي ترتبط بهذا القسم. إذا كان R هي علاقة في $A\times B$ فإننا نسمي المجموعة A بالمجال والمجموعةB بالمجال المصاحب

في حال أنَّ R (العلاقة الثنائية) هي علاقة فيها المجال والمجال المصاحب متطابقان (أي أنهما بنفس المجموعة) ، فإنَّ المجموعة تسمى **بالمجموعة الاساسية** للعلاقة R . بمعنى آخر R هي علاقة تربط بين عناصر **نفس المجموعة** أي أنها هي علاقات في$A\times A$ وتسمى بالعلاقات في **A** .

لتعيين أي علاقة، من الاهمية بمكان تعيين **المجال والمجال المصاحب** (أو المجموعة الاساسية).

غالباً ماترمز للعلاقات بالاحرف: R,S

مثال للعلاقات في A :

$<, \leq, =$ هي علاقات في المجموعة N مجموعة الاعداد الطبيعية. ففي حالة أقل من $<$ ، معطى أي زوج n,m

من الأعداد الطبيعية، فالحال امَّا أنَّ m<n أو أنَّ m>n غير صحيحة. في حال m<n نقول، m و n في **صلة** أو **ارتباط** بواسطة علاقة أقل من، أي أنهما يحققان هذه العلاقة.

في هذه الحالة m<n تعبَّر عن **علاقة معينة** بين m و n وهي أنَّ m أقل من n . وبذات الطريقة العلاقتين $\leq, =$.

3. صفات العلاقات الثنائية Properties of binary relation

سنركز هنا على العلاقات الثنائية في المجموعات خاصة العلاقات الثنائية بين عناصر المجموعة **الواحدة**.

وسنتحدث عن انواع ومسميات العلاقات الثنائية المختلفة.

1.3 العلاقةالعكسية Inverse Relation

كل علاقة R بين المجموعتين غير الخاليتين $(R \subset A \times B)$ A,B، لها علاقة عكسية R^{-1} من المجموعة B إلى A $(R^{-1} \subset B \times A)$ ،

وفي هذه الحالة يكون المجال B (بدلاً من A) والمجال المصاحب يكون A (بدلاً من B في العلاقة R).

العلاقة العكسية R في الازواج المرتبة إذا تمَّ عكسها هي **عناصر** في العلاقة R . ونرمز للعلاقة العكسية بـ:

$$R^{-1} = \{(b,a)/(a,b) \in R\}$$

مثال (8)

معطى $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{a,b\}$ و العلاقة من A إلى B هي:

$R = \{(1,a),(1,b),(3,a)\}$ أوجد العلاقة العكسية (من B إلى A)

الحل

$R^{-1} = \{(a,1),(b,1),(a,3)\}$

تنبيه: كل أنواع العلاقات الاتي ذكرها هي علاقات في A أي أنَّ المجال فيها هو المجال المصاحب وفي هذه الاحوال تعتبر العلاقة R **جزئية** من $A\times A$ أي $(R\subset A\times A)$.

2.3 العلاقة المنعكسة Reflexive Relation

إذا كانت R علاقة ثنائية في A $(R\subset A\times A)$ ، فإنَّها تسمى علاقة منعكسة إذا كان (a,a) موجودة في R لكل a في A أي إذا كان:

$(a,a)\in R$ لكل عنصر $a\in A$ بمعنى آخر تكون العلاقة منعكسة إذا كان أي عنصر في A $(a\in A)$ له علاقة مع نفسه. ويمكن ان نعبر عن ذلك أيضاً بـ:

$(\forall a\in A)[aRa]$ أو $(\forall a\in A)[(a,a)\in R]$

مثال (9)

معطى المجموعة $T=\{a,b,s\}$ والعلاقة R معرَّفة في المجموعة T على النحو التالي

$R=\{(a,s),(a,a),(s,b),(s,s),(b,b)\}$

في هذه الحالة R تمثل علاقة منعكسة لأن (b,b) و (a,a) و (S,S) كلها عناصر ذات علاقة مع نفسها في R أي أنَّ :

$(a,a)\in R$ ، $(s,s)\in R$ و $(b,b)\in R$

مثال (10)

إذا كانت العلاقة R معرَّفة في مجموعة الأعداد الحقيقية R على النحو التالي

$(x,y)\in R$ إذا كان $x\le y$ ،

فإن R تمثل علاقة منعكسة لأن لكل عدد حقيقي x فإنَّ الحال $x\le x$. على الجانب الآخر العلاقة $<$ في R ليست منعكسة إذ ليس هنالك عدد حقيقي يكون $x<x$

3.3 العلاقة المتماثلة Symmetric Relation

إذا كانت R علاقة ثنائية في A (أي $R \subset A \times A$)، فإن العلاقة R تسمى علاقة متماثلة إذا كان (a,b)في R تقتضي أنَّ (b,a)أيضاً في R . بمعنى آخر أن العلاقة R تسمى متماثلة إذا كان الزوج المرتب معكوسه في العلاقة R .

يمكن أن نعبَّر عن ذلك بالجملة الرياضية الاتية: .

$(\forall ab \in A)[(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R]$ أو $(\forall ab \in A)[aRb \rightarrow bRa]$

وتقرأ كالاتي: (a,b) تنتمي لـ R تقتضي أيضاً أنَّ (b,a) تنتمي لـ R لكل $ab \in A,$

وهذا يعني أنَّ ترتيب العناصر غير مهم في هذه العلاقة.

مثال (11)

معطى المجموعة، $v = \{1,2,3\}$ والعلاقة فيها

$R = \{(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,1)\}$

في هذا المثال العلاقة R علاقة متماثلة لأن $(1,2)$ و $(2,1)$ وأيضاً $(1,3)$ و $(3,1)$ تنتمي للعلاقة R أي أن في هذه الحالة يوجد زوجان مرتبان ومعكوسهما في العلاقة R .

4.3 العلاقة ضد المتماثلة Antisymmetric Relation

إذا كانت R علاقة ثنائية معرَّفة في A (أي $R \subset AXA$)، فإنَّ العلاقة R يطلق عليها علاقة ضد متماثلة إذا كان (a,b) في R تقتضي أنَّ (b,a) ليست في R إلاَّ إذا كانت $a = b$ وفي هذه الحالة (a,b)و (b,a) يكونان في R لأنَّ $a = b$.

والعلاقة R ضد المتماثلة يعبَّر عنها كالاتي:

$(\forall ab \in A)[(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R]$

5.3 العلاقة المتعدية Transitive Relation

إذا أخذنا R علاقة ثنائية في A ، R تكون علاقة متعدية، إذا كان (a,c)في R (أي $(a,c) \in R$) متما كانت (a,b) و (b,c) في R $(a,b) \in R$و$(b,c) \in R$].

أي أن وجود (a,b) و (b,c) في R يقتضي وجود (a,c) فيها. وذلك يمكن أن يعبَّر عنه رمزاً:

$$(\forall a,b,c \in A)[(a,b) \in R \,\&\, (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R]$$

وهذه يمكن تفسيرها (وهذا ستدرسه بالتفصيل في الوحدات القادمة)

بالاتي: إذا كان (a,b) وأيضاً (b,c) في العلاقة R فهذا يقتضي أنَّ (a,c) أيضاً علاقة في R لكل (a,b,c) تنتمي لـ A.

في هذه العلاقة المتعدية، إذا كان a في علاقة مع b و b في علاقة مع c، فإنَّ a أيضاً تكون في علاقة مع c.

مثال (12)

إذا كان R علاقة في مجموعة الأعداد الطبيعية N معرَّفة على النحو الأتي:

$$xRy \text{ ، حيث } x < y$$

فإنَّ هذه العلاقة R تكون متعدية إذا كان: $a<b$ و $b<c$ يقتضي أنَّ $a<c$

ملحوظة: العلاقة الثنائية يمكن أن تمتلك واحدة أو أكثر من هذه الصفات: الانعكاسية، التماثل، عدم التماثل وأن تكون متعدية.

تدريب(3)



لكى تراجع ماعرفته من فروق بين العلاقات الثنائيه المختلفه أى ما يسمى بصفات هذه العلاقات. لا بدلك عزيزي الدارس من وقفه لتختبر ذاكرتك فيما يتعلق بهذه العلاقات. لذلك عليك بالتركيز لنحل هذا التدريب:

سم العلاقة فى كل حاله من الأحوال الأتيه مع ذكر سبب التسمية:

1. $R=\{(x,x),(x,y),(y,y),(y,z),(z,z)\}$ اذاكان $A=\{x,y,z\}$ مجموعة ثلاثه كتب

2. $R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$

فى المجموعه $\{a,b,c\}$

3. R فى مجموعة الدارسين $A=\{a,b,c,d\}$. إذا كانت R علاقه ثنائيه فى A بحيث أنه aRb اذا كان a فنفس الفصل الذى به b.

4. A مجموعه اختبارات تجرى على المرضى في مستشفى ما وR علاقه ثنائية فىA اذا كانتaRb تقتضى أن الاختبارa يجب أن يجرى قبل اختبارb.

5. اذا كان $A=\{1,2,3\}$و $B=\{x,y\}$ و R العلاقه A إلى B هى:

$$R=\{(x,1),(y,1),(x,3)\}$$

6. العلاقه الثنائية R فى المجموعة A مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث أن (a,b) فى R أي aRb إذا وفقط إذا كان $a\geq b$.

6.3 العلاقة المتكافئة Equivalence Relation

العلاقة الثنائية R في لمجموعةA تسمى علاقة متكافئة إذا كانت تملك ثلاث صفات هي:

1- R تكون علاقة منعكسة أي $(a,a)\in R$ لكل $a\in A$

2- وأيضاً R علاقة متماثلة أي $(a,b)\in R,(b,a)\in R$

3- وايضاً R علاقة متعدية أي $(a,b)\in R(b,c)\in R$وهذا يقتضي $(a,c)\in R$

مثال (13)

معطى المجموعة

$$A=\{a,b,c,d,e,f\}$$

فإنَّ العلاقة

$$R=\{(a,a),(a,b)(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(f,f),(e,d),$$
$$(e,e),(e,f),(d,d),(f,e),(f,f)\}$$

هي علاقة متكافئة.

مثال (14)

إذا كانت العلاقة R في مجموعة الأعداد الحقيقية R معرَّفة على النحو التالي xRy ،

وكانت $x=y$ فإن لعلاقة تمثل علاقة متكافئة

أمثلة آخرى (15)

إذا كانت R معرَّفة في z مجموعة الأعداد الصحيحة كالاتيmRnإذن وفقط إذا كان $m-n$ زوجي فإنَّ العلاقة علاقة متكافئة

إذا كانت R معرَّفة في N مجموعة الأعداد الطبيعية كالاتي:

$(m,n)R(p,q)$إذن وفقط إذا كان $mq=mp$فإن هذه العلاقة علاقة متكافئة.

7.3 التجزئة Partition

نأتي الآن عزيزي الدارس لتعريف مفهوم التجزئة Partition لمجموعة ما فالتجزئةPartition للمجموعة A هي عبارة عن مجموعات جزئية غير خالية من المجموعة A.

وهذه المجموعات الجزئية من A لها شرطان لكي تكون فعلاً هي متجزئة من المجموعة الام:

1- يجب أن يكون أتحاد هذه المجموعات المتجزئة من A مساوياً للمجموعة الام B أي أنَّ

$A = B_1 \cup B_2 ..... \cup B_n$

2- يجب أن يكون تقاطع المجموعتين B_i و B_j خالياً لأي B_i و B_j.

إذا كان $B_i \neq B_j$ أي أنَّ: $B_i \cap B_j = \phi$

بمعنى آخر

> التجزئة (*partition*) لأي مجموع هو: إقسام العناصر الموجودة في تلك المجموعة إلى مجموعات غير ذات صلة.

هذه المجموعات الجزئية (Closets) تسمى ايضاً بكتل التجزئة (blocks).

مثال (16)

معطى $A = \{1,2,\ldots,9,10\}$ فإنَّ

$B_1 = \{1,3\}, B_2 = \{7,8,10\}, B_3 = \{2,5,6\}, B_4 = \{4,9\}$

هي المجموعات المتجزئة من A (أي المجموعات الجزئية) لأنها حققت الشرطين أ و ب المذكورين آنفاً.

في هذا المنال B_1 ، B_2 ، B_3 ، B_4 هي كتل التجزئة (blocs).

مثال (17)

إذا كانت{1,2,3,…}= N وكانت{1,2,5,…} = F وكانت{2,4,6,…} = E، فإنَّ {E,F} يمثلان مجموعتين متجزئتين من المجموعة N .

تدريب (5)



الآن اليك التدريب الذي يتعلق بمفهوم التجزئة: معطى هذه المجموعات الجزئية:

$\{\{a\},\{b,c,d\},\{e,f\},\{g\}\}$

أ. أوجد المجموعة الأم

ب. بماذا تسمى المجموعة الجزئية في هذه الحالة.

8.3 العلاقة بين العلاقة المتكافئة والتجزئة

هنالك علاقة أو ارتباط يمكنك أن تلاحظه بين العلاقة المتكافئة في المجموعة A وتجزئة تلك المجموعة. من العلاقة المتكافئة في A يمكنك أن تعرف تجزئة المجموعة A بحيث أنَّ كل عنصرين في كتلة (block) واحدة تكون بينهما صلة أو علاقة وكل عنصرين في كتل مختلفة لاتكون بينهما صلة أو علاقة. وتسمى هذه التجزئة بالتجزئة المستحدثة بواسطة العلاقة المتكافئة. وفي هذه الحالة، فإنَّ الكتل في التجزئة تسمى برتب التكافؤ (Equivalence classes) والعكس من تجزئة المجموعة A يمكننا أن تعرَّف العلاقة المتكافئة في A، عليه كل عنصرين في نفس كتلة التجزئة يكونان في علاقة ويكون كل عنصرين في رتب أو كتل مختلفة ليس في علاقة أوصلة وهذا يتضح في النظرية الآتية:

نظرية:

أفرض أنَّ R علاقة متكافئة في المجموعة A لكل عنصر $\alpha \in A$، وأفرض:

$B_\propto = \{\times / (\times,\alpha)\in R\}$ ، هي مجموعة العناصر التي على علاقة مع α ، عليه المجموعة $\{B_\propto\}_{\propto\in A}$، تمثل تجزئة بمعنى آخر، العلاقة المتكافئة R في المجموعة A تجزئ المجموعة A بوضع تلك العناصر التي ترتبط ببعضها البعض في نفس رتبة التكافؤ (Equivalence classes).

مثال (18)

إذا كانت R_5 علاقة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z المعرَّفة على النحو التالي:

X R y فإنَّ: $X = y \pmod 5$ أي x في علاقة متكافئة مع "ymodule5" و(mod5) يقصد بها باقي القسمة على الرقم 5 أي:

$$E_0 = \{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$$
$$E_1 = \{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots\}$$
$$E_2 = \{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\}$$
$$E_3 = \{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$$
$$E_4 = \{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\}$$

أي فهم

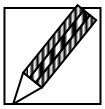
$$X = 5q + r$$
$$O \leq r < 5$$

مثال (19)

عزيزي الدارس، لتوضيح مايتعلق بمسائل الـ module، إليك هذا المثال الذي يتناول بالشرح الدقيق هذه العلاقة: خذ A مجموعة كل الأعداد الطبيعية، خذ n عدد صحيح موجب ثابت وخذ R علاقة ثنائية في A بحيث أنَّ (a,b) في R أي (aRy)، إذا كان باقي قسمة a/n وباقي قسمة b/n متساويان في هذه الحالة تكون R علاقة متكافئة تقسم A إلى n من رتب التكافؤ (Equivalence classes). الرتبة الأولى من رتب التكافؤ هي الأعداد التي تقبل القسمة على n، والثانية هي الأعداد التي عندما تقسم على n يكون الباقي 1 والثالثة هي الأعداد التي عندما تقسم على n يكون الباقي 2 والرابعة هي الأعداد التي عندما تقسم على n يكون الباقي 3 ..... وهكذا مرتبة الأخيرة هي الأعداد التي عندما تقسم على n يكون الباقي n-1. أي

عددين مثلاً b,a موجودان في نفس رتبة التكافؤ يعرفان بـ equal modulo وغالباً ما تستخدم رمزاً لهذه العلاقة وهو $a \equiv b \pmod n$.

تدريب (6)



1. لتتأكد من فهمك لهذه العلاقة، توقف لحظة لحل هذا التدريب:
من المعطيات في المثال السابعه، أوجد رتب التكافؤ إذا كان $a \equiv b \pmod 7$.
2. أوجد رتب التكافؤ في العلاقة R إذا كان: A هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z، وكانت aRb بحيث أنَّ $a \equiv b \pmod 9$.

أسئلة تقويم ذاتي (1)



إذا كان R علاقة معرفة فى مجموعة الأعداد الطبيعية N معرفة بالارتباط Ryx فقط وفقط اذا كان y−x تقبل القسمة على 3. اثبت ان العلاقة R متكافئة

الخلاصة

والان بعد أن درست وحدة العلاقات، واستوعيت ما بها من مفاهيم، دعنا نقوم بتلخيص ماورد فيها. عرفت في هذه الوحدة أنَّ **العلاقة** بين B,A هي العلاقة التي تربط عناصر **معينه** من A مع عناصر **معينه** من B وأنَّ **زوج العناصر المرتبة** هو زوج من العناصر موضوع أو منظم بترتيب ثابت فالزوج المرتب (a,b) يختلف عن الزوج المرتب (b, a) . كما أوضحنا لك أنَّ **الحاصل الكارتيزي** هو مجموعة كل العناصر المرتية من النوع (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ ويرمز له بـ AXB . درست في هذه الوحدة إيضاً **العلاقة الثنائية** التي قلنا عنها أنها ما هي إلا مجموعة جزئية من الحاصل الكارتيزي AXB (أي أنها مجموعة مرتبة العناصر).
وعرفت أنَّ الجملة الخبرية $P \subset AXB$ تكتب aRb ، إذا كانت صحيحة وتكتب: $a\not Rb$ ، إذا كانت غير صحيحة .
كما أن هذه الوحدة تناولت بالشرح صفات العلاقات الثنائية، فبينَّ لك أن العلاقة العكسية R^{-1} بين المجموعتين غير الخاليتين A,B هي علاقة إذا تمَّ عكسها هي علاقة عناصر في العلاقة R للمجموعتين B,A .
أشرنا في هذه الوحدة إلى أنَّ العلاقة المنعكسة هي علاقة ثنائية في A وفيها يكون (a,a) موجودة في R لكل a في A أي أنَّ أي عنصر في A له علاقة مع نفسه.
وذكرنا أنَّ العلاقة تكون متماثلة إذا كان(a,b) في R تقتضي أنَّ (b,a) أيضاً في R أي أنَّ الزوج المرتب ومعكوسه يكونان في R .
كما أننا أوضحنا أن العلاقة R في A يطلق عليها غير متماثلة إذا كان (a,b) في R تقتضي أنَّ (b,a) ليست في R .
العلاقة المتعدية وصفناها بأنها علاقة ثنائية R في A فيها (a,b) و (b,c) في R وهذا يقتضي وجود(a,c) فيها.
والعلاقة المتكافئة عرفت أنَّها هي علاقة ثنائية R في المجموعة A وهي علاقة منعكسة، متماثلة ومتعدية في نفس الوقت.
وعرَّفنا التجزئية وقلنا أنَّها هي عبارة عن **مجموعات** جزئية غير خالية من المجموعة A

وهذه المجموعات غير ذات صلة.

وتناولنا بالشرح العلاقة بين العلاقة المتكافئة والتجزئة وذكرنا أنَّ كل عنصرين بنفس الكتلة أو المجموعة المتجزئة لهما **علاقة** وكل عنصرين فى مجموعتين متجزئتين مختلفتين **ليست بينهما** علاقة.

نأمل أن يفيدك هذا الملخص في استرجاع المفاهيم والقوانين التي جاءت بالوحدة ونرجو أن يكون شاملاً غطى كل الأهداف.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

في الوحدة القادمة "الوحدة الرابعة" سنركز على المتباينات وفيها سنتناول بالشرح والامثلة أنواع المجموعات المختلفة فى الأعداد كمدخل للمتباينات.ثم بعد ذلك سوف نتعرف على ماهى المتباينات وماذا نعني بالقيمة المطلقة فيها. أيضا سنجد توضيحاً لماهية الفترات وسوف تفرق بين خمسة أنواع من الفترات وهى الفترة المفتوحة. الفترة المغلقة. الفترة المغلقة المفتوحة والفترة اللانهائية.

على اية حالٍ سنتناول الوحدة مجموعة الاعداد والمتباينات آمل ان تجدها وحدة مفيدة وسهلة الاستيعاب.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1- تستبعد أي علاقة تستوجب أن تكون هنالك علاقة لبرنامج مع نفسه أو البرنامج الذي يسبقه ويبقى فقط مع علاقته مع البرنامج الذي يليه.

لذلك في المجموعة $A = \{a,b,c,d\}$ ،

$R = \{(a,b)(a,c)(a,d)(b,c),(b,d),(c,d)\}$

2- مادام $X \leq y$ ، نستبعد أي علاقة تستوجب أن يكون $X > y$ ، لذلك في المجموعة:

$A = \{1,2,3,4\}$ ،

فإنَّ $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3)(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

1- بما أنَّ (a,b) في R (aRb) إذا وفقط إذا كان $a-b>S$ ، إذن a>b وأول عنصرين في هذه العلاقة هما (6,1).

المجموعة $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

إذن: $R = \{(6,1),(7,1),(7,2),(8,1),(8,2),(8,3)\}$

2- $A = \{a,b,b\}$ مجموعة الدارسين

$B = \{c_1, c_2, c_3\}$

و $C = \{(a,c_1),(a,c_4),(b,c_2),(b,c_4)(c,c_1)(c,c_3)\}$ هي المقررات التي لا تخص الدارسين. ونعني بهذا أنَّها هي العلاقة الثنائية R في AXB عليه:

$R = \{(a,c_2),(a,c_3),(b,c_1),(b,c_3),(c,c_2),(c,c_4)\}$

تدريب (3)

أ. R هي علاقة منعكسة لأنَّ كل كتاب من الثلاثة كتب z,y,x في علاقة مع نفسه (أي aRb).

ب. R علاقة متعدية لأنَّ aRb و bRc إقتضى أنَّ aRc.

ج. R علاقة متماثلة لأنَّ aRb تقتضي وجود bRc فوجود a بنفس الفصل الذي يوجد به b، يقتضى وجود b بنفس الفصل الذى يوجد به a .

د. R علاقة ضد متماثلة لأن aRb اقتضت أنَّ $b\not Rc$

هـ. العلاقة R علاقة نسبة لأنَّ علها هو علاقة R من A إلى B

و. العلاقة R علاقة غير متماثلة طالما أن الزوج المرتب ومعكوسة لا يحققان العلاقة. فمثلاً (14، 15) موجودة في R أي (14 R15) لكن معكوسها (14، 15) ليست في R أي (R15 14).

1. علاقة متعدية من المجموعة A = {1,2,3}، هي:

X = {(1,1),(1,2),(2,3),(1,3)}

(أو أي علاقة أخرى تنتمي نفس الشرط الموجود بـ X) وX علاقة متعدية لأنَّ فيها (1,2) و (2,3) تنتمي لـ R أي 1R2 و 2R3، اقتضى ايضا وجو (1,3) تنتمى لـ R أي 1R3.

2. و R = {(1,1),(1,2), ,(2,1),(2,2),(2,3), ,(3,3)}

هي علاقة متكافئة في A = {1,2,3} للأسباب الآتية:

- لأنها علاقة منعكسة ففيها زوج العناصر المرتب (1,1) و (2,2) و (3,3) أي أنَّ aRa لكل aER.
- لأنها علاقة متماثلة ففيها زوج العناصر المرتب ومعكوسه أي: (1,2) و(2,1) ، (1,3) و (3,1) ، (2,3) و(3,2) أي أنَّ bRa (aRb→bRa)
- لأنها علاقة متعدية ففيها وجود (2,1) و(2,3) أي aRb وbRc اقتضى وجود (3,1) أي bRc [(aRb) n (bRc) → bRc].

تدريب (5)

المجموعات الجزئية:

{{a},{b,c,d},{e,f },{g}}

أ. المجمموعة الأم من هذه المجموعات هي:

A = {a, b,c,d, e,f ,g}

ب. كل مجموعة جزئية في هذه الحالة تسمى بكتلة التجزئة.

تدريب (6)

1. رتب التكافؤ في العلاقة $a \equiv b \pmod 7$ هي:

$$C_2 = \{8,15, 22, 29, \ldots\}$$

$$C_3 = \{9,16, 23, 30, \ldots\}$$

$$C_4 = \{10,17, 24, 31, \ldots\}$$

$$C_5 = \{11,18, 25, 32, \ldots\}$$

$$C_6 = \{12,19, 26, 33, \ldots\}$$

$$C_7 = \{13,20, 22, 34, \ldots\}$$

2. رتب التكافؤ في العلاقة $a \equiv b \pmod 9$ إذ aRb، في A التي هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z هي:

$$C_1 = \{\ldots.., -18,-9, 0, 9, 18,\ldots\}$$

$$\{\ldots.., -17,-8, 1, 10, 19,\ldots\} = C_2$$

$$\{\ldots.., -16,-7, 2, 11, 20, \ldots\} = C_3$$

$$\{\ldots.., -15,-6, 3, 12, 21,\ldots\} = C_4$$

$$\{\ldots.., -14,-5, 4, 13, 22,\ldots\} = C_5$$

$$\{\ldots.., -13,-4, 5, 14, 23,\ldots\} = C_6$$

$$\{\ldots.., -12,-3, 6, 15, 24,\ldots\} = C_7$$

$$\{\ldots.., -11,-2, 7, 16, 25,\ldots\} = C_8$$

$$\{\ldots.., -10,-1, 8, 17, 26,\ldots\} = C_9$$

إجابة التقويم الذاتي (1)

أولاً: لإثبات العلاقة متماثلة يجب أن تحتوي العلاقة العناصر:

$$(x, x) \in R \qquad , \forall x \in R$$

$x - x = 0$

وهو يقبل القسمة على3

إذن العلاقة متماثلة :

ثانيا: تكون متعاكسة إذا كان العنصر

$$(x, y) \in R$$

فإن $(y, x) \in R$

فإذا كان $x - y$ يقبل القسمة على 3

فإن $y - x$ أيضاً تقبل القسمة على 3

إذاً فإن العلاقة متعاكسة.

ثالثاً : لأثبات العلاقة متعدية فإن :

إذا كان $(x, y) \in R$ ، $(y, z) \in R$

فإن $(x, z) \in R$

أي :

$x - y$ يقبل القسمة على 3

$y - z$ يقبل القسمة على 3

$x - z$ أيضاً يقبل القسمة على 3

إذن العلاقة متعدية

بما أن العلاقة R، متماثلة، متعاكسة، ومتعدية إذن هى متكافئة.

مسرد المصطلحات

زوج العناصر المرتبة

هو زوج موضوع أو منظم يترتب ثابت فمثلاً (a,b) ليس هو (b,a).

الحاصل الكارتيزى

هو مجموعة كل العناصر المرتبة من النوع (a,b) في العلاقة AXB بين المجموعتين الخاليتين B,A، حيث $a\in A$ و $b\in B$.

العلاقة الثنائية

هى مجموعة جزئية من الحاصل الكارتيزى A x B (أي أنها مجموعة مرتبة العناصر) ويرمز لها بـ R.

العلاقة العكسية

العلاقة العكسية R بين المجموعتين غير الخاليتين B,A، هي علاقة R.

العلاقة المنعكسة

هي علاقة ثنائية R في A وفيها يكون أي عنصر في A ذا علاقة مع نفسه أي $(a,a)\in R$ لكل عنصر $a\in A$.

العلاقة المتماثلة

هي علاقة ثنائية R في A وفيها يكون الزوج المرتب ومعكوسة في هذه العلاقة أي أنَّ وجود (a,b) في R يقتفي أيضاً وجود (b,a) فيها.

العلاقة غير المتماثلة

هي علاقة ثنائية R في A وتكون علاقة منعكسة، متماثلة ومتعدية في نفس الوقت (أي لها هذه الصفات الثلاثة).

التجزئة

هي عبارة عن مجموعات جزئية غير خالية من المجموعة A بحيث أنها تكون مجموعات غير ذات صلة.

المراجع

11. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
12. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
13. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
14. **Finite Mathematics**, Shaum Series
15. **Theory Set**, Shaum series.


الوحدة الرابعة
المتباينات
Inequalities

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**141**
تمهيد	141
أهداف الوحدة	142
1. أنواع المجموعات في الأعداد	**143**
1.1 مجموعة الأعداد الطبيعية	143
2.1 مجموعة الأعداد الصحيحة	143
3.1 مجموعة الأعداد القياسية	144
4.1 مجموعة لأعداد غيرالقياسية	144
5.1 مجموعة الأعداد الحقيقية	144
2. خط الأعداد الحقيقية	**145**
3. العلامات المتباينة	**146**
4. القيمة المطلقة	**148**
5. الفترات	**151**
1.5 الفترة المفتوحة	152
2.5 الفترة المغلقة	152
3.5 الفترة المفتوحة المغلقة	153
4.5 الفترة المغلقة المفتوحة	154
5.5 الفترات اللانهائية	155
الخلاصة	**158**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**159**
إجابات التدريبات	**160**
إجابات التقويم الذاتي	**163**

مسرد المصطلحات	166
المراجع	167

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

الوحدة الرابعة من مقرر الرياضيات المتقطعة ستتعرف فيها المتباينات. وهي تحتوي خمسة أقسام رئيسة كلها تنضوي تحت مفهوم المتباينات.

القسم الأول من المتباينات يعرفك بأنواع المجموعات المختلفة في الأعداد لان المتباينات تقوم أساساً على الأعداد وعلاقة التباين بينها.

يتناول القسم الثاني التعريف بما هو خط الأعداد الحقيقية وما هي مكوناته وكيف يرسم.

العلاقات المتباينة أو المتباينات هو ما يناقشه بالشرح القسم الثالث وفيه سنجد توضيحاً لهذا المفهوم وتعريفاً له كما أنك ستتعرف فيه على الصفات المختلفة للمتباينات.

القيمة المطلقة هي ما يتطرق له القسم الرابع الذي يتناول بالتعريف مفهوم القيمة المطلقة على أساس التعريف الهندسي والتعريف عن طريق الرموز.

القسم الخامس والأخير ستجده يعرفك بمفهوم الفترات ، تعريفها والأنواع المختلفة للفترات والفروقات بينها وفيه أيضاً ستتمكن من كتابة المتباينة بصورة الفترات والعكس . كما أنك ستدرس فيه كيفية تمثيل الفترات عن طريق خط الأعداد الحقيقية.

أرجو أن تفيد من التدريبات التي سترد بين ثنايا المادة وأن تتعامل معها بجدية. أيضاً لتعزيز ما ستدرسه، ستجد أسئلة للتقويم الذاتي في نهاية الأقسام.

أهلاً بك مرة ثانية إلى هذه الوحدة، راجين من الله أن تجد فيها ما تصبو إليه ونرحب بأي إقتراح من شأنه أن يكون دعماً وعوناً لنا في تطوير مناهجنا.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة، ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1. تتعرف الأنواع المختلفة لمجموعات الأعداد.
2. تصف خط الأعداد الحقيقية ومكوناته.
3. تعرف التباين في العلاقات بين الأعداد.
4. تشرح صفات المتباينات المختلفة التي تخص الجمع، الطرح، الضرب والقسمة.
5. تفرق بين خمسة أنواع من الفترات، المفتوحة، المغلقة، المفتوحة المغلقة، المغلقة المفتوحة والفترات اللانهائية.
6. تستخدم الخط العددي للتعبير عن علاقات التباين بين الأعداد.
7. تحل المسائل المتعلقة بالمفاهيم السابقة متى ما طلب منك

المتباينات Inequalities

قبل البدء في دراسة المتباينات عزيزي الدارس سنتعرف على أنواع المجموعات في الأعداد لأننا سنطبق رموز المتباينات على الأعداد الحقيقة.

1. أنواع المجموعات في الأعداد

1.1 مجموعة الأعداد الطبيعية (N) Natural

هي مجموعة الأعداد الموجبة ويرمز لها بالرمز N وتتكون من:

$$N = \{1,2,3,.....\}$$

وتستخدم هذه المجموعة عادة في عملية الحساب والعد.

أهم صفات الأعداد الطبيعية

1- مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب، **أي:**

إذا كان : $x, y \in N$ **فإن:**

$$x + y \in N$$

$$x \times y \in N$$

2- كل الأعداد الطبيعية لها تالي.

3- كل الأعداد الطبيعية لها سابق ما عدا العدد (1)

4- تفشل الأعداد الطبيعية في إغلاق عمليتي القسمة والطرح .

2.1 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) Integers

هي المجموعة التي تتكون من الأعداد الطبيعية الموجبة ونظيرتها السالبة:

$$z = \{....,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....\}$$

أي

$$\boxed{N \subset Z}$$

وأهم صفات الأعداد الصحيحة هي أن هذه الأعداد مغلقة تحت عمليات الجمع والطرح والضرب.

أي إذا كان : $x, y \in Z$

فإن : $x+y \in Z$

$$x-y, y-y \in Z$$

$$x \times y \in z$$

2- كل الأعداد الصحيحة لها تالي وسابق.

3- تفشل مجموعة الأعداد الصحيحة في إغلاق عملية القسمة.

3.1 مجموعة الأعداد القياسية Rational (Q)

هي المجموعة التي تتضمن الكسور ويرمز لها بـ (Q) :

أي :

$$Q = \{x \mid x = {}^{p}\!/_{q}\,, p.q \in Z, q \neq 0\}$$

مجموعة الأعداد القياسية هي المجموعة المغلقة تحت جميع العمليات الرياضية الجمع، الطرح، القسمة، الضرب .

4.1 مجموعة الأعداد غير القياسية Irrational (Q^*)

هي الأعداد غير القياسية التي تكمل مجموعة الأعداد القياسية لتصبح مجموعة شاملة (الأعداد الحقيقية) ومثال لهذه الأعداد : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ أي هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها بصورة

$$p/q$$

دون أن يكون هنالك عامل مشترك بين p و q ويرمز لها بـ Q* .

5.1 مجموعة الأعداد الحقيقية Real (R)

وهي تمثل المجموعة الشاملة للأعداد ويمكن تمثيلها في الشكل (1).

وهي تحتوي على جميع الأعداد $N \subset Z \subset Q \subset R$

ويمكن كتابتها على النحو التالي:

$$R = \{x | x^2 \geq 0\}$$

أهم صفات الأعداد الحقيقية هي:

1- الأعداد الحقيقية مغلقة تحت جميع العمليات.

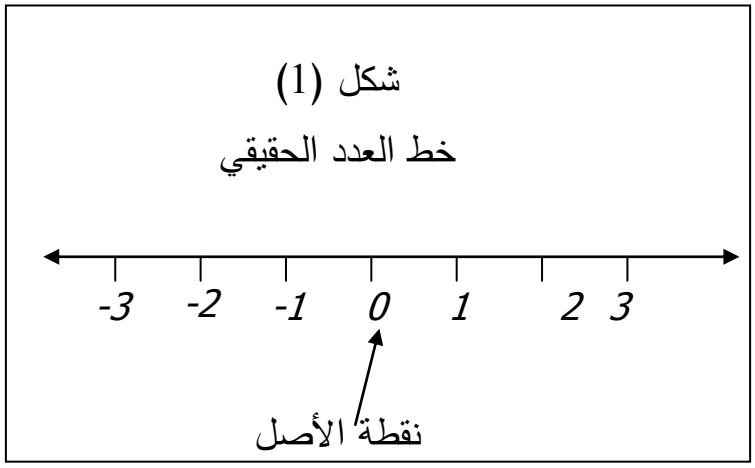
2- بين أي عددين حقيقيين يوجد ما لانهاية من الأعداد الحقيقية.

3- يمكن التعبير عن الأعداد الحقيقية على النحو التالي:

$$R = Q \cup Q^*$$

2. خط الأعداد الحقيقية Real number line

كل عدد حقيقي يتطابق كلية مع نقطة وكل نقطة تتطابق مع عدد حقيقي وهذا يمكن تمثيله على خط به كل عدد حقيقي يرتبط بنقطة والعكس صحيح وهذا الخط يسمى **بالخط العددي الحقيقي** (Real Number Line) أو الخط الحقيقي . كل عدد يرتبط بنقطة يسمى إحداثي (Coordinate) هذه النقطة. النقطة التي لها إحداثي صفر (0) تسمى **بنقطة الأصل** (origin) الشكل (1):



السهم في الخط العددي يشير إلى الإتجاه الموجب.

إحداثيات كل النقاط يمين نقطة الأصل تسمى **الأعداد الحقيقية الموجبة** والإحداثيات يسار نقطة الأصل تسمى **الأعداد الحقيقية السالبة.**

3. العلاقات المتباينة Inequality relations

هنالك حقيقة مهمة وهي أن أي عددين حقيقيين a و b , (أي $a,b \in R$) فإن العلاقة بينهما تكون واحدة من ثلاثة :

أ. $a < b$ وتقرأ a أقل من b .

ب. $a > b$ وتقرأ a أكبر من b

ت. $a = b$ وتقرأ a تساوي b .

العلاقتان أ و ب هي ما يعرف بالمتباينات ، وأيضاً يمكنك أن تضيف يساوي (=) للرمزين > و < فتصبح :

$$a \geq b \quad و \quad a \leq b$$

إليك الآن تعريف أوضح وأشمل للمتباينات أي **أقل من وأكبر من** في مجموعة الأعداد الحقيقية:

تعريف $a<b$ أو $b>a$:
لأي عددين حقيقيين a و b، نقول a أقل من b أو b أكبر من a وتكتب:
$a<b$ أو $b>a$، إذا كان هنالك عدد حقيقي p، بحيث أن $a + p = b$
(أي أن $b - a = p$)

إذا أضفنا أي عدد موجب لأي عدد حقيقي ، نتوقع أن يكون المجموع أكبر من العدد الأصلي وهذا ما يعنيه التعريف أعلاه .

عندما نكتب:

$$a \leq b$$

نعني أن a أقل من أو تساوي b .

وعندما نكتب:

$$a \geq b$$

نعني أن a أكبر من أو تساوي b

رمزي التباين > و < لهما تفسير واضح، على خط الأعداد الحقيقية. فإذا كان a < b، فإن a تمثل على الخط يسار b. وإذا كان c >d فإن c تقع يمين d وهذا يظهر لك جلياً في الشكل (2):

شكل (2)

a<b و c>d



نظرية

صفات المتباينات

إذا كان a,b,c أي أعداد حقيقية فإنَّ

1. إذا كان $a<b$ و$b<c$، فإنَّ $a<c$.
2. إذا كان $a<b$ و$b<c$، فإنَّ $a + c < b + c$ (صفة الجمع)
3. إذا كان $a<b$ و$b<c$، فإنَّ $a - c < b - c$ (صفة الطرح)

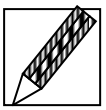
صفة الضرب:

4. إذا كان $a<b$ و$b<c$ و c موجبة فإنَّ $c\,a < c\,b$
5. إذا كان $a<b$ و$b<c$ و c سالبة فإنَّ $c\,a > c\,b$

صفة القسمة:

6. إذا كان $a<b$ و$b<c$ و c موجبة فإنَّ $\frac{a}{c} \prec \frac{b}{c}$
7. إذا كان $a<b$ و$b<c$ و c سالبة فإنَّ $\frac{a}{c} \succ \frac{b}{c}$

تدريب (1)



الآن أدعوك إلى هذا التدريب الذي يخص صفات المتباينات.

فيما يلي أكتب x فقط بين رموز المتباينة :

1. $2(2x+3)-10<6(x-2)$
2. $\frac{2x+4}{4}+6\geq 2+\frac{4x}{3}$
3. $-3\leq 4-7x<18$
4. $-3<7-2x\leq 7$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



فيما يلي أكتب x فقط بين رموز المتباينة

(1) $3<x-4<8$ **(2)** $-9<3x<12$

(3) $-7<-2x+3<5$ **(4)** $-6<-2x<4$

(5) $-1<x+3<2$

4. القيمة المطلقة Absolute value

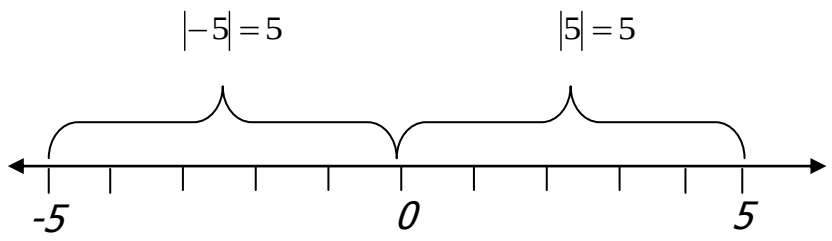
سوف نبدأ بالتعريف الهندسي للقيمة المطلقة . إذا كان a هي إحداثي لنقطة على خط الأعداد الحقيقية، فالقيمة المطلقة تكون هي:

القيمة المطلقة للنقطة a هي : المسافة من نقطة الأصل إلي النقطة a (الكمية الغير سالبة) وتمثل بـ : $|a|$.

لذلك إذا كان $|x|=5$ ، فإن x تساوي إما 5- أو 5 كما موضح في الشكل (3).

شكل (3)

القيمة المطلقة



وإليك تعريف القيمة المطلقة رمزاً :

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x تكتب $|x|$ وتعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ if } x > 0 \text{ (موجب)} \\ -x \text{ if } x < 0 \text{ (سالب)} \\ 0 \text{ if } x = 0 \end{cases}$$

وأيضاً يمكن التعبير عن $|x| = \sqrt{x^2}$

تذكر عزيزي الدارس أن القيمة المطلقة لعدد ما لا تكون سالبة مطلقاً.

نلاحظ أن $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ، $|ab| = |a|\ |b|$

نظرية

إذا كان $a, b \in R$ ، فإن:

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

الاثبات:

حسب التعريف يمكن التعبير عن $|a+b|$ على النحو التالي:

نربع الطرفين:

$$|a+b|^2 = \sqrt{(z+b)^2}$$

$$= |a+b^2| = (a+b)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab$$

$$= |a^2| + |b^2| + 2ab$$

$$\leq |a^2| + |b^2| + 2|ab|$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$$

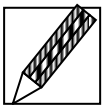
$$= (|a| + |b|)^2$$

$$\therefore |a, b^2| \leq (|a| + |b|)^2$$

الجذر التربيعى للطرفين:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

تدريب (2)



أكتب القيم الآتية من غير علامة القيمة المطلقة :

1) $|7|$ 2) $|\pi - 3|$ 3) $|3 - \pi|$

4) $|-\sqrt{2}|$ 5) $|-10|$ 6) $|x-3| > 5$

7) $|-2| - |-3|$

أسئلة تقويم ذاتي (2)

1. أوجد قيمة التالي:

(1) $|4-7|$ (2) $|3|-|-5|$ (3) $|3-8|-|2-1|$

2. اكتب الجمل التالية دون استخدام القيم المطلقة :

(1) $|x| \le 8$ (2) $|x-3| < 8$ (3) $|2x-4| < 8$

5. الفترات Intervals

ماذا نعني بالفترات ؟

الفترات هي المدى أو الإمتداد الغير مقطوع لخط الأعداد الحقيقية.

وهنالك عدد من الأنواع المختلفة للفترات والتي لها رموز معيارية معروفة.

إذا كان $a,b \in R$ وكان $a < b$ ، فإن الفترات يمكن أن تمثل بواحدة من المجموعات الآتية:

$$A_1 = \{x | a < x < b\}$$
$$A_2 = \{x | a \le x \le b\}$$
$$A_3 = \{x | a < x \le b\}$$
$$A_4 = \{x | a \le x < b\}$$

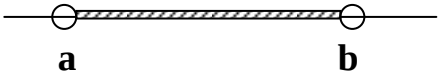
تلاحظ أن هذه المجموعات الأربعة تعبر بأربعة طرق مختلفة عن الأعداد الحقيقية بين a و b ، من a إلى b ، من بعد a إلى b أو من a إلى قبل b ، ويمكن توضيحها على النحو التالي:

1.5 الفترة المفتوحة Open interval

ويعبر عنها بالمجموعة الأولى A_1 : $A_1 = \{x | a < x < b\}$

هذه المجموعة تتضمن الأعداد الحقيقية الواقعة بين a و b ولا تتضمنهما وتسمى **هذه** الفترة **بالفترة المفتوحة**، ويمكن تمثيلها على الخط العددي على النحو التالي:

شكل (4) (a,b)



هذه الدوائر الغير مغلقة في a و b تعبر عن عدم تضمينهما داخل المجموعة

وتكتب

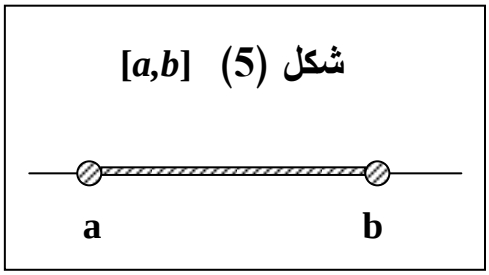
$$A_1 = (a,b)$$

وهنا يبدأ الخط الحقيقى بعد a مباشرة وينتهى قبل b مباشرة أى أن a و b ليسا عنصرين فى (a,b).

2.5 الفترة المغلقة Closed interval

ويعبر عنها بالمجموعة الثانية A_2 : $A_2 = \{x | a \le x \le b\}$

هذه المجموعة تتضمن الأعداد الحقيقية من a إلى b وتسمى **الفترة المغلقة** لاحتوائها علىالنهايات a و b ، وتمثل على النحو التالي:



وتكتب

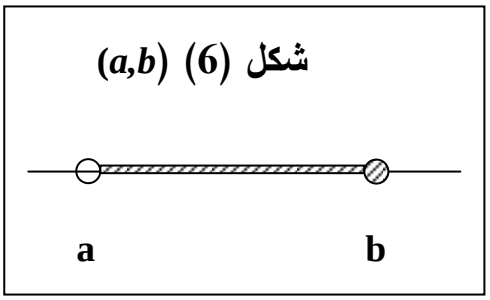
$$A_2 = [a,b]$$

وهنا $[a,b]$ مدى يبدأ بـ a وينتهى بـ b

3.5 الفترة المفتوحة المغلقة Open – Closed interval

ويعبر عنها بالمجموعة الثالثة $\mathbf{A_3}$: $A_3 = \{x | a < x \leq b\}$

هذه المجموعة تتضمن الأعداد الحقيقية من بعد a إلى b متضمنة النهاية العظمىb وتسمى فترة **مفتوحة مغلقة**، وتمثل على النحو التالي:



وتكتب

$$A_3 = (a,b]$$

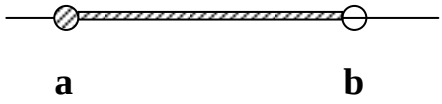
وهى مفتوحة يسارا ومغلقة يمينا.

4.5 الفترة المغلقة المفتوحة Closed – Open Interval

ويعبر عنها بالمجموعة الرابعة A_4 : $A_4 = \{x | a \le x < b\}$

هذه المجموعة تتضمن الأعداد الحقيقية الواقعة من a وحتى قبل b وهى تتضمن النهاية الدنيا a وتسمى الفترة **المغلقة المفتوحة**، وتمثل على النحو التالي:

شكل (7) [*a,b*)



وتكتب

$$A_4 = [A, B)$$

وهى مغلقة يسارا ومفتوحة يمينا.

بذلك يمكن أن نجمل لك عزيزى الدارس الفترات في أربعة أشكال:

1. **فترة مفتوحة** $A_1 = \{x | a < x < b\} = (a,b)$
2. **فترة مغلقة** $A_2 = \{x | a \le x \le b\} = [a,b]$
3. **فترة مفتوحة مغلقة** $A_3 = \{x | a < x \le b\} = (a,b]$
4. **فترة مغلقة مفتوحة** $A_4 = \{x | a \le x < b\} = [a,b)$

5.5 الفترات اللانهائية Infinite Intervals

المجموعات التالية تمثل فترات لا نهائية:

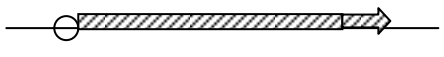
$$A = \{x | x > a\}$$
$$B = \{x | x \geq a\}$$
$$C = \{x | x \prec a\}$$
$$D = \{x | x \leq a\}$$
$$E = \{x | x \in R\}$$

وكتابة الفترات بهذه الطريقة تسمى بالصفة المميزة أو برمز التباين(y notationinequalit).

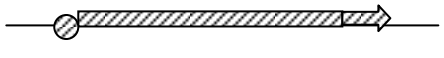
كما يمكنك ايضا كتابة الفترات بطريقة رمز الفترة (interval notation) كما هو موضح:

$$A = (a, \infty), B = [a, \infty), c = (-\infty, 0), E = (-\infty, \infty)$$

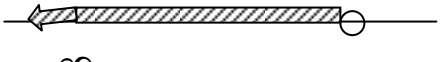
ويمكن التعبير عن هذه الفترات بالأشكال التالية:



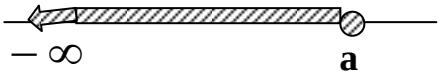
شكل (8) $A=(a,\infty)$



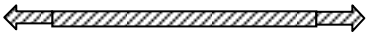
شكل (9) $B=[a,\infty)$



شكل (10) $c=(-\infty,a)$



شكل (11) $D=(-\infty,a]$



شكل(12) $E=(-\infty,\infty)$

لاحظ أن الرمز ∞ لا يكون مقرونا بقوس مربع (]) أبدا لان ∞ ليس بعدد لكنه رمز مهم.

تدريب (3)

أكتب الآتي بصورة الفترة:

1. $-3 < x \leq 3$ 2. $-1 \leq x \leq 2$
3. $x > 1$ 4. $x \leq 2$

تدريب (4)

أكتب الآتي بصورة رمز المتباينات ومثلها على خط العدد الحقيقي:

1. $[-2, 3)$ 2. $(-4, 2)$ 3. $(-2, 8]$
4. $(-8, 3)$

أسئلة تقويم ذاتى (3)

1. عبر عن هذه الفترات بالصفة المميزة:

(1) $M = [-3,5)$ (2) $S = (3,8)$ (3) $T = [0,4]$

(4) $W = (-7,-2)$

2. أكتب الفترات اللانهائية التالية بصورة الفترة:

$R = \{x | x \leq 2\}, S = \{x | x > -1\}, T = \{x | x < -3\}$

3. معطى:

$A = [-4,2), B = (-1,6), c = (-\infty,1]$

أوجد :

(1) $B \cup A$ (2) $A - B$ (3) $C \cup B$

(4) $C - B$ (5) $C \cap A$

الخلاصة

عزيزى الدارس،

فى تقديرك هل حققت هذه الوحدة ما جاءت به من أهداف؟ أتمنى أن تكون قد وجدتها كذلك. حسناً فلنحاول معاً أن نلخص ما جاء بهذه الوحدة من نقاط رئيسة:

وحدة المتباينات عرفتك أولاً بمجموعات الأعداد وأوضحت لك أن مجموعة الأعداد الطبيعية (N) وتتكون من: $N = \{1,2,3,.....\}$ **وأن** مجموعة الأعداد الصحيحة هي المجموعة التي تتكون من الأعداد الطبيعية الموجبة ونظيرتها السالبة: $z = \{....,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....\}$ كما **أنها** بينت لك أن مجموعة الأعداد القياسية هي المجموعة التي تتضمن الكسور وتكتب بصورة p/q وأن مجموعة الأعداد غير القياسية هي الأعداد التي تكمل مجموعة الأعداد القياسية لتصبح مجموعة شاملة ولا يمكن كتابتها بصورة p/q وأيضاً أوضحت لك أن مجموعة الأعداد الحقيقيةR تمثل المجموعة الشاملة للأعداد أى أنها تحتوي جميع الأعداد $N \subset Z \subset Q \subset R$. تناولت هذه الوحدة بالشرح والتوضيح حط الأعداد الحقيقية وعرفت أنه هو الخط الذى تمثل فيه الأعداد بنقاط ويسمى العدد الذى عدد بنقطة ما يسمى إحداثي هذه النقطة.وأن به النقطة التي لها إحداثي صفر (0) تسمى **بنقطة الأصل كما عرفت أن** النقاط يمين نقطة الأصل تسمى **الأعداد الحقيقية الموجبة** والإحداثيات يسار نقطة الأصل تسمى **الأعداد الحقيقية السالبة**. ذكرنا أن العلاقات المتباينة أو المتباينات هى العلاقة بين أي عددين حقيقيين a وb التى يكون فيها أحدهما أقل من> أو أكبر من< الاخر

عرفت **أن القيمة المطلقة** للنقطة a هي: المسافة من نقطة الأصل إلى النقطة a (الكمية الغير السالبة) وتمثل بـ: $|a|$. ودرست أن الفترات هي المدى أو الإمتداد الغير مقطوع لخط الأعداد الحقيقية كما أوضحنا لك أن الفترات يمكن أن تمثل بواحدة من المجموعات الآتية: $A_1 = \{x|a < x < b\}$ وهى **الفترة المفتوحة** و تتضمن الأعداد الحقيقية الواقعة بين a و b ولا تتضمنهما، **الفترة المغلقة** $A_2 = \{x|a \le x \le b\}$ و تتضمن الأعداد الحقيقية من a إلىb وتتضمنهما **الفترة المفتوحة المغلقة** $A_3 = \{x|a < x \le b\}$**و** تتضمن الأعداد الحقيقية من بعد a إلى b متضمنة النهاية العظمى b . و **الفترة المغلقة المفتوحة** $A_4 = \{x|a \le x < b\}$**و** تتضمن

الأعداد الحقيقية الواقعة من a وحتى قبل b وهى تتضمن النهاية الدنياa وأيضاً هنالك فترات تكون إحدى نهايتيها أو كليهما غير محدودة وتسمى **بالفترات اللانهائية**.

أرجو أن تجده ملخصاً شاملاً وأن تفيد منه كثيراً.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التالية سوف تتناول عن المنطق الرياصي وستجد فيها شرحاً للقضايا الرياضية وأنواعها والروابط المنطقية كما ستتناول الوحدة بالتوضيح منطق التكافؤ القوانين الجبرية للقضايا.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1. $2(2x + 3) - 1 < 6\,(x - 2)$

$4\,x + 6 - 10 < 6\,x - 12$

$4\,x - 4 < 6\,x - 12$

$4x - 4 + 4 < 6x - 12 + 4$ (صفة الجمع).

$4\,x < 6\,x - 8$

$4\,x - 6\,x < 6\,x - 6\,x - 8$ (صفة الطرح).

$-2\,x < -8$

$\frac{-2x}{-2} > \frac{-8}{-2}$ (صفة القسمة، لاحظ العلامة انعكست، لماذا؟)

$\underline{X > 4}$

2. $\frac{2x+4}{4} + 6 \geq 2 + \frac{4x}{3}$

نضرب الجانبين في 12 ينتج:

$12\left(\frac{2x-3}{4}\right) + (12)6 \geq (12)2 + (12)\left(\frac{4x}{3}\right)$

$6x - 9 + 12 \geq 24 + 16x$

$6x + 63 \geq 24 + 16x$

$6x - 6x + 63 \geq 24 - 24 + 10x$ (صفة الطرح)

$63 \geq 24 + 10x$

$63 - 24 \geq 24 - 24 + 10x$ (صفة الطرح).

$39 \geq 10x$

$10x \leq 39$ (لاحظ إنعكاس العلامة لماذا؟).

$\underline{x \leq 3.9}$

3. $-3 \leq 4 - 7x < 18$

$-4-3\le 4-4-7x<18-4$ (صفة الطرح وذلك بطرح 4 من كل الأطراف)

$-7\le -7x<14$ $\frac{-7}{-7}\le \frac{-7}{-7}x<\frac{14}{-7}$ (صفة القسمة على 7- ، لاحظ انعكاس العلامة لماذا؟).

$-2<x\le 1$ أو $-\le x>-2$

4. $-3<7-2x\le 7$

$-7-3<7-7-2x\le 7-7$ (صفة الطرح وذلك بطرح 7- من كل الأطراف)

$-10<-2x\le 0$ $\frac{-10}{-2}<\frac{-2x}{-2}\ge \frac{0}{-2}$ (صفة القسمة وذلك بقسمة كل الأطراف على 2- ، لاحظ إنعكاس العلامة لماذا؟)

$5>x\ge 0$

تدريب (2)

1) $|7|=7\left(-\sqrt{2}\right)$ 2) $\|\pi-3\|=\pi-3$ 3) $|3-\pi|=-(\pi-3)$

4) $\left|-\sqrt{2}\right|=-(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ 5) $|-10|=-(-10)=10.5$

6) $|X-3|>5$

$=X<3\pm 5$

إما: $x<8$

أو : $x<-2$

7. $|-2|-|-3|$

$=2-3=-1$

تدريب (3)

1. $-3<x\le 3$ بصورة الفترة ← $(-3\ ,\ 3]$ فترة مفتوحة مغلقة
2. $-1\le x\le 2$ بصورة الفترة ← $[-1\ ,\ 2]$ فترة مغلقة
3. $x>1$ بصورة الفترة ← $(1,\infty)$ فترة لا نهائية
4. $x\le 2$ بصورة الفترة ← $(1,\infty]$ فترة لا نهائية

تدريب (4)

بصورة المتباينات وعلى خط عددي

1. $[-2,3) \leftarrow -2 \leq X < 3$ (فترة مغلقة مفتوحة).



2− 0 3

2. (2 و 4 -) $\leftarrow -4 < x > 2$ (فترة مفتوحة).



4− 0 2

3. $[-2,\infty) \leftarrow x < -2$ (فترة لا نهائية).



-2 0 ∞

4. $(-\infty,3) \leftarrow x < 3$ (فترة لا نهائية).



- ∞ 0

3

إجابات التقويم الذاتي

التقويم الذاتي (1)

(1) $3 < x - 4 < 8$

$3 + 4 < x - 4 + 4 < 8 + 4$ قانون الجمع

$7 < x < 12$

(2) $-9 < 3x < 12$

$\frac{-9}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{12}{3}$ قانون القسمة

$-3 < x < 4$

(3) $-7 <- 2x + 3 < 5$

$-7 - 3 < -2x + 3 - 3 < 5 - 3$ قانون الطرح

$-10 < -2x < 2$

$\frac{-10}{-2} > x > \frac{2}{-2}$ قانون القسمة

$1 < x < 5$

(4) $-6 < -2x < 4$

$\frac{-6}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2}$

$-2 < x < 3$

(5) $-1 < x + 3 < 2$

$-1 - 3 < x + 3 - 3 < 2 - 3$ قانون الطرح

$-4 < x < -1$

التقويم الذاتي (2)

1.

(1) $|4-7| = |-3| = 3$

(2) $|3|-|-5|=3-4=-2$

(3) $|3-8|-|2-1|=|-5|-|1|=5-1=4$

2.

(1) $|x|\le 8 \Rightarrow -8\le x\le 8$

(2) $|x-3|<8 \Rightarrow -8<x-3<8$

$-11 < x < 11$ أي

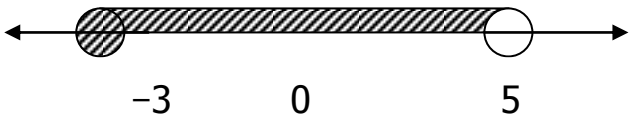
(3) $|2x-4|<8 \Rightarrow -8<2x-4<8$

$-2 < x < 6$ أي

1.

التقويم الذاتي (3)

(1) $M=(-3,5)=\{x/-3\le x<5\}$



$S=(3,8)=\{x/3<x<8\}$ (1)



(3) $T=[0,4]=\{x/0\le x\le 4\}$



(4) $W(-7,-2)=\{x/-7<x<-2\}$



7− 2− 0

2.

$R = \{ x / x \leq 2 \} = R = [2, \infty)$

$S = \{ x / x > -2 \} = S = (-1, \infty)$

$\mathbf{T = \{ x / x > -3 \}} = \mathbf{T} = (-\infty, -3)$

(1) AUB

لتوضيح ذلك يمكن أن نلجأ للرسم التوضيحي :

A



−4 0

B



−2 0 6

AUB



(1) $A \cup B = [-4,6)$

(2) A – B = [- 4 , 1]

(3) $B \cup C = (-\infty,6)$

(4) C – B = $(-\infty,1]$

(5) $A \cap C = [-4,1]$

مسرد المصطلحات

خط الأعداد الحقيقية Real Number Line

هو الخط الذي تمثل فيه الأعداد الحقيقية بنقاط ويسمى العدد بإحداثي نقطته وفيه نقطة الأصل لها إحداثي صفر وتمثل الأعداد الموجبة يمين نقطة الأصل والسالبة يساره.

العلاقات المتباينة Inequality Relation (< و >)

هي العلاقة بين أي عددين حقيقيين غير علاقة التساوي أي علاقة أقل من (<) أو أكبر من (>).

القيمة المطلقة Absolute value $|a|$

القيمة المطلقة للنقطة a هي المسافة من نقطة الأصل إلي النقطة a (الكمية الموجبة وتمثل بـ $|a|$.

الفترات Intervals

هي المدى أو الإمتداد الغير مقطوع لخط الأعداد الحقيقية .

الفترة المفتوحة Open Intervals

هي الفترة التي تضم الأعداد الحقيقية الواقعة بين a و b ولا تضمهما .

الفترة المغلقة Closed Intervals

هي الفترة التي تضم الأعداد الحقيقية من a إلي b بما فيها a و b .

الفترة المفتوحة المغلقة Open – Closed intervals

هي الفترة التي تضم الأعداد الحقيقية الواقعة بعد a إلي b أي أنها تضم b ولا تضم a.

الفترة المغلقة المفتوحة Closed – Open intervals

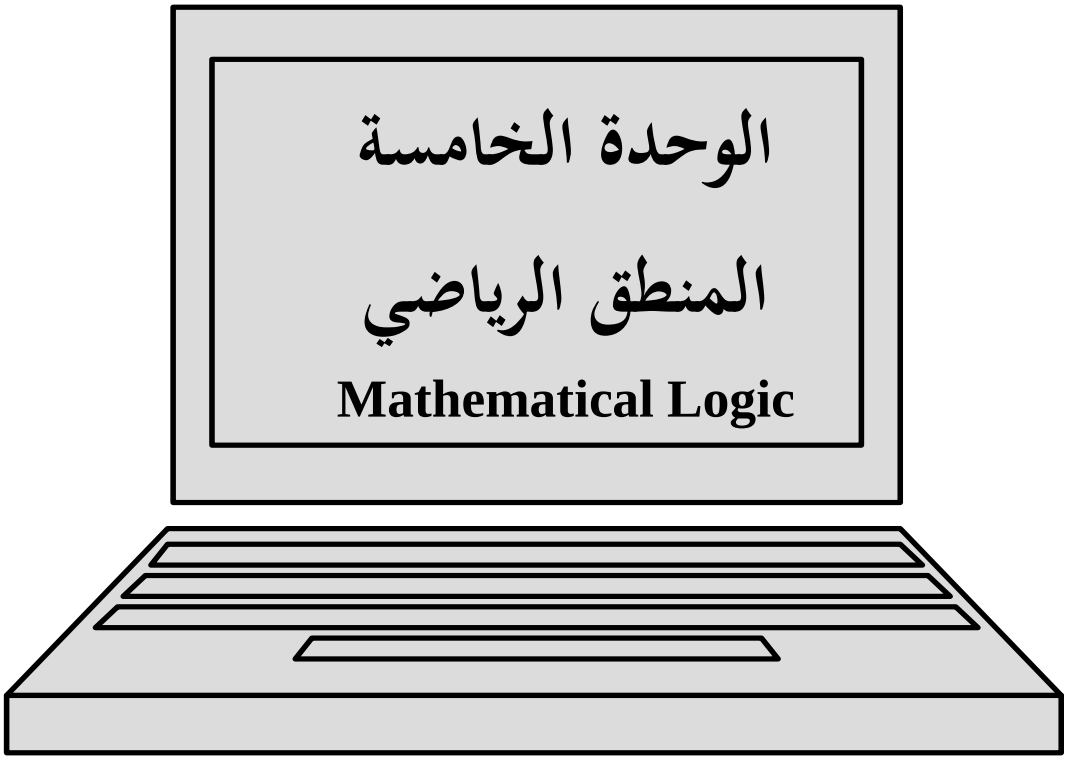
هي الفترة التي تضم الأعداد الحقيقية من a وحتى قبل b أي أنها تضم a ولا تضم b.

الفترة اللانهائية Infinite interval

هي الفترة التي تبدأ من نقطة غير محددة أو تنتهي بنقطة غير محددة أو تبدأ و تنتهي بنقطتين غير محددتين.

المراجع

16. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
17. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
18. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
19. **Finite Mathematics**, Shaum Series
20. **Set Theory**, Shaum series.


الوحدة الخامسة
المنطق الرياضي
Mathematical Logic

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**171**
تمهيد	171
أهداف الوحدة	172
1. القضايا	**173**
2. الروابط المنطقية (الكلمات الرياضية) للجمل، وجداول الحقيقة.	**175**
1.2 التوحيد	175
2.2 الانفصال	176
3.2 النفي	177
4.2 الاقتضاء	179
5.2 التكافؤ	182
3. أنواع القضايا	**184**
1.3 القضية تحصيل حاصل والقضية المتناقضة	184
2.3 القضية المفردة والقضية المركبة	185
4. القضايا المركبة وجداول الصواب والخطأ	**185**
5. منطق التكافؤ	**188**
6. القوانين الجبرية للقضايا	**190**
الخلاصة	**194**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**195**
إجابات التدريبات	**196**
إجابات التقويم الذاتي	**201**
مسرد المصطلحات	**206**
المراجع	**208**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

ها نحن نلتقيك في الوحدة الخامسة التي عنوانها المنطق الرياضي وتتكون هذه الوحدة من ستة أقسام رئيسة تعنى بالمنطق الرياضى والمفاهيم الرياضية المتعلقة به. فتبدأ بتعريفك القضية في الرياضيات وكيفية كتابتها وماذا نعني بقيمة الحقيقة في القضايا. كما يتم توضيح الروابط المنطقية وجدول الحقيقة أو ما يعرف بجدول الصواب والخطأ للقضايا. تنتقل بك الوحدة إلى القسم الثانى لتصف لك الكلمات الرياضية أو ما يعرف بالروابط المنطقية وهي التوحيد، الانفصال، النفي، الاقتضاء والتكافؤ وتعرفك بالرموز لهذه الروابط المنطقية التي تستخدم في القضايا أو الجمل الرياضية. أيضاً سندرس كيفية استخدام هذه الروابط في بناء جداول الحقيقة لتحصل على كل الاحتمالات لتكوين قضية جديدة من قيم مختلفة لقضيتين.

ستجد أيضاً توضيحاً لأنواع القضايا اعتماداً على الاختلاف فى قيمة الحقيقة واعتماداً على عدد القضايا المكونة للقضية الأم وذلك في القسم الثالث.

القسم الرابع يتناول بالشرح القضايا المركبة العادية والمركبة الأكثر تعقيداً ويوضح لك كيفية تمثيلها بجدول الصواب والخطأ والقسم الخامس يريك كيفية اثبات تكافؤ القضايا وذلك باستعمال جدول الحقيقة. القوانين الجبرية للقضايا هو ما يناقشه القسم السادس والأخير وفيه سنتمكن أيضاً من اثبات تكافؤ القضايا. وفي هذا القسم ايضاً سندرس كيف تبسط الجمل الرياضية مستخدماً القوانين الجبرية للقضايا.

تتمثل أهمية المنطق الرياضي في أنه يبصرك بالاختصارات الرياضية التي قد تقابلك مستقبلاً في أفرع جديدة من أفرع الرياضايات. لذلك عليك بالتركيز والاهتمام في التعامل مع المفاهيم والاختصارات الواردة بهذه الوحدة. وعليك أيضاً بحل التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي التي ترد في متن الوحدة لما لها من دور كبير في تثبيت المادة أكثر في ذهنك.

نرحب بك مرة أخرى إلى وحدتنا الخامسة، عساك أن تجد فيها الفائدة جُلها كما نرحب أيضاً بنقدك الذي يساعدنا على معرفة السلبيات لتجنبها والايجابيات للعمل بها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

14. تعرِّف ما هي القضية وتوضح ما هي رموزها ورمز الصواب والخطأ بها.
2. تشرح ما هي الروابط المنطقية وتبين ما هي رموزها.
3. تصف كيفية بناء جدول حقيقة من قيم قضيتين مفردتين لتكوين قضية ثالثة

   مستخدماً الروابط المنطقية $\wedge$، $\vee$، $\neg$، $\rightarrow$ و$\leftrightarrow$.
4. تعدّد أنواع القضايا الرياضية.
8. تصف القضايا المركبة وتشرح كيفية انشاء جداول حقيقة للقضايا الأكثر تعقيداً.
6. تستخدم جدول الحقيقة لإيجاد قيم القضايا ولاثبات أن قضيتين ما متكافئتين.
7. تستخدم القوانين الجبرية للقضايا لإثبات تكافؤ قضيتين ولتبسيط الجمل الرياضية.

المنطق الرياضي Mathematical Logic

المنطق الرياضي: هو دراسة الرياضيات بلغة مختصرة أي التعبير عن المفاهيم الرياضية بالرموز الرياضية.

1. القضايا Propositions

منطق القضية (Propositional Logic) هو دراسة الصفات المنطقية للقضية.

القضية (Proposition)

لعلك تتوق لمعرفة ما هي القضية؟

> **القضية** في الرياضيات هي: جملة خبريه توضيحية يمكن أن تكون صواباً أو خطأ أي أنها تقبل كلمة صواب (*T*) أو خطأ (*F*) و *T* تعني *True* و *F* تعني *False*.

من تعريف القضية السابق يتضح لك أن T تستخدم للإشارة إلى القيمة الصحيحة True للقضية بينما F تستخدم للإشارة إلى القيمة الخاطئة False. تبعا لذلك بدلا" من القول ان القضبة P صحيحة، يمكنك ببساطة أن تقول أن:

قيمة P هى T

لنوضح لك أكثر ما هي القضية اليك الأمثلة التالية:

أ. $\sqrt{2}$ غير قياسي.

ب. $\sqrt{3}$ قياسي.

ج. الشمس دائرية.

د. كم الساعة الآن؟

أ. قضية صحيحة (T)، ب. قضية غير صحيحة (F)، ج. قضية تقبل T أو F حسب واقع الجملة في الحقيقة، د. ليست قضية لأنك لا تستطيع أن تطبق الصواب والخطأ عليها فهي مجرد سؤال وهي ليست توضيحية.

أي قضية تقبل أن تكون صواباً أو خطأ (أي T أو F) يُقال أن لها **قيمة حقيقة** أو قيمة صِحّيحة (truth value).

القضايا تعطي رموزاً، فهي يمكن أن تكون ... P, q, r, .

هنالك روابط تعرف **بالروابط المنطقية** تستعمل لربط الرموز الخبرية لتكوين صور جديدة من القضايا أو قضايا جديدة. وهذه الروابط هي $\wedge$ التي تشير إلى و (and)، $\vee$ تشير إلى أو (or)، $\neg$ تشير إلى النفي (negation) ،$\rightarrow$ تشير إلى التضمين (imply) و $\leftrightarrow$ التي تشير إلى التكافؤ (equivalence).

أيضاً عزيزى الدارس في القضايا يمكنك أن تمثل القضايا وروابطها المنطقية بواسطة **جدول** (table) يسمى جدول الصواب والخطأ. وفيه يمكن أن توضح كل احتمالات الارتباط لقيم **T** و **F** اللتين يمثلان الجمل أو القضايا فهو إذن يستخدم لايجاد القيم المفردة أو المركبة للقضايا أي للقضايا الجزئية والمركبة.

تدريب (1)



هلاّ تفضلت عزيزي الدارس، بحل هذا التدريب؟

في الجمل الآتية، وضح القضية الصحيحة والقضية الخطأ والقضية التي تقبل الاثنين والجمل التي ليست بقضايا:

أ. $\sqrt{2}$ **غير قياسي**

ب. لا تكثر الكلام من فضلك.

ج. $\pi > 3$

د. الجو صحوٌ.

هـ. أين يوجد الكتاب؟

و. $(3 < 4) \wedge (3 < 6)$

2. الروابط المنطقية (الكلمات الرياضية) وجداول الحقيقة

سنوضح لك هنا كيفية التعبير عن المفاهيم الرياضية **بالكلمات الرياضية** ونوضح اختصاراتها وكيفية ربطها للرموز الخبرية كما أننا سنبين جداول الحقيقة لكل كلمة من الكلمات:

1.2 التوحيد Conjuction (∧ و and)

إستخدام and في الرياضيات والتي تعني و مهمٌ جداً في بعض الأحوال للتعبير عن الجمل أو القضايا الرياضية و and يرمز لها باختصارين في الجمل الرياضية وهما:

& و ∧

وعليه الجملة الرياضية:

$$(\pi > 3) \wedge (\pi < 3.2)،$$

نعنى بها:

أن π أكبر من 3 and أقل من 3.2 أي أنها تقع بين 3و 3.2.

استخدام التوحيد في جدول الصواب والخطأ

إذا كانت p قضية ما و q قضيةً أخرى، فإن **p and q** أيضاً قضية وتكتب:

$p \wedge q$

وتقرأ : p و q

$p \wedge q$ يمكنك أن تمثلها بجدول الحقيقة الآتي:

p	**q**	**$p \wedge q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

فالعمودان الأولان عزيزي الدارس يوضحان لك كل احتمالات الإرتباط لقيم T و F اللتان يمكن للجملتين p و q أن تكوناها في العمود الثالث لديك قيمة $p \wedge q$ والتي وجدت إعتماداً على قيم p و q . فكما ترى من الجدول أن قيمة القضية $p \wedge q$ لا تساوي T إلا في حالة واحدة إذا كانت القضيتان p و q **صواباً** الاثنين معاً (P = T, q = T) وتكون $p \wedge q$ F في الأحوال الثلاثة الأخرى.

2.2 الانفصال Disconjuction (or, $\vee$)

عندما تريد أن تقول أن الحدث A يحدث أو (or) الحدث B يحدث، أو إذا كان p و q قضيتين أو جملتين رياضتين وتريد أن تقول على الأقل واحدة منهما صحيحة (P or q)، فإنك في هذه الحالة تستخدم or ونرمز لها بـ:

$\vee$

لذلك $p \vee q$ تعني أنه على الأقل واحدة من القضيتين يمكن استخدامها **فمثلاً** الجملة التالية صحيحة:

$$(3 < 5) \vee (1 = 0)$$

إستخدام الإنفصال في جدول الصواب والخطأ

إذا كانت p قضية و q فإن **p or q** أيضاً قضية وتكتب:

$p \vee q$

وتقرأ:

p أو q

الجدول الآتي يوضح لك كل الاحتمالات الممكنة لقيم $p \vee q$ والتي تعتمد على قيم p و q :

p	**q**	**$p \wedge q$**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

فكما ترى في الجدول، فإن قيم $p \vee q$ تكون دائماً صواباً (T) إلا في حالة واحدة وهي حالة أن p خطأ (F) و q خطأ (F).

3.2 النفي أو النقيض Negation ($\neg$, not)

ليست أو **not** هي كلمة تستخدم لنفي الجمل الرياضية أي للقول أن جملة معينة غير صحيحة أو **خطأ**. أي أنك في أي جملة رياضية تريد نفيها يجب أن تسبقها بكلمة:

not

فإذا كانت P أي قضية أو جملة رياضية، فإن:

not – q

توضح أن q غير صحيحة (F) لذلك إذا كانت في الأصل q جملة **صحيحة** فإن not-q تكون **خطأ** (F) وإذا كانت q جملة **خطأ** (F)، فإن not-q تكون صحيحة (T).

الرمز الذي كثيراً ما يستعمل للتعبير عن not هو:

$\neg$

فمثلاً الجملة : $\neg \ (\pi < 3)$ ،

تعني أن:

$$\pi \geq 3$$

أو :

$$(\pi = 3) \vee (\pi > 3)$$

أ.إستخدام النفي في جدول الصواب والخطأ

إذا كانت p قضية، فإن p not ايضاً قضية وتكتب:

$$\neg p$$

وتقرأ

ليس p

إذا تمعنت جدول الحقيقة الآتي ستتبين الاحتمالين لقيم p ¬ الذين يعتمدان أصلاً على قيمتيp (T و F).

p	¬p
T	F
F	T

من الجدول كما هو واضح، القضية p¬ تكون صواباً (T) إذا كانت p خطأ (F) أو تكون خطأ (F) إذا كانت p صواب (T) وهذا يعني أن قيمة p هي قيمة عكسية لقيمة p¬.

في النفي تلاحظ عزيزي الدارس أن (p¬) ¬ مكافئة لـ p (بمعنى أنها هي نفسها).

ب. تأثير النفي على التوحيد وعلى الانفصال

لتوضيح أثر النفي على التوحيد (Conjuction) وعلى الانفصال (Disconjuction) نتعرف أولاً التعبير الآتي:

$$\neg (p \wedge q)$$

حيث p و q جملاً رياضية.

حسناً $p \wedge q$ تعني أن p و q الاثنان **صحيحتان** لذا $\neg(p \wedge q)$ تعني أنه الحال الذي فيه p و q (إذا كانتا ليست صحيحتان)، على الأقل واحدة منهما يجب أن تكون **خطأ** لكن القول على

الاقل واحدة من p و q **خطأ** من الواضح أنه مثل القول أنه على الأقل واحدة من $\neg p$ و $\neg q$ صحيحة بالمعنى الذي عرفناها **لأو** (or) هذه يمكن أن نعبر عنها كالآتي:

$$(\neg p) \vee (\neg q)$$

لذلك:

متكافئتان

$$q) \longleftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \wedge p(\neg$$

بنفس الطريقة يمكنك أن توضح أن:

متكافئتان

$$q) \longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \vee p(\neg$$

من هذا يتضح لك أن النفي له تأثير أنه يحول $\vee$ **إلى** $\wedge$ ويحول $\wedge$ **إلى** $\vee$

4.2 الإقتضاء Implication , if ... then (→)

غالباً ما يقابلك في الرياضيات تعبير من هذه الشاكلة:

p **implies** q

implies تعنى تقتضى ضمناً دعنا نحاول معرفة مإذا تعني هذه الجملة.

إذا كان p جملة صحيحة (T)، فإن q يجب أن تكون صحيحة (T) أيضا. الصحة وحدها لا تكفي لأن هذه الجملة أيضاً تعني أن P **تسبب** أو تعطى q. **فالحقيقة والسبب** مهمان لهذه العلاقة. والصحة في التضمين تعرف بالشرط (conditional) لذلك:

التضمين أو الاقتضاء = الشرط + السبب.

(implication = conditional + causation)

سنستعمل الرمز:

$$p \rightarrow q$$

للإشارة إلى قيمة الحقيقة أو **الصحة** (truth value) والتي نعني بها قسم **الشرط** (conditional) من الاقتضاء أو التضمين.

فالتعبير : $p \rightarrow q$، يسمى **بالتعبير الشرطي** (conditional expression) أو **الشرط**، ففيه نشير إلى p **بفعل الشرط** (antecedent of the conditional) و q تعرف **بجواب الشرط** (consequent). الصحة أو الخطأ للشرط يعتمد كليةً على الصحة أو الخطأ لفعل وجواب الشرط. بمعنى آخر صحة وعدم صحة التعبير الشرطي: $p \rightarrow q$ ،يعتمد أساساً على صحة أو خطأ p و q.

إذا كانت p **صحيحة** والتعبير : **p implies q**، هو تضمين صحيح، فإن q سوف تكون **صحيحة** تبعاً لذلك.

إستخدام الإقتضاء في جدول الصواب والخطأ

إذا كانت p قضية و q قضية، فإن **p تقتضي q** هي أيضاً قضية وتكتب:

$$p \rightarrow q$$

ويمكنك أن تقرأ هذا الشرط بأي من الطرق الآتية:

1. p تقتضي q (p implies q).
2. إذا p عندئذ q (if p then q).
3. p كافية لـ q (p sufficient for q).
4. p فقط إذا q (p only if q).
5. q إذا p (q if p).
6. q متما p (q whenever p).
7. q ضرورية لـ p (q necessary for p).

جدول الصحة أو الحقيقة الآتي يريك كل الاحتمالات لقيم الشرط $p \rightarrow q$ الناتجة من قيم p و q.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الجدول أعلاه يبين أن القضية $p \rightarrow q$ تكون دائماً صواباً (T) ما عدا في حالة واحدة وهي عندما تكون p صواباً (T) و q خطأ (F).

تأثير النفي (negation) على الاقتضاء التضمين

تأثير النفي على التضمين أو على الشرط (conditional)، هو مربوط مسبقاً بالسلوك الذي فيه عرفنا الشرط.

من تعريفنا:

$$\neg(p \rightarrow q)$$

هي نفس:

$$p \wedge (\neg q)$$

أي أنهما متكافئتان

ولذلك $\mathbf{p \rightarrow q}$

هي ذاتها:

$$\mathbf{(\neg p) \vee q}$$

أي أنهما أيضا متكافئتان

دائماً ما يقابلك التعبير:

بدلاً عن: $\boxed{p \rightarrow q}$

$$\neg(p \rightarrow q)$$

بنفس الطريقة غالباً ما نجد الرمز:

أكثر شيوعاً من: $\boxed{x \neq y}$

$$\neg(x = y)$$

أيضاً في الأعداد الحقيقية **مثلاً** دائماً ما نكتب أو نقول:

$$a < x \leq b$$

بدلاً عن:

$$(a < x) \wedge (x \leq b)$$

لكن ربما يصادفك التعبير:

$$\neg a < x \leq b$$

أكثر من التعبير:

$$a \not< x \not\leq b$$

5.2 التكافؤ Equivalence ($\leftrightarrow$)

هو رمز ذو علاقة برمز الإقتضاء (implies) فالجملتان الخبريتان أو القضيتان الرياضيتان p و q، يقال عنهما –منطقيا– متكافئتان، إذا كان كل واحدة منهما تتضمن أي تقتضى الأخرى. والرمز الذي يستعمل في حالة التكافؤ يسمى الشرط الثنائي (biconditional) ويكتب كالآتي:

$$\leftrightarrow$$

وتكتب القضية:

$$p \leftrightarrow q$$

فالشرط الثنائي يعرف على أنه اختصار للتوحيد الآتي:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

استخدام التكافؤ في جدول الصواب والخطأ

إذا كانت p قضية و q قضية، فإن P تكافئ q هي أيضاً قضية وتكتب:

$$p \leftrightarrow q$$

وتقرأ بأي من الطرق الآتية:

1. p مكافئة لـ q (p is equivalent to q).
2. p ضرورية وكافية لـ q (p is necessary and sufficient to q).
3. p إذا وفقط إذا q (p if and only if q).

وهنالك اختصار شائع للتعبير إذا وفقط إذا (if and only if)، وهو "iff" لذلك غالباً ما تكتب القضية كالآتي:

p iff q

الان عزيزي الدارس هيا بنا إلى جدول الصحة لتتعرف على كل الاحتمالات الممكنة لقيم القضية $p \leftrightarrow q$ المتحصل عليها من قيم p و q.

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تلاحظ من الجدول السابق أن القضية $p \leftrightarrow q$ تكون صواباً (T) في حالة p و q صحيحتان وفي حالة p و q خاطئتان الاثنين معاً. وتكون خطأ في حالة أي منهما خطأ (F).

تدريب (2)



يستحسن أن نتوقف لحظات للتأكد من أنك قد استوعبت ما سبق من مفاهيم.

1. بسّط الجمل الآتية:
   - أ. $(\pi > 0) \wedge (\pi < 10)$
   - ب. $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$
   - ج. $(\pi = 3) \vee (x > 3)$
   - د. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow P)$
2. في الجمل الآتية، عيّن الجملة الصحيحة والجملة الخطأ:
   - أ. $(\pi^2 > 2) \rightarrow (\pi > 1.4)$
   - ب. $(\pi^2 > 0) \rightarrow (1+2 = 4)$
   - ج. $(\pi < \pi^2) \rightarrow (\pi = 5)$
   - د. $\neg [(5 \text{ is an integer}) \rightarrow (5^2 \geq 1)$
   - هـ. إذا كان للمربع ثلاثة أوجه، إذن للمثلث أربعة أوجه.
3. أنفى هذه الجمل:
   - أ. 4 عدد أولى.
   - ب. إذا لم تكن هنالك حافلة سأستقل عرب الأجرة.
   - ج. العدد x اما سالباً أو أكبر من 10

3. أنواع القضايا

1.3 القضية تحصيل حاصل والقضية المتناقضة

القضية إما **تحصيل حاصل** (Tautology)

وهي القضية التي دائماً لها قيمة حقيقة (T) أي أنها دائماً صواب. مثال لذلك:

$CXC1$

$\neg p \vee p$

فهيT لأي رمز خبري p.

وإما **متناقضة** (contradiction)

وهي القضية أو الهيئة الخبرية التي تأخذ فقط قيم الحقيقة (F) أي أنها دائماً خطأ. مثال لذلك:

$\neg P \wedge P$

2.3 القضية المفردة والقضية المركبة

القضية أيضاً إما **مفردة (Single)**

وهي الجملة الجبرية التي تتحد مع قضية أخرى لتنتج قضية مركبة.

مثال (1)

$p \rightarrow q$ و $p \vee q$ و $p \wedge q$ فكما نلاحظ هنا فإن p قضية مفردة و q قضية مفردة وبادخال الكلمات أو الروابط الرياضية أصبحت القضايا مركبة.

أو مركبة (Compound)

وهي القضية التي تحتوي على رمز عمليه واحدة أو أكثر من رموز العمليات ويمكن أن نفصل بين العمليات بأقواس وذلك تلاحظه في الأمثلة التالية:

أ. $p \vee q$

ب. $\neg p \vee q$

ج. $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

4. القضايا المركبة (Compound Proposition) وجداول الصواب والخطأ

يمكنك أيضاً أن تدمج قضايا مفردة وأخرى مركبة لإنتاج قضايا جديدة وعادة في القضايا المركبة يتم ايجاد الأقواس أولاً ثم تتبع باقي العملية فمثلاً $p \wedge q$ و $\neg p \wedge \neg q$ قضيتين و $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow p$ قضية مركبة منهما. قيمة أي قضية تتوقف على قيم القضايا

المفردة المكونة لها وعادة ما يستخدم جدول الصواب والخطأ في ايجاد قيم الاحتمالات المختلفة بطريقة خطوة خطوة. القضايا المركبة يتم ايجاد الأقواس أولاً ثم تتبع باقي العملية فمثلاً $p \wedge q$ و $\neg p \wedge \neg q$ قضيتين و $p \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ قضية مركبة منهما. قيمة أي قضية تتوقف على قيم القضايا المفردة المكونة لها وعادة ما يستخدم جدول الصواب والخطأ في ايجاد قيم الاحتمالات المختلفة بطريقة خطوة خطوة.

مثال(2)

أوجد قيم $\neg(p \wedge \neg q)$ ، وهي دالة في القيم المختلفة للقضيتين p و q.

الحل

لكي يتسنى لك ايجاد قيم $\neg(p \wedge \neg q)$ عليك أن تبنى الجدول التالي عموداً عموداً من الأيسر للأيمن.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

تلاحظ فى هذا الجدول أن كل عمود يمثل جملة أو قضية لها قيمة اما صواب أو خطأ متوقفة علي القضايا الجزئية المكونة لها.

تتوقف تماماً على قيم القضايا الجزئية $\neg(p \wedge \neg q)$ فالقيمة النهائية للجملة المستهدفة اهل ةنوكمل.

مثال (3)

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

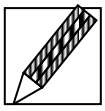
الحل

تلاحظ أن هذه القضية مركبة لأنها تحتوي أكثر من عملية ففي هذا المثال نجد ان هذه الجملة تحتوي $\wedge$و $\rightarrow$ وعدد من الأقواس. لإيجاد قيمة هذه القضية المركبة، تبدأ بايجاد قيم

القضايا المفردة أولاً أي ما بداخل الأقواس ثم بعد ذلك القضايا المركبة المكونة من قضيتين مفردتين ثم تجد قيم القضايا المركبة التي تتكون من أكثر من قضيتين مفردتين.

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$\begin{pmatrix}p\to q\wedge(q\to r)\to\\(p\to r)\end{pmatrix}$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

تدريب (3)



هل يمكنك أن تميّز بين القضية تحصيل حاصل (*tautology*) والقضية المتناقضة (*contradiction*) من بين القضايا الآتية؟ إذا كان ذلك كذلك، فعليك توضيح الخطوات:

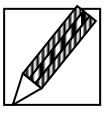
أ. $\neg(p\wedge\neg p)$

ب. $(p\vee q)\to[(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)]$

ج. $p\to(q\to p)$

د. $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)]$

تدريب (4)



أظن أنك تحتاج لوقفة قبل أن تواصل هذه الوحدة لتتعلم كيف تبنى جدول حقيقة بنفسك – الآن إلى هذا التدريب.

أنشئ جداول حقيقة للقضايا الآتية:

أ. $(p\wedge q)\vee\neg q$

ب. $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

ج. $p\wedge(q\vee\neg q)$

أسئلة تقويم ذاتي (1)

(1) أوجد جدول الصواب والخطأ للقضايا التالية:

(أ) $\neg p \wedge q$

(ب) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(ج) $\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \leftrightarrow p)$

(د) $\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$

(2) عبر فيما إذا كانت القضايا التالية صوابا" أم خطأ

(أ) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(ب) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(ج) $q \rightarrow [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$

5. منطق التكافؤ Logic of Equivalence

يمكنك عزيزي الدارس أن تستخدم جدول الحقيقة لإثبات أن قضيتين متكافئتين وذلك بايجاد قيم القضايا المكونة لكل قضية رئيسة ومقارنة القيم الناتجة لكل قضية للتأكد من أنهما متكافئتان. فإذا كانت p و q قضيتين مركبتين وكان جدول الحقيقة لهما متساوٍ فإنك تقول إن p تكافئ q وتكتب:

$$p \equiv q$$

وتقرأ : p تكافئ q

بمعنى آخر تقول p و q **متكافئتان** إذا كان لهما نفس جدول الصواب والخطأ أي هما حقيقة متساوية.

مثال(4)

أثبت أن: $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$

الحل

ننشئ جدول الحقيقة على النحو التالي:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

تلاحظ أن قيمة العمودين الأخيرين واحدة أي متساوية لذلك نقول إن القضية $(p \to q) \wedge (q \to p)$ منطقياً تكافئ القضية $p \leftrightarrow q$ وتكتب:

$$(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$$

مثال(5)

اثبت ان $p \to q \equiv \neg p \vee q$

الحل

ننشئ جدول الصواب والخطأ على النحو التالي

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

من قيم القضيتين في العمودين الأخيرين يتضح لك أن:

$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$ وهو المطلوب اثباته.

من الأمثلة السابقة يتضح لك أن جدول الحقيقة (أو جدول الصواب والخطأ)، يمكنك أن تستخدمه اما لايجاد **قيم القضايا** أو لاثبات أن قضيتين ما **متكافئتين** (equivalent).

تدريب (5)



أرجو أن تكون قد حذقت إنشاء جداول الحقيقة، على أية حال اليك هذا التدريب الذي يعزز من خبرتك في هذا المجال:

مستخدماً جداول الحقيقة، برهن أن القضايا الآتية متكافئة منطقياً:

أ. $p \to (q \wedge r)$ و $(p \to q) \wedge (p \to r)$

ب. $(p \to q)$ و $(\neg p) \to (\neg q)$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



اثبت التكافؤ المنطقي للقضايا التالية:

(أ) $p \to \neg q \equiv q \to \neg p$

(ب) $[(p \to q) \to r] \equiv [(p \wedge \neg r) \to q]$

(ج) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

6. القوانين الجبرية للقضايا

(أ) قانون التحايد Idempotent laws

(1) $p \vee p \equiv p$ (2) $p \wedge p \equiv p$

(ب) قانون التجميع Associative laws

(1) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (2) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \vee r)$

(ج) قانون التبديل Commutative laws

(1) $p \vee q \equiv q \vee p$ (2) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(د) قانون التوزيع Distributive laws

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (2) \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) (1)$$

(هـ) قانون التطابق Identity laws

$$p \wedge T \equiv p \quad (2)\, p \vee F \equiv p \quad (1)$$
$$p \wedge F \equiv F \quad (4)\ \ p \vee T \equiv T \quad (3)$$

(و) قانون التكامل Complement laws

$$p \wedge \neg p \equiv F \quad (2)\, p \vee \neg p \equiv T \quad (1)$$

$$\neg T \equiv F, \neg F \equiv T \quad (4)\ \ \neg\neg p \equiv p \quad (3)$$

(ز) قانون دمورقن DeMorgan's laws

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (2)\ \ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q (1)$$

هذه القوانين الجبرية للقضايا يمكنك ان تستخدمها في اختصار القضايا المركبة او إثبات التكافؤ المنطقي بينها.

مثال (6)

مستخدماً جدول الصواب والخطأ والقوانين الجبرية أثبت أن

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$$

الحل

أولاً: باستخدام جدول الصواب والخطأ يمكنك أن تنشئ الجدول الآتي خطوة خطوة:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \to r) \vee (q \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

تلاحظ أن العمودين الأخيرين في الجدول متطابقان

$$\therefore (p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$$

وهذا هو المطلوب اثباته.

ثانياً: باستخدام القوانين الجبرية للتكافؤ المنطقي:

فلكى تثبت تكافؤ القضيتين: $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

يمكنك أن تبدأ بأحد الأطراف وتستخدم القوانين المختلفة لنصل به إلى الطرف الأخر، أو يمكنك أن تأخذ كل طرف وتصل به إلى الحد الذي يتطابق فيه الطرفان.

في هذه الحالة سوف نأخذ الطرف الأيمن

$$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$$

مستخدمين الحقيقة التي تم إثباتها من قبل في مثال سابق $*(p \to q) \equiv \neg p \vee q$

$$\equiv \neg p \vee r \vee \neg q \vee r$$

$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee r \vee r$$

مستخدمين قانون التبديل

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee r)$$

مستخدمين قانون التجميع

$$\equiv \neg (p \wedge q) \vee (r \vee r)$$

مستخدمين قانون DeMorgan في القوس الأول

$$\equiv \neg (p \wedge q) \vee r$$

مستخدمين قانون التحايد

$$\equiv (p \wedge q) \to r$$

مستخدمين الحقيقة السابقة المشار إليها ب (*)

نجد أن هذا الطرف يطابق الطرف الأيسر

$$\therefore (p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r) \#$$

ملاحظة

يمكنك إثبات جميع القوانين الجبرية للقضايا باستخدامك لجدول الصواب والخطأ أو جدول الحقيقة.

مثال (7)

مستخدماً القوانين الجبرية بسط القضية:

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$$

الحل

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)\ \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$$

باستخدام قانون DeMorgan في القوس الأول

$$\equiv \neg p \wedge (\neg q \wedge q)$$

باستخدام قانون التوزيع

$$p \wedge T \equiv P \quad ،$$

$$\therefore \neg P \wedge (\neg q \wedge q) \equiv \neg P \wedge (T)$$

باستخدام قانون التكامل

$$\equiv \neg P$$

باستخدام قانون التطابق#

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg P$$

أسئلة تقويم ذاتي (3)

(4) مستخدماً القوانين الجبرية للقضايا، بسط الجمل التالية:

(أ) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$

(ب) $\neg(\neg p \rightarrow q)$

(ج) $\neg(\neg p \wedge \rightarrow q)$

(د) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

CC

الخلاصة

هل يمكنك، عزيزي الدارس، من أن تسترجع العناوين الرئيسة التي جاءت فى هذه الوحدة فى ذهنك وتلخيص أهم ما ورد بها من مفاهيم وقوانين رياضية ؟

حسناً دعنا نقوم معاً بعملية التلخيص تلك ونبدأ بمفهوم **القضية** في الرياضيات والتي أوضحنا أنها هي: جملة جبرية توضيحية يمكن أن تكون صواباً (T) أو خطأ (F).

وتناولنا بالشرح ما يعرف **بالروابط المنطقية** أو الكلمات فى الرياضيات وذكرنا أنها تستعمل لربط الرموز الخبرية لتكوين صور جديدة من القضايا أى قضايا جديدة. وبيّنا أنواعها و هي $\wedge$ التي تشير إلى و (and) وتعرف بالتوحيد، $\vee$ تشير إلى أو (or) وتعرف بالأنفصال وتستخدم للإشارة لأن الحدث A يحدث أو (or) الحدث B يحدث ، $\neg$ تشير إلى النفي وتعني **ليست** أو **not** وهي كلمة تستخدم لنفي الجمل الرياضية أي للقول أن جملة معينة غير صحيحة أو **خطأ**، $\rightarrow$ تشير إلى التضمين و تسمى **بالتعبير الشرطي** أو **الشرط**، ففيه نشير إلى p **بفعل الشرط** و q تعرف **بجواب الشرط** وأخيراً الرمز $\leftrightarrow$ الذي يسمى **بالشرط الثنائي** ويشير إلى التكافؤ فالقضيتان p و q يقال عنهما –منطقيا– متكافئتان، إذا كان كل واحدة منهما تتضمن أي تقتضى الأخرى.

إنتقلنا بك إلى ما يسمى بجدول الصواب والخطأ (table) و عرفت فيه أنه يمكن أن توضح كل احتمالات الارتباط لقيم **T** و **F** اللتين يمثلان الجمل أو القضايا فهو إذن يستخدم لايجاد القيم المفردة أو المركبة للقضايا أي للقضايا الجزئية والمركبة وتعلمت كيفية إنشاء هذه الجداول

ثم بعد ذلك تناولنا أنواع القضايا فالقضية إما **تحصيل حاصل** (Tautology) وهي القضية التي دائماً لها قيمة حقيقة (T) أي أنها دائماً صواب وإما **متناقضة** (contradiction) وهي القضية أو الهيئة الخبرية التي تأخذ فقط قيم الحقيقة (F) أي أنها دائماً خطأ.

وذكرنا أيضاَ أن القضية أيضاً إما **مفردة (single)** وهي الجملة الجبرية التي تتحد مع قضية أخرى لتنتج قضية مركبة. **أو مركبة (compound)** وهي القضية التي تحتوي على رمز عمليه واحدة أو أكثر من رموز العمليات.

وفى منطق التكافؤ عرفت أن جدول الحقيقة يمكن أن يستخدم لإثبات أن قضيتين متكافئتين وذلك بايجاد قيم القضايا المكونة لكل قضية رئيسة ومقارنة القيم الناتجة لكل قضية للتأكد من أنهما متكافئتان.

درست القوانين الجبرية للقضايا وعرفت أنه يمكنك ان تستخدمها في اختصار القضايا المركبة او إثبات التكافؤ المنطقي بينها.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة السادسة تتحدث عن منطق الأسناد. فيها ستعرف ما هو القياس كما أنك ستجد شرحاً للمقيس عليه (quantifiers) بنوعيه (المقيس عليه الشامل والمقيس عليه الجزئي ويسمى بالوجودي) والقضايا التي تضمهما. أيضاً تتناول الوحدة بالشرح الجملة المفتوحة، الجملة المغلقة و المجموعة المحققة أو مجموعة الصحة كما ستتمكن فيها من نفي القضايا التي تحتوي على القياس.

أرجو أن تجد فيها مبتغاك.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

أ. قضية صحيحة (T)

ب. ليست قضية.

ج. قضية صحيحة (T).

د. قضية تقبل T أو F حسب واقعها في الحقيقة.

هـ. ليست قضية.

و. قضية صحيحة (T).

تدريب (2)

1. أ. $\pi > 0 < 10$

ب. $e < 3 < 4$

ج. $\pi \geq 3$

د. $p \leftrightarrow q$

2. أ. T.

ب. F.

ج. F.

د. F.

هـ. T.

3. أ. 4 **ليس** عدد أولى

ب. إذا كانت هنالك حافلة **سوف لن** أستقل عربة الأجرة.

ج. العدد x **ليس** سالباً **وليس** أكبر من 15.

تدريب (3)

أ. $\neg(p\wedge\neg p)$

p	¬p	p∧¬p	¬(p∧¬p)
T	**F**	F	T
F	T	F	T

إذن القضية $p\wedge\neg p\neg$ هي قضية تحصيل حاصل (tautology).

ب. $(p\vee q)\rightarrow[(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)]$

p	q	p∨q	p∧q	¬q	p∧¬q	¬p	¬p∧q	[(p∧q)∨(p∧¬q) ∨(¬p∧q)]*	p∨q→*
T	T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	F	T

فى العمود الأخير* تشير إلى القضية $[(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)]$

إذن القضية $(p\vee q)\rightarrow[(p\wedge q)\vee(p\wedge-q)\vee(\neg p\wedge q)]$ هىقضية تحصيل حاصل (tautology).

ج. $p\rightarrow(q\rightarrow p)$

p	q	p→q	p→(q→p)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

$p\rightarrow(q\rightarrow p)$ً هى أيضا قضية تحصيل حاصل (tautology).

د. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	F

إذن القضية $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ هي قضية متناقضة (contradiction).

تدريب (4)

أ. $(p \wedge q) \vee \neg q$ جدول الحقيقة لهذه القضية هو:

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \vee \neg q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

ب. جدول الحقيقة للقضية $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

ج. جدول الحقيقة للقضية $p\wedge(q \vee \neg q)$ هو:

p	**q**	**¬q**	**(q ∨ ¬q)**	**p∧(q ∨ ¬q)**
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F

د. جدول الحقيقة للقضية $p\rightarrow(q \rightarrow p)$

P	**q**	**q →p**	**p→(q →p)**
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

تدريب (5)

أ. لاثبات أن القضيتين $p \rightarrow(q\wedge r)$ و $(p\rightarrow r)\wedge(p\rightarrow q)$ متكافئتان ننشئ جدول الصواب والخطأ الاتى:

p	**q**	**r**	**q∧r**	**p → (q∧r)***	**p → q**	**p →r**	**(p →q) ∧ (p →r) ***
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

إذن $p\rightarrow(q\wedge r)$ تكافئ $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$ (العمود 5 و العمود 8) لأنهما يمتلكان نفس قيم الحقيقة.

ب. لاثبات أن القضيتين $(p\rightarrow q)$ و $(\neg q)\rightarrow(\neg p)$ متكافئتان ننشئ جدول الصواب والخطأ الاتى:

p	**q**	**$p\rightarrow q$ ***	**$\neg q$**	**$\neg p$**	**$(\neg q)\rightarrow(\neg P)$ ***
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

إذن القضيتان $(p\rightarrow q)$ و $(\neg q)\rightarrow(\neg p)$ متكافئتان لأن قيم الحقيقة للقضيتين متطابقة (العمود 3 و العمود 6).

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

التقويم الذاتي (1)

1.

(أ) $\neg (p \wedge q)$

p	¬p	q	¬p ∧ q
T	F	T	F
F	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F

(ب)

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

p	q	p ∧ q	p ∨ q	(p ∧ q) → (p ∨ q)
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

(ج)

$\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \leftrightarrow P)$

p	q	q¬	p ∧ q	(p ∧ q)¬	q ↔ p¬	$\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \leftrightarrow p)$
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F

(د) $\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$

p	**q**	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(q \leftrightarrow p)$	$\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$
T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

2. لنعبر عن هذه الجمل بصحتها وخطائها يجب إنشاء جداول الصواب والخطأ:

(أ) $(P \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	**q**	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$\mathbf{q \rightarrow p}$	$\mathbf{(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)}$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

$\therefore (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) = T$

(ب) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

P	**q**	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\therefore \neg p \rightarrow (p \rightarrow q) = T$

(ج) $q \rightarrow [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$

p	**q**	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow p$	$q \rightarrow [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

$\therefore q \rightarrow [(p \wedge q) \leftrightarrow p] = T$

التقويم الذاتي (2)

هنا يمكن الإثبات بإستخدام جداول الصواب والخطأ:

(أ) $p \rightarrow \neg q \equiv q \rightarrow \neg p$

p	**q**	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

تلاحظ أنه فى العمودين الاخيرين

$p \rightarrow \neg q$ تكافئ $q \rightarrow \neg p$

(ب) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \equiv [(P \wedge \neg r) \rightarrow q]$

p	**q**	**r**	$\neg r$	$p \rightarrow q$	$P \wedge \neg r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$(P \wedge \neg r) \rightarrow q$
T	T	T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T

نلاحظ من العمودين الآخرين أن هذه المقادير غير متكافئة أي:

$(P \wedge \neg r) \rightarrow q$ لاتكافئ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

(ج) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ب.

p	**q**	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$\therefore p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

التقويم الذاتي (3)

هنا نستخدم القوانين الجبرية المنصوص عنها في متن هذه الوحدة

(أ) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$

$\Rightarrow \neg[(\neg p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow \neg p)$ قانون الإقتضاء

$\Rightarrow \neg[(pvq) \vee (\neg q \vee \neg p)$

$\Rightarrow \neg[(pvq) \vee \neg q \vee \neg p\ ]$

$\Rightarrow \neg[p \vee \neg P \vee q \vee \neg q]$ قانون التبديل

$\Rightarrow \neg[TvT\ ]$ قانون التحايد

$\Rightarrow F$

(ب) $\neg(\neg P \to q)$ قانون الإقتضاء

$\Rightarrow \neg(p \vee q)$

$\Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ قانون دمورقن

(ج) $\neg\neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\Rightarrow \neg\neg(p \vee q)$ قانون دمورقن

$\Rightarrow p \vee q$ قانون التناقض

(د) $\neg(\neg P \to \neg q)$

$\Rightarrow \neg(p \vee \neg q)$ قانون الاقتضاء

$\Rightarrow \neg p \wedge q$ قانون دمورقن

مسرد المصطلحات

القضية Proposition (p, q, r, ...)

هي جملة خبرية توضيحية يمكن أن تكون صواباً أو خطأ أي أنها تقبل كلمة صواب (T) أو خطأ (F).

قيمة الحقيقة Truth Value

هي القيمة التي تقبلها أي قضية أي هي الصواب true (T) أو الخطأ false (F).

الروابط المنطقية Logical Connecting

هي الكلمات أو المفاهيم التي تستعمل لربط الجمل الخبرية لتكوين جمل خبرية جديدة أكثر تعقيداً وهي ∧، ∨، ¬، → و ↔.

التوحيد Conjuction (∧ , and)

هو الرابط المنطقي (و) الذي يستعمل لربط قضيتين يحدثان معاً في نفس الوقت.

الانفصال Disconjuction (∨ , or)

هو الرابط المنطقي (أو) الذي يستخدم لربط قضيتين على الأقل واحدة منهما صحيحة.

النفى negation (¬ و not)

هو الرابط المنطقي (ليس) الذي يستخدم لنفي الجمل الرياضية أي للقول أن جملة معينة غير صحيحة أى خطأ.

الاقتضاء implication (→)

هو الرابط المنطقي (يقتضى) الذي يستخدم للدلالة على أن قضية أو جملة تقتضي ضمناً قضية أو جملة أخرى وهو يساوي **قيمة الحقيقة+ السبب.**

التعبير الشرطي Conditional expression

هو التعبير p→q الذي تعتمد صحته أو خطؤه على صحة وخطأ p و q.

فعل الشرط Antecedent of conditional

هو القضية المفردة p في القضية المركبة p→q.

جواب الشرط Consequent of Conditional

هو القضية المفردة q في القضية المركبة $p \rightarrow q$.

التكافؤ Equivalence ($\leftrightarrow$)

يقال أن القضيتين p و q متكافئتان منطقياً إذا كانت كل منهما تتضمن أو تقتضي الأخرى.

القضية تحصيل حاصل Tautology

هي القضية التي دائماً لها قيمة حقيقة (T) أي أنها دائماً صواب.

القضية المتناقصة Contraiction

هي القضية التي تأخذ فقط قيمة حقيقة (F) أي أنها دائماً خطأ.

القضية المفردة Single proposition:

هي القضية البسيطة التي تتخد مع مثلها لتكوين ثالثة مركبة.

القضية المركبة Compound proposition

هي القضية التي تحتوي على رابط منطقي واحد أو أكثر.

جدول الحقيقة Truth table

وأيضاً يسمى بجدول الصواب والخطأ وهو جدول يبنى أو ينشأ من القضايا المفردة لتوضيح كل احتمالات الارتباط لقيم T و F لهذه القضايا لتكوين قضايا أخرى.

منطق التكافؤ Logic of Equivalence

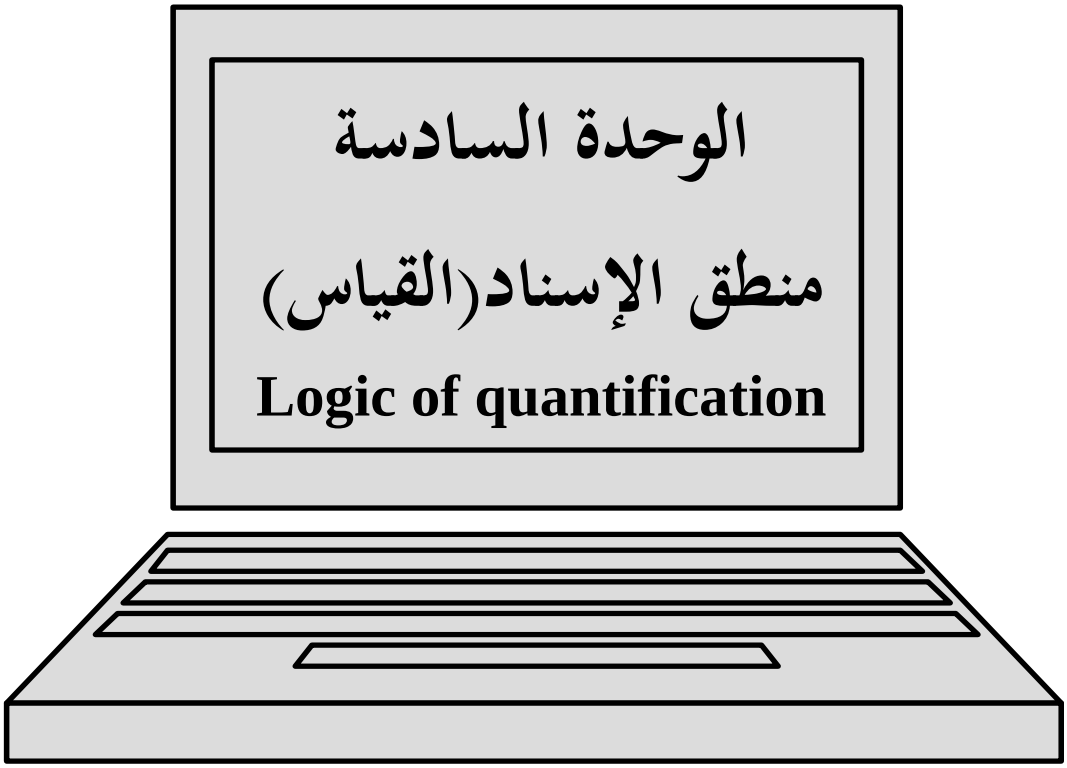
هو المنطق الرياضي الذي به تستخدم جدول الحقيقة لإثبات أن قضيتين ما متكافئتين مثل $p \equiv q$ فهنا p تكافئ q. أي أن لهما نفس قيم الحقيقة.

القوانين الجبرية للقضايا

هي قوانين تستخدم لتبسيط القضايا لأبسط صورها (نجدها في المتن).

المراجع

21. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
22. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
23. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
24. **Finite Mathematics**, Shaum Series
25. **Set Theory**, Shaum series.


الوحدة السادسة
منطق الإسناد(القياس)
Logic of quantification

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**211**
تمهيد	211
أهداف الوحدة	212
1. القياس والشمول	**214**
2. الدوال الافتراضية والمجموعات المحققة	**214**
1.2 الجملة المفتوحة	214
2.2 الجملة المغلقة	214
3.2 المجموعة المحققة (مجموعة الصحة)	215
3. أنواع القياس	216
1.3 المقيس عليه الشامل	216
2.3 المقيس عليه الوجودي (الجزئى)	219
4. نفي القضايا التي تحتوي على القياس	**223**
الخلاصة	**226**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**227**
اجابات التدريبات	**228**
اجابات التقويم الذاتي	**230**
مسرد المصطلحات	**232**
المراجع	**233**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

الان بين يديك الوحدة السادسة التي تتناول منطق الإسناد الذى يعرف أيضاً بمنطق القياس. وتحتوي هذه الوحدة أربعة أقسام رئيسة تتناول منطق القياس بالشرح وتبين المفاهيم الرياضية المتعلقة به.

ستجد شرحاً لمفهومى القياس والشمول وإرتباطهما ببعضهما فى القسم الأول.

أما في القسم الثانى تحت عنوان الدوال الإفتراضية والمجموعات المحققة ستتعرف على الجملة المفتوحة والجملة المغلقة والفرق بينهما والمجموعة المحققة وكيفية إيجادها فى المسائل الرياضية المرتبطة بهدا النوع من المفاهيم.

يتطرق القسم الثالث من الوحدة لأنواع القياس وفيها ستميز نوعين من القياس هما القياس الشامل والقياس الوجودى. كما أنك ستدرس كيفية التعبير عنهما رمزاً وقولاً. أيضاً ستتمكن من دراسة كيفية تحديد صحة أو خطأ الجمل أو القضايا التي تحتوي على نوعي المقيس عليه. القسم الرابع والأخير يعرفك بنفي القضابا المحتوية على القياس.

عليك التعامل بجدية مع التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي التي ترد في متن هذه الوحدة لما لها من دور كبير في تعزيز ما ستدرسه من مفاهيم قد تكون جديدة عليك.

أهلاً بك مرةً أخرى الى الوحدة السادسة، علك تجد فيها متعةً وسلاسةً. وأهلاً بارائك التى ستكون لنا عوناً فى المزيد من التطوير.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

15. تعرِّف القياس والشمول وتوضح العلاقة بينهما.
2. تميز بين الجملة المفتوحة والجملة المغلقة.
4. تحل المسائل المتعلقة بإيجاد المجموعة المحققة.
4. تفرق بين نوعى القياس، الشامل والجزئى.
9. تميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخطأ في القضايا التي تحتوي على القياس.
6. تنفى القضايا التي تحتوي على القياس.

منطق الإسناد Logic of Quantification

أيضاً يسمى بمنطق القياس وسنتحدث هنا عن المقيس عليه (quantifiers) وأنواعه وعن القضايا التي تضمه.

سنبدأ بـ لأي من الأشياء يشار للمتغير في المقيس عليه:

1. القياس (Quantification) والشمول (Universe)

يرتبط الشمول مع أي استعمال للمقيس عليه (Quantifier)

و **الشمول** هو: **مجموعة** الأشياء التي يرجع لها المقيس عليه. وهذه يمكن أن تكون مجموعة كل الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد المركبة أو أي مجموعات أخرى.

فمثلاً الجملة الرياضية الآتية:

$$X \geq 5$$

تحتوي عل متغير **غير مقيس** ولا تعني أي شئ محدد فلا هي **صحيحة** ولا هي **خطأ** وعليه فهي لا تعتبر قضية (Proposition) لكن اذا بدلنا المتغير بآخر مناسب فستكون هنالك قضية فمثلاً اذا بدلنا x بـ 8 ستصبح القضية **صحيحة:**

$$8 \geq 5$$

بينما اذا بدلنا x بـ π ، فإننا نتحصل على قضية خطأ:

$$\pi \geq 5$$

والمقيس عليه سنوضح لك بالتفصيل في الأقسام القادمة نوعان، مقيس عليه شامل ومقيس عليه جزئي ويسمى بالوجودي. من هذا التفسير عزيزي الدارس، للمقيس عليه والشمول يمكنك أن تجد تعريفاً للقياس فكيف تعرفه؟

حسناً،

فالقياس هو:
توضيح كيفية إرتباط مقيس عليه معين بمجموعة أشياء يرجع لها المقيس عليه وتكون العلاقة بينهما واضحة.

2. الدوال الافتراضية والمجموعات المحققة

1.2 الجملة المفتوحة Open Sentence

الجمل التي تحتوي على متغيرات غير مقيسة، تسمى الجمل المفتوحة. فلكي نشير لوجود متغيرات غير مقيسة فإننا نكتب أو نقول:

$$P(x)$$

وذلك للإشارة الى أن الجملة P تحتوي على متغير غير مقيس x.

أو نكتب:

$$q(x,y)$$

لتوضيح أن q تحتوي على متغيرات غير مقيسة x و y.

فاذا كان A مجموعة معطاة تصريحاً أو ضمناً فإن الدالة الافتراضية أو الجملة المفتوحة (الشريط) في المجموعة A هي:

$$P(x)$$

2.2 الجملة المغلقة Closed Sentence

هي **الجملة التي لا تحتوي على أي متغيرات غير مقيسة** والجمل المغلقة لها قيمة حقيقة (truth value) أي أنها قضايا أو أخبار بمعنى أنها هي **الجمل الخبرية** ذات الصفة لكل قيم $a \in A$ وتحتمل كلمة **صواب** أو **خطأ**. والصحة والخطأ للجملة المغلقة تعتمد على الشمول (universe) المتضمن.

نجمل لك ما سبق عن **الجملة المفتوحة والجملة المغلقة** أو **القضية،** بالآتي:

اذا كانت $P(x)$ دالة إفتراضية في المجموعة A (جملة مفتوحة) فإن $P(x)$ تصبح جملة خبرية (جملة مغلقة) كلما تم تعويض أي قيمة $a \in A$ بالنسبة لـ X.

3.2 المجموعة المحققة أو مجموعة الصحة Truth set

المجموعة المحققة للدالة الافتراضية $P(x)$ هي **مجموعة العناصر $a \in A$ ذات الصفة $P(a)$ صواباً** أي أنها هي مجموعة كل العناصر a في A والتي تكون القضية بها $P(a)$ صحيحة ويرمز لها بـ:

$$T_P$$

أي:

$$T_P = \{x/x \in A, P(x) \text{ صواباً}\}$$

أو اختصاراً:

$$T_P = \{x/P(x)\}$$

مثال (1)

اذا كان $P(x) = x+2>7$

فإن $P(x)$ دالة افتراضية في مجموعة الأعداد الطبيعية N، بينما $P(x)$ لا تمثل دالة افتراضية في مجموعة الأعداد التخيلية، لأن المتباينات غير معرفة في الأعداد التخيلية.

وفي هذه الحالة المجموعة المحققة لـ $x + 2>7$ هي:

$$T_P = \{x/x \in A, P(x) \text{ صواباً}\}$$
$$= \{6, 7,8, ...\}$$

مثال (2)

اذا كانت الدالة الافتراضية $P(x) = x + 5 < 3$ معرفة في N فإن المجموعة المحققة هي:

$$T_P = \{x/x+5<3 \text{ صواباً}\} = \phi$$

مثال (3)

اذا كانت $P(x) = x+5>1$ دالة افتراضية في N فإن المجموعة المحققة هي:

$$T_P = \{x/x+5>1\} = N$$

نلاحظ عزيزي الدارس من الأمثلة السابقة اذا كانت $P(x)$ دالة افتراضية معرفة في المجموعة A فإن $P(x)$ يمكن أن تكون صواباً:

(a) لكل $x \in A$

(b) لبعض القيم $x \in A$

(c) لـ ϕ أي لا توجد قيم x في A تحقق الدالة الافتراضية.

تدريب (1)



إذا كان $P(x) = x + 3 > 5$، وضِّح هل تمثل هذه الجملة دالة إفتراضية فى:

أ. مجموعة الأعداد الحقيقية R

ب. مجموعة الأعداد الطبيعية N

3. أنواع القياس

كما ذكرنا فإن هنالك نوعان من القياس، القياس الشامل والقياس الوجودي أو الجزئى وهذه التسمية إعتماداً على أنواع المقيس عليه.

1.3 المقيس عليه الشامل Universal quantifier

نحتاج في بعض الأحيان لأن نقول أن شيئاً ما يعين لكل x ونرمز لهذا بـ:

$$\forall_x$$

وهذا يعنى:

لكل قيم x فإن الحالة كذا ...

أيضاً اذا أردنا تحديد ما هو نوع x الذي نعنيه يمكننا تحديد الرمز فنكتب مثلاً:

$$(\forall_x \in R)$$

لنعني:

لكل الأعداد الحقيقية x فالحال كالآتي .....

و

$$(\forall_x \in N)$$

لنعني:

لكل الأعداد الطبيعية x فالحال كذا .....

فمثلاً لتقول أن $\sqrt{2}$ غير قياسي، يمكننا أن نكتب:

$$(\forall p \in N)(\forall q \in N)(\sqrt{2} \neq P/q)$$

واذا فرضنا أن $P(x)$ تمثل دالة افتراضية في المجموعة A، فإن:

$$(\forall_x \in A) \quad \text{أو} \quad (\forall_x P(x)) \quad \text{أو} \quad (\forall_{x_1} P(x))$$

جملة تقرأ على النحو التالي:

لكل عنصر x في A ، P(x) جملة صحيحة، أى أن العلامة أو الرمز $\forall$ يقرأ: لكل وهو عبارة عن A مقلوبة مأخوذة من الكلمة الانجليزية ***All*** التي تعني **كل** وهذا الرمز $(\forall)$ هو ما يسمى بالمقيس عليه الشامل ونلاحظ في هذه الحالة أن:

$$T_P = \{x/x \in A, P(x)\} = A$$

أي أن الجملة المحققة للدالة الافتراضية تساوي العناصر A نفسها.

مثال (4)

إذا كانت المجموعة M معرفة على النحو التالي:

$M = \{x/x$ رجل$\}$

وتم تعريف الدالة الافتراضية في المجموعة M على النحو التالي:

$P(x) =$ "كل الرجال أصحّاء"

يمكن التعبير عن ذلك على النحو التالي:

$(\forall x \in M)$ (x أصحاء)

مما سبق نلاحظ أن $P(x)$ جملة مفتوحة لذلك لا توجد بها قيمة محققة. لكن $P(x)$ مع القياس $\forall$ أمامها أي $\forall P(x)$ تصبح جملة خبرية ويصبح لها قيمة محققة ونلاحظ التالي:

إذا كان:

(a) $\{x/x \in A, P(x)\} = A$

فإن $\forall x P(x)$ تكون **صحيحة**.

وإذا كان $\{x/x \in A, P(x) \neq A\}$

فإن: $P(x)$ $\forall$تكون **خطأ**

مثال (5)

القضية

$$(\forall n \in N)(n+4>3)$$

معرفة داخل المجموعة N،

تكون **جملة صحيحة** وذلك لأن:

$$\{n/n+4>3\}=\{1,2,3,...\}=N$$

مثال (6)

القضية

$\forall n(n+2>8)$ معرفة في N،

جملة **غير صحيحة** وذلك لأن:

$$\{n/n+2>8\}=\{7,8,9,..\} \neq N$$

يمكن استخدام الرمز $\forall$ لتعريف التقاطع بين المجموعات $\{A_i\}$ على النحو التالي:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x / \forall i \in I, x \in A_i\}$$

2.3 المقيس عليه الوجودي (الجزئى)

Existential Quantifier

في الرياضيات غالباً ما نستخدم توكيد الوجود، مثلاً المعادلة $x^2 + 2x + 1 = 0$ لها جذر حقيقي، تعبر عن إدعاء وجود. والطبيعة الوجودية لهذا التوكيد يمكن أن نبينه بوضوح أكثر بكتابته على هذا الشكل:

"هنالك يوجد" (there exists) عدد حقيقي x بحيث أن:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

أيضاً الجملة الرياضية الآتية:

$\sqrt{2}$ قياسي،

تعبر عن إدعاء وجود وهو لا يشبه التعبير الوجودي الى أن تكتبه على هذا الشكل:

هنالك يوجد عدد طبيعي P و q بحيث أنه:

$$\sqrt{2} = P/q$$

المثال الأول هنا هو جملة صحيحة (تأخذ $x=-1$) ، والثانية خطأ.

في القياس الوجودي نستخدم الرمز:

$$\exists_x$$

وهو يعني هنالك يوجد (there exists) x بحيث أنه كذا ..

فالـ E المقلوبة ($\exists$) اشارة الى الكلمة الانجليزية (exists) التي تعني يوجد وتقرأ أيضاً: "لبعض" أو "على أقل واحد" وهذا الرمز $\exists$ هو ما يعرف بالمقيس الوجودي الذي يستخدم في القياس الوجودي أو الجزئي بعد اضافة الرمز $\exists$ للمثاللين السابقين يصبحان:

$$\exists_x \left[x^2 + 2x + 1 = 0 \right]$$

$$\exists_P \exists_q \left[\sqrt{2} = P/q \right]$$

ولكي توضح إلى ماذا يرمز المقيس فعليك توضيح أو تحديد إنتماء المقيس عليه (لأي مجموعة أعداد ينتمي) فهذا يمكنك من تحديد نوع المقيس بسهولة فمثلاً:

يمكننا أن نستخدم الرمز R لمجموعة الأعداد الحقيقية وتكتب

$$(\exists_x \in R)$$

ونعني بها: هنالك يوجد عدد حقيقي بحيث أنه ...

و $x \in R$ تعني أن x عنصر ينتمي للأعداد الحقيقية.

ولذلك المعادلة السابقة:

$x^2 + 2x + 1 = 0$ لها جذر حقيقي،

يمكن كتابتها كالآتي:

$$(\exists_x \in R)(x^2 + 2x + 1 = 0)$$

للدلالة على أن x تنتمي للأعداد الحقيقية.

كما أن الجملة $\sqrt{2}$ قياسي، يمكن كتابتها كالآتي:

$$(\exists_{P,q} \in N)(\sqrt{2} = P/q)$$

للدلالة على أن p و q ينتميان إلى N مجموعة الأعداد الطبيعية.

اذا كان $P(x)$ دالة افتراضية في المجموعة A.

فإن:

$$(\exists x \in A)P(x) \quad \text{أو} \quad \exists x\, P(x) \quad \text{أو} \quad \exists\ x\ ,\ P(x)$$

جملة تقرأ على النحو التالي:

"يوجد عنصر $x \in A$ حيث الجملة $P(x)$ جملة صحيحة"

ويمكن التعبير عنها على النحو التالي:

$$T_P\{x / x \in A, P(x)\} \neq \phi$$

أي إذا كان:

$$\{x / P(x)\} \neq \phi$$

فإن

$\exists x\, P(x)$ تكون صحيحة

أما اذا كان

$$\{x / P(x)\} \neq \phi$$

فإن $\exists x\, P(x)$ تكون خطأ

مثال (7)

الجملة $(\exists n \in N)(n+4<7)$ جملة صحيحة.

لأن

$$\{n / n+4<7\} = \{1,2\} \neq \phi$$

مثال (8)

القضية

$\exists n\{n+6<4\}$ جملة غير صحيحة.

لأن

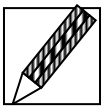
$$\{n / n+6<4\} = \phi$$

يمكن التعبير عن الإتحاد للمجموعات $\{A_i\}_{i \in I}$

مستخدمين الرمز E على النحو التالي:

$$U_{i \in I} A_i = \{x / \exists_i \in I, x \in A_i\}$$

تدريب (2)



بعد دراستك للمجموعات المحققة وكيفية إيجادها، نرجو أ تؤدي هذا التدريب:حدد المجموعات المحققة للجمل التالية معتبراً مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة الشاملة:

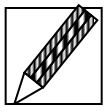
$$\forall_x (x + 1 > x) \text{ ..1}$$

$$\exists_X (x + 1) > x \text{ .2}$$

$$\forall_x (X \neq 0) \text{ .3}$$

$$\exists x (x^2 + 1 = 0) \text{ .4}$$

تدريب (3)



معتبراً مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة الشاملة، حدد صحة أو خطأ الجمل الاتية مع ذكر السبب:

$$\forall_x (x > 3) \text{ .1}$$

$$\exists_x (x + 1 > x) \text{ .2}$$

$$\exists_x (x^2 + 1 = 0) \text{ .3}$$

أسئلة تقويم ذاتي (1)

1. حدد المجموعات المحققة لجمل التالية معطى المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

a- $\forall_x, |x|=x$

b- $\forall_x, x+1>x$

c- $\exists_x, |x|=0$

d- $\exists_x, x^2=x$

e- $\exists_x, x+2=x$

2. اذا كان $A=\{1,2,3,4,5\}$ حدد ما اذا كانت الجمل التالية صواباً أم خطأ:

1/ $(\exists x \in A)(x+3=10)$

2/ $(\forall x \in A)(x+3<10)$

3/ $(\exists x \in A)(x+3<5)$

4/ $(\forall x \in A)(x+3\leq 7)$

4. نفي القضايا التي تحتوي على القياس

من المهم أن تكون قادراً على نفي الجمل التي تتضمن المقيس عليه (وتنهي بالاجابة الصحيحة). بالطبع يمكنك نفي أي جملة وذلك بوضع رمز النفي أمامها.

اذا كان $P(x)$ تمثل قضية فإن $\neg P(x)$ أيضاً قضية ولكنها تأخذ قيم عكسية لقيم $P(x)$ وتقرأ:

ليست $P(x)$

الرمز $\forall$ لكل يمكن أن ينفى باستخدام "$\neg$" ليصبح $\neg \forall$ ويقرأ ليست لكل، أي على الأقل.

وهنا يمكن كتابة القوانين الآتية:

$$\neg\forall_x \equiv \exists_x$$
$$\neg\exists_x \equiv \forall_x$$

مثال (9)

إذا كان المجموعة $M=\{x/x$ رجل$\}$

وكانت الدالة الافتراضية "كل الرجال أصحاء" $= P(x)$

فإن: $\neg P(x)$

تمثل ليست كل الرجال أصحّاء أي على الأقل يوجد واحد غير صحيح.

$\neg(\forall x \in M)$ (أصحاء x)

$=(\exists x \in M)$ (ليست هلكي x)

أو $\neg \forall, P(x) = \exists, \neg P(x)$

أمثلة محلولة (10)

1- إذا كان $P(x)$ تمثل الجملة التالية $P(x) = x+2>5$

حدد ما اذا كان $P(x)$ تمثل أو لا تمثل دالة افتراضية في المجموعات التالية:

أ. مجموعة الأعداد الطبيعية N

ب. $T_p = \{-1, -2, -3, ...\}$

ج. مجموعة الأعداد التخيلية C

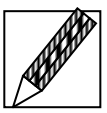
الحل

أ. نعم $P(x)$ تمثل دالة افتراضية في N حيث $T_p = \{x/x +2>5\} = \{4,5,6,..\}$

ب. نعم $P(x)$- تمثل دالة افتراضية في M حيث: $T_P\{x / x+2>5\} = \phi$

ج. لا $P(x)$ لا تمثل دالة افتراضية في مجموعة الأعداد التخيلية، لأن المتباينات غير معرفة في الأعداد التخيلية.

تدريب (4)



أنف الجملتين الاتيتين:

1. $\exists x [\neg A(x)]$

أسئلة تقويم ذاتي (2)

1. أرجع لأسئلة التقويم الذاتى (1) وأنف الجمل الواردة بها.

وأنف الجملتبن الاتيتين:2.

1. $\forall xP(x) \wedge \exists yq(y)$
2. $\exists xP(x) \forall \vee yq(y)$

لخلاصة

بعد أن درست هذه الوحدة نأمل أن تكون قد استوعبت ما جاء بها من مفاهيم.
على أية حالٍ حاول معي تلخيص ما ورد بالوحدة من نقاش.
فى هذه الوحدة تعرفنا على مفهومي القياس و قلنا أن الشمول هو: **مجموعة** الأشياء التي يرجع لها المقيس عليه وهذه يمكن أن تكون مجموعة كل الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد المركبة أو أي مجموعات أخرى **وعرفنا القياس** على أنه: توضيح كيفية إرتباط مقيس عليه معين بمجموعة أشياء يرجع لها المقيس عليه وتكون العلاقة بينهما واضحة.
وعن الجملة المفتوحة والجملة المغلقة ذكرنا أنه إذا كانت $P(x)$ دالة إفتراضية في المجموعة A (جملة مفتوحة) فإن $P(x)$ تصبح جملة خبرية (جملة مغلقة) كلما تم تعويض أي قيمة $a \in A$ بالنسبة لـ X. أى أن الجملة المفتوحة ليست خبرية بينما المغلقة خبرية تحتمل كلمة خطأ أو صواب. وذكرنا أن المجموعة المحققة للدالة الافتراضية $P(x)$ هي مجموعة العناصر $a \in A$ ذات الصفة $P(a)$ صواباً أي أنها هي مجموعة كل العناصر a في A والتي تكون القضية بها $P(a)$ صحيحة.

تطرقنا إلى الفرق بين نوعى المقيس عليه وأوضحنا أن المقيس عليه الشامل هو عبارة عن المقيس عليه الكلي ويعني لكل ويرمز له ب$\forall$ التى هى عبارة عن A مقلوبة مأخوذة من الكلمة الأنجليزية All بينما المقيس عليه الوجودي (الجزئى) هو المقيس عليه الذى يعنى يوجد أو لبعض أى أنه لا يعني الكل وبرمز له ب$\exists$ وهى عبارة عن E مقلوبة مأخوذة من الكلمة الأنجليزية Exist . تناولنا كيفية نفي القضايا بإيجازوذكرنا أن نفي المقيس عليه الشامل يكافىء المقيس علبه الجزئ والعكس. sexist

أتمنى أن يكون ملخصاً مفيداً يساعدك على فهم ما استصعب عليك.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

فى الوحدة السابعة والأخيرة ستدرس البرهان الرياضي وفيه ستتعرف على الطرق التي يمكن أن تتحقق بها من صحة الجمل الرياضية. البرهان بضد الإيجابية، البرهان بالتناقض والبرهان بقاعدة الإستدلال الرياضى، ثلاثة طرق ستدرسها لإثبات الجمل الرياضية. امل أن تجدها خاتمة خيرة موفقة لمقررالرياضيات المتقطعة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

تمثل دالة إفتراضية فى: $P(x) = x + 3 > 5$ نعم

أ. مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث

$T_p = \{x/x+3 > 5\} = \{3, 4, 5, \ldots\}$

ب. مجموعة الأعداد الطبيعية N حيث

$T_p = \{x/x+3 > 5\} = N$

تدريب (2)

1. المجموعة المحققة هي مجموعة الأعداد الحقيقية حيث:

$T_p = \{x/x+1 > x\} = R$

2. هى مجموعة الأعداد الحقيقية حيث:

$T_p = \{x/x+1 > x\} = R$

3. المجموعة المحققة هي:

$\{X \neq 0\}$

4.المجموعة المحققة هي

$\{\phi\}$

تدريب (3)

1. $\forall_x (x > 3)$

جملة خطأ لأنها لا تمثل الشمول الكلى.

2. $\exists_x (x + 1 > x)$

جملة صحيحة لأنها تمثل الشمول الكلى

$\exists_x (x^2+1 = 0)$ .3

(ϕ) جملة خطأ لأن مجموعة الصحة مجموعة خالية.

تدريب (4)

نفي الجملة

$$.ı]) x (A \neg [\exists_X$$

هو

$$]) x (A \forall_X [\neg$$

نفي الجملة

$$.2]) x (O \Rightarrow) x (P [] 2 > \forall_X ($$

هو

$$]) x (O \neg \wedge) x (P [] 2 > \exists_X ($$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

التقويم الذاتي (1)

.1

(a) $\forall x, \quad |x| = x$

جملة غير صحيحة

لاحظ أنه إذا كان

$x_0 = -3$ فإن $|x_0| \neq x_0$

(b) $\forall x \quad , \quad x+1 > x$

جملة صحيحة لأن أي عدد حقيقي مضاف له واحد أكبر من العدد نفسه.

(c) $\exists x, \quad |x| = 0$ جملة صحيحة

$x_0 = 0$

$|x_0| = 0$

(d) $\exists x, \quad x^2 = x$ (4)

$x_0 = 1$

$|x_0^2| = 1$

(e) $\exists x, \quad x+2 = x$

جملة غير صحيحة إذ لا يوجد حل للمعادلة

$x + 2 = x$

.2

(a) $x+3=10$ الحل A خطأ ، لا يوجد رقم في

(b) $x+3<10$ يحقق ، A صواب ، أي رقم في

(c) صواب ، إذا $X_0 = 1$ كان فإن $X_0 + 3 \rangle 5$ فإن $X_0 = 1$ حل

$0 = \left| x_0 \right|$ (d)فإن $x_0 = 0$ لأن ، صواب

التقويم الذاتي (2)

1. لنفي الجمل نحصل على

(a) $\neg\forall x, \quad |x| = x \equiv \exists x \neg(|x| = x) \equiv \exists x, \quad |x| \neq x$ ج

(b) $\neg\exists x, \quad x^2 = x \equiv \forall x \neg(x^2 = x) \equiv \forall x, x^2 \neq x$

(c) $\neg\forall x, \quad x+1 > x \equiv \exists \neg(x = 1 > x) \equiv \exists x, x+1 \leq x$

(d) $\neg\exists \mathrm{X} + 2 = \mathrm{X} \equiv \forall \mathrm{X} \neg(\mathrm{X} + 2 = \mathrm{X} \equiv \forall \mathrm{X}_1 \mathrm{X} + 2 \neq \mathrm{X})$

.2

$$(1)\ \neg(v\mathrm{X}p < x) \wedge \exists y q(y) \Rightarrow \forall x p(x) \vee \neg\exists y q(y)$$
$$\equiv \exists x \neg p(x) v \forall y \neg q(y)$$
$$(2) \neg(\exists x p(x) v y g(y) \equiv \neg\exists x p(x) \wedge \neg\forall y g q(y))$$
$$\equiv \forall x \neg p(x) \wedge \exists y \neg q(y)$$

مسرد المصطلحات

الشمول Universe

هو **مجموعة** الأشياء التي يرجع لها المقيس عليه. وهذه يمكن أن تكون مجموعة كل الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد المركبة أو أي مجموعات أخرى.

القياس Quantification

هو توضيح كيفية إرتباط مقيس عليه معين بمجموعة أشياء يرجع لها المقيس عليه وتكون العلاقة بينهما واضحة.

الجملة المفتوحة Open sentence

هى الجملة التي تحتوي على متغيرات غير مقيسة

الجملة المغلقة Closed Sentence

هي الجملة التي لا تحتوي على اي متغيرات غير مقيسة أى أنها أنها قضايا أو أخبار بمعنى أنها هي الجمل الخبرية التى تحتمل كلمة صواب أو خطأ.

المجموعة المحققة (مجموعة الصحة) Truth set

المجموعة المحققة للدالة الافتراضية $P(x)$ هي **مجموعة العناصر $a \in A$ ذات الصفة $P(a)$ صواباً** أي أنها هي مجموعة كل العناصر a في A والتي تكون القضية بها $P(a)$ صحيحة

المقيس عليه الشامل laquantifier Univers

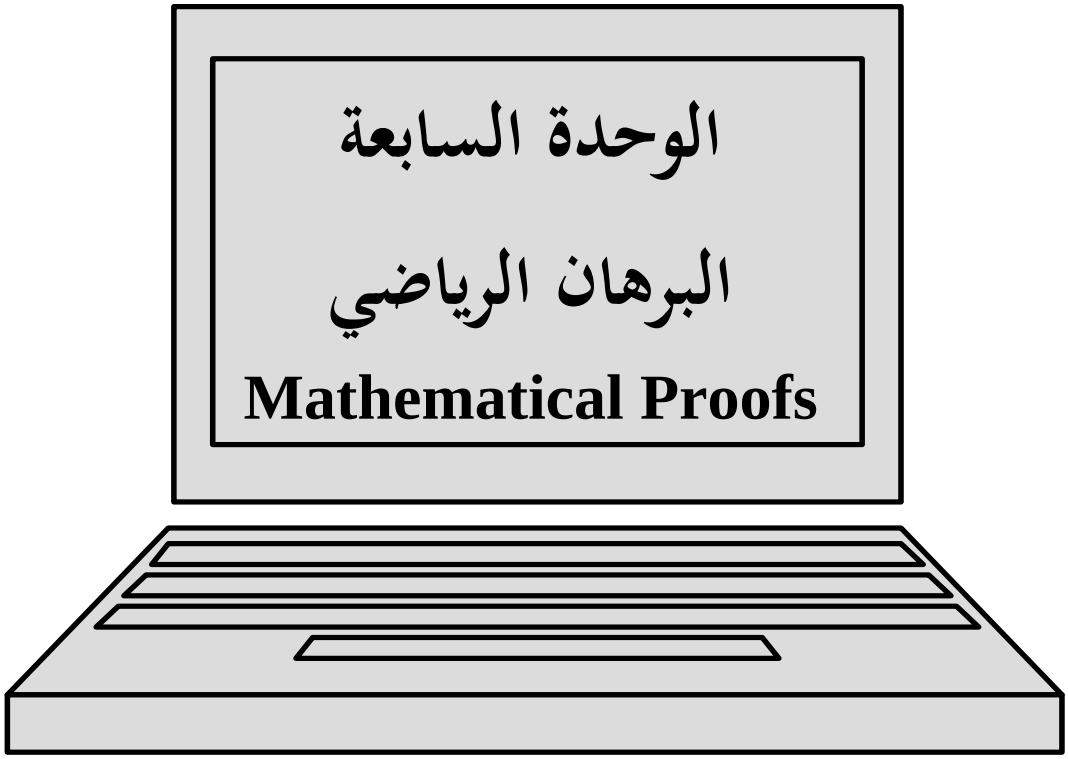
التي هي $\forall$ هو عبارة عن المقيس عليه الكلي ويعني لكل ويرمز له ب مقلوبة مأخوذة من الكلمة الأنجليزية AAllعن عبارة

المقيس عليه الوجودي (الجزئى) Existential quantifier

هو المقيس عليه الذى يعني يوجد أو لبعض أي أنه لا يعني الكل ويرمز له ب$\exists$ وهى عبارة عن E مقلوبة مأخوذة من الكلمة الأنجليزية .(exists)

المراجع

26. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
27. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
28. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
29. **Finite Mathematics**, Shaum Series
30. **Set Theory**, Shaum series.


الوحدة السابعة
البرهان الرياضي
Mathematical Proofs

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**237**
تمهيد	237
أهداف الوحدة	238
1. البرهان بضد الأيجابية	**239**
2. البرهان بالتناقض	**240**
3. البرهان بالإستدلال الرياضي	**242**
الخلاصة	**250**
إجابات التدريبات	**251**
إجابات التقويم الذاتي	**253**
مسرد المصطلحات	**258**
المراجع	**249**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة

في الوحدة السابعة والأخيرة سنناقش البرهان الرياضي. وتتكون هذه الوحدة من ثلاثة أقسام رئيسة تعنى ببعض الطرق المستخدمة فى إثبات صحة الجمل الرياضية. فتبدأ الوحدة بتناول طريقة البرهان بضد الأيجابية وفيها تتعرف على الخطوات التي يجب أن تتبعها عندما تريد إثبات جملة ما بهذه الطريقة.

ثم تنتقل بك الوحدة إلى طريقة البرهان بالتناقض الذي يعرفك بكيفية البرهان بهذه الطريقة.

البرهان بقاعدة الإستدلال الرياضي هو أطول هذه الأقسام وفيه ستجد شرحاً ضافياً

للخطوات المتبعة فى إثبات الجمل الرياضية بهذه الطريقة.

ننصحك بحل التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي التي ترد في متن الوحدة لما لها من دور كبير في تثبيت المادة فأكثر في ذهنك.

نرحب بك مرة أخرى إلى وحدتنا السابعة نرجو أن تستمتع بدراستها وتفيد منها كثيراً ومرحباً بنقدك الذي سيكون لنا عوناً للمزيد من التجويد.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

16. تفرق بين ثلاثة أنواع من الطرق المستخدمة فى البرهان الرياضي، البرهان بضد الأيجابية، البرهان بالتناقض والبرهان بقاعدة الإستدلال الرياضي.
2. تستخدم طريقة البرهان بضد الأيجابية لإثبات الجمل الرياضية المناسبة للإثبات بهذه الطريقة.
5. تثبت الجمل الرياضية مستخدماً خطوات البرهان بالتناقض.
6. تثبت الجمل الرياضية متبعاً خطوات قاعدة الإستدلال الرياضي.

البرهان الرياضي Mathematical proofs

هو حجة منطقية تؤسس للتحقق أو التثبت من صحة أو حقيقة الجمل الرياضية. هنالك عدة طرق للبرهان الرياضي ونحن هنا بغرض التعرض لبعض منها للوقوف على الكيفية والمنهجية التي تستخدم فيها هذه الطرق في التحقق من صحة الجمل الرياضية.

1. البرهان بضد الايجابية Proof by Contra-Positive

في هذه الحالة لاثبات اي جملة رياضية يكفي اثبات جملة مكافئة للجملة المراد اثباتها. فمثلا اذا رغبنا في اثبات:

"p →q" (الاقتضاء)

بالتاكيد هذه الجملة تكون صحيحة طالما P خطأ. لذلك يجب التعبير عن هذه الجملة اخذين فى الأعتبار أن P صحيحة ففي هذه الحالة يجب اثبات q تكون صحيحة حسب تعريف الاقتضاء. "→"

مثال (1)

برهن الجمل التالية:

$$(x, y \in Q) \rightarrow (x + y \in Q)$$

اي اذا كان x,y اعداد قياسية فان حاصل جمعهم x+y ايضا عدد قياسي الاثبات:

فاذا فرضنا صحة $(x, y \in Q)$ يبقى اثبات $(x + y \in Q)$

اذا كان x,y اعداد قياسية، يمكن التعبير عنها على النحو التالي:

$y = \frac{P}{q},\ x = \frac{n}{m}$ حيث n,m,p,q,∈ z

ومن ثم $x + y = \frac{n}{m} + \frac{P}{q} = \frac{qn + pm}{nm}$

وهكذا nm, pm, qn ∈ z اعداد صحيحة

ومن ثم $x + y = \frac{qn + pm}{nm} \in Q$

مثال (2)

برهن ان

$$(\sin\theta \neq 0) \rightarrow (\forall n \in N)\ (\theta \neq n\pi)$$

نلاحظ صعوبة اثبات هذه الجملة لكل قيم n لاننا لا نعرف من اين نبدأ، نحاول ايجاد الجملة المكافئة السهلة الاثبات، اي يمكن بسهولة اثبات الجملة المكافئة التالية:

$$\neg(\forall n \in N)\ (\theta \neq n\pi) \rightarrow (\sin\theta \neq 0)$$

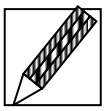
وهذه الجملة يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$(\exists n \in N)(\theta = n\pi) \rightarrow (\sin\phi = 0)$$

وهذه الجملة صحيحة حسب قانون الاقتضاء.

تلاحظ في هذه النوع من البرهان الرياضي لاثبات اي جملة يكفي اثبات او برهان الجملة المكافئة لها.

تدريب (1)



برهن الجملة الاتية مستعملاً طريقة البرهان بضد الأيجابية:

إذا كان $n, m \in z$ اعداد زوجية فان $m + n$ عدد زوجي

2. البرهان بالتناقض proof by Contradiction

وهذا ايضا يعتبر من طرق البرهان بضد الايجابية. في هذه الحالة نرغب في اثبات جملة رياضية معينة A(n) ولكن لا نعرف من أين نبدأ، لذلك نفرض أن ¬A(n) هى صحيحة ونستمر في التسلسل المنطقي لنستنتج بعض الحجج الخاطئة.

لذلك نخلص إلى خلاصة خطأ ومن ثم تصبح الفرضية الإبتدائية A(n) هي الخطأ ومن هنا نخلص الى ان A(n) صحيحة.

مثال (3)

اثبت ان $\sqrt{2}$ عدد قياسي

الاثبات:

هنا نفرض فرضية عكسية للجملة المراد إثباتها، اي نفرض ان $\sqrt{2}$ عدد قياسي ومن ثم يمكن كتابة $\sqrt{2}$ في صورة $\frac{P}{q}$ حيث، $p, q \in z$

$$\sqrt{2} = \frac{P}{q}$$

حيث $\frac{P}{q}$ لا يحتوي على عامل مشترك بتربيع الطرفين ينتج

$$2 = \frac{P^2}{q^2}$$

$$\therefore P^2 = 2q^2$$

ومن هنا نستخلص أن p^2 عدد زوجى لذلك يوجد عدد حقيقى حيث

$$p = 2r$$

وبالتعويض نحصل على

$$4r^2 = q^2$$

وهذا ينتج

$$2r^2 = q^2$$

ومن ثم q^2 عدد زوجي وكذلك q.

لكن P اثبت انه عدد زوجي. فتصبح الفرضية بعدم وجود معامل مشترك بين p, q غير صحيحة وهنا يقع التناقض.

لذلك الفرضية الأبتدائية تكون غير صحيحة. كانت هذه الفرضية نقول ان $\sqrt{2}$ عدد قياسي وهي غير صحيحة. لذلك $\sqrt{2}$ عدد قياسي وهذا هو المطلوب اثباته.

تدريب (2)



بطريقة البرهان بالتناقض اثبت ان:

$\sqrt{3}$ عدد غير قياسي

3. البرهان بقاعدة الاستدلال الرياضي

Principle of Mathematica Induction

لتقريب مفهوم هذا النوع نطلع على المثال التالي:

مثال (4)

نفرض ان هنالك عدد 100 طالب داخل قاعة، يجلسون متجاورين. فإذا فرضنا ان كل طالبين متجاورين ((غير مهم طريقة التجاور)) طالبان في الجامعة المفتوحة، فان كل الطلاب داخل القاعة طلاب في الجامعة المفتوحة. لتوضيح ذلك انظر للشكل التالي.

نفرض ان الطلاب يجلسون في صفوف على النحو التالي:

(1) +++ …. +
(2) +++ ….+
(3) +++ ….+
. . . . .
. . . . .
. . . . .
(n) +++ …..+

إذا كان كل طالبين (+ , +) في تجاور فهذا يعني الصف الاول من الطلاب كلهم طلاب في الجامعة المفتوحة.

كذلك التجاور بين الطالب + في الصف الاول والطالب + في الصف الثاني في تجاور وهذا يقود الى ان طلاب الصف الثاني كلهم طلاب في الجامعة المفتوحة واذا تتبعنا هذا المنطق والتسلسل يمكن اثبات ان الطلاب في الصف (n) والذين قبلهم في الجامعة المفتوحة ومن ثم الطلاب في الصف الـ (n+1).

لتوضيح كيف يمكننا استخدام الاستدلال الرياضي رياضيا.

افرض ان S_n تمثل مجموعة للاعداد الموجبة الصحيحة، اي

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

افرض ان هذا الجمع كان يعادل

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, n = 1,2,\ldots.$$

ففي هذه الحالة يمكن اعتبار S_n دالة افتراضية للقيم الممكنة يمكن ان تكون صوابا او خطأ فنحصل على الاتي حسب القيم المتاحة.

جملة صحيحة $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

جملة صحيحة $S_2 = \frac{2(1+2)}{2} = 3$

جملة صحيحة $S_3 = \frac{3(1+2)}{2} = 3$

يقودنا هذا المثال إلى حقيقة مهمة وهي اذا كانت كل المعادلات السابقة S_{n+1} صحيحة فان الدالة الافتراضية S_{n+1} كذلك تكون صوابا.

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}$$
$$S_{n+1} = 1 + 2 + ..n + (n+1)$$
$$= S_n + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

إذا الدالة الافتراضية S_{n+1} ايضا صحيحة.

قاعدة الاستدلال الرياضي

افرض لكل عدد صحيح موجب n، الدالة الافتراضية $s_{(n)}$ تكون صوابا او خطأ.

افرض ان:

$S_{(1)}$ تكون صوابا

افرض ان:

$S_{(n)}$

فان $s(n+1)$ تكون صوابا لكل عدد صحيح موجب وهذا ما يعرف بقاعدة الاستدلال الرياضي.

ولتوضيح قاعدة الأستدلال الرياضى أكثر، تابع الاتى:

يمكن اثبات الجمل الرياضية العامة خصوصاً الجمل التي تاخذ الشكل

$(\forall n \in N)\ (\theta \neq n\pi)\ A(n)$

وهذا القياس معرف على الاعداد الطبيعية N، يمكن استخدام الاستدلال الرياضي لبرهان هذه الجمل وتتلخص الفكرة في اثبات هذه الجمل على النحو التالي:

1- A(1) حملة صحيحة اذا كانت n=1 وتسمى الخطوة الأبتدائية.

2- $(\forall n \in N)[A(n) \rightarrow A(n+1)]$.

الخطوة الثانية او الشرط وهذا يدل على صحة الجملة لجميع قيم $n \in N$

الاقتضاء في (2)

$(\forall n \in N)\ A(n)$ يمكن ان يبنى على النحو التالي:

في الخطوة الأبتدائية A(1) جملة صحيحة ثم من خطوة الاستدلال $A(1) \rightarrow A(2)$ ومن ثم A(2) جملة صحيحة ثم من الحالة الخاصة A(2) يمكن اثبات الاقتضاء $A(2) \rightarrow A(3)$ وهكذا.

نلاحظ مما سبق ان الذي نبرهنه هو A(1) في الخطوة الأبتدائية والشرط في الخطوة الثانية ومن هنا نحلص الي ان:

$$(\forall n \in N)\ A(n)$$

جملة صحيحة وهذا ما يعرف بالاثبات باستخدام قاعدة الاستدلال الرياضي.

مثال (5)

مستخدما نظرية الاستدلال الرياضي أثبت أن

$n! \geq 2^{n-1}$, n = 1, 2, ……..

الاثبات:

For n = 1

$S1 = 1 \geq 2^{1-1} = 1$

افرض ان S_n ، اي

$$S_n = n! \geq 2^{n-1}$$

المطلوب (n+1)

$$S_{n+1} \Rightarrow (n+1)! \geq 2^n$$

لكن

$(n+1)! = (n = 1)n! \geq (n-1)2^{n-1}$

(معلوم ان $n - 1 \geq 2$)

وهذا يقتضي

$$(n + 1)! \geq 2\text{-}2^{n-1} \geq 2^n$$

ويصبح S_{n+1} ايضا صوابا وهذا هو المطلوب

مثال (6)

مستخدما نظرية الاستدلال اذا كان $a \neq 1$ فاثبت ان

$$1 + a + a^2 + \ldots . a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

الحل

ضع الجملة اعلاه كدالة افتراضية S_n

لـ S_1 نحصل على: $S_1 = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$ جملة صحيحة

افرض S_n صوابا، اي

$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

مطلوب التحقق من S_{n+1}

$$S_{n+1} = 1 + a + a^2 + a^n + a^{n+1} = S_n + a^{n+1} \quad \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = \frac{-1 + a^{n+2}}{a - 1}$$

$$= S_{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$$

وهذا يحقق S_{n+1} تكون صحيحة

مثال (7)

مستخدما قاعدة الاستدلال الرياضي اثبتت ان $S^n - 1$ تقبل القسمة على 4.

الحل

افراض ان الدالة الافتراضية

$$S_n = 5^n - 1$$

في حالة $n = 1$ فان

$$S_1 = 5 - 1 = 4$$

وهي صحيحة تقبل اقسمة على 4

افرض ان S_n صحيحة

المطلوب اثبات S_{n+1}

$$S_{n+1} = 5^{n+1} - 1 = 5.5^n - 1 = (4+1)5^n - 1 = 4.5^n + (5^n - 1)$$
$$= 4.5^n + S_n$$

فرضنا ان S_n تقبل القسمة على 4

المقدرة 4.5^n ايضا يقبل القسمة على 4 ومن ثم S_{n+1}. وهذا هو المطلوب.

مثال (8)

اذا كان $x>0$ فان لكل عدد $n \in N$

$$(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)$$

الاثبات:

افرض ان $A(n)$ تمثل الجملة

$$(1 + x)^{n+1} > (n + 1)x$$

فاننا نثبت اولا $A(1)$

$$(A(1) \equiv (1 + x)^2 > 1 + 2x$$

جملة صحيحة لان فك القوس ينتج

$$(1 + x) = 1 + 2x + x^2$$

ثانيا اثبات:

$$(\forall n \in N)[A(n) \rightarrow A(n+1)]$$

لنبرهن ذلك يجب فرض $A(n)$ جملة صحيحة، وعلينا استنتاج $A(n+1)$ ايضا جملة صحيحة.

$$(1 + x)^{n+2} = (1 + x)^{n+1} (1 + x) > (1 +(n+1)x)(1 + x)$$

لان $A(n)$ جملة صحيحة

$$= 1 + (n+1)x + x + (1 +n)x^2$$
$$= 1 + (n+2)x \text{ [طالما } x > 0 \text{]}$$

وهذا يبرهن ان $A(n+1)$ ايضا صحيحة.

نلاحظ في حال الاثبات بقاعدة الاستدلال لاثبات اي جملة $A(n)$ لكل قيم $n \in N$. في البداية نبدأ في التحقق من حقيقة الجملة $A(n)$، وغالبا ما يكون بالتعويض المباشر ومن ثم بالحج الجبرية نؤسس لاثبات

$$A(n) \rightarrow A(n+1) \text{ , لكن } (n \in N)$$

لاكمال البرهان بقاعدة الاستدلال الرياضي يجب ان نذكر ثلاثة نقاط:

أولاً:

يجب التصريح بوضوح ان الاستدلال الرياضي سوف يستخدم كوسيلة لبرهان الجملة A(n).

ثانياً:

برهن الحالة عندما يكون $n = 1$ اي $A(1)$

ثالثاً:

برهن الشرط

$$A(n) \rightarrow A(n+1)$$

مستخدما الحجج الجبرية.

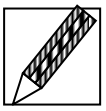
في بعض الاحيان قد يطلب اثبات جملة لا تحتم البداية من $n = 1$ مثال لذلك للاثبات الجملة

$$(\forall n \geq n_o)\ A(n)$$

في هذه الخطوة الاولى في قاعدة الاستدلال الرياضي $A(1)$ يمكن ان تكون غير صحيحة او معرفة، لذلك نبدأ الخطوة الأبتدائية بالتحقق من حقيقة الجملة $A(n_o)$ والخطوة الثانية هي:

$$(\forall n \geq n_o)\ [A(n) \rightarrow A(n+1)]$$

تدريب (2)



أثبت هذه الجملة بطريقة الأستدلال الرياضى:

$$1+3+5 \ldots +2n-1 = n^2$$

أسئلة تقويم ذاتي (1)

أثبت أن:

1. اثبت ان:

$1(1!)+2(!)+3(3!)+....+n(n!) = (n+1)!-1$

2. اثبت ان:

$$1^3+2^3+3^3+....+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

3. اثبت ان:

$2n + 1 \leq 2^n$, $n = 3,4, ...$

4. اثبت ان $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل قيم $n = 1, 2,.....$

5. اثبت ان 3^n+7^n-2 يقبل القسمة على 8 لكل $n = 1,2,....$

6. اذا كان A مجموعة حيث $/A/ = n$ اثبت ان رتبة قوة المجموعة لـ

$/P(A)/ = 2^n$

أسئلة تقويم ذاتي (2)

1) عبر عن الجمل التالية بالصواب والخطأ ودعم اجابتك بالبرهان؟

a) يوجد عد حقيقي x,y حيث $x + y = y$.

b) لكل الاعداد الصحيحة الموجبة n , n^2+n+41 عدد اولي.

c) $\forall x, \exists y \quad (x+y)=0$ ، $x, y \in IR$

d) $(\exists m \in N)(\exists n \in N)(3m+5n=12)$

e) لكل الاعداد الصحيحة a, b, c ، اذا كان a يقبل القسمة على b_c بدون باقي. فان a تقبل القسمةعلى b او a او تقبل القسمة c.

f) لاي عدد صحيح n، العدد n^2+n+1 عدد فردي.

2) مستخدما قاعدة الاستدلال الرياضي اثبت

a) 4^n-1 تقبل القسمة على 3

b) $(n+1)! > 2^{n+3}, \forall n \geq 5$

الخلاصة

في هذه الوحدة ناقشنا البرهان الرياضي وذكرنا أنه يتم بعدة طرق لكن تناولنا بالتفصيل ثلاثة من هذه الطرق. فبدأنا الوحدة بتناول طريقة البرهان بضد الأيجابية وفيها تعرفت على الخطوات التي يجب أن تتبعها عندما تريد إثبات جملة ما بهذه الطريقة التي تتم عن طريق إثبات جملة مكافئة للجملة الأصلية وما ينتج ينطبق على الجملة الأصلية.

وفى البرهان بالتناقض ذكرنا أنه هو برهان صحة الجمل الرياضية عن طريق أثبات عكس الجملة أو نقيض الجملة وبعد ذلك نعتبر عكس النتيجة هى الصحيحة للجملة الأصلية.

أوضحنا أيضاً أن قاعدة الأستدلال الرياضي يتم بها برهان صحة الجمل الرياضية عن طريق فرض أن الجملة صحيحة عند التعويض بالقيمة 1، ثم بعد ذلك نعتبر أن هذا يقتضي صحة الجملة عند التعويض بجميع القيم.

نأمل أن تكون خلاصة كافية وواضحة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

جملة صحيحة فإذا كان m , n أعداد زوجية فهذا يعني يمكن كتابة n , m على النحو التالي :

$n + 2a$

$m = 2b$

$n + m = 2 (a + b)$

وهذا يعني $n + m$ أيضاً عدد زوجي .

تدريب (2)

أفرض أن العدد $\sqrt{3}$ عدد قياسي فإن

$$\frac{n}{m} = \sqrt{3}$$

$$\frac{n^2}{m^2} = 3 \Rightarrow n^2 = 3m^2$$

وذلك يعني أن n^2 تقبل القسمة على 3 ومن ثم n وهذا يعني

$n = 3a$

وبالتعويض $3ga^2 = 3m^2$

$m^2 = 3a^2$

وذلك يعني أن m^2 تقبل القسمة علي 3 ومن ثم m وهذا يعني $m=36$

أي العدد $\sqrt{3}$ لا يمكن كتابته في صورة $\frac{n}{m}$ إلا إذا وجد عامل مشترك بين m, n لذلك

$$\sqrt{3} \notin \Phi$$

تدريب (3)

الإستدلال الرياضي

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2 \quad (1)$$

$p(1) = 1=1^2=1$ true

$p(n) =$ أفرض

اثبت $p(n+1)$

$p(n+1) = 1+3+5+\ldots+2(n+1)$ __ 1

$= 1+3+5+\ldots+2n+2 \_\_ 1$

$= 1+3+5+\ldots+2n+1$

$= (n+1)^2$

go p (n+1) is true

$\therefore 1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$

وهذا هو المطلوب

إجابات التقويم الذاتي

تقويم الذاتي(1)

$1(1!)+2(2!)+3(3!)+\ldots+n(n!)=(n!)!-1$

$p(1)=1(1!)=(1+1)!-1$

$1=2-1=1$ is true

أفرض p(n) is true

نرغب في إثبات

P(n+1)

$P(n+1) = 1(1!)+2(2!)+3(3!)+\ldots n(n!)+(n+1)(n+1)!$

$= (n+1)!-1+(n+1)\,(n+1)!$

$= (n+1)!-1 + [(n+2)-1](n+1)!$

$= (n+1)!-1+(n+2)(n+1)!-(n+1)!$

$= \underline{(n+1)!}-1+(n+2)!-\underline{(n+1)!}$

$= (n+2)!-1 = p(n+1)$

وهذا هو المطلوب إثباته

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

n=1

جملة صحيحة $p(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$ نجد

نفرض p(n)

المطلوب إثبات P(n+1)

$$p(n+2)=\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3}{p(n)}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2+4(n+1)\right]$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2+4n+4\right]$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)^2}{2}\right) = p(n+1)$$

وهو المطلوب إثباته

$2n + 1 \leq 2n$

لتحقيق P (3) نجد

$P(3) = 6 + 1 \leq 2^3$

$7 \leq 8$

وهوجملة صحيحة

نفرض P(n) المطلوب إثبات P(n+1)

$$P(n+1) = 2(n+1)+1$$
$$= 2n + 2 + 1$$
$$= (2n + 1) + 2$$
$$\leq 2^n + 2$$
$$\leq 2^n, 2$$
$$\leq 2^{n+1}$$

وهذا هو المطلوب إثباته .

(5)

$P(n) = 7^n - 1$

لتحقيق n = 1

$P(n) = 7 - 1 = 6$

تقبل القسمة على 6

أفرض P(n) المطلوب إثبات P(n+1)

$$P(n+1) = 7^{n+1} - 1$$
$$= 7.7^n - 7 - 6$$

$= 7.7^n - 7 - 6$

$= 7\,(7^n - 1) - 6$

وكل من هذه المقدارين تقبل القسمة على 6 لذلك

P(n+1)

جملة صحيحة .

(6)

$P(n) = 3^n + 7^n - 2$

لنحقق P(1)

$P(1) = 3 + 7 - 2 = 8$

وهي جملة صحيحة تقبل القسمة على 8

نفرض P(n) ، المطلوب إثبات P(n+1)

$P(n+1) = 3^{n+1} + 7^{n+1} - 2$

$= 3^n.3 + 7^n \,.\, 7 - 2$

(7) إذا كان $|A| = 1$ فهذا يمثل P(n) نجد

$P(A) = 2^1$

وهذا يحقق P(1) ويمكن قبل ذلك تحقيق إذا كانت المجموعة خالية أي $|A| = 0$ فإن المجموعة الخالية تعطي :

P(A) = 1

أفرض أن الجملة صحيحة لـ = n

إختر $x \in A$ ، نقوم بعملية تجزئة A حيث المجموعات الجزئية التي لا تحتوي على x.

أي

$B = A - \{x\}$

أي أن B تحتوي على العناصر التي لا تحتوي على x

أي :

$$|P(A)| = 2|P(B)|$$

لأن $|B| = n$

بالفرضية

$$|P(B)| = 2^n$$

$$\therefore |P(A)| = 2|P(Y)| = 2.2^n = 2n+1$$

وهو المطلوب إثباته

تقويم ذاتي (2)

1. (a) يوجد عدد حقيقي y, x حيث y+x = y ، إجابة صحيحة حيث x = 0 من ثم y+o=y .

(b) كل الأعداد الصحيحة الموجبة n , ...41 + n + n^2 عدد أولي هذه أيضاً جملة صحيحة ويمكن إثباتها بنظرية الإستدلال

حيث : P(1) = 43 عدد أولي

أفرض : P(n) = فرضية صحيحة

المطولب إثبات

P(n+1) = $(n+1)^2$ + (n+1) + 4 1
= (n^2 + n + 4 1) + 2 (n+1)
= P(n)

وهذا أيضاً عدد أولي حيث

(c) $x, y \in IR$ ، $(x+y)=0$ $\exists x, \exists y$ د

هذه أيضاً جملة صحيحة حيث لكل x = - y , y أيضاً موجودة IR .

$(3m+5n=12)$ ، $(\exists m \in N)$ ، $(\exists m \in N)$ (d)

هذه الجملة غير صحيحة لا يمكن إيجاد m , n داخل الأعداد الطبيعية حيث $0 \notin N$.

(e) جملة صحيحة.

(f) لأي عدد صحيح n n^2 + n + 1 عدد فردي

= n (n+1) + 1

نلاحظ إذا كان العدد n عدد فردي فإن n+1 عدد زوجي والعكس بالعكس ، لذلك n (n+1) ، هو حاصل ضرب عدد زوجي × عدد فردي والنتيجة دائماً عدد زوجي لذلك بإضافة العدد 1 تصبح النتيجة عدد فردي والجملة صحيحة.

2. (a) لإثبات $P(n) = 4^n - 1$ تقبل القسمة على 3 .

أولاً:

إذا كان $n = 1$ فإن $P(1) = 3$ وهذا العدد يقبل القسمة على 3

أفرض P(n) صحيح المطلوب إثبات P(n+1)

$$P(n+1) = 4^{n+1} - 1$$
$$= 4.4^n - 1$$
$$= (3 + 1)\, 4^n - 1$$

$$P(n+1) = 34^n + 4^n - 1$$

$$P(n+1) = 34^n + P(n)$$

نلاحظ أن المقدار P(n) يقبل القسمة على 3 وكذلك 34^n أيضاً يقبل القسمة على 3 ومن ثم P(n+1) جملة صحيحة.

(b) $P(n) = (n+1)\,! > 2^{n+3}, \quad \forall n > 5$

نثبت P(n) في هذه الحالة عندما n=5

$$P(5) = 6Q > 2^8$$

وهذه جملة صحيحة.

أفرض P(n) المطلوب إثبات P(n+1)

$$P(n+1) = (n+2)!$$
$$= (n+2)\,(n+1)!$$
$$> (n+2)\, 2^{n+3}$$
$$> 2 \,.\, 2^{n+3}$$
$$> 2^{(n+1)+3}$$

وهذا هو المطلوب إثباته

مسرد المصطلحات

البرهان بضد الأيجابية proof by contra positive

هو إثبات صحة جملة رياضية عن طريق إثبات جملة أخرى تكون مكافئة لها.

البرهان بالتناقض Proof by Contradiction

هو برهان صحة الجمل الرياضية عن طريق أثبات عكس الجملة أو نقيض الجملة وبعد ذلك نعتبر عكس النتيجة هى الصحيحة للجملة الأصلية

البرهان بقاعدة الاستدلال الرياضي

Principle of Mathematical Induction

هو برهان صحة الجمل الرياضية عن طريق فرض أن الجملة صحيحة عند التعويض بالقيمة 1، ثم بعد ذلك نعتبر أن هذا يقتضى صحة الجملة عند التعويض بجميع القيم.

المراجع

31. Keith Devlin (1992), **Sets, functions and logic**. Second edition. London: Chapman and Hall Mathematics.
32. Lin, C. L. (1977), **Elements of Discrete Mathematics**. U.S.A.: McGraw. Hill Computer Science Series.
33. Richard J.B. (1984), **Discrete Mathematics**. Revised edition. London: Maxwell MacMillen International edition.
34. **Finite Mathematics**, Shaum Series
35. **Set Theory**, Shaum series.