اهدأ

قناة ملتقى طلبة الصف الثالث الثانوي

يمكنكم الاشتراك بالقناة على التلجرام بالمعرف(@Thirdgroupye)

كمايمكنكم الاشتراك بمجموعات الوتس من خلال ارسال رسالة وتس(الاسم+ الرقم) إلى الرقم(777917375)

كما لا ننسى ان نتقدم بجزيل الشكر لمعد هذا المحتوى ونسأل من الله عز وجل ان يكتبه في ميزان حسناته

@abdagbowl

الراشد في

التفاضل والتكامل

للصف الثالث الثانوي علمي



@abdagbowl

إعداد:

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

مدرس الثانوية العامة لمادة الرياضيات

بمدرسة الميثاق - الموهوبين

ومدارس صنعاء الأهلية

هذا الكتاب:

١) يحتوي على شرح وافي للمادة العلمية بصورة مبسطة بعيداً عن الإسهاب.

٢) يحتوي على العدد الكافي من الأمثلة والتمارين المحلولة.

٣) يحتوي على تمارين متنوعة محلولة كثيراً ما ترد في الامتحانات النهائية.

٤) نتقبل انتقاداتكم البناءة ولا ندعي الكمال.

@abdagbowl

الراشد في الرياضيات..معلم بين يديك

للحصول على النسخة بالجملة أو النجزئة التواصل مع المؤلف ٧٧١٤٠٣٧٠٧

الصف الطباعي والتنسيق: احمد فؤاد العبسي
ت:(٧٧٤٣٥٣٠٢٧)

مرسى لخدمات الطباعة والإعلان

اهداء

إلى شركائي في النجاح

اسرتي الكريمة ،

ومرسى لخدمات الطباعة والاعلان

@abdagbowl

١

التفاضل

@abdagbowl

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

النهايات

قوانين سابقة قد تحتاجها في النهايات والاتصال:

(١) $\frac{أ}{\infty}=٠$ $\quad أ\neq ٠$

(٢) حالات عدم التعين $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty-\infty$ ، صفر $\times\infty$ ويمكن أن تزال بالطرق الجبرية (تحليل وغيره)

(٣) حالات عدم التعريف $\frac{\text{عدد}\neq صفر}{\infty}$ ، جذر أسه زوجي لعدد سالب $\sqrt[ن]{\text{عدد سالب}}$ ، ن زوجي ، كميه سالبه أو صفر داخل اللوغارتم وهنا لا يمكن إزالة عدم التعريف وتصبح النهاية غير موجودة.

(٤) التعويض هو إحلال القيمة محل الرمز فمثلاً $د(س)=٢س^{٢}-١$

$د(٥)=٢\times٢٥-١=٥٠-١=٤٩$

(٥) تحليل فرق بين مكعبين ومجموعهما

$$س^{٣}\mp ص^{٣}=(س\mp ص)(س^{٢}\pm س ص+ص^{٢})$$

(٦) تحليل الفرق بين مربعين $س^{٢}-ص^{٢}=(س-ص)(س+ص)$ ولا يوجد تحليل مجموع مربعين.

(٧) نهاية كوشي الأولى $\lim_{س\to أ}\frac{س^{ك}-أ^{ك}}{س-أ}=ك أ^{ك-١}$

(٨) نهاية كوشي الثانية $\lim_{س\to أ}\frac{س^{م}-أ^{م}}{س^{ن}-أ^{ن}}=\frac{م}{ن}أ^{م-ن}$

@abdagbowi

(٩) إذا كان $أ \pm \sqrt{س}$ مقدار فإن مرافقه $أ \mp \sqrt{س}$ وحاصل ضربهم

$= أ^{٢} - س$

(١٠) إذا كان $\sqrt{س} \pm أ$ مقدار فإن مرافقه $\sqrt{س} \mp أ$ وحاصل ضربهم

$= س - أ^{٢}$

(١١) من الدوال المحدودة دالة الجيب جا س ، دالة جيب التمام جتا س بشرط أن لا يصفر المقام ولا يعطينا جذر سالب عند التعويض (جذر اسه زوجي)

(١٢) زوايا التثبيت هي π ، $\pi٢$ ، $\pi٣$ ، .....

(١٣) زوايا القلب هي $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi٣}{٢}$ ، .....

(١٤) $جا\left(\frac{\pi}{٢} \pm هـ\right) = جتا هـ$ ، $جتا\left(\frac{\pi}{٢} \pm هـ\right) = \mp جا هـ$

(١٥) $جا(\pi \pm هـ) = \mp جا هـ$ ، $جتا(\pi \mp هـ) = = جتا هـ$

، $جا\left(\frac{\pi٣}{٢} \pm هـ\right) = = جتا هـ$ ، $جتا\left(\frac{\pi٣}{٢} \pm هـ\right) = \pm جا هـ$

(١٦) $ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{١}{ظتا هـ}$ ، $قا هـ = \frac{١}{جتا هـ}$ ، $قتا هـ = \frac{١}{جا هـ}$

(١٧) $جتا(-هـ) = جتا هـ$ ، $جا(-هـ) = - جا هـ$

(١٨) $\frac{أ + ب}{ب} \neq أ$ وانما $= \frac{أ}{ب} + ١$

(١٩) $\pi \times$ عدد فردي $= \pi$ بمعنى π هي نفسها $\pi٣$ هي نفسها $\pi٥$

(٢٠) $جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١$ ، $جا٢س = ٢ جاس جتاس$

، $جتا٢س = جتا^{٢}س - جا^{٢}س = ١ - ٢ جا^{٢}س = ٢ جتا^{٢}س - ١$

(٢١) $١ - جتا٢س = ٢ جا^{٢}س$ ، $١ + جتا٢س = ٢ جتا^{٢}س$

@abdagnowi

(٢٢) جاس + جاص = ٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$

، جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{س + ص}{٢}$ جا $\frac{س - ص}{٢}$

، جتاس + جتاص = ٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$

، جتاس − جتاص = − ٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جا $\frac{س - ص}{٢}$

وهذه هي قوانين تحويل الجمع والطرح إلى ضرب.

(٢٣) جا (س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص

جتا (س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص

(٢٤) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هي جا $\frac{\pi}{٣}$ أو جتا $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ هي جا $\frac{\pi}{٦}$ أو جتا $\frac{\pi}{٣}$

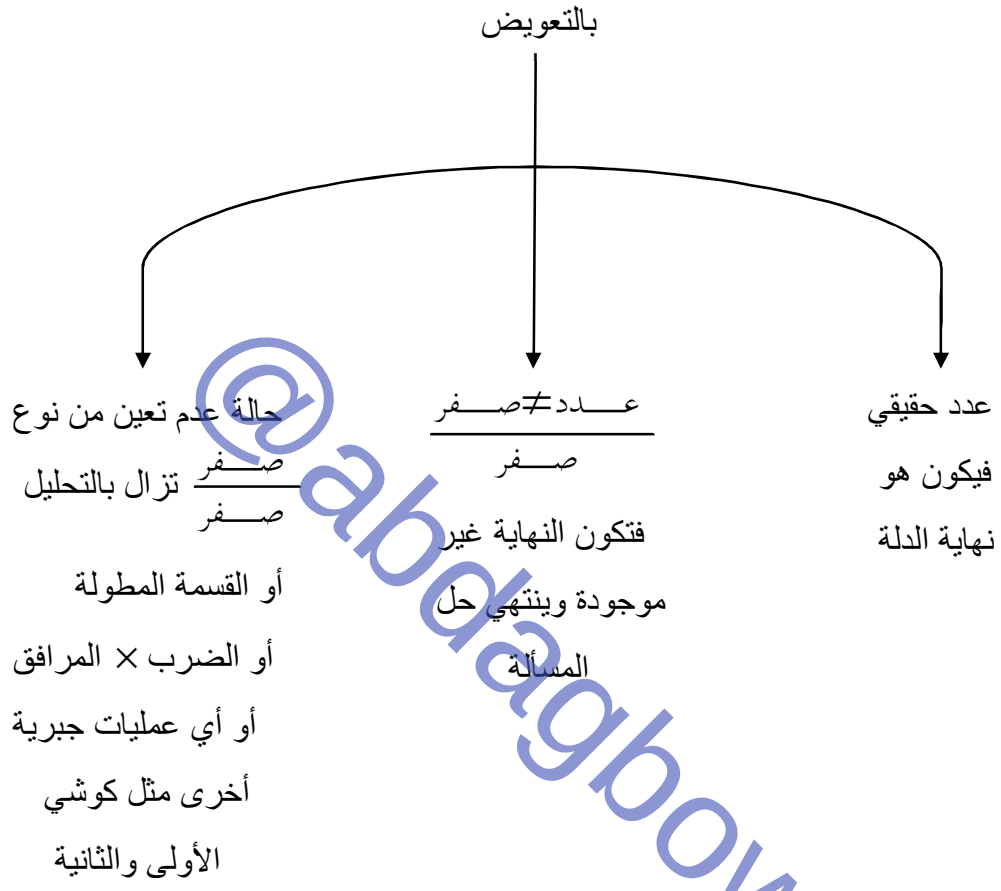
(٢٥) (هـ − س) = − (س − هـ)

(٢٦) جا٢ جتاب ∓ جتا٢ جاب = جا (٢ ∓ ب)

(٢٧) جتا٢ جتاب ∓ جا٢ جاب = جتا (٢ ± ب)

@abdagbowi

الدرس الأول: نهاية الدالة عند نقطة



@abdagbowl

فمثلاً:

(١) $\lim_{س\to١}$ ٢س − ١ بالتعويض $= ٢\times١-١=١$ وبذلك نقول أن نهاية الدالة $=١$

(٢) $\lim_{س\to٢}\frac{س-٢}{٤-٢س}$ بالتعويض $=\frac{٢-٢}{٤-٤}=\frac{صـــفر}{صـــفر}$ عدم تعين يزال بالتحليل بالعامل المشترك

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{س-٢}{(س-٢)\,٢} = \frac{١}{٢} \therefore \text{نهاية الدالة} = \frac{١}{٢}$$

(٣) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٤} \frac{٢-\sqrt{س}}{س-٤}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{٢-٢}{٤-٤} = \frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$ عدم تعين يزال بالضرب × مرافق البسط

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٤} \frac{٢-\sqrt{س}}{س-٤} \times \frac{٢+\sqrt{س}}{٢+\sqrt{س}} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٤} \frac{س-٤}{(س-٤)\,(٢+\sqrt{س})}$$

$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٤} \frac{١}{٢+\sqrt{س}}$ وبالتعويض

$= \frac{١}{٢+\sqrt{٤}} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$ وتكون نهاية الدالة هي $\frac{١}{٤}$

(٤) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -١} \frac{س^{٣}-٢س-١}{س+١}$ بالتعويض المباشر $\frac{-١+٢-١}{-١+١} = \frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$

عدم تعين يزال بالقسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} س^{٣}-٢س-١ & س+١ \\ \hline س^{٣}+س^{٢} & س^{٢}-س-١ \\ \hline -س^{٢}-٢س-١ & \\ -س^{٢}-س & \\ \hline -س-١ & \\ -س-١ & \\ \hline \text{صـــفر} & \end{array}$$

@abdagbowl

$= \lim_{س \to -١} س^{٢} - س - ١$ بالتعويض $= ١ + ١ - ١ = ٢ - ١ = ١$

(٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{٢٧ - ٢٧}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين (يزال بالتحليل "فرق بين مكعبين")

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{س - ٣}$$

$= \lim_{س \to ٣} س^{٢} + ٣س + ٩ = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$

(٦) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{-\frac{٣}{٢}} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{س - \frac{١}{٢}}$ بالتعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$ (حقق ذلك)

لصعوبة التحليل هنا يمكن استخدام كوشي وهي $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٢^{ن}}{س - ٢} = ن ٢^{ن-١}$

النهاية $= \left(-\frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)^{-\frac{٣}{٢}-١} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$ وهي نهاية الدالة

(٧) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - \sqrt{٥}}{س^{٣} - ١٢٥}$ بالتعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين (حقق ذلك)

لصعوبة التحليل هنا يمكن استخدام كوشي الثانية $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٢^{ن}}{س^{م} - ٢^{م}} = \frac{ن}{م} ٢^{ن-م}$

@abdagbowi

النهاية $\lim_{س\to ٥} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - ٥^{\frac{١}{٢}}}{س^{٣} - ٥^{٣}} = ٥^{\frac{١}{٢}-٣} \times \frac{\frac{١}{٢}}{٣} = ٥^{-\frac{٥}{٢}} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦\sqrt{٥^{٥}}}$

$$= \frac{١}{٦ \times ٢٥\sqrt{٥}} = \frac{١}{١٥٠\sqrt{٥}}$$

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\lim_{س\to ١} ٢س - ٣$

الحل: بالتعويض المباشر $= ٢ \times ١ - ٣ = ٢ - ٣ = -١$

(٢) $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$= \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)} = ١+١+١ = ٣$$

(٣) $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٢}+٢س-٣}{س-١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$\lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س+٣)}{(س-١)} = ١+٣ = ٤$$

@abdagbawi

(٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{٢ - \sqrt{س}}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين يزال بالضرب × مرافق المقام

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(٢+\sqrt{س})}{(٢-\sqrt{س})(٢+\sqrt{س})} = \frac{\cancel{(س-٤)}(٢+\sqrt{س})}{\cancel{(س-٤)}}$$

$$\lim_{س \to ٤} (٢ + \sqrt{س}) = ٢ + ٢ = ٢ + \sqrt{٤} = ٤$$

(٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٣} - ٨}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}(س^{٢}+٢س+٤)} = \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س^{٢}+٢س+٤}$$

$$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$$

(٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{٣ - \sqrt{٣+س٢}}{س - ٣}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{٣ - \sqrt{٣+٣\times٢}}{٣-٣} = \frac{صفر}{صفر}$

عدم تعين يزال بالضرب × مرافق البسط

@abdagbowi

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(٣+\sqrt{٣+س٢}\,)(٣-\sqrt{٣+س٢}\,)}{(٣+\sqrt{٣+س٢}\,)(س-٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢س-٣-٩}{(٣+\sqrt{٣+س٢}\,)(س-٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢س-٦}{(٣+\sqrt{٣+س٢}\,)(س-٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{٢(\cancel{س-٣})}{(٣+\sqrt{٣+س٢}\,)(\cancel{س-٣})}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢}{٣+\sqrt{٣+س٢}} = \frac{٢}{٣+\sqrt{٣+٣×٢}}$$

$$= \frac{٢}{٣+٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

(٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{\frac{٥}{٢}} - ٤\sqrt{}^{٥}}{س-٢}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$ (حقق ذلك) ولصعوبة التحليل هنا نستخدم مبرهنة كوشي الأولى

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{\frac{٥}{٢}} - ٢^{\frac{٥}{٢}}}{س-٢} = (٢)^{\frac{٥}{٢}-١} = ٢ \times \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{\sqrt{٢}^{٣}\,٢}$$

(٨) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} + س + ٢}{س + ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$ (حقق ذلك) عدم تعين يزال بقسمة البسط على المقام لأن البسط لا يمكن تحليله

@abdagbowl

$$\begin{array}{r|l} س^{٣} + س + ٢ & س + ١ \\ \hline س^{٣} + س^{٢} & س^{٢} - س + ٢ \\ \hline -س^{٢} + س + ٢ & \\ -س^{٢} - س & \\ \hline ٢س + ٢ & \\ ٢س + ٢ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} س^{٢} - س + ٢ = ١ + ١ + ٢ = ٤$$

ثانياً: (١) إذا كان $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ٥ أ س^{٢} + ٢س = ٤$ فما قيمة أ

الحل: بالتعويض المباشر $٥ أ \times ١ + ٢ \times ١ = ٤$

$$٥ أ + ٢ = ٤ \Leftarrow ٥ أ = ٢ \Leftarrow أ = \frac{٢}{٥}$$

(٢) إذا كان $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ب(س) = ٥$ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ء(س) = ٢٠$

أوجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ب(س) ء(س) + ء(س)$

الحل: $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ب(س) ء(س) + ء(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ب(س) + \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ء(س)$

$$= ٥ \times ٥ + ٢٠ = ٢٥ + ٢٠ = ٤٥$$

@abdaqbowl

حساب نهاية الدالة الجذرية عند نقطة أ



@abdagbowl

فمثلاً: $\lim_{س\to ١} \sqrt{س-١}$ بالتعويض = صفر $\lim^{+}_{س\to ١} ى(س)$ موجبة

$\lim^{-}_{س\to ١} ى(س)$ سالبة ⇐ النهاية غير موجودة

$\lim_{س\to -٢} \sqrt{س-٢}$ بالتعويض = $\sqrt{-٤}$ النهاية غير موجودة

، $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س+٢}$ = $\sqrt{٢+٢}$ = ٤ وهي النهاية

الدرس الثاني: نهاية الدالة عند ∞

لإيجاد نهاية الدالة عند ∞

بالتعويض

نحصل على قيمه حقيقية فتكون هي النهاية مثل

$$\frac{\text{عدد غير الصفر}}{\infty} = \text{صفر}$$

عدم تعين من نوع
∞ − ∞ يزال غالباً
بالضرب × المرافق في حالة الحدودية المحتوية على جذر أو بإخراج عامل مشترك بأكبر أس أو باعتبار النهاية نهاية الحد الأكبر في الاس وذلك عند كثيرة الحدود

عدم تعين بصورة $\frac{\infty}{\infty}$ يزال

بتمييز الدالة الكسرية إلى:

(١) درجة البسط < درجة المقام
فتكون النهاية = ∞

(٢) درجة البسط > درجة المقام
فتكون النهاية = صـــفر

(٣) درجة البسط = درجة المقام
فتكون النهاية قسمة معامل اكبر أس في البسط والمقام

(٤) إذا احتوى البسط أو المقام على جذور نقسم على معامل اكبر أس

@abdagbowl

فمثلاً: (١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥}{س}$ بالتعويض المباشر $= \frac{٥}{\infty} =$ صـــفر

(٢) $\lim_{س \to \infty} س^{٢} - ٣س - ٤$ بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$ عدم تعين وبذلك نأخذ

نهاية اكبر أس $\lim_{س \to \infty} س^{٢} = (\infty)^{٢} = \infty$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{س - ٢} - ٥س$ بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$ عدم تعين يزال

بالضرب × المرافق

$$\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{\sqrt{س-٢} - ٥س}{١ \times \sqrt{س-٢} + ٥س} \times \frac{\sqrt{س-٢} + ٥}{\sqrt{س-٢} + ٥}$$

$$= \text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{س - ٢ - ٢٥س^{٢}}{\sqrt{س-٢} + ٥س}$$ بالقسمة على اكبر أس لوجود الجذر في كسريه

$$\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{\frac{س}{س^{٢}} - \frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٢٥س^{٢}}{س^{٢}}}{\sqrt{\frac{س}{س^{٤}} - \frac{٢}{س^{٤}}} + \frac{٥س}{س^{٢}}}$$ لاحظ داخل الجذر قسمنا على $س^{٤}$ (لماذا)

$$= \frac{صـــفر - صـــفر - ٢٥}{\sqrt{صـــفر} + صـــفر} = -\frac{٢٥}{صـــفر}$$

$= \infty$ ونقول هنا أن النهاية $= \infty$ أو غير موجودة

لأننا حصلنا على عدم تعريف (فرق بين عدم التعريف وعدم التعين)

(٤) $\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٥ - ٤س^{٢}}$ بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعين

ولكن درجة البسط = درجة المقام $\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٥ - ٤س^{٢}} = \frac{٢}{-٤} = -\frac{١}{٢}$

(٥) $\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{٣س}{س^{٢} - ١}$ بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$

عدم تعين ولكن درجة البسط < درجة المقام $\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{٣س}{س^{٢} - ١} =$ صـــفر

(٦) $\text{نهـــا}_{س\to\infty} \frac{س^{٢} - ٣س}{٢س - ١}$ بالتعويض المباشر $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعين

@abdagbowl

ولكن درجة البسط > درجة المقام $\Leftarrow$ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - ٣س}{٢س - ١} = \infty$

تمارين: أولاً: أوجد نهاية الدوال التالية:

(١) $\lim_{س \to \infty} ٣س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢س + ١$

الحل: بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$ عدم تعين

ولكن الدالة كثيرة حدود $\lim_{س \to \infty} ٣س^{٣} = ٣ \times \infty^{٣} = \infty$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س - ١}{\sqrt{س^{٢} + ٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعين يزال بالقسمة على أكبر أس

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤س}{س} - \frac{١}{س}}{\sqrt{\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٢}{س^{٢}}}} = \frac{٤ - صفر}{\sqrt{١ + صفر}} = \frac{٤}{١} = ٤$$

لاحظ القسمة داخل الجذر مربع القسمة خارج

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} + ٢س - ١}{٤س^{٢} + ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعين ولكن درجة البسط = درجة المقام

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} + ٢س + ١}{٤س^{٢} + ١} = \frac{٣}{٤}$$

@abdagbowi

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\pi ٢}{٤ - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\pi ٢}{\infty} =$ صـــفر

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{١ + ٤س^{٣}}{١ + ٣س^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$ ولكن درجة البسط $>$ درجة المقام

$$\lim_{س \to \infty} \frac{١ + ٤س^{٣}}{١ + ٣س^{٢}} = \infty$$

(٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{١ + س^{٢}} - س}{١ + ٢س}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$

عدم تعين يزال بقسمة البسط والمقام على معامل أكبر أس

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{١}{س^{٢}} + \frac{س^{٢}}{س^{٢}}} - \frac{س}{س}}{\frac{١}{س} + \frac{٢س}{س}} = \frac{\sqrt{٠ + ١} - ١}{٠ + ٢} = \frac{صـــفر}{٢} = صـــفر$$

ثانياً: إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س^{٢} + ١}{٥س^{٢} + س} = ١٦$ فما قيمة أ

الحل: النهاية $= \frac{أ}{٥} = ١٦ \Leftarrow أ = ٥ \times ١٦$

$\Leftarrow أ = ٨٠$

@abdaghbowri

الدرس الثالث: نهايات الدالة (صفرية × محدودة) (النوع الأول)

مبرهنه بدون برهان:

إذا كانت $د(س)$ ، $ن(س)$ دالتين

وكانت $د(س)$ محدودة ، نهاية $ن(س)$ صفرية

فإن: $\lim_{س \to ا} د(س) \times ن(س) =$ صفر حيث $ا \in ع$

من الدوال المحدودة $-١ \leq جتاس \leq ١$

$-١ \leq جاس \leq ١$

فمثلاً:

(١)

$$\lim_{س \to ٣} (س-٣) \text{ جتا } \pi س$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٢)

$$\lim_{س \to ٠} س \text{ هـ}^{جاس}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٣)

$$\lim_{س \to ١} (٢س - ١) \text{ جا} \frac{\pi}{س - ١}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

@abdagbowl

(حقق أن الدالة صفرية) $\lim_{س\to\infty} \frac{(س-٣)}{(س^{٢}-٤)\text{قتاس}}$

$$= \lim_{س\to\infty} \frac{(س-٣)}{س^{٢}-٤} \times \frac{١}{\text{قتاس}}$$

$$= \lim_{س\to\infty} \frac{س-٣}{س^{٢}-٤} \times \text{جاس}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

مما سبق نلاحظ أن الدالة المطلوب نهايتها إذا كانت حاصل ضرب دالتين احدهما مثلثية (جاس أو جتاس) في البسط أو في المقام بحيث لا تصفر المقام فإن النهاية صفرية × محدودة = صفر مهما كانت قيمة ﻫ

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\lim_{س\to٠} س \text{ جا} \frac{١}{س}$

الحل:

$$\lim_{س\to٠} س \text{ جا} \frac{١}{س}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٢)

@abdagbowl

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} (س - 1) \text{ جتا } \frac{\pi}{س - 1}$$

↓ ↓

صـــــفر × محـــــدودة = صـــــفر

(٣) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{س \text{ جاس}}{س^{٢} - ١}$ **الحل:**

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{س}{س^{٢} - ١} \text{ جا س}$$

↓ ↓

صـــــفر × محـــــدودة = صـــــفر

(٤) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{١}{س \text{ قا س}}$ **الحل:**

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{١}{س} \times \text{جتاس}$$

↓ ↓

صـــــفر × محـــــدودة = صـــــفر

(٥) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{٣س^{٢} + \text{جتاس}}{٤س^{٢} - ١}$

الحل: لعدم وجود علاقة بين البسط والمقام نقوم بتوزيع البسط على المقام

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{٣س^{٢}}{٤س^{٢} - ١} + \frac{١}{٤س^{٢} - ١} \text{جتاس}$$

@abdagbawi

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{٣س^{٢}}{٤س^{٢}-١} + \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{١}{٤س^{٢}-١} \text{ جتاس}$$

↓ ↓

صـــــفر× محـــــدودة = صـــــفر

$$= \frac{٣}{٤} + \text{صـــفر} = \frac{٣}{٤}$$

(٦) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{س}{(١+س^{٢})(٢-\text{جتاس})}$ **الحل:**

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{س}{١+س^{٢}} \times \frac{١}{٢-\text{جتاس}}$$

↓ ↓

صـــــفر× محـــــدودة = صـــــفر

لاحظ أن دالة **جتاس** في المقام ولكنها لا تصفر المقام وبذلك نعتبرها محدودة

(٧) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow.} \frac{س}{\text{قتا ظتا س}}$ **الحل:**

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow.} س \times \text{جا ظتا س}$$

↓ ↓

صـــــفر× محـــــدودة = صـــــفر

(٨) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{\text{لـــو}(٣+\text{جتاس})}{س^{٢}}$ **الحل:**

@abdagboowl

$$\lim_{س \to \infty} \left(٣ + \text{جتا } س\right) \times \frac{١}{س^{٢}}$$

↓ ↓

محدودة × صفر = صفر

ما داخل اللوغارتم موجب

@abdagbowl

الدرس الرابع: نهاية الدوال المثلثية النوع الثاني قاعدة (السندوتش)

مبرهنة بدون برهان: $\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = ١$

شروط استخدام المبرهنة:

(١) نهاية الدالة بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

(٢) زاوية النسبة المثلثية (جاس أو ظاس) تساوي المقام

(٣) أن تكون النهاية س $\leftarrow$ صفر

وهناك صور عديدة لهذه المبرهنة منها:

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} = ١$ (٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس} = ١$

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{جاس - ٢}{س - ٢} = ١$ (٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{جا \frac{١}{س}}{\frac{١}{س}} = ١$

لاحظ رقم (٤) إذا كان النهاية عند ∞ فيجب أن تكون الزاوية متغيرها (س) في المقام

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} س}{س^{٢}} = ١$ (٦) $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس - \pi}{س - \pi} = ١$

(٧) $\lim_{س \to -\pi} \frac{ظاس + \pi}{س + \pi} = ١$

لاحظ أن ما يجرى على جاس يجرى على ظاس في هذه المبرهنة وهناك صور أخرى للمبرهنة يفهمها الطالب بالقياس بالصورة السابقة.

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

@abdagbawi

فمثلاً:

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا٥س}{٥س} = ١$ وبالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{جا٥س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٥س}{٥س} \times ٥ = ١ \times ٥ = ٥$ وبالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا س - ٢}{س^{٢} - ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{جا(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$ وبالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$

$= ١ \times \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

(٤) $\lim_{س \to \infty} جا\left(\frac{\pi}{٢س - ١}\right) = \lim_{س \to \infty} \frac{جا \frac{\pi}{٢س - ١}}{\frac{\pi}{٢س - ١}} \times \frac{\pi}{٢س - ١}$ بالتعويض

$\frac{صفر}{صفر}$

$= ١ \times \lim_{س \to \infty} \frac{\pi}{٢س - ١} = ١ \times \frac{\pi}{\infty} = ١ \times ٠ =$ صفر

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{جا س^{٢}}{س^{٢}} = ١$ وبالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$

(٦) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}٢س}{س^{٢}} = \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}٢س}{٤س^{٢}} \times ٤ = ١ \times ٤ = ٤$ وبالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$

لاحظ في حالة مربع جاس أو مربع ظاس يصبح المقام مربع زاوية

جاس أو ظاس

@abdagbowi

تمارين:

أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{س}$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين $= \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{٢س} \times ٢ = ١ \times ٢ = ٢$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{ظا ٢ س}$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{ظا ٢ س \times ٢} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٢ س}{س^{٢}}$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٢ س}{٢^{٢} س^{٢}} \times ٢^{٢} = ١ \times ٢^{٢} = ٢^{٢}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٦ س}{٥ س}$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين $= \frac{جا ٦س}{٦س} \times \frac{٦}{٥} = ١ \times \frac{٦}{٥} = \frac{٦}{٥}$

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س^{٢}}{س^{٢}}$

الحل: $= ١$

@abdagbawi

(٦) $\lim_{س \to .} \frac{٣س^{٢}}{ظا^{٢}٦س}$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عد تعين

$$\lim_{س \to .} \frac{٣٦ س^{٢} \times ٣}{٣٦ \times س٦ ظا^{٢}} \times ١ = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

(٧) $\lim_{س \to -٥} (س+٥) قتا (س+٥)$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين $\lim_{س \to -٥} \frac{س+٥}{جا(س+٥)} = ١$

وهنا لاحظ لم نعتبر أن المسألة صفرية × محدودة رغم انها صفرية ولكن جاس في المقام لوحده ليست محدودة لأنها يمكن أن تصفر المقام

(٨) $\lim_{س \to ١} \frac{ظاس^{٢} - ١}{س - ١}$

الحل: بالتعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

$$= \lim_{س \to ١} \frac{ظاس^{٢} - ١}{(س-١)(س+١)} = \lim_{س \to ١} \frac{ظا(س^{٢} - ١)}{س^{٢} - ١} \times س + ١$$

$$= ١ \times (١+١) = ٢$$

(٩) $\lim_{س \to \infty} (س - ١) جا \frac{\pi}{س - ٢}$

الحل: لاحظ متغير الزاوية في المقام

@abdagbowl

بالتعويض $\infty \times$ صفر عدم تعين

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} (س - ١) \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{س - ٢}\right)}{\frac{\pi}{س - ٢}} \times \frac{\pi}{س - ٢}$$

$$= ١ \times \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\pi (س - ١)}{(س - ٢)} = ١ \times \frac{\pi}{١} = \pi$$

(١٠) $$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - ٤}$$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$ عدم تعين

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} = ١ \times \frac{١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٤}$$

(١١) $$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{\text{ظا}(س - ٤)}{\sqrt{س} - ٢}$$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$ عدم تعين بالضرب × مرافق المقام

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{\text{ظا}(س - ٤)\left(\sqrt{س} + ٢\right)}{\left(\sqrt{س} - ٢\right)\left(\sqrt{س} + ٢\right)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{\text{ظا}(س - ٤)}{س - ٤} \times \left(\sqrt{س} + ٢\right)$$

$$= ١ \times \left(\sqrt{٤} + ٢\right) = ١ \times ٤ = ٤$$

@abdagbawi

الدرس الخامس: نهايات الدوال المثلثية النوع الثالث

(القلب والتثبيت)

(١) من زوايا التثبيت الزاوية π ، $\pi٣$ ، $\pi٥$ ، ..... ،

$\pi٢$ ، $\pi٤$ ، $\pi٦$ ، $\pi٨$ ، ..... وهي زوايا إذا أضيفت لزاوية لا تغير في نسبتها مع مراعات الإشارة بحسب الربع

فمثلاً: $\text{جتا}(\pi - هـ) = -\text{جتا}هـ$ في الربع الثاني

$\text{جتا}(\pi٢ - هـ) = \text{جتا}هـ$ في الربع الرابع وهكذا

(٢) من زوايا القلب $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi٥}{٢}$ ، $\frac{\pi٧}{٢}$ ، ..... ، $\frac{\pi٣}{٢}$ ، $\frac{\pi٩}{٢}$ ، $\frac{\pi١٥}{٢}$ ، .....

وهي زوايا تقلب النسبة مع مراعات الإشارات بحسب الربع

فمثلاً: $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - هـ\right) = \text{جا}هـ$ في الربع الأول

$\text{جا}\left(\frac{\pi٣}{٢} - هـ\right) = -\text{جتا}هـ$ في الربع الثالث وهكذا

فمثلاً:

(١) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جاس}}{\pi - س}$

الحل: نلاحظ بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين عدم إمكانية حلها بالأنواع السابقة (لماذا)

@abdalgbowl

فنلاحظ هنا وجود رابط بين س ← π ، س − π (المقام) فيجب أن يظهر هذا الرابط في البسط وذلك بقانون التثبيت بالزاوية π

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow \pi} \frac{\text{جا}(س - \pi)}{س - \pi} = - \text{نهـا}_{س \leftarrow \pi} \frac{\text{جا}(\pi - س)}{\pi - س}$$

فتحول إلى النوع الثاني (قاعدة السندوتش) = − ١

(٢) $\text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{س - \frac{\pi ٣}{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صـفر}}{\text{صـفر}}$ عدم تعين

تحل بنفس الطريقة ولكن هنا قلب الزاوية

$$= - \text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جا}\left(س - \frac{\pi ٣}{٢}\right)}{س - \frac{\pi ٣}{٢}}$$ لاحظ الإشارة السالبة

$$= - ١ \text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جا}\left(س - \frac{\pi ٣}{٢}\right)}{\left(س - \frac{\pi ٣}{٢}\right)}$$

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \frac{\text{جا}\, \pi س}{س - ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صـفر}}{\text{صـفر}}$ عدم تعين تحل بقانون تثبيت النسبة

@abdagbawi

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ١} \frac{\text{جا}(\pi - س\pi)}{س - ١} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ١} \frac{\text{جا}\,\pi\,(١ - س)}{س - ١}$$

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow ١} \frac{\pi \times (١ - س)\,\text{جا}\,\pi(س - ١)}{\pi(س - ١)} = -\pi$$

(٢) $$\text{نهـــا}_{س\leftarrow \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}س}{س - \frac{\pi}{٢}}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$ عدم تعين تحل بقانون قلب النسبة

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\frac{\pi}{٢} - س} = -\text{نهـــا}_{س\leftarrow \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)}{س - \frac{\pi}{٢}} = -١$$

(٣) $$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{س}}{س - ٢}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$ عدم تعين تحل بقانون قلب النسبة

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{س} - \frac{\pi}{٢}\right)}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢س}(٢ - س)}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\frac{\pi}{٢س} \times (٢ - س)\,\text{جا}\frac{\pi}{٢س}}{\frac{\pi}{٢س}(٢ - س)}$$

@abdagbowl

$$= ١ \times \lim_{س \to ٢} \frac{\pi}{٢س} = \frac{\pi}{٢ \times ٢} \times ١ = \frac{\pi}{٤} \times ١ = \frac{\pi}{٤}$$

(٤) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا س}}{\pi - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون تثبيت النسبة

$$\lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}(\pi - س)}{\pi - س} = - \lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}(س - \pi)}{س - \pi} = -١$$

(٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{١ + س}\right)}{١ - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون قلب النسبة

$$\lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{١ + س}\right)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢(١ + س)}(٢ - ١ + س)\right)}{(١ - س)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢(١ + س)}(س - ١)\right)}{(١ - س)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢(١ + س)}(س - ١)\right) \times \frac{\pi}{٢(١ + س)}}{\left(\frac{\pi}{٢(١ + س)}(١ - س)\right)}$$

@abdagbowl

$$= ١ \times \lim_{س \to ١} \frac{\pi}{٢ (١ + س)} = ١ \times \frac{\pi}{٢ (١ + ١)} = \frac{\pi}{٤}$$

(٦) $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا ٢س}{\pi - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

تثبت بـ $\pi ٢$ (لماذا)

$$- \lim_{س \to \pi} \frac{ظا (٢ \pi - ٢س)}{\pi - س} = \lim_{س \to \pi} \frac{ظا ٢ (\pi - س)}{(\pi - س)}$$

$$= \lim_{س \to \pi} \frac{٢ \times ظا ٢ (\pi - س)}{٢ (\pi - س)} = ٢$$

(٧) $\lim_{س \to ١} \frac{جا ٣ \pi س}{س^{٢} - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

تحل بالتثبيت بـ $\pi ٣$

$$\lim_{س \to ١} \frac{جا (٣ \pi - ٣ \pi س)}{س (س - ١)} = - \lim_{س \to ١} \frac{جا ٣ \pi (س - ١)}{س (س - ١)}$$ بالتعويض عن

س

$$= - \lim_{س \to ١} \frac{جا ٣ \pi (س - ١)}{٣ \pi (س - ١)} = - ١ \times ٣ \pi = - ٣ \pi$$

@abdagbowl

(٨) $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا \frac{٣}{٢} س}{\pi - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

تحل بقلب النسبة بـ $\frac{٣\pi}{٢}$

$$\lim_{س \to \pi} \frac{ظا\left(س \frac{٣}{٢} - \frac{٣\pi}{٢}\right)}{\pi - س} = -\lim_{س \to \pi} \frac{ظا \frac{٣}{٢}(\pi - س)}{\pi - س}$$

$$\lim_{س \to \pi} \frac{ظا \frac{٣}{٢}(\pi - س)}{\frac{٣}{٢}(\pi - س)} \times \frac{٣}{٢} = -١ \times \frac{٣}{٢} = -\frac{٣}{٢}$$

(٩) $\lim_{س \to ٤} \left(\sqrt{س} - ٢\right) ظا \frac{\pi}{٢س}$ **الحل:** تحول ظا إلى المقام بـظتا ثم قلب النسبة

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{ظا \frac{\pi}{٢س}} = \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{ظا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢س}\right)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{ظا \frac{\pi}{٢س}(س - ٤)}$$ بالضرب × مرافق البسط

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\left(\sqrt{س} - ٢\right)\left(\sqrt{س} + ٢\right)}{ظا \frac{\pi}{٢س}(س - ٤)\left(\sqrt{س} + ٢\right)}$$

@abdagbowi

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)}{\text{ظا} \frac{\pi}{٢ س} (س - ٤)\left(٢ + \sqrt{س}\right)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\frac{\pi}{٢س}(س - ٤)}{\frac{\pi}{٢س}\text{ظا} \frac{\pi}{٢س} (س - ٤)\left(٢ + \sqrt{س}\right)}$$

$$= ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{٢ س}{\pi\left(٢ + \sqrt{س}\right)}$$ بالتعويض

$$= \frac{٤ \times ٢}{\pi\left(٢ + \sqrt{٤}\right)} = \frac{٨}{\pi ٤} = \frac{٢}{\pi}$$

(١٠) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{ظا } ٣ \pi س}{س^{٢} - ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

بالتثبيت بـ $\pi ٣$

$$= - \lim_{س \to ١} \frac{(٣ \pi س - \pi ٣)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{ظا } ٣ \pi (س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{ظا } ٣ \pi (س - ١)}{٣ \pi (س - ١)} \frac{\pi ٣}{س + ١}$$

$$= ١ \times \lim_{س \to ١} \frac{\pi ٣}{س + ١}$$ بالتعويض

@abdagbouri

$$= ١ \times \frac{\pi ٣}{١+١} = ١ \times \frac{\pi ٣}{٢} = - \frac{\pi ٣}{٢}$$

@abdagbowl

الدرس السادس: نهايات الدوال المثلثية النوع الرابع

(قوانين التحويل المثلثي)

من القوانين التي تستخدمها في هذا الدرس:

(١) $\text{جا}٢س = ٢\,\text{جا}س\,\text{جتا}س$ بصورها المتعددة

مثل: $\text{جا}٤س = ٢\,\text{جا}٢س\,\text{جتا}٢س$

$$\text{جا}٣س = ٢\,\text{جا}\frac{٣}{٢}س\,\text{جتا}\frac{٣}{٢}س \quad ، \quad \text{جا}س = ٢\,\text{جا}\frac{س}{٢}\,\text{جتا}\frac{س}{٢}$$

(٢) $١ - \text{جتا}٢س = ٢\,\text{جا}^{٢}س$ بصورها المتعددة

مثل: $١ - \text{جتا}٤س = ٢\,\text{جا}^{٢}٢س$

$$١ - \text{جتا}٣س = ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{٣}{٢}س \quad ، \quad ١ - \text{جتا}س = ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}$$

(٣) $١ + \text{جتا}٢س = ٢\,\text{جتا}^{٢}س$ بصورها المتعددة

مثل: $١ + \text{جتا}٤س = ٢\,\text{جتا}^{٢}٢س$

$$١ + \text{جتا}٣س = ٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{٣}{٢}س \quad ، \quad ١ + \text{جتا}س = ٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{س}{٢}$$

(٤) قوانين تحويل مجموع النسب المثلثية إلى حاصل ضرب بصوره المتعددة

مثل: $\text{جا}س + \text{جا}ص = ٢\,\text{جا}\frac{س + ص}{٢}\,\text{جتا}\frac{س - ص}{٢}$

$$\text{جا}س - \text{جا}ص = ٢\,\text{جتا}\frac{س + ص}{٢}\,\text{جا}\frac{س - ص}{٢}$$

$$\text{جتا}س + \text{جتا}ص = ٢\,\text{جتا}\frac{س + ص}{٢}\,\text{جتا}\frac{س - ص}{٢}$$

@abdagbowi

$$\text{، جتاس} - \text{جتاص} = -٢\,\text{جا}\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\,\text{جا}\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$$

(٥) قوانين المجموع والفرق بصوره المتعددة

مثل: $\text{جا}(\text{س} + \text{ص}) = \text{جاس جتاص} + \text{جتاس جاص}$

$$\text{، جا}(\text{س} - \text{ص}) = \text{جاس جتاص} - \text{جتاس جاص}$$

$$\text{، جتا}(\text{س} + \text{ص}) = \text{جتاس جتاص} - \text{جاس جاص}$$

$$\text{، جتا}(\text{س} - \text{ص}) = \text{جتاس جتاص} + \text{جاس جاص}$$

(٦) قانون تحويل الظل وظل التمام بصوره

مثل: $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

فمثلاً:

(١) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

$$\text{تحويل} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{٣}{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\left(\frac{٣\text{س}}{٢}\right)\frac{٩}{٤}}{\frac{٩\,\text{س}^{٢}}{٤}}$$

$$= \frac{٩ \times ٢}{٤} = \frac{١٨}{٤} = \frac{٩}{٢}$$

@abdagbowl

(٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جتا^{٢}س}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)^{٢}}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جا^{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)^{٢}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جا^{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)^{٢}} = ٢$$

وهناك أفكار عديدة سوف نوردها في التمارين.

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٢س}{س^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

بالتحويل المثلثي $\lim_{س \to ٠} \frac{٢جا^{٢}س}{س^{٢}} = ٢ \times ١ = ٢$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^{٣}س}{س^{٢}}$

@abdagbowi

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

بتحليل (فرق بين مكعبين)

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(١ - \text{جتاس})(١ + \text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{س}^{٢}}$$

بالتعويض عن جزء من المسألة

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(١ - \text{جتاس})(١ + ١ + ١)}{\text{س}^{٢}}$$ بالتحويل المثلثي

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}} \times ٣ = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right) \times ٣}{\text{س}^{٢} \times \frac{١}{٤}} = \frac{٢ \times ٣}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

(٣) $$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}\,\text{جاس} - ١}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

الحل: وجود $\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ يساعدنا في فك شفرة المسألة

بأخذ عامل مشترك $\sqrt{٢}$

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}\left(\text{جاس} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}\left(\text{جاس} - \text{جا}\frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$ لاحظ $\text{جا}\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

@abdagbawi

$$\text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}\left(٢ \text{ جتا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٤}+س\right)\right) \text{جا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)}{\frac{\pi}{٤}-س}$$ وهنا احدى النسب تعويض مباشر

$$= -\text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \sqrt{٢}(٢)\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\right) \frac{\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)}{\frac{\pi}{٤}-س}$$

$$= -\text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ٢ \times \sqrt{٢} \times \frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)}{\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)} = -١$$

(٤) $$\text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{\sqrt{٣} - ٢ \text{ جتا}س}{\frac{\pi}{٦}-س}$$

الحل: وجود $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ يساعدنا في فك شفرة المسألة بأخذ ٢ عامل مشترك

$$= \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \text{جتا}س\right)}{\frac{\pi}{٦}-س}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٦} - \text{جتا}س\right)}{\frac{\pi}{٦}-س}$$ لاحظ $\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \text{جتا}٣٠$

@abdaghbowi

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\left(-٢ جا \frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦} + س\right) جا \frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦} - س\right)\right)}{\frac{\pi}{٦} - س}$$ احدى النسب تعويض مباشر

$$= + \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٤ \times جا\frac{\pi}{٦} \times جا\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)}{\frac{\pi}{٦} - س}$$

$$= ٤ \times \frac{١}{٢} \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{جا\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)}{\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)} = ١$$

(٥) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - ظاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

بالتحويل المثلثي

$$= - \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \frac{جاس}{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}} = - \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس - جاس}{جتاس \times \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}$$

بالتعويض عن جزء من المسألة

$$= - \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس - جاس}{\frac{١}{\sqrt{٢}}\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}$$

@abdaghbowl

$$= -\sqrt{٢} \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس - جتا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\frac{\pi}{٤} - س}$$ تحويل مثلثي

$$= -\sqrt{٢} \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\left(-٢جا\frac{١}{٢}\left(س + \frac{\pi}{٢} - س\right)جا\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٢} + س\right)\right)}{\frac{\pi}{٤} - س}$$

جزء تعويض مباشر

$$= -\sqrt{٢} \times -٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢س\right)}{\frac{\pi}{٤} - س}$$ عامل مشترك

$$= \frac{٢جاس - \frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤} - س} = ٢ \times ١ = ٢$$

(٦) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا٣س + ظتاس}{٤س - \pi}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ عدم تعين

تحويل مثلثي $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\frac{جا٣س}{جتا٣س} + \frac{جتاس}{جاس}}{٤\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)}$$

@abdagbowl

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جاس جا٣س + جتاس جتا٣س}}{\text{جتا٣س جاس (٤)} \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا (٣ س – س)}}{\text{٤ جتا ٣ س جا س} \times \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}$$ جزء تعويض مباشر

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{٤} \times - \text{جتا} \times \frac{\pi}{٤} \text{جا} \times \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا٢س}}{-٢ \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}$$ قلب النسبة

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا} \left(\frac{\pi}{٢} - ٢ س\right)}{٢ \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)} = + \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا} ٢ \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{٢ \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)} = ١$$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس – جا٢س}}{س^{٣}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

تحويل مثلثي

$$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس – ٢جاس جتاس}}{س^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس} (١ - \text{جتاس})}{\text{س س}^{٢}} = ٢ \times ١ \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س^{٢}}$$

@abdagbowl

$$= ٢ \times ١ \times ٢ = \frac{٢ \text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{\frac{س^{٢}}{٤} \times ٤} \times ٢ \times ١ \times \frac{٢}{٤} = ١$$

(٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{١ - ٢ \text{جاس}}{\frac{\pi}{٦} - س}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

٢ ، $\frac{\pi}{٦}$ يساعدنا في فك شفرة المسألة بأخذ عامل مشترك

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\left(\frac{١}{٢} - \text{جاس}\right)}{\frac{\pi}{٦} - س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\left(\text{جا}\frac{\pi}{٦} - \text{جاس}\right)}{\frac{\pi}{٦} - س}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢ \times ٢ \text{جتا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦} + س\right) \text{جا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦} - س\right)}{\frac{\pi}{٦} - س}$$ احدى النسب تعويض مباشر

$$= - ٢ \times ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\text{جا}\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)}{\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \cancel{٢} \times \sqrt{٣} \times \frac{١}{\cancel{٢}} = - \sqrt{٣}$$

(٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + \text{جتا}٢س}{\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)^{٢}}$ (سبق حلها كمثال)

@abdagbowl

(١٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٥س + ٣جا٣س}{٢س - جاس}$

الحل: تحل بقاعدة السندوتش

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا٥س}{٥س} \times ٥س + ٣ \frac{جا٣س}{٣س} \times ٣س}{٢س - \frac{جاس}{س} \times س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥س + ٩س}{٢س - س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١٤س}{س}$$

$$= ١٤$$

@abdagbowl

الاتصال

الدرس الأول: دراسة اتصال الدوال

الاتصال عند نقطة $س = أ$

نقول أن الدالة متصلة عند $س = أ$ إذا حققت الشروط التالية:

(١) الدالة معرفة عند النقطة $س = أ$ أي $د(أ)$ موجودة

(٢) $\lim_{س \to أ} د(س)$ موجودة أي $\lim_{س \to أ} د(س) = ل ، ل \in ع$

(٣) $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$ أي نهاية الدالة عند $س = أ$ تساوي قيمتها $د(أ)$

وخلاصة الشروط السابقة أن الدالة تكون متصلة عند نقطه إذا كانت نهاية الدالة عند تلك النقطة = قيمتها.

فمثلاً:

(١) $د(س) = ٢س - ١$ عند $س = ١$

نجد أن الدالة معرفه عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١} د(س) = ٢ \times ١ - ١ = ٢ - ١ = ١ \in ع ،$

$د(١) = ٢ \times ١ - ١ = ١$ $\therefore$ الدالة متصلة عند $س = ١$

(٢) $د(س) = \frac{٢س - ٤}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الحل: الدالة غير معرفه عند $س = ٢$ وبذلك فهي غير متصلة ويمكن إعادة تعريفها حتى تكون متصلة بإيجاد النهاية

@abdagbowi

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} د(س) = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{٢س - ٤}{س - ٢}$$ بالتعويض المباشر

$$= \frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{٢(س - ٢)}{س - ٢} = ٢$$

∴ تصبح الدالة بصورتها الجديدة متصلة وهي

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س - ٤}{س - ٢} & \text{عنـد } س \neq ٢ \\ ٢ & \text{عنـد } س = ٢ \end{cases}$$

قواعد هامة:

(١) إذا كانت ق دالة كثيرة حدود فإن ق متصلة على ح .

(٢) إذا كانت ق نسبية فإن ق تكون متصلة على أي فترة تكون معرفة عليها.

(٣) إذا كانت ق متصلة على ح فإن ق متصلة على أي مجموعة جزئية من ح .

مثال: ابحث اتصال الدالة على ح

$$د(س) = \begin{cases} س + ٣ & س \geq -١ \\ \frac{٤}{س + ٣} & س < -١ \end{cases}$$

بملاحظة اقتران الدالة نجد أنها تتفرع قاعدتها عند $س = -١$

∴ نبحث اتصال الدالة عند $س = -١$ ويمكن هنا استخدام الطريقة المختصرة وهي النهاية يمين هل تساوي النهاية يسار هل تساوي القيمة

@abdagbowl

$$\text{نهـــا}_{\substack{\text{س}\to -١^{+}}} د(س) = \text{نهـــا}_{\text{س}\to -١} \frac{٤}{\text{س}+٣} = \frac{٤}{-١+٣} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$$\text{نهـــا}_{\substack{\text{س}\to -١^{-}}} د(س) = \text{نهـــا}_{\text{س}\to -١} \text{س} + ٣ = -١ + ٣ = ٢$$

$\therefore$ الدالة متصلة $د(-١) = ٢$

لاحظ أن النهاية يمين عند أكبر والنهاية من اليسار عند أصغر من والقيمة عند يساوي

مثال٢: ابحث أتصال الدالة

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٩}{\text{س} - ١} & \text{س} \neq ١ \\ ٢ & \text{س} = ١ \end{cases}$$

سوف نستخدم القاعدة المختصرة في هذا الاقتران حول $\text{س} = ١$ وهي نهاية الدالة وقيمتها إذا كانتا متساويتان فإن الدالة متصلة

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\to ٢} د(س) = \text{نهـــا}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٩}{\text{س} - ١}$$ بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$

$\therefore$ نقوم بالتحليل

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\to ٢} د(س) = \text{نهـــا}_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}+٩)(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)} = ٢ + ٩ = ١١$$

$\therefore$ النهاية $\neq$ القيمة أي الدالة غير متصلة $د(٢) = ٢$

وهنا يمكن أعادة تعريفها حتى تكون متصلة وذلك بالصورة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٩}{\text{س} - ١} & \text{س} \neq ١ \\ ١١ & \text{س} = ١ \end{cases}$$

@abdalgbowi

مثال٣: ادرس اتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + جا ٢س}{جا ٣س} & -\frac{\pi}{٦} < س < ٠ \\ \frac{١}{٣} + جتا ٣س & ٠ \leq س < \frac{\pi}{٦} \end{cases}$

بملاحظة اقتران الدالة نجد أن قاعدتها تتفرع حول $س = $ صـــفر (لماذا)

∴ يكفي دراسة الدالة حول هذه النقطة

$$نهـــا_{س \to ٠^+} د(س) = نهـــا_{س \to ٠^+} \frac{١}{٣} + جتا ٣س = ١ + \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

$$نهـــا_{س \to ٠^-} د(س) = نهـــا_{س \to ٠^+} \frac{٢س + جا ٢س}{جا ٣س} \quad \text{بالتعويض} \quad \frac{\text{صـــفر}}{\text{صـــفر}}$$

ومن قاعدة السندوتش

$$نهـــا_{س \to ٠^-} \frac{٢س + \frac{جا ٢س}{٢س} \times ٢س}{\frac{جا ٣س}{٣س} \times ٣س} = نهـــا_{س \to ٠^-} \frac{٣س + ٢س}{٣س} = \frac{٤}{٣}$$

∴ الدالة متصلة $د(٠) = \frac{٤}{٣}$

مثال٤: ادرس اتصال الدالة $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الدالة غير معرفة عند $س = ٢$

∴ الدالة غير متصلة هنا لا يمكن إعادة تعريف الدالة بالطرق السابقة حتى تكون متصلة

@abdagbowi

تمارين:

ادرس اتصال الدوال التالية وأعد تعريفها إذا كانت غير متصلة حتى تصبح متصلة أن أمكن.

(١) $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - \text{جتا}س}{س \text{ ظا}س} & س \neq \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & س = \text{صفر} \end{cases}$

الحل: نهاية الدالة عند $س = \text{صفر}$

$$\text{نهـا}_{س \to .} د(س) = \text{نهـا}_{س \to .} \frac{١ - \text{جتا}س}{س \text{ ظا}س} \text{ بالتعويض المباشر} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

عدم تعين يزال بالتحويل المثلثي

$$\text{نهـا}_{س \to .} \frac{٢ \text{ جا}^٢ \frac{س}{٢}}{س \text{ ظا}س} = \frac{٢ \text{ جا}^٢ \frac{س}{٢}}{س \times \frac{\text{ظا}س}{٤}} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore$ الدالة متصلة لأن النهاية = القيمة $د(٠) = \frac{١}{٢}$

(٢) $د(س) = \frac{٢ \text{ جا} \pi س}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الحل: الدالة غير معرفة عند $س = ٢$ $\therefore$ الدالة غير متصلة

إعادة التعريف إيجاد النهاية

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٢ \text{ جا} \pi س}{س - ٢}$$ تثبت بـ $\pi ٢$

@abdalgbowi

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{٢ \text{ جا } (\pi ٢ \times \pi س)}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{٢ \text{ جا } \pi (س - ٢)}{س - ٢} -$$

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} ٢ \frac{\text{جا } \pi (س - ٢)}{\pi (س - ٢)} \times \pi ٢ =$$

تصبح الدالة

$$\begin{cases} \dfrac{٢ \text{ جا } \pi س}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ \pi ٢ & س = ٢ \end{cases}$$

(٣)

$$\begin{cases} \dfrac{\text{جتا}^{٢} س + ٣ \text{ جتا} س - ٤}{س^{٢}} & س < ٠ \\ س - \dfrac{٥}{٢} & س \geq ٠ \end{cases}$$

الحل: الشرط المختصر النهاية يمين = النهاية يسار = القيمة

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠^{+}} د(س) = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠} \frac{\text{جتا}^{٢} س + ٣ \text{ جتا} س - ٤}{س^{٢}}$$

بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠} \frac{(\text{جتا} س + ٤)(\text{جتا} س - ١)}{س^{٢}}$$ بالتعويض بجزء من المسألة والتحويل

$$= - (١ + ٤) \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠} \frac{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س^{٢}} =$$

@abdagbowl

$$= -٥ \quad \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٢ \text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{\frac{س^{٢} \times ٤}{٤}} = \frac{-٥ \times ٢}{٤} = -\frac{٥}{٢}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠^{-}} د(س) = \text{نهـــا}_{س \to ٠} س - \frac{٥}{٢} = ٠ - \frac{٥}{٢} = -\frac{٥}{٢}$$

$د(٠) = -\frac{٥}{٢}$ ∴ الشرط محقق أي الدالة متصلة

(٤) $\frac{\text{جاس} - \text{جا}٢س}{١ - ٢\text{جتاس}}$ $س = \frac{\pi}{٣}$

الحل: الدالة غير معرفة عند $س = \frac{\pi}{٣}$ ∴ الدالة غير متصلة

إعادة التعريف $\text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جاس} - \text{جا}٢س}{١ - ٢\text{جتاس}} = \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جاس} - ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{١ - ٢\,\text{جتاس}}$

$$= \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جاس}(١ - ٢\,\text{جتاس})}{(١ - ٢\,\text{جتاس})} = \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٣}} \text{جاس} = \text{جا}\frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

تصبح الدالة بالصورة $د(س) = \begin{cases} \frac{\text{جاس} - \text{جا}٢س}{١ - ٢\text{جتاس}} & س \neq \frac{\pi}{٣} \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & س = \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

(٥) $د(س) = \begin{cases} ٢ + \text{جتاس} & س \neq \frac{\pi}{٣} \\ \frac{١}{٢} + ٤\,\text{جا}\frac{١}{٢}س & س = \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

@abdagbowl

الحل: الشرط المختصر النهاية = القيمة

نهاية الدالة $= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} ٢ + جتاس = ٢ + جتا\frac{\pi}{٣} = ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

قيمة الدالة $د\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٢} + ٤ \times جا\left(\frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٣}\right)$

$= \frac{١}{٢} + ٤ \times جا\frac{\pi}{٦}$

$= \frac{١}{٢} + ٤ \times \frac{١}{٢} = ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$ ∴ الدالة غير متصلة

إعادة تعريف الدالة $د(س) = \begin{cases} ٢ + جتاس & س \neq \frac{\pi}{٣} \\ \frac{٥}{٢} & س = \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

(٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} جا ٢س & س > ٠ \\ س ظتاس & س \leq ٠ \end{cases}$

الحل: الشرط المختصر النهاية يمين = النهاية يسار = القيمة

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \lim_{س \to ٠} س ظتاس = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{ظاس} = ١$

$\lim_{س \to ٠^-} د(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٢} جا٢س}{س} = \frac{\frac{١}{٢} جا٢س}{٢س} \times ٢ = ١$ $د(٠) = ١$ الدالة

متصلة لتحقق الشرط السابق

@abdagbowl

الدرس الثاني: إيجاد قيمة المتغير إذا عُلم أن الدالة متصلة

باختصار إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة س = أ

فإن نهاية الدالة عند تلك النقطة = قيمتها

أي $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

وإذا كانت الدالة متصلة على فترة فإن نهاية الدالة يمين = نهاية الدالة يسار = القيمة

أي $\lim_{س \to أ^+} د(س) = \lim_{س \to أ^-} د(س) = د(أ)$

وباستخدام احدى القاعدتين يمكن إيجاد المتغير المطلوب

فمثلاً: إذا كانت:

(١) $د(س) = \begin{cases} \frac{أ(س^٢ - ٤)}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ لـو ١ & س = ٢ \end{cases}$

متصلة فيمكن إيجاد المتغير أ كالتالي:

∵ الدالة متصلة ⇐ النهاية = القيمة

$\lim_{س \to ٢} \frac{أ(س^٢ - ٤)}{س - ٢} = لـو ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} \frac{أ(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = لـو ١$

$\Leftarrow أ(٢ + ٢) = صفر \Leftarrow ٤أ = صفر \quad أ = صفر$

@abdagbawi

(٢) د(س) =
$$\begin{cases} \frac{\text{جا}(٢س+٢)}{س+١} & س > -١ \\ ٥ & س = -١ \\ س + ب & س < -١ \end{cases}$$

الشرط النهاية يمين = النهاية يسار = القيمة

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{\text{جا}٢س+٢}{س+١} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} س + ب = ٥$$

$$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{\text{جا}٢(س+١)}{س+١} = ٥$$

$$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{\text{جا}٢(س+١)}{٢(س+١)} = ٥ \Leftarrow ٢ = ٥$$

$$، \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} س + ب = ٥ \Leftarrow -١ + ب = ٥ \Leftarrow ب = ٦$$

تمارين:

أولاً: أوجد قيمة المتغير الذي يجعل الدالة متصلة عند النقطة المحددة لها:

(١) د(س) =
$$\begin{cases} \frac{\text{جتا}^{٢}س + (٢-١)\text{جتا}س - ٢}{س^{٢}} & س \neq ٠ \\ \frac{٣}{٢} - س & س = ٠ \end{cases}$$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

@abdagbowl

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow 0} \frac{\text{جتا}^{2} س + (أ-1)\,\text{جتا}س - أ}{س^{2}} = \text{صـــفر} - \frac{3}{2}$$

$$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س\leftarrow 0} \frac{(\text{جتا}س + أ)(\text{جتا}س - 1)}{س^{2}} = -\frac{3}{2}$$

جزء من الدالة تعويض $-(1+أ)$

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow 0} \frac{2\,\text{جا}^{2}\frac{س}{2}}{س^{2}} - (1+أ) = -\frac{3}{2}$$

$$-(1+أ) = -\frac{3}{2} \Leftarrow -(1+أ) \text{نهـــا}_{س\leftarrow 0} \frac{2\,\text{جا}^{2}\frac{س}{2}}{س^{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow 0} \frac{2\,\text{جا}^{2}\frac{س}{2}}{\frac{س^{2}}{4}\times 4}$$

$$\Leftarrow \frac{-(1+أ)}{4} = -\frac{3}{2} \Leftarrow 2+أ2 = أ12 \Leftarrow$$

$$أ12 = 2-12 \Leftarrow أ2 = 10 \Leftarrow أ = 5 \Leftarrow$$

(٢) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{5س^{2} + \text{جا}^{2}2س}{س\,\text{ظا}أس} & س > 0 \\ \dfrac{س+أ}{س^{2}+أ} & س \leq 0 \end{cases}$

الحل: ∵ الدالة متصلة ⇐ النهاية يمين = النهاية يسار يمكن الاستغناء عن القيمة

$$\therefore \text{نهـــا}_{س\leftarrow 0^{+}} \frac{س+أ}{س^{2}+أ} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow 0^{-}} \frac{5س^{2} + \text{جا}^{2}2س}{س\,\text{ظا}أس}$$

$$\Leftarrow \frac{0+أ}{0+أ} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow 0^{-}} \frac{5س^{2} + \text{جا}^{2}2س}{س\,\text{ظا}أس}$$

@abdagbowl

$$\Leftarrow ١ = \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٢} + \frac{\text{جا}^{٢} ٢ س}{٤ س^{٢}} \times ٤ س^{٢}}{س \frac{\text{ظا} ٢ س}{٢ س} ٢ س}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٢} + ١ \times ٤ س^{٢}}{س^{٢} \times ١}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٩ س^{٢}}{٢ س^{٢}} \Leftarrow ١ = \frac{٩}{٢} \Leftarrow ٢ = ٩$$

(٣) $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - \text{جتا} ٢ ك س}{س^{٢}} & س \neq ٠ \\ ٨ & س = ٠ \end{cases}$

الحل: ∵ الدالة متصلة ⇐ النهاية = القيمة

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا} ٢ ك س}{س^{٢}} = ٨$$

$$\Leftarrow \frac{٢ \text{جا}^{٢} ك س}{س^{٢}} = ٨ \Leftarrow \frac{٢ \text{جا}^{٢} ك س \times ك^{٢}}{ك^{٢} س^{٢}} = ٨$$

$$\Leftarrow ٢ ك^{٢} = ٨ \Leftarrow ك^{٢} = ٤ \Leftarrow ك = \pm ٢$$

(٤) $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - \text{ظاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} & س \neq \frac{\pi}{٤} \\ ٢ + ١ & س = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

@abdagbowl

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \text{ظاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} = ٢ + ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} = ٢ + ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس}(\text{جاس} - \text{جتاس})} = ٢ + ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-(\cancel{\text{جاس} - \text{جتاس}})}{\text{جتاس}(\cancel{\text{جاس} - \text{جتاس}})} = ٢ + ١$$

$$\frac{-١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = ٢ + ١ \Leftarrow -\sqrt{٢} = ٢ + ١ \Leftarrow -(١ + \sqrt{٢}) = ٢$$

(٥) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٤ \text{ظا}^{٢}(\frac{٢}{٢}س)}{س^{٢} \text{ جا س}} & س \neq ٠ \\ ٢٦ + ٧ \text{ جتا س} & س = ٠ \end{cases}$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٤ \text{ظا}^{٢}(\frac{٢}{٢}س)}{س \text{ جا س}} = ٢٦ + ١ \times ٧ \Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٤ \text{ظا}^{٢}(\frac{٢}{٢}س)}{س \text{ جا س}} = ٢٦ + ٧$$

@abdagbowl

$$\Leftarrow \frac{٤\,\text{ظا}^{٢}\frac{أ}{٢}\,س^{٢}\frac{أ}{٤}}{س^{٢}\frac{أ}{٤}\,س\,\text{جا}\,س} = ٧ + أ٦ \quad \text{بالضرب} \times س \text{ بسط ومقام}$$

$$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠} \frac{أ^{٢}س}{\text{جاس}} = ٧ + أ٦$$

$$\Leftarrow أ^{٢} = أ٦ + ٧ \Leftarrow أ^{٢} - أ٦ - ٧ = ٠ \Leftarrow (أ - ٧)(أ + ١) = ٠$$

$$أ = ٧ \text{ ، } أ = -١$$

$$(٦)\ د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظاس} - \text{جا}٣س}{س} & س \neq ٠ \\ أ٤^{٢} - ٢ & س = ٠ \end{cases}$$

الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠} \frac{\text{ظاس} - \text{جا}٣س}{س} = أ٤^{٢} - ٢$$

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٠} \frac{\text{ظاس}}{س} - \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times ٣ = أ٤^{٢} - ٢$$

$$١ - ٣ = أ٤^{٢} - ٢$$

$$أ٤^{٢} - ٢ - ١ + أ = \text{صفر} \Leftarrow أ٤^{٢} + أ - ٣ = \text{صفر}$$

$$(أ٤ - ٣)(أ + ١) = \text{صفر}$$

$$أ٤ - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow أ = \frac{٣}{٤}$$

أو $أ + ١ = \text{صفر} \Leftarrow أ = -١$

@abdagbawi

تمارين إضافية على النهايات والاتصال:

(١) أثبت أن $\frac{\text{لـو}_{٢}\, ٤^{س}}{\text{ظاس}} = ٢$

الحل: من قواعد اللوغارتمات نجد أن

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{لـو}_{٢}\, ٢^{٢س}}{\text{ظاس}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢س\ \text{لـو}_{٢}\, ٢}{\text{ظاس}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢س \times ١}{\text{ظاس}} = ٢$$

(٢) أوجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\text{جا}\, ٥س}{س}$

الحل: الكثير سيقول أن النهاية $= ٥$ لكن خاطئة

لان النهاية عند ∞ وليس عند صفر

$$\therefore \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س} \times \text{جا}\, ٥س$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

صفر $\times$ محدودة $=$ صفر

(٣) $\text{نهـــا}_{ص \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}^{٢}\, \frac{ص}{٢}}{\left(\frac{ص}{٢}\right)^{٢}} = \ldots\ldots\ldots$ **الحل:** $= ١$

(٤) احسب $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{قا}^{٢}\, س - ١}{س^{٢}}$ **الحل:** $= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا}^{٢}\, س}{س^{٢}} = ١$

(٥) إذا كان $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{أ^{٢}\, (س^{٢} - ٤)}{\text{جا}\, أ\, (س - ٢)} = ٨$ أوجد قيمة أ

@abdagbowl

الحل: $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{أ \times أ (س - ٢)(س + ٢)}{جا أ (س - ٢)} = ٨$

$\Leftarrow أ (٢ + ٢) = ٨ \Leftarrow أ٤ = ٨ \Leftarrow أ = ٢$

(٦) أوجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} (س + ١) جتا \frac{١}{س + ١}$

الحل: بالتعويض المباشر نجد أن

النهاية $= (١ + \infty) \times جتا \frac{١}{\infty} = \infty \times$ جتا صفر $= \infty \times ١ = \infty$

(٧) أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ١ + جتا ٢س^{٢}} & س \neq ٠ \\ أ ٢ & س = ٠ \end{cases}$$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ١ + جتا ٢س^{٢}} = أ ٢$ النهاية بالتعويض $= \frac{صفر}{صفر}$

$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢}}{س^{٢} - (١ - ٢ جا^{٢} س^{٢})} = أ ٢$

$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢}}{س^{٢} - \frac{جا^{٢} س^{٢}}{س^{٤}} \times ٢س^{٤}} = أ ٢ \Leftarrow \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٢س^{٤}} = أ ٢$

@abdaghbowi

$$\Leftarrow \frac{س^{٢}}{س^{٢}(١-٢س^{٢})} = ٢ \Leftarrow \frac{١}{١} = ٢ \Leftarrow \frac{١}{٢} = ١$$

(٨) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٢س} \div ٢ = ٣$ فإن ١ = ... **الحل:** $\frac{١}{٢}$

(٩) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٣س}{س^{٢}} = ٣٢$ فإن ١ = ... **الحل:** ١ = ± ٨

(١٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س - ٣}}{س - ٣}$

الحل: $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{س - ٣}{(س - ٣)^{٢}}} = \lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{١}{س - ٣}} = \frac{١}{\infty} =$ صفر

@abdagbowl

قوانين سابقة قد تحتاجها في الاشتقاق:

م	الدالة	صورتها	مشتقتها
١	الدالة الثابتة	$صـ = ا$	$صـ' =$ صفر
٢	الدالة المطابقة	$صـ = س$	$صـ' = ١$
٣	ثابت × داله	$صـ = ا د(س)$	$صـ' = ا د'(س)$
٤	الدالة الخطية	$صـ = اس + ب$	$صـ' = ا$
٥	دالة القوة	$صـ = س^{ن}$	$صـ' = ن س^{ن-١}$
٦	داله مرفوعة لقوه	$صـ = (ت(س))^{ن}$	$صـ' = ن(ت(س))^{ن-١} \times ت'(س)$
٧	ضرب دالتين	$صـ = ق(س) \times ت(س)$	$صـ' = ق'(س) \times ت(س) + ت'(س) \times ق(س)$
٨	قسمة دالتين	$صـ = \frac{ق(س)}{ت(س)}$	$صـ' = \frac{ق'(س) \times ت(س) - ق(س) \times ت'(س)}{(ت(س))^{٢}}$
٩	دالة الجذر التربيعي	$صـ = \sqrt{د(س)}$	$صـ' = \frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$
١٠	دالة الجذر	$صـ = \sqrt[ن]{د(س)}$	$صـ' = \frac{د'(س)}{ن \sqrt[ن]{د(س)^{ن-١}}}$

(٢) إذا كان ميل المستقيم ل = ميل المستقيم ك فإن المستقيمان متوازيان والعكس صحيح.

(٣) إذا كان ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ك = −١ فإن المستقيمان متعامدان والعكس صحيح.

@abdagbawi

(٤) معادلة المستقيم صورتها أ س + ب ص + جـ = صفر وميلها مـ = $-\frac{أ}{ب}$

(٥) د′(س) = ظاهـ = ميل المستقيم حيث هـ زاوية الميل

(٦) طول المستقيم الواصل بين نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ هو $\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$ ومركز النقطة بينهما هو $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

(٧) طول المسافة العمودية بين مستقيم ، نقطه $(س_١ ، ص_١)$ هو $ع = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

(٨) صيغة الدالة الأسية هي أ $^{د(س)}$ واللوغارتمية لـو د(س)

(٩) إذا كان أ $^{د(س)}$ = أ $^{ت(س)}$ ⟸ د(س) = ت(س) ، أ ∋ ع* $^+$ - {١}

(١٠) هـ $^{لـو س}$ = س ، هـ $^{٢لـو س}$ = س ^{٢} ، هـ $^{-لـو س}$ = $\frac{١}{س}$

(١١) لـو١ = ١ ، لـو أ × ب = لـو أ + لـو ب ، لـو $\frac{أ}{ب}$ = لـو أ − لـو ب

، لـو س ^{ن} = ن لـو س ، لـو ١ = صفر

(١٢) إذا كان لـو ت(س) = لـو د(س) فإن ت(س) = د(س)

(١٣) إذا كان س = $\sqrt{أ}$ ⟸ س ^{٢} = أ ، إذا كان س ^{٢} = أ فإن س = ± $\sqrt{أ}$ ، إذا كان صـ = هـ ^{س} فإن لـو ص = س وإذا كان صـ = لـو س فإن هـ ^{ص} = س

@abdagbowi

الاشتقاق

الدرس الأول: مشتقة الدوال الجبرية

إذا كان رموز الدالة د(س)، ق(س)، ت(س)، ص = ... ،

فإن رموز المشتقة الأولى للدالة د′(س)، ق′(س)، ت′(س)، $\overline{ص}$ = ... ،

كذلك يمكن التعبير عن المشتقة بالرمز الشائع $\frac{ى ص}{ى س}$ والذي يعني المشتقة الأولى.

وسوف نقوم بدراسة مشتقة الدالة بحسب نوع الدالة

(١) الدالة الثابتة:

إذا كان د(س) = أ ، أ ∈ ح فإن د′(س) = صفر

أي أن مشتقة الدالة الثابتة دائماً = صفر

فمثلاً: إذا كانت د(س) = ٥ ⇐ د′(س) = صفر

وإذا كانت د(س) = هـ^٥ حيث هـ الأساس الطبيعي ⇐ د′(س) = صفر

وإذا كانت د(س) = لـو٩ ⇐ د′(س) = صفر

(٢) دالة القوى:

إذا كان ص = س^ن ، ن ∈ ح ⇐ ص′ = ن س^(ن−١)

فمثلاً: إذا كانت د(س) = س^٥ ⇐ د′(س) = ٥س^٤

وإذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ س^٢ ⇐ ص′ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س^١ = س^٢

وإذا كانت د(س) = س^هـ ، هـ الأساس الطبيعي ⇐ د′(س) = هـ س^(هـ−١)

@abdagbowi

وإذا كانت $د(س) = \sqrt{س} \Leftarrow د'(س) = \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

أي أنه يمكن اعتبار دالة الجذر للمتغير س دالة قوه مهما يكون قوة الجذر

(٣) كثيرة حدود من الدرجة الأولى:

إذا كان $د(س) = س \Leftarrow د'(س) = ١$

(٤) دالة كثيرة حدود من أي قوة:

إذا كان $د(س) = أ س^{ن} + ب س^{ن-١} + ... ، أ ، ب ، ن \in ط$

فإن $د'(س) = ن أ س^{ن-١} + ب (ن-١) س^{ن-٢}$

فمثلاً: إذا كانت $د(س) = ٢س^{٢} - ٣س + ٤$

$\Leftarrow د'(س) = ٤س - ٣ +$ صفر باختصار مشتقة س هي ١

(٥) دالة مرفوعة للقوى:

إذا كانت $د(س) = (ق(س))^{ن} ، ن \in ط$

فإن $د'(س) = ن (ق(س))^{ن-١} \times ق'(س)$

فمثلاً: إذا كانت $د(س) = (٢س^{٢} - ٣س)^{٥}$

$\Leftarrow د'(س) = ٥(٢س^{٢} - ٣س)^{٤} (٤س - ٣)$

(٦) مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت $ت(س) = د(س) \times م(س)$

فإن $ت'(س) = د'(س) \times م(س) + م'(س) \times د(س)$

= مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى

@abdagbowl

فمثلاً: إذا كانت $صـ = ت(س) \times د(س)$

وكانت $ت(س) = ٢س^{٢} - ٣س$ ، $د(س) = س^{٢} + ٤$

فإن $صـ' = (٤س - ٣)(س^{٢} + ٤) + ٢س(٢س^{٢} - ٣س)$

(٧) مشتقة قسمة دالتين:

إذا كانت $صـ = \frac{د(س)}{ت(س)}$

فإن $صـ' = \frac{ت(س) \times د'(س) - د(س) \times ت'(س)}{(ت(س))^{٢}}$

مثال١: إذا كانت $صـ = \frac{٣س}{س - ٢}$ فإن $صـ' = \frac{(١)٣س - ٣ \times (س - ٢)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{٣س - ٦ - ٣س}{(س - ٢)^{٢}} = \frac{-٦}{(س - ٢)^{٢}}$

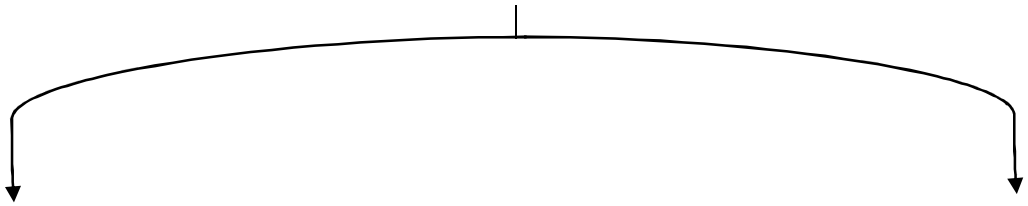
مثال٢: إذا كانت $ت(س) = \frac{٥}{(س - ١)^{٢}}$

فإن $ت'(س) = \frac{٠ - ٥ \times ٢(س - ١)^{٢} \times ١(س - ١)}{(س - ١)^{٤}}$

$= \frac{-١٠(س - ١)}{(س - ١)^{٤}} = \frac{-١٠}{(س - ١)^{٣}}$

@abdagbowl

(٨) مشتقة دالة الجذر:



إذا كان $\sqrt[ن]{د(س)}$

ن = ٢ أي تربيعي

فإن المشتقة $\frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

إذا كان $\sqrt[ن]{د(س)}$

ن أي عدد غير ٢

أي غير التربيعي

فإن الدالة تحول إلى قوة وتعامل كدالة مرفوعة لقوة أو المشتقة بالقانون

$$= \frac{د'(س)}{ن\sqrt[ن]{(د(س))^{ن-١}}}$$

مثال١: إذا كان $ص = \sqrt{٢س^{٢} - س}$

فإن $ص' = \frac{٤س - ١}{٢\sqrt{٢س^{٢} - س}}$

مثال٢: إذا كان $\sqrt[٣]{٢س^{٢} - س} \Leftarrow ص = (٢س^{٢} - س)^{\frac{١}{٣}}$

ومنه $ص' = \frac{١}{٣}(٢س^{٢} - س)^{\frac{١}{٣}-١} \times (٤س - ١)$

$$= \frac{١}{٣}(٢س^{٢} - س)^{-\frac{٢}{٣}} (٤س - ١)$$

طريقة أخرى: المشتقة $= \frac{٤س - ١}{٣\sqrt[٣]{(٢س^{٢} - س)^{٢}}}$ (باستخدام القانون)

@abdagbowi

(٩) المشتقة الثانية والثالثة لبعض الدوال:

مثال: إذا كانت $ص = \frac{٢}{(س-١)^{٢}}$ أوجد $ص'، ص''، ص'''$

$$ص' = \frac{٢ \times ٢(س-١)^{١} \times ١ - ٠}{(س-١)^{٤}}$$

$$ص' = \frac{-٤(س-١)}{(س-١)^{٤}} = \frac{-٤}{(س-١)^{٣}}$$

$$ص'' = \frac{-٤ \times ٣(س-١)^{٢} \times ١ - (٠)}{(س-١)^{٦}}$$

$$ص'' = \frac{١٢(س-١)^{٢}}{(س-١)^{٦}} = \frac{١٢}{(س-١)^{٤}}$$

$$ص''' = \frac{١٢ \times ٤(س-١)^{٣} \times ١ - ٠}{(س-١)^{٨}}$$

$$ص''' = \frac{-٤٨(س-١)^{٣}}{(س-١)^{٨}} = \frac{-٤٨}{(س-١)^{٥}}$$

قاعدة: إذا كان مجال دالة د(س) هو $[أ، ب]$ فإن د'(أ) ، د'(ب) غير موجودتين ولذلك فإن الاشتقاق يكون على فترة مفتوحة دائماً.

@abdagbowl

قابلية الاشتقاق:

نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة س = ا إذا كانت متصلة عند تلك النقطة وكانت د′(ا) موجودة

ولذلك: إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق فإنها تكون متصلة

وإذا كانت د(س) غير متصلة فإن د(س) غير قابلة للاشتقاق

وإذا كانت د(س) متصلة فإنها يمكن أن تكون قابلة للاشتقاق إذا حققت الشرط الاخر وهو أن تكون د′(ا) موجودة

فمثلاً: $د(س) = \frac{٢}{س - ٤}$ غير قابلة للاشتقاق عند س = ٤ (لماذا)

$د(س) = \sqrt{س - ٢}$ غير قابلة للاشتقاق عند س = ١ ، س = صفر

وبصوره عامه غير قابلة للاشتقاق $\forall$ س < ٢

$$، د(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ٤ & س < ١ \\ ٤س - ٦ & س \geq ١ \end{cases}$$

نجد أن $\lim_{س \to ١^{+}} د(س) = \lim_{س \to ١^{-}} د(س) = -٢$

أي الدالة متصلة عند س = ١ ولكي تكون قابلة للاشتقاق يجب أن يكون

$د′(١)^{+} = د′(١)^{-}$

لنبحث الان عن تحقق ذلك

$د′(١)^{+} = ٤س = ٤ \times ١ = ٤$

$د′(١)^{-} = ٤$

أي أن الدالة فعلاً قابلة للاشتقاق.

@abdagbawi

تمارين:

(١) إذا كانت $د(س) = \frac{١}{س - ١}$ أوجد $د'(٤)$

الحل: $د'(س) = \frac{٠ - ١ \times ١}{(س - ١)^{٢}} = \frac{- ١}{(س - ١)^{٢}}$

$د'(٤) = \frac{- ١}{(٤ - ١)^{٢}} = \frac{- ١}{٣^{٢}} = \frac{- ١}{٩}$

(٢) إذا كان $د(س) = س^{هـ} + هـ^{٢}$ أوجد $د'(س)$

الحل: $د'(س) = هـ س^{هـ - ١}$ لاحظ أن $هـ^{٢}$ ثابتة

(٣) إذا كانت $د'(س) = هـ^{٢ لـوس}$ أوجد $د'(٣)$

الحل: من قواعد الدالة الاسية ، اللوغارتمية

$د(س) = هـ^{لـوس^{٢}} \Leftarrow د(س) = س^{٢}$ ∴ $د'(س) = ٢س$

$د'(٣) = ٢ \times ٣ = ٦$

(٤) أي الدوال التالية قابلة للاشتقاق:

أ) $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الحل: الدالة $د(س)$ غير معرفة عند $س = ٢$ وبذلك فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & س \leq ١ \\ س^{٢} + ١ & س > ١ \end{cases}$

@abdagbowi

الحل: $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \frac{١}{١} = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} د(س) = ١^٢ + ١ = ٢$

$\Leftarrow$ الدالة غير متصلة وبذلك غير قابلة للاشتقاق

ج) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س \leq ٢ \\ ٤س - ٣ & س > ٢ \end{cases}$

الحل: $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٢^٢ + ١ = ٤ + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ٤ \times ٢ - ٣ = ٥$ $\therefore$ الدالة متصلة

$د'(٢)^+ = ٢س = ٢ \times ٢ = ٤$

$د'(٢)^- = ٤$ $\Leftarrow$ الدالة قابلة للاشتقاق

(٥) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & س \leq ١ \\ ا س + ب & س > ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ أوجد ا، ب

الحل: $\because$ الدالة قابلة للاشتقاق $\therefore$ فهي متصلة ، المشتقة موجودة.

متصلة أي $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^-} د(س)$

أي $\lim_{س \to ١} س^٢ + ٥ = \lim_{س \to ١} ا س + ب$

$١ + ٥ = ا + ب$ $\Leftarrow$ $ا + ب = ٦$

قابلة للاشتقاق

$د'(١)^+ = د'(١)^-$

@abdagbowl

$٢س = ١ \Leftarrow ١ = ١ \times ٢ \Leftarrow ١ = ٢$

بالتعويض $١ + ب = ٦ \Leftarrow ٢ + ب = ٦ \Leftarrow ب = ٤$

(٦) إذا كانت $ص = ١\sqrt{س}$ ، $ص'' = ٨$ أوجد قيمة ١ عند $س = ١$

الحل: $\because ص' = ١\sqrt{س} \Leftarrow ص'' = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ بالتعويض

$$٨ = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow ٨ = \frac{١}{٢\sqrt{١}}$$

$$\Leftarrow ٨ = \frac{١}{٢} \Leftarrow ١ = ١٦$$

@abdagbowl

الدرس الثاني: مشتقة الدوال المثلثية

مشتقة الدوال المثلثية التي زاويتها س وقوتها ١ نلخصها في الجدول التالي:

الدالة د(س)	جاس	جتاس	ظاس	ظتاس	قاس	قتاس
الدالة د´(س)	جتاس	−جاس	قا^{٢} س	−قتا^{٢} س	قاس ظاس	−قتاس ظتاس

مشتقة الدوال المثلثية التي زاويتها ت(س) وقوتها ١ نلخصها في الجدول التالي:

الدالة د(س)	المشتقة د´(س)
جا(ت(س))	جتا(س) × ت´(س)
جتا(ت(س))	−جا(س) × ت´(س)
ظا(ت(س))	قا^{٢} ت(س) × ت´(س)
ظتا(ت(س))	−قتا^{٢} ت(س) × ت´(س)
قا(ت(س))	قا(س) × ظا(س) × ت´(س)
قتا(ت(س))	−قتا(س) × ظتا(س) × ت´(س)

وعند اشتقاق أي دالة يجب أولاً تسميتها التسمية الصحيحة **فمثلاً:**

(١) د(س) = جتاس ^{٢} تسمى مثلثية

اشتقاقها مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

أي أن د´(س) = − جاس ^{٢} × ٢ س = − ٢ س جا س ^{٢}

(٢) د(س) = قا $\sqrt{س}$ تسمى مثلثية أيضاً

اشتقاقها مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

@abdagbawi

أي أن $د'(س) = قا\sqrt{س}\ ظا\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{قا\sqrt{س}\ ظا\sqrt{س}}{٢\sqrt{س}}$

(٣) $د(س) = \sqrt{ظتاس}$ ، $ظتاس \geq$ صفر

تسمى دالة جذرية داخلها مثلثي اشتقاقها بقاعدة الجذرية

أي $د'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{ظتاس}} \times -قتا^{٢}س = \frac{-قتا^{٢}س}{٢\sqrt{ظتاس}}$

(٤) $د(س) = جا^{٣}٥س$ تسمى دالة مرفوعة لقوة

اشتقاقها مشتقة القوة × مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

$د'(س) = ٣جا^{٢}٥س \times جتا٥س \times ٥ = ١٥جا^{٢}٥س\ جتا٥س$

(٥) $د(س) = \frac{١}{١ + جتاس}$ ، $جتاس \neq -١$ تسمى كسرية

$د'(س) = \frac{-جاس \times -١ \times \text{صفر}}{(١ + جتاس)^{٢}} = \frac{جاس}{(١ + جتاس)^{٢}}$

تمارين: (١) لتكن $د(س) = جا٢\pi س + ٢ظا٢\pi س$ أوجد $د'\left(\frac{١}{٢}\right)$

الحل: $د'(س) = جتا(٢\pi س) \times ٢\pi + ٢\pi قا^{٢}(٢\pi س) + ٢\pi$

$د'\left(\frac{١}{٢}\right) = جتا\left(\frac{١}{٢} \times ٢\pi\right) \times ٢\pi + ٢\pi قا^{٢}\left(\frac{١}{٢} \times ٢\pi\right) \times ٢\pi$

$= جتا\pi \times ٢\pi + \frac{٢}{جتا^{٢}\pi} \times ٢\pi$

$= -١ \times ٢\pi + \frac{٤\pi}{(-١)^{٢}} = -٢\pi + ٤\pi = ٢\pi$

@abdagbowi

(٢) لتكن $د(س) = \sqrt{جا٢س} - قتاس$ أوجد $د'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: $د'(س) = \frac{٢ \times جتا(٢س)}{٢\sqrt{جا٢س}} + قتاس ظتاس$

$$د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{٢ \times جتا\frac{\pi}{٢}}{٢\sqrt{جا\frac{\pi}{٢}}} + \frac{١}{جا\frac{\pi}{٤}} \times ظتا\frac{\pi}{٤}$$

$$= \frac{صفر}{١} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = صفر + \sqrt{٢} = \sqrt{٢}$$

(٣) إذا كانت $د(س) = قا^{٢}س$ أوجد $د'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: $د'(س) = ٢قاس \times قاس ظاس = ٢قا^{٢}س ظاس$

$$د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٢ \times \frac{١}{جتا^{٢}\frac{\pi}{٤}} \times ظا\frac{\pi}{٤} = \frac{١ \times ٢}{\frac{١}{٢}} = ٤$$

(٤) إذا كان $د(س) = ا جاس + جتاس$ وكانت $د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ١$ أوجد قيمة ا

الحل: $د'(س) = ا جتاس - جاس$

$$د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ا جتا\frac{\pi}{٤} - جا\frac{\pi}{٤} = ١ \Leftarrow \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ا = ١$$

$$\frac{ا - ١}{\sqrt{٢}} = ١ \Leftarrow ا - ١ = \sqrt{٢} \Leftarrow$$

@abdlagbowi

ومنه ا = $\sqrt{٢}$ + ١

(٥) إذا كان د(س) = ٢ جا^{٢} س أوجد د$'$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: د$'$(س) = ٢ × ٢ جاس × جتاس

د$'$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ × ٢ جا $\frac{\pi}{٤}$ × جتا $\frac{\pi}{٤}$ = ٢

(٦) إذا كانت د(س) = جا٢س أوجد د$''$(س) + ٦د(س)

الحل: د$'$(س) = جتا٢س × ٢ = ٢ جتا٢س

د$''$(س) = −٢ جا٢س × ٢ = −٤ جا٢س

بالتعويض د$''$(س) + ٦د(س)

= −٤ جا٢س + ٦ جا٢س = ٢ جا٢س

(٧) إذا كان د(س) = س^{٢} ظاس أوجد د$'$(س)

الحل: د$'$(س) = ٢س ظاس + قا^{٢}س × س^{٢}

= ٢س ظاس + س^{٢} قا^{٢}س

(٨) إذا كانت د(س) = جتا٥س جتا٣س + جا٣س جا٥س أوجد د$'$(٠)

الحل: يمكن تحويل الدالة قبل الاشتقاق لتصبح

د(س) = جتا (٥س − ٣س) = جتا٢س

د$'$(س) = − جا٢س × ٢ = −٢ جا٢س

⇐ د$'$(٠) = −٢ × ٠ = صفر

@abdagbawi

(٩) إذا كانت د(س) = ب ظاس ، د$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٦ أوجد قيمة ب

الحل: د$'$(س) = ب قا^{٢} س

$$د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{ب}{\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٤}} \Leftarrow ٦ = \frac{ب}{\frac{١}{٢}}$$

$$\Leftarrow ٦ = ٢ب \Leftarrow ب = ٣$$

(١٠) إذا كانت د(س) = ٣قاس + س^{٢} أوجد د$'\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

الحل: د$'$(س) = ٣ قاس ظاس + ٢س

$$د'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{٣}{\text{جتا}\frac{\pi}{٦}} \times \text{ظا}\frac{\pi}{٦} + ٢ \times \frac{\pi}{٦}$$

$$= \frac{٣}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٣} + ٢$$

(١١) إذا كانت صـ = $\frac{\text{جتاس} - ١}{\text{جتاس} + ٢}$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل: صـ$'$ = $\frac{\text{جاس} \times (\text{جتاس} - ٢) - \text{جاس} \times (\text{جتاس} + ٢)}{(\text{جتاس} + ٢)^{٢}}$

$$= \frac{-\text{جاس جتاس} + ٢\text{جاس} - \text{جاس جتاس} - ٢\text{جاس}}{(\text{جتاس} + ٢)^{٢}} = \frac{-٤\text{جاس}}{(\text{جتاس} + ٢)^{٢}}$$

@abdaqbowl

الدرس الثالث: مشتقة الدوال اللوغارتمية

قبل الدخول في مشتقة الدوال اللوغارتمية نبدأ بعرض القواعد السابقة في الدوال اللوغارتمية:

(١) الدالة اللوغارتمية معرفة $\forall$ ما داخل اللوغارتم اكبر من الصفر.

فمثلاً: م.ت للدالة لـو(٤ – س) هي

$\forall$ ٤ – س > صفر $\Leftarrow$ س < ٤ أي $]-\infty ، ٤[$

(٢) إذا كان د(س) = هـ$^{\text{لـو س}^{ن}}$ فإن د(س) = س^{ن}

(٣) إذا كان د(س) = هـ$^{\text{أ لـو س}^{ن}}$ فإن د(س) = س$^{\text{أ ن}}$

(٤) لـو أ × ب = لـو أ + لـو ب

(٥) لـو $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = لـو أ – لـو ب

(٦) لـو س^{ن} = ن لـو س

(٧) لـو ١ = صفر

(٨) إذا كان لـو د(س) = لـو ت(س) فإن د(س) = ت(س)

اشتقاق الدوال اللوغارتمية إذا كانت ص = لـو د(س) فإن $\text{ص}' = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$

فمثلاً: (١) ص = لـو $(٢\text{س}^{٢} + ٤)$ $\text{ص}' = \frac{٤\text{س}}{٢\text{س}^{٢} + ٤}$

(٢) ت(س) = لـو$(\text{جتا}^{٢}\text{س})$ يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$\Leftarrow$ ت(س) = ٢ لـو جتا س

@abdagbowl

$$\Leftarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{-\text{جاس} \times ٢}{\text{جتاس}} = -٢\text{ظاس}$$

(٣) $\text{صـ} = (\text{لـوس})^{٢}$ دالة مرفوعة لقوة

$\text{صـ}' = ٢(\text{لـوس}) \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٢\,\text{لـوس}}{\text{س}}$ أي مشتقة القوة × مشتقة الداخل

(٤) $\text{صـ} = \text{لـو}\sqrt{٢\text{س}^{٢} - \text{س}}$ يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$\text{صـ} = \text{لـو}(٢\text{س}^{٢} - \text{س})^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}\text{لـو}(٢\text{س}^{٢} - \text{س})$

ومنه $\text{صـ}' = \frac{١}{٢} \times \frac{٤\text{س} - ١}{٢\text{س}^{٢} - \text{س}}$

(٥) $\text{ت}(\text{س}) = \text{لـو}(٣\text{س}^{٢} + \text{جاس})^{٥}(٢\text{س} - ١)^{٤}$

يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$\text{ت}(\text{س}) = \text{لـو}(٣\text{س}^{٢} + \text{جاس})^{٥} + \text{لـو}(٢\text{س} - ١)^{٤}$

$\text{ت}(\text{س}) = ٥\text{لـو}(٣\text{س}^{٢} + \text{جاس}) + ٤\text{لـو}(٢\text{س} - ١)$

$$\Leftarrow \text{ت}'(\text{س}) = ٥ \times \frac{٦\text{س} + \text{جتاس}}{٣\text{س}^{٢} + \text{جاس}} + ٤ \times \frac{٢}{٢\text{س} - ١}$$

$$= \frac{٥(٦\text{س} + \text{جتاس})}{٣\text{س}^{٢} + \text{جاس}} + \frac{٨}{٢\text{س} - ١}$$

(٦) $\text{صـ} = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{لـوس}^{٢}}$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$\text{صـ} = \text{هـ}^{\text{لـوس}} \Leftarrow \text{صـ} = \text{س}$

ومنه $\text{صـ}' = ١$

@abdaqbowl

(٧) $صـ = لـو \frac{٢ جا^{٢} س}{(١ - جتا^{٢} س)^{٢}}$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$صـ = لـو \left(\frac{٢ جا^{٢} س}{(جا^{٢} س)^{٢}} \right) = لـو \frac{٢ جا^{٢} س}{جا^{٤} س}$$

$$صـ = لـو \frac{٢}{جا^{٢} س} = لـو ٢ قتا^{٢} س$$

$$صـ' = \frac{٢ \times ٢ قتاس \times - قتاس ظتاس}{٢ قتا^{٢} س}$$

$$\Leftarrow صـ' = \frac{- ٤ ظتاس}{٢} = - ٢ ظتاس$$

(٨) $صـ = لـو \left(\frac{\sqrt{٢ س^{٢} - ١}}{س^{٢} - ١} \right)$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$صـ = لـو \left(\sqrt{٢ س^{٢} - ١} \right) - لـو (س^{٢} - ١)$$

$$صـ = \frac{١}{٢} لـو (٢ س^{٢} - ١) - لـو (س^{٢} - ١)$$

$$صـ' = \frac{١}{٢} \times \frac{٤ س}{٢ س^{٢} - ١} - \frac{٢ س}{س^{٢} - ١}$$

تمارين: (١) إذا كان $صـ = لـو \sqrt[٣]{س^{٢} + ٢}$ أوجد $صـ'$

الحل: يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق $صـ = \frac{١}{٣} لـو (س^{٢} + ٢)$

@abdalgbowi

$$\Leftarrow \text{صـ}' = \frac{١}{٣} \times \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$$

(٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س} \text{ لـو} \text{س}$ أوجد $\text{د}'(\text{هـ}^{٦})$

الحل: مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\text{د}'(\text{س}) = ١ \times \text{لـو} \text{س} + \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} \quad \text{د}'(\text{س}) = \text{لـو}(\text{س}) + ١$$

$$\text{د}'(\text{هـ}^{٦}) = \text{لـو} \text{هـ}^{٦} + ١ = ٦ \text{لـو} \text{هـ} + ١ = ٦ \times ١ + ١ = ٧$$

(٣) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - \text{لـو} \text{س}^{٣}$ ، $\text{د}'(\text{س}) = ٠$ أوجد س

الحل: يمكن تبسيط جزء من الدالة قبل الاشتقاق $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - ٣ \text{لـو} \text{س}$

$$\text{د}'(\text{س}) = ١ - ٣ \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{صـفر} = ١ - \frac{٣}{\text{س}} \Leftarrow \frac{٣}{\text{س}} = ١ - \text{صـفر} = ١$$

$$\frac{٣}{\text{س}} = ١ \Leftarrow \text{س} = ٣$$

(٤) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = ٢ \text{لـو} \text{ظاس}$ أوجد $\text{د}'(\text{س})$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{٢ \times \text{قا}^{٢} \text{س}}{\text{ظاس}} = \frac{٢ \text{جتاس}}{\text{جتا}^{٢} \text{س} \times \text{جاس}} = \frac{٢}{\text{جاس جتاس}}$

(٥) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{لـو}(\text{جاس} + \text{قاس})^{٤}$ أوجد $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$\text{د}(\text{س}) = ٤ \text{لـو}(\text{جاس} + \text{قاس})$$

@abdagbowl

$$د'(س) = ٤ \times \frac{\text{جتاس} + \text{قاس ظاس}}{\text{جاس} + \text{قاس}}$$

$$د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٤ \times \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤} \times \text{ظا}\frac{\pi}{٤}}{\text{جا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤}}$$

$$د'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٤ \times \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}} + ١ \times \sqrt{٢}}{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \sqrt{٢}} = ٤$$

(٦) إذا كان $ص = \text{لـوه}^{-س}$ أوجد $ص'$

الحل: يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$ص = -س \text{لـوه} = -س \Leftarrow ص' = -١$

(٧) إذا كان $د(س) = س \text{ جالـوس}$ أوجد $د'(١)$

الحل: حاصل ضرب دالتين

$$د'(س) = ١ \times \text{جالـوس} + س \times \text{جتالـوس} \times \frac{١}{س}$$

$\Leftarrow د'(س) = \text{جالـوس} + \text{جتالـوس}$

$د'(١) = \text{جالـو}١ + \text{جتالـو}١ \Leftarrow د'(١) = \text{جا}٠ + \text{جتا}٠ = ٠ + ١ = ١$

(٨) إذا كان $د(س) = \text{لـوجا}^{٢}س$ أثبت أن $د'(س) = ٢ \text{ ظتاس}$

الحل: يمكن التبسيط قبل الاشتقاق $د(س) = ٢ \text{لـوجاس}$

$$\Leftarrow د'(س) = ٢ \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = ٢ \times \text{ظتاس} = \text{الايسر}$$

@abdagbowi

الدرس الرابع: مشتقة الدوال الاسية

(١) الدالة الاسية على صورة $د(س) = أ^{د(س)}$ حيث $أ \in ع$

(٢) إذا كانت $أ^{د(س)} = أ^{ت(س)} \Leftarrow د(س) = ت(س)$

مشتقة الدالة الاسية:

إذا كانت $د(س) = أ^{ت(س)}$

فإن $د'(س) = أ^{ت(س)} \times ت'(س) \times$ لـو $أ$

= الدالة نفسها × مشتقة الاس × لوغارتم الأساس

وإذا كانت $د(س) = هـ^{ت(س)}$

فإن $د'(س) = هـ^{ت(س)} \times ت'(س)$

= الدالة نفسها × مشتقة الاس

فمثلاً: (١) $ص = ٣^{٢س^{٢}-١} \Leftarrow ص' = ٣^{٢س^{٢}-١} \times ٤س \times$ لـو ٣

$= ٤س (لـو ٣) (٣^{٢س^{٢}-١})$

(٢) $د(س) = هـ^{جتاس} \Leftarrow د'(س) = هـ^{جتاس} \times -جاس$

$= -جاس\ هـ^{جتاس}$

(٣) $ص = جتاهـ^{س^{٢}}$ الدالة مثلثية

$ص' = -جاهـ^{س^{٢}} \times هـ^{س^{٢}} \times ٢س$

أي مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

(٤) $ص = هـ^{٢س} - ٤س^{٢} + هـ^{٥}$

$ص' = ٢هـ^{٢س} - ٨س + ٠ = ٢هـ^{٢س} - ٨س$

@abdaghbowi

(٥) $صـ = لـو_{٥} س^{٢}$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$صـ = س^{٢} لـو_{٥}$ $\Leftarrow$ $صـ = (لـو_{٥})(س^{٢})$

$صـ' = لـو_{٥} \times ٢ س = ٢ س لـو_{٥}$

تمارين:

(١) أوجد $صـ'$ إذا كان $صـ = هـ^{لـوجا س^{٢}}$

الحل: يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$\Leftarrow$ $صـ = هـ^{لـوجا^{٢} س} = جا^{٢} س$

$صـ' = ٢ جاس جتاس = جا٢س$

(٢) إذا كان $صـ = هـ^{س} + س^{هـ} + ٢^{هـ}$ أوجد $صـ'$

الحل: $صـ' = هـ^{س} + هـ س^{هـ-١} + ٠ = هـ^{س} + هـ س^{هـ-١}$

لاحظ أن الدالة الأخيرة ثابتة

(٣) إذا كان $د(س) = هـ^{أس} + ٢ س^{٢}$ ، $د'(١) = ٤$ أوجد قيمة أ

الحل: $د'(س) = أ هـ^{أس} + ٤$

$\Leftarrow$ $أ هـ^{أ} + ٤ = ٤$ $\Leftarrow$ $أ هـ^{أ} = ٠$

$\Leftarrow$ أ = صفر أو $هـ^{أ}$ = صفر والأخير مرفوض $\therefore$ أ = صفر

(٤) إذا كانت $د(س) = ٥س + ٣^{جاس}$ أوجد $د'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل: $د'(س) = ٥ + ٣^{جاس} \times جتاس \times لـو_{٣}$

@abdlagbowl

$$\Leftarrow د'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ٥ + ٣^{جا\frac{\pi}{2}} \times جتا\frac{\pi}{2} \times لـو٣$$

$$د'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ٥ + ٠ = ٥$$

(٥) إذا كانت $د(س) = ٢^{ظتاس}$ أوجد $د'(س)$

الحل: $د'(س) = ٢^{ظتاس} \times -$ قتاس $\times لـو٢$

(٦) إذا كان $صـ = ١هـ^{٣س}$ أوجد قيمة ١ التي تجعل $صـ'' = ١٨هـ^{٣س}$

الحل: $صـ' = ٣١هـ^{٣س}$ ، $صـ'' = ٩١هـ^{٣س}$

بمقارنة $١٨هـ^{٣س}$ مع $٩١هـ^{٣س}$ نجد أن $١٨ = ٩١ \Leftarrow ١ = ٢$

(٧) إذا كانت $ن(س) = هـ^{\frac{١}{س}} + ١لـو|س|$ ، $ن'(١) = هـ$ أوجد قيمة ١

الحل: $ن'(س) = \frac{-١}{س^{٢}} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢س}$

لاحظ تم تحويل الجذر قبل الاشتقاق واستخدام قاعدة اللوغارتم

$$ن'(١) = \frac{-١}{١} هـ^{١} + \frac{١}{١ \times ٢} = هـ$$

$$\Leftarrow -هـ + \frac{١}{٢} = هـ \Leftarrow \frac{١}{٢} = ٢هـ \Leftarrow ١ = ٤هـ$$

(٨) إذا كانت $د(س) = ٧س + هـ^{٢س}$ أوجد $د'(لـو٢)$

الحل: $د'(س) = ٧ + ٢هـ^{٢س}$

$$د'(لـو٢) = ٧ + ٢هـ^{٢لـو٢}$$

@abdalgbowi

$د'(لـو ٢) = ٧ + ٢ \times هـ^{لـو ٤}$ لاحظ التحويل

$د'(لـو ٢) = ٧ + ٢ \times ٤ = ١٥$

(٩) إذا كانت $د(س) = هـ^{س}$ جتاس أوجد $د'(٠)$

الحل: $د'(س) = هـ^{س} \times$ جتاس $-$ جاس $\times هـ^{س}$

$د'(٠) = هـ^{٠} \times$ جتا٠ $-$ جا٠ $\times هـ^{٠}$

$د'(٠) = ١ \times ١ - ٠ \Leftarrow$ $د'(٠) = ١$

@abdagbowl

الدرس الخامس: مشتقة تركيب دالتين

إذا كان د(س) ، ن(س) دالتين قابلتين للاشتقاق

فإن (د○ن)(س) = د`(ن(س)) × ن`(س)

فمثلاً: إذا كان د(س) = ٢س^{٢} ، ن(س) = $\sqrt{س}$

فإن (د ○ ن)`(س)

= د`(ن(س)) × ن`(س) = ٢ × ٢ ($\sqrt{س}$) × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = ٢

، (ن○د)`(س) = ن`(د(س)) × د`(س)

= $\frac{١}{٢\sqrt{٢س^{٢}}}$ × ٤س = $\frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢}}}$

، (ن○د)`(٣) = $\frac{٢ \times ٣}{\sqrt{٢ \times ٣^{٢}}}$ = $\frac{٣ \times ٢}{٣\sqrt{٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$

تمارين: (١) إذا كانت د(س) = س جا س ، ر(س) = هـ$^{س^{٢}}$

أوجد (د○ر)`(س)

الحل: (د ○ ر)`(س) = د`(ر(س)) × ر`(س)

= ١ × جاس + جتاس × س (ر(س)) × ٢س هـ$^{س^{٢}}$

= (جا هـ$^{س^{٢}}$ + جتا هـ$^{س^{٢}}$ × هـ$^{س^{٢}}$) × ٢س هـ$^{س^{٢}}$

لاحظ إحلال الدالة ر(س) محل س في د`(ر(س))

@abdagbowl

(٢) إذا كانت $د(س) = ٣س^{٢}$ ، $ن(س) = س^{٣} + ١$ أوجد $(د \circ ن)'(-٣)$

الحل: $(د \circ ن)'(س) = د'(ن(س)) \times ن'(س)$

$= ٣س^{٢} \times ن(س) \times ٢س = ٦(س^{٣} + ١) \times ٣س^{٢}$

$\Leftarrow (د \circ ن)'(-٣) = ٦(-٣)^{٣} + ١) \times ٣ \times (-٣)^{٢}$

$= ٦(-٢٧ + ١) \times ٣ \times ٩ = ٦ \times -٢٦ \times ٢٧ = -٤٢١٢$

(٣) إذا كانت $د(س) = \frac{١}{١ + س^{٢}}$ ، $هـ(س) = ظاس$ أوجد $(د \circ هـ)'(س)$

الحل: $(د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= \frac{-٢س}{(١ + س^{٢})^{٢}} (هـ(س)) \times قا^{٢}س = \frac{-٢ \times ظاس}{(١ + ظا^{٢}س)^{٢}} \times قا^{٢}س$

$= \frac{-٢ظاس}{قا^{٤}س} \times قا^{٢}س = \frac{-٢ظاس}{قا^{٢}س}$

$= \frac{-٢جاس \times جتا^{٢}س}{جتاس} = -٢جاس جتاس = -جا٢س$

(٤) إذا كان $د(س) = هـ^{س^{٢}}$ ، $ر(س) = لـوس$ أوجد $(د \circ ر)'(٢)$

الحل: $(د \circ ر)'(س) = د'(ر(س)) \times ر'(س)$

$= ٢هـ^{س^{٢}} (ر(س)) \times \frac{١}{س}$

$= ٢هـ^{(لـوس)^{٢}} \times \frac{١}{س} = ٢هـ^{لـوس^{٢}} \times \frac{١}{س} = ٢س^{٢} \times \frac{١}{س} = ٢س$

@abdlagbowi

الدرس السادس: المشتقة بقاعدة التسلسل

إذا كان ص(ع) ، ع(س) دالتين قابلتين للاشتقاق

فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ لاحظ التسلسل في الشرط والقاعدة

فمثلاً: إذا كان ص = ٢ع^{٢} ، ع = ٣س

فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ وبه نوجد $\frac{د ص}{د س}$

فنجد أن $\frac{د ص}{د س} = ٤ع \times ٣ = ٤(٣س) \times ٣ = ٣٦س$

وإذا كانت ص = $\sqrt{ع}$ ، س = $\sqrt{ع}$ ونريد إيجاد $\frac{د ص}{د س}$

أولاً نلاحظ أن الشرط غير محقق وهو التسلسل نعيد ترتيب الدوال فنضع

ص = $\sqrt{ع}$ بالتربيع س^{٢} = ع ⇐ ع = س^{٢} الان وجد التسلسل

نستطيع تطبيق القاعدة $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

لاحظ لو تم اختصار د ع لحصلنا على الطرف الأيمن

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \times ٢س$ بالتعويض عن ع

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢\sqrt{س^{٢}}} \times ٢س = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}}} = \frac{س}{\pm س} = \pm ١$$

وإذا كانت ع = هـ^{ص} ، ع = ٢ س^{٢} نلاحظ أن التسلسل غير موجود لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$

نعيد ترتيب الدوال لتصبح بالصورة لـوع = لـوهـ^{ص} ⇐ لـوع = ص لـوهـ

@abdagbowi

$\Leftarrow$ لـوع $=$ ص $\Leftarrow$ ص $=$ لـوع (الدالـــة الاولى) ، ع $=$ ٢س^{٢}

الان $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{ع} \times ٤س$ بالتعويض عن ع

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢س^{٢}} \times ٤س = \frac{٢}{س}$

لاحظ نتخلص من اللوغارتمية برفعها للأسية ومن الأسية بإخذ لوغارتمها ونتخلص من الجذر التربيعي بالتربيع ونتخلص من التربيع بالجذر التربيعي.

تمارين:

(١) إذا كان صـ $=$ جتاع ، ع $=$ قاس أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل: بقاعدة التسلسل والشرط محقق

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= -$ جاع $\times$ قاس ظاس بالتعويض عن ع

$= -$ جا قاس $\times$ قاس ظاس

(٢) إذا كان ص^{٢} $=$ ع ، عس $= ١$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل: التسلسل غير موجود نعيد ترتيب الدالة

صـ^{٢} $=$ ع $\Leftarrow$ صـ $= \sqrt{ع}$ (الدالـــة الاولى)

، عس $= ١ \Leftarrow$ ع $= \frac{١}{س}$ (الدالـــة الثانيـــة)

@abdagbowi

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{\sqrt{٢ ع}} \times \frac{-١}{س^{٢}}$ بالتعويض عن ع

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\sqrt{٢ \frac{١}{س}}} \times \frac{-١}{س^{٢}} = \frac{-\sqrt{س}}{٢ س^{٢}}$

(٣) إذا كان $ص = لـو ع$ ، $ص = قاس$ أوجد $\frac{د ع}{د س}$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$قاس ظاس = \frac{١}{ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ع}{د س} = ع \, قاس ظاس = هـ^{ص} \, قاس ظاس$

$\frac{د ع}{د س} = هـ^{قاس} \, قاس ظاس$

(٤) إذا كان $ص = \sqrt{ع^{٢} + ١}$ ، $ع = ظا \frac{س}{٢}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل: التسلسل موجود

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{٢} قا^{٢} \frac{س}{٢} \times \frac{٢ ع}{٢ \sqrt{ع^{٢} + ١}} = \frac{ع قا^{٢} \frac{س}{٢}}{٢ \sqrt{ع^{٢} + ١}}$

بالتعويض عن ع

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ظا \frac{س}{٢} \times قا^{٢} \frac{س}{٢}}{٢ \sqrt{ظا^{٢} \frac{س}{٢} + ١}} = \frac{ظا \frac{س}{٢} \times قا^{٢} \frac{س}{٢}}{٢ \sqrt{قا^{٢} \frac{س}{٢}}}$

@abdagbowl

$$= \frac{\text{ظا}\frac{س}{٢} \times \text{قا}^{٢}\frac{س}{٢}}{\pm ٢\,\text{قا}\frac{س}{٢}} = \pm \frac{١}{٢}\,\text{ظا}\frac{س}{٢}\,\text{قا}\frac{س}{٢}$$

$$\frac{ص}{س} = \pm \frac{١}{٢}\,\text{ظا}\frac{\pi}{٤}\,\text{قا}\frac{\pi}{٤} = \pm \frac{١}{٢} \times ١ \times \sqrt{٢} = \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

(٥) إذا كان $ص = ع^{٢} - ع$ ، $ع = هـ^{س}$ أوجد $\frac{ص}{س}$

الحل: التسلسل موجود $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$$\frac{ص}{س} = (٢ع - ١)(هـ^{س}) \quad \text{بالتعويض عن } ع$$

$$\frac{ص}{س} = (٢ \times هـ^{س} - ١)\,هـ^{س}$$

(٦) إذا كان $ص = \text{ظا}^{٣}س$ ، $ع = \sqrt{س + ١}$ أوجد $\frac{ص}{ع}$

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$$٣\,\text{ظا}^{٢}س\,\text{قا}^{٢}س = \frac{ص}{ع} \times \frac{١}{٢\sqrt{س + ١}}$$

$$\frac{ص}{ع} = \frac{٣\,\text{ظا}^{٢}س\,\text{قا}^{٢}س}{٢\sqrt{س + ١}}$$

@abdagbowi

(٧) إذا كان $ص = ع^{٢} + ٤ع$ ، $ع = هـ^{س}$ ، $\frac{ود ص}{ود س} = \frac{١٥}{٤}$ أوجد قيمة ٤

عندما $ع = ١$

الحل: $\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ود ص}{ود ع} \times \frac{ود ع}{ود س}$

$\frac{١٥}{٤} = (٤ + ٢ع) \times هـ^{س} \Leftarrow \frac{١٥}{٤} = (٤ + ١ \times ٢) \times هـ^{س}$

لإيجاد س نضع $ع = هـ^{س}$

$١ = هـ^{س} \Leftarrow$ لـو $١ =$ لـو $هـ^{س} \Leftarrow$ صـفر $= س$

$\frac{١٥}{٤} = (٤ + ٢) هـ^{صفر}$

$\Leftarrow \frac{١٥}{٤} = (٤ + ٢) \times ١ \Leftarrow \frac{١٥}{٤} = ٤ + ٢$ بالضرب $\times ٤$

$١٥ = ٤٢ + ٤^{٢} \Leftarrow ٤^{٢} + ٤٢ - ١٥ =$ صـفر

$\Leftarrow (٤ + ٥)(٤ - ٣) =$ صـفر

$\Leftarrow ٤ = -٥$ أو $٤ = ٣$

@abdagbowl

الدرس السابع: اشتقاق الدوال الضمنية

قبل الدخول في الدرس نريد الإجابة على السؤال التالي:

ما الفرق بين الدالة الصريحة والدالة الضمنية ؟

الدالة الصريحة هي الدالة التي يمكن وضعها بصورة دالة صـ بدلالة س أي

مثل: صـ(س) $= \frac{٢س^{٢}}{س - ١}$ ، صـ = ص س − ٤

والدالة الأولى صريحة مباشرتاً بينما الثانية تؤول إلى صريحة كتالي:

صـ = ص س − ٤ ⇐ صـ − ص س = − ٤

⇐ صـ(١ − س) = − ٤ ⇐ صـ $= \frac{-٤}{١ - س}$

وهذه الصيغة الأخير تجعلنا نقول أن الدالة صريحة وعند إيجاد مشتقتها توجد بالقواعد السابقة:

أي صـ′ $= \frac{٠ - ٤(-١)}{(١ - س)^{٢}} = \frac{٤}{(١ - س)^{٢}}$

أما الدالة الضمنية فهي دالة يصعب وضعها بصورة صـ بدلالة س أي صـ(س)

فمثلاً: ٢ ص س = ص ٢ س ٢ هذه الدالة يصعب وضعها بصورة صـ(س)

وهذا هو موضوع المشتقة للدوال الضمنية ويمكن إيجاد المشتقة في هذه الحالة باشتقاق طرفي المعادلة كل لوحده باستخدام القواعد السابقة مع الأخذ في الحسبان أن مشتقة صـ هي صـ′ أو $\frac{د ص}{د س}$ ومشتقة س = ١ بنفس ما أخذنا بقاعدة التسلسل

وبالرجوع للمثال ٢ ص س = ص ٢ س ٢ نجد أن الاشتقاق يتم كالتالي:

@abdagboul

$$(٢ص)(س) = (ص^{٢})(س^{٢})$$

حاصل ضرب دالتين — حاصل ضرب دالتين

$$(٢ص\acute{})(س) + ١(٢ص) = (٢ ص ص\acute{})(س^{٢}) + ٢س(ص^{٢})$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين — مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\Leftarrow ٢ص\acute{}س - ٢ص س^{٢} ص\acute{} = ٢س ص^{٢} - ٢ص$$

$$\Leftarrow ص\acute{}(٢س - ٢ص س^{٢}) = ٢س ص^{٢} - ٢ص$$

$$\Leftarrow ص\acute{} = \frac{٢س ص^{٢} - ٢ص}{٢س - ٢ص س^{٢}}$$

مثال: إذا كان $صـ = جتا س ص$ أوجد $صـ\acute{}$

لاحظ أن الدالة ضمنية

$$\Leftarrow صـ\acute{} = -جا س ص \times (١ \times ص + ص\acute{} س)$$

$$\Leftarrow صـ\acute{} = -(جا س ص)(ص) - (جا س ص)(ص\acute{} س)$$

$$\Leftarrow صـ\acute{} + (جا س ص)(ص\acute{} س) = -(جا س ص)(ص)$$

$$\Leftarrow صـ\acute{}(١ + (جا س ص)(س)) = -(جا س ص)(ص)$$

$$\Leftarrow صـ\acute{} = \frac{-ص جا س ص}{١ + س جا س ص}$$

مثال: إذا كانت $صـ = هـ^{ص}$ أوجد $صـ\acute{}$

$$صـ\acute{} = هـ^{ص} \bullet ص\acute{} \Leftarrow صـ\acute{} - هـ^{ص} \bullet ص\acute{} = صفر$$

@abdagbowi

$\Leftarrow$ ص $'$ $(1 - هـ^{ص}) =$ صفر

$\Leftarrow$ صـ $' = \frac{\text{صفر}}{1 - هـ^{ص}} \Leftarrow$ صـ $' =$ صفر

تمارين: أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من:

(١) $س^{٢} صـ + صـ^{٢} = ٥ س$

الحل: الدالة ضمنية $\Leftarrow (٢س)(ص) + (صـ')(س^{٢}) + ٢ ص ص' = ٥$

$\Leftarrow ص' س^{٢} + ٢ ص ص' = ٥ - ٢ س ص$

$\Leftarrow صـ' (س^{٢} + ٢ص) = ٥ - ٢ س ص \Leftarrow صـ' = \frac{٥ - ٢ س ص}{س^{٢} + ٢ص}$

(٢) $\sqrt{س + ص} = ص^{٢} + ١$

الحل: $\frac{١ + ص'}{٢\sqrt{س + ص}} = ٢ص ص'$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س + ص}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{س + ص}} = ٢ص ص'$

$\Leftarrow \frac{ص'}{٢\sqrt{س + ص}} - ٢ص ص' = \frac{-١}{٢\sqrt{س + ص}}$

$\Leftarrow ص' \left(\frac{١}{٢\sqrt{س + ص}} - ٢ص\right) = \frac{-١}{٢\sqrt{س + ص}}$

$$ص' = \frac{\frac{-١}{٢\sqrt{س + ص}}}{\frac{١}{٢\sqrt{س + ص}} - ٢ص}$$

@abdagbow

(٣) $\frac{١}{س}+\frac{١}{ص}=٢$

الحل: $\frac{-١}{س^{٢}}-\frac{١}{ص^{٢}}\times ص'=$ صفر

$\Leftarrow \frac{-١}{ص^{٢}}ص'=\frac{-١}{س^{٢}} \Leftarrow ص'=\frac{\frac{١}{س^{٢}}}{\frac{١}{ص^{٢}}} \Leftarrow ص'=\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$

(٤) $ص^{٢}+س^{٢}=٧$

الحل: $٢صص'+٢س=$ صفر

$\Leftarrow ٢صص'=-٢س \Leftarrow ص'=-\frac{س}{ص}$

(٥) $ص^{س}\bullet س^{ص}=١$

الحل: دالة أس دالة ∴ تحل بأخذ لوغاريتم الطرفين

$لو(ص^{س}\bullet س^{ص})=لو١$

$س لو ص=ص لو س \Leftarrow$ صفر $=ص لو س+س لو ص$

$\Leftarrow (١)(لو ص)+\frac{١}{ص}ص'\times س=-ص'لو س+\frac{١}{س}\times -ص$

$\Leftarrow \frac{س ص'}{ص}+ص' لو س=-\frac{ص}{س}-لو ص$

$\Leftarrow ص'\left(\frac{س}{ص}+لو س\right)=-\frac{ص}{س}-لو ص$

@abdagbowl

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-\frac{\text{ص}}{\text{س}} - \text{لـو ص}}{\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \text{لـو س}}$$

(٦) جتاص + ١ = س

الحل: – جا ص ص′ = ١

$$\text{ص}_{\text{هـ}}' = \frac{-١}{\text{جاص}}$$

@abdagbowl

الدرس الثامن: تطبيقات على اشتقاق الدوال الضمنية

وفي هذا الموضوع سوف نثبت صحة معادلة معلومه بمعلومية دالة أو معادلة أخرى إما بطريقة أثبات أن الطرفين متساويين أو بطريقة تركيب الدالة أو المعادلة حتى تصل إلى المعادلة الأخرى:

فمثلاً: إذا كان $صـ = جا^{٢}س$ هذه دالة أثبت أن $صـ' = جا٢س$

الحل: $\because صـ = جا^{٢}س \Leftarrow صـ' = ٢ جاس جتاس$

$\Leftarrow صـ' = جا٢س$ (قانون)

لاحظ اننا استخدمنا هنا الطريقة الثانية.

مثال: إذا كان $صـ = جتاس$ أثبت أن $صـ'' + \frac{١}{قاس} = صفر$

الحل: $\because صـ = جتاس \Leftarrow صـ' = -جاس$

$\Leftarrow صـ'' = -جتاس$

بالتعويض في المعادلة لإثبات صحتها (الطرف الأيمن = الطرف الايسر)

$-جتاس + \frac{١}{قاس} = صفر \Leftarrow -جتاس + جتاس = صفر$

لاحظ اننا استخدمنا هنا الطريقة الأولى وهي اثبات أن المعادلة صحيحة بالتعويض عن الدالة فيها.

تمارين:

(١) إذا كان $صـ = جاس + جتاس$ أثبت أن $(صـ')^{٢} + (ص'')^{٢} = ٢$

الحل: $صـ' = جتاس - جاس$

@abdagbawi

$صـ'' = -$ جاس $-$ جتاس

بالتعويض في المعادلة

$(\text{جتاس} - \text{جاس})^{٢} + (- \text{جاس} - \text{جتاس})^{٢} = ٢$

$\Leftarrow$ جتا^{٢}س $-$ ~~٢ جاس جتاس~~ + جا^{٢}س + جا^{٢}س + ~~٢ جاس جتاس~~ + جتا^{٢}س $= ٢$

$\Leftarrow ١ + ١ = ٢$ $\Leftarrow$ الطـــرف الايمـــن $=$ الطـــرف الايســـر

(٢) إذا كانت $ص = \text{جاس}$ برهن أن $س ص'' + ٢ ص' + س ص =$ صـــفر

الحل: $ص + ص'' س = \text{جتاس}$ بأخذ المشتقة الثانية

$ص' + ص'' س + ص' = - \text{جاس}$ $\Leftarrow$ $س ص'' + ٢ ص' = - س ص$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ ص' + س ص =$ صـــفر

وصلنا من الدالة إلى المعادلة أي استخدمنا الطريقة الثانية

(٣) إذا كانت $صـ = \text{جالـوس}$ برهن أن $س^{٢} ص'' + س ص' + ص =$ صـــفر

الحل: $\because صـ = \text{جالـوس} \Leftarrow صـ' = \text{جتالـوس} \times \frac{١}{س}$

$صـ' = \frac{\text{جتالـوس}}{س}$ $\Leftarrow$ $صـ'' = \frac{\text{جتالـوس} - \frac{١}{س} \times \text{جالـوس} \times س}{س^{٢}}$

$صـ'' = \frac{- \text{جالـوس} - \text{جتالـوس}}{س^{٢}}$

بالتعويض في المعادلة عن $صـ'$ ، $صـ''$ أي الطريقة الأولى

$س^{٢} \times \frac{(- \text{جالـوس} - \text{جتالـوس})}{س^{٢}} + صـ \left(\frac{\text{جتالـوس}}{صـ} \right) + \text{جالـوس} =$ صـــفر

@abdagbowl

$\Leftarrow$ – جاـلـوس – جتاـلـوس + جتاـلـوس + جاـلـوس = صـــفر

$\Leftarrow$ صـــفر = صـــفر $\Leftarrow$ الايمـــن = الايســـر

(٤) $صـ = هـ^{س+٢لـوس}$ أثبت أن $صـ'' - ٢ص' = ٢هـ^{س} - ص$

الحل: $صـ = هـ^{س} \times هـ^{لـوس^{٢}}$ $\Leftarrow$ $صـ = هـ^{س} س^{٢}$

$صـ' = هـ^{س} \times ٢س + س^{٢} هـ^{س}$

$\Leftarrow$ $صـ'' = هـ^{س} \times ٢س + ٢هـ^{س} + ٢ س هـ^{س} + هـ^{س} س^{٢}$

$\Leftarrow$ $صـ'' = ٤س هـ^{س} + س^{٢} هـ^{س} + ٢هـ^{س}$ بالتعويض في المعادلة

$٤س هـ^{س} + س^{٢} هـ^{س} + ٢هـ^{س} - ٤هـ^{س} س - ٢س^{٢} هـ^{س} = ٢هـ^{س} - هـ^{س} س^{٢}$

$\Leftarrow$ – س^{٢} هـ^{س} + ٢ هـ^{س} = ٢ هـ^{س} – هـ^{س} س^{٢} $\Leftarrow$ الطرفين متساويين

(٥) ص^{٢} = س^{س} برهن أن $صـ'' - \frac{١}{٢}ص' (لـوس+١) - \frac{ص}{٢س} =$ صـــفر

الحل: لـوص^{٢} = لـوس^{س} $\Leftarrow$ ٢لـوص = س لـوس

$\Leftarrow$ $\frac{٢}{ص} ص' = ١ لـوس + س \times \frac{١}{س}$

$\Leftarrow$ $ص' = \frac{ص}{٢} (لـوس + ١)$

$ص'' = \frac{ص'}{٢} (لـوس + ١) + \frac{١}{س} \times \frac{ص}{٢}$

$ص'' = \frac{١}{٢} ص' (لـوس + ١) - \frac{ص}{٢س} = ٠$

وهذه هي المعادلة (استخدمنا الطريقة الثانية)

@abdagbow

(٦) إذا كانت $ص^{٢} - س^{٢} = ٣$ أثبت أن $ص'' = \frac{٣}{ص^{٣}}$

الحل: $٢ ص ص' - ٢س = صفر$

$\Leftarrow ٢ ص ص' = ٢س \Leftarrow ص' = \frac{س}{ص} \Leftarrow ص'' = \frac{ص \times ١ - س \times ص'}{ص^{٢}}$

$\Leftarrow ص'' = \frac{ص - س \times \frac{س}{ص}}{ص^{٢}} \Leftarrow ص'' = \frac{ص - \frac{س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}}$

$\Leftarrow ص'' = \frac{\frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}} \Leftarrow ص'' = \frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص^{٣}} \Leftarrow ص'' = \frac{٣}{ص^{٣}}$

(٧) إذا كان $ص = لـ وقتاس$ وكانت $ص'' + ٢ص' = صفر$ أوجد قيمة $ظتاس$

الحل: $ص' = \frac{- قتاس ظتاس}{قتاس} = - ظتاس$

$ص'' = قتا^{٢}س$ بالتعويض

$\Leftarrow قتا^{٢}س - ٢ظتاس = صفر \Leftarrow ظتا^{٢}س + ١ - ٢ظتاس = صفر$

$\Leftarrow ظتا^{٢}س - ٢ظتا س + ١ =$

$\Leftarrow (ظتا س + ١)^{٢} = صفر \Leftarrow ظتا س = - ١$

(٨) إذا كانت $(س + ص)^{°} = ٣٢$ أثبت أن $ص' = - ١$

الحل: $(س + ص)^{°} = ٢^{°} \Leftarrow س + ص = ٢$

$١ + ص' = صفر \Leftarrow ص' = - ١$

@abdagbowi

الدرس التاسع: المشتقة النونية

لإيجاد المشتقة النونية:

نوجد ص$'$ ، ص$''$ ، ص$'''$ ، ..... بحسب الحاجة ثم ندرس العلاقة بين المشتقات للوصول إلى المشتقة النونية ص$^{(ن)}$ وللمساعدة في دراسة هكذا علاقة نبدأ بدراسة علاقات الاعداد **مثلاً:** ٢ × ٢ × ٢ ، ..... = ٢^{ن}

$$\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\times\ldots\ldots\times٣\times٢\times١=|\underline{\text{ن}}$$

$$(\text{ن}-٣)(\text{ن}-٤)(\text{ن}-٥)\times\ldots\ldots=|\underline{\text{ن}-٣}$$

١ ، ١ ، ٢ ، ٣ × ٢ ، ..... يعطى $|\underline{\text{ن}-١}$

كذلك دراسة العلاقة بين إشارات الحدود

فإذا كان − ، + ، − ، + تعطي العلاقة $(-١)^{ن}$

وإذا كانت + ، − ، + ، − تعطى العلاقة $(-١)^{ن+١}$

ثم دراسة العلاقات بين المتغيرات

فمثلاً: س^{١} في ص$'$ ، س^{٢} في ص$''$ ، س^{٣} ص$'''$ يعطي العلاقة س^{ن}

انعدام س في ص$'$ ، ظهور س في ص$''$ ، س^{٢} في ص$'''$ يعطي العلاقة س$^{ن-١}$

، س^{٢} في ص$'$ ، س^{٣} في ص$''$ ، س^{٤} ص$'''$ يعطي العلاقة النونية س$^{ن+١}$

واحياناً نجد أن المشتقة النونية تنعدم وذلك في دوال كثيرة الحدود.

مثال: إذا كانت صـ = ٢س^{٢} − ٣س فما ص$^{(ن)}$

صـ$'$ = ٤س − ٣ ، صـ$''$ = ٤ ، صـ$'''$ = صفر ⇐ ص$^{(ن)}$ منعدمة.

@abdagbowl

مثال: إذا كانت $صـ = \frac{٥}{س}$ فما مشتقتها النونية

$صـ' = \frac{-٥}{س^{٢}}$ ، $صـ'' = \frac{-٠ - -٥ \times ٢}{س^{٤}}$ $\Leftarrow$ $صـ''' = \frac{٥ \times ٢}{س^{٣}}$

، $صـ'''' = \frac{صفر - ٥ \times ٢ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}}$ $\Leftarrow$ $صـ^{(٤)} = \frac{-٥ \times ٣ \times ٢ \times ١}{س^{٤}}$

لاحظ تناوب الإشارة $- ، + ، - = (-١)^{ن}$ لاحظ ثبوت ٥ كذلك لاحظ ظهور المضروب $|١$ في $صـ'$ ، $|٢$ في $صـ''$ ، .....

لاحظ المتغير $س^{٢}$ في $صـ'$ ، $س^{٣}$ في $صـ''$ ، .....

$\Leftarrow$ $ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن} |ن}{س^{ن+١}}$

مثال: $صـ = لـو س$

$صـ' = \frac{١}{س}$ ، $صـ'' = \frac{-١}{س^{٢}}$

$صـ''' = \frac{- - ١ \times ٢س}{س^{٤}}$ $\Leftarrow$ $صـ''' = \frac{١ \times ٢}{س^{٣}}$

$صـ^{ن} = \frac{(-١)^{ن+١} |ن-١}{س^{ن}}$

مثال: $صـ = هـ^{٢س}$

$ص' = ٢ هـ^{٢س}$ ، $ص'' = ٤ هـ^{٢س}$ .....

$ص^{(ن)} = ٢^{ن} هـ^{٢س}$

@abdagbowl

مثال: $ص_ن = جتاس$

$$ص_ن' = -جاس = +جتا\left(س + \frac{\pi}{٢}\right)$$

لاحظ في المثلثي في كل اشتقاق نغير النسبة إلى نفس نوع المسألة وذلك بقوانين قلب النسبة

$$ص_ن'' = -جا\left(س + \frac{\pi}{٢}\right) = -جتا\left(س + \frac{\pi ٢}{٢}\right)$$

ومنه $ص^{(ن)} = (-١)^{ن+١} جتا\left(س + \frac{\pi ن}{٢}\right)$

تمارين:

أوجد المشتقة النونية للدوال التالية:

(١) $ت(س) = ٢$ ، $ن \ni ع$

الحل: $ت'(س) =$ صفر $\Leftarrow ت^{(ن)}(س)$ منعدمة

(٢) $د(س) = ٢س^{٢} + ١$

الحل: $د'(س) = ٤س$ ، $د''(س) = ٤$

$د^{(ن)}(س) =$ صفر $\Leftarrow ت^{(ن)}(س)$ منعدمة

(٣) $ص = س^{ن}$ $ن \ni ع$

الحل: $ص_ن' = نس^{ن-١}$ ، $ص_ن'' = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$$ص_ن''' = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$$

$$ص^{(ن)} = |ن \Leftarrow س^{ن-ن} = |ن$$

@abdagbowl

(٤) $د(س) = \frac{١}{س^{٢}}$

الحل: $صـ = \frac{-١ \times ٢س}{س^{٤}}$ $\Leftarrow$ $صـ' = \frac{-٢ \times ١}{س^{٣}}$

$صـ'' = \frac{-(-٢) \times ١ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}}$ $\Leftarrow$ $صـ'' = \frac{١ \times ٢ \times ٣}{س^{٤}}$

$ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن} \times |ن + ١}{س^{ن+٢}}$

(٥) $صـ = \frac{-٣}{(١ + ٢س)^{٢}}$

الحل: $صـ' = \frac{-(-٣) \times ٢ (١ + ٢س) \times ٢}{(١ + ٢س)^{٤}}$ $\Leftarrow$ $صـ' = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٢}{(١ + ٢س)^{٣}}$

$صـ'' = \frac{-٢ \times ٣ \times ٢ (١ + ٢س)^{٢} \times ٢}{(١ + ٢س)^{٦}}$

$\Leftarrow$ $صـ'' = \frac{-٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ \times ١ \times ٢}{(١ + ٢س)^{٤}}$

$صـ^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن+١} \times ٢^{ن} \times ٣ \times |ن + ١}{(١ + ٢س)^{ن+٢}}$

(٦) $صـ = \frac{٦}{س^{٢} - ٦س + ٩}$

الحل: $صـ = \frac{٦}{(س - ٣)^{٢}}$ $\Leftarrow$ $صـ' = \frac{-٦ \times ٢ (س - ٣)}{(س - ٣)^{٤}}$

@abdagbowl

$$\Leftarrow \text{صـ}' = \frac{-٦ \times ٢}{(س - ٣)^{٣}}$$

$$\text{صـ}'' = \frac{-(-٦ \times ٢ \times ٣)(س - ٣)^{٢}}{(س - ٣)^{٦}} \quad \Leftarrow \text{صـ}'' = \frac{٦ \times ٢ \times ٣}{(س - ٣)^{٤}}$$

ليتضح أكثر نوجد $\text{صـ}'''$

$$\text{صـ}''' = \frac{-٦ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times (س - ٣)^{٣}}{(س - ٣)^{٨}} \quad \Leftarrow \text{صـ}''' = \frac{-١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٦}{(س - ٣)^{٥}}$$

$$\text{صـ}^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن} \times ٦ \times |ن + ١|}{(س - ٣)^{ن+٢}}$$

(٧) $\text{صـ} = لـو س$

الحل: $\Leftarrow \text{صـ}^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن+١} |ن - ١|}{س^{ن}}$ (سبق حلها كمثال)

(٨) $\text{صـ} = هـ^{٢س}$

الحل: $\text{صـ}^{(ن)} = ٢^{ن} هـ^{٢س}$ (سبق حلها كمثال)

(٩) $\text{صـ} = ٣^{س}$

الحل: $\text{صـ}' = ٣^{س} لـو ٣ \quad \Leftarrow \text{صـ}'' = ٣^{س} لـو ٣ \times لـو ٣$

$$\Leftarrow \text{صـ}^{(ن)} = (لـو ٣)^{ن} \times ٣^{س}$$

(١٠) $\text{صـ} = س هـ^{س}$

الحل: $\text{صـ}' = ١ \times هـ^{س} + هـ^{س} \times س = هـ^{س} (١ + س)$

$$\text{صـ}'' = هـ^{س} (١ + س) + ١ \times هـ^{س} = هـ^{س} (٢ + س) \Leftarrow \text{صـ}^{(ن)} = هـ^{س} (ن + س)$$

@abdagbowl

(١١) $صـ = \frac{س}{هـ^{س}}$

الحل: $صـ = س\ هـ^{-س}$

$صـ' = ١ \times هـ^{-س} + -هـ^{-س} \times س = هـ^{-س}\ (١ - س)$

$صـ'' = -هـ^{-س}\ (١ - س) + -١ \times هـ^{-س} = هـ^{-س}\ (-١ + س - ١)$

$صـ'' = هـ^{-س}\ (-٢ + س) = -هـ^{-س}\ (٢ - س)$

$صـ^{(ن)} = (-١)^{ن+١}\ (ن - س)$

(١٢) $صـ = جاس$

الحل: $صـ' = جتاس = جا\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$

$صـ'' = جتا\left(\frac{\pi}{٢} + س\right) = جا\left(\frac{\pi ٢}{٢} + س\right)$

$صـ^{(ن)} = جا\left(ن\frac{\pi}{٢} + س\right)$

(١٣) $صـ = جا^{٢}س$

الحل: $صـ' = ٢\ جاس\ جتاس \Leftarrow صـ' = جا٢س$

$صـ'' = ٢جتا٢س \Leftarrow صـ'' = ٢جا\left(\frac{\pi}{٢} + ٢س\right)$

$صـ''' = ٢ \times ٢جتا\left(\frac{\pi}{٢} + ٢س\right) \Leftarrow صـ''' = ٢ \times ٢جا\left(\frac{\pi ٢}{٢} + ٢س\right)$

$صـ^{(ن)} = ٢^{ن}جا\left(ن\frac{\pi}{٢} + ٢س\right)$

@abdagbowi

الدرس العاشر: معادلة المماس والناظم

أولاً: إذا كان $د(س)$ معادلة المنحنى فإن معادلة المماس لهذا المنحنى تعطى بالعلاقة

$$(ص - ص_{١}) = د'(س)(س - س_{١})$$

حيث $د'(س) = م$ أي ميل المماس لهذا المنحنى ، $(س_{١} ، ص_{١})$ هي نقطة التماس

(أي النقطة التي يمر بها مماس المنحني)

مثال: إذا كان $د(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ١$ أوجد ميل المماس لهذه الدالة عند

$(٢ ، ١)$ **الحل:** ميل المماس $= م = د'(س)$

$$د'(س) = ٤س + ٣ \Leftarrow د'(س) = ٤ \times ٢ + ٣ \Leftarrow د'(س) = ١١$$

$\therefore$ ميل المماس $= ١١$

مثال: أوجد ميل المماس للدالة $٢س^{٢}ص = ٣س + ١$ عند النقطة $(١ ، ٣)$

الحل: الاشتقاق ضمني $٤س \times ص + ٢س^{٢}ص' = ٣$

$$\Leftarrow ٤ \times ١ \times ٣ + ٢ \times ١^{٢} \times ص' = ٣ \Leftarrow ١٢ + ٢ص' = ٣ \Leftarrow ص' = \frac{٩}{٢}$$

ثانياً: إذا كان $د(س)$ معادلة المنحنى فإن معادلة الناظم (العمودي) لهذا المنحنى

تعطى بالعلاقة $(ص - ص_{١}) = \frac{-١}{د'(س)}(س - س_{١})$

حيث $د'(س) = م$ مشتقة الدالة ، $(س_{١} ، ص_{١})$ نقطة التماس

(أي النقطة التي يمر بها مماس المنحني)

@abdagbowi

مثال: إذا كان صـ = $\frac{٢س + ١}{س - ١}$ منحنى أوجد ميل العمودي لهذه المنحنى عند النقطة (صـــــفر ، صـــــفر)

الحل: صـ$'$ = $\frac{(١)(٢س + ١) - (٢)(س - ١)}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow$ صـ$'$ = $\frac{٢س - ٢ - ٢س + ١}{(س - ١)^{٢}}$ $\Leftarrow$ صـ$'$ = $\frac{-٣}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow$ ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ $\Leftarrow$ ميل العمودي = $\frac{-١(س - ١)^{٢}}{-٣}$

$\Leftarrow$ ميل العمودي = $\frac{(س - ١)^{٢}}{٣}$ = $\frac{(٠ - ١)^{٢}}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

والآن إذا طلب منا معادلة المماس أو العمودي فإن هذا يتطلب إيجاد مشتقة الدالة عند النقطة المعلومة والتعويض في معادلة المماس ومعادلة الناظم.

مثال: أوجد معادلة المماس والناظم للدالة د(س) = ظتاس − ٤س + ١ عند النقطة $\left(٠ ، \frac{\pi}{٢}\right)$

الحل: نوجد د$'$(س)

د$'$(س) = − قتا^{٢} س − ٤ $\Leftarrow$ د$'$(س) = $\frac{-١}{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٢}}$ − ٤

د$'$(س) = $\frac{-١}{١}$ − ٤ $\Leftarrow$ د$'$(س) = − ٥

بالتعويض في المعادلة (ص − ص$_{١}$) = د$'$(س)(س − س$_{١}$)

@abdaghowl

$$\Leftarrow (ص - ٠) = -٥\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$$

$$\Leftarrow ص = -٥س + \frac{٥\pi}{٢}$$ وهذه هي معادلة المماس

وبالتعويض في معادلة الناظم $(ص - ص_١) = \frac{-١}{د'(س)}(س - س_١)$

$$\Leftarrow (ص - ٠) = \frac{-١}{-٥}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right) \quad \Leftarrow ص = \frac{١}{٥}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$$

$$\Leftarrow ص = \frac{١}{٥}س - \frac{\pi}{١٠}$$ وهذه هي معادلة الناظم.

ثالثاً: هي أن يعطي معلومات عن ميل المماس أو الناظم ويطلب إيجاد قيمة المتغير

مثال: إذا كان ميل المماس للمعادلة $أ ص = ٢ س ص - ٤$ عند $(١، ١)$ هو ١٥ فما قيمة $أ$ **الحل:** $أ ص' = ٢ص + ٢ س ص'$

$$\Leftarrow أ \times ١٥ = ١ \times ٢ + ١ \times ٢ \times أ \Leftarrow ١٥ أ = ٢ + ٣٠$$

$$١٥ أ = ٣٢ \Leftarrow أ = \frac{٣٢}{١٥}$$

تمارين: (١) أوجد معادلة المماس والناظم لمنحنى الدالة

$س^٢ + \pi$ جتاص $+ ٢س = ٠$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، -٢\right)$

الحل: $٢س - \pi$ جاص $ص' + ٢ = ٠ \Leftarrow ٢ \times -٢ - \pi \times$ جا$\frac{\pi}{٢} \times ص' + ٢ = ٠$

$$\Leftarrow -٤ - \pi ص' + ٢ = ٠ \quad \Leftarrow -٢ - \pi ص' = ٠ \quad \Leftarrow ص' = \frac{-٢}{\pi}$$

@abdlagbowi

معادلة المماس $ص - \frac{\pi}{٢} = \frac{-٢}{\pi}(س + ٢)$

$\Leftarrow ص - \frac{\pi}{٢} = \frac{-٢}{\pi}س - \frac{٤}{\pi} \Leftarrow ص = \frac{٢}{\pi}س + \frac{٤}{\pi} - \frac{\pi}{٢}$ (معادلة المماس)

معادلة الناظم $ص - \frac{\pi}{٢} = \frac{-١}{\frac{-٢}{\pi}}(س + ٢)$

$\Leftarrow ص - \frac{\pi}{٢} = \frac{\pi}{٢}(س + ٢) \Leftarrow ص = \frac{\pi}{٢}س + \pi$

$\Leftarrow ص - \frac{\pi}{٢}س = \frac{\pi ٣}{٢}$ صـــفر (معادلة الناظم)

لاحظ معادلة المستقيم بصورها المختلفة:

$ا س + ب ص = جـ$ ، $ب ص = ا س + جـ$ ، $ا س + ب ص + جـ =$ صـــفر

(٢) برهن أن المماس للمنحنى $\left(\frac{س}{ا}\right)^{ن} + \left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن} = ٢$ عند $ا ، ب$ هو

$\frac{س}{ا} + \frac{ص}{ب} = ٢$

الحل: المطلوب المماس أي معادلة المماس

أولاً نوجد ميل المماس أي مشتقة الدالة عند $ا ، ب$ ثم نعوض في معادلة المماس

$ن\left(\frac{س}{ا}\right)^{ن-١} \times \frac{١}{ا} + ن\left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن-١} \times \frac{١}{ب} ص' =$ صـــفر

بالقسمة على $ن \Leftarrow \left(\frac{س}{ا}\right)^{ن-١} \times \frac{١}{ا} + \left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن-١} \times \frac{١}{ب} ص' =$ صـــفر

بالتعويض عن $ا ، ب$ في $س ، ص$

@abdagbowi

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-1} + \frac{1}{\text{أ}} \times \left(\frac{\text{ب}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{1}{\text{ب}} \text{ص}^{\text{ن}} = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} \text{ص}' = \text{صفر} \Leftarrow \frac{1}{\text{ب}} \text{ص}' = \frac{-1}{\text{أ}} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$$

معادلة المماس $(\text{ص} - \text{ب}) = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} (\text{س} - \text{أ})$

$$\Leftarrow \text{ص} - \text{ب} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} \text{س} + \text{ب} \Leftarrow \text{ص} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س} = 2\text{ب} \qquad \div \text{ب}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ب}} + \frac{\text{س}}{\text{أ}} = 2$$

(٣) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات للمنحنى عند النقطة $(1، -1)$ $\text{س}^3 - \text{ص}^3 + 3\text{س ص} = 0$

الحل: ميل المماس = مشتقة الدالة = ظاهـ (لماذا)

$$3\text{س}^2 - 3\text{ص}^2 \text{ص}' + 3\text{ص} + 3\text{س ص}' = \text{صفر}$$

$$3 \times 1 - 3 \times 1 \times \text{ص}' - 1 + 1 \times \text{ص}' = \text{صفر}$$

$$3 - 3\text{ص}' - 1 + \text{ص}' = \text{صفر}$$

$$-2\text{ص}' = -2 \Leftarrow \text{ص}' = 1$$

$$\Leftarrow \text{ظاهـ} = 1 \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{4}$$

(٤) إذا كان المماس للمنحنى لـو $(\text{س ص}) = 2$ يوازي المستقيم $\text{ص} = -\text{س}$ فأوجد معادلة المماس

الحل: المماس // المستقيم $\therefore$ ميل المماس = ميل المستقيم $\boxed{1}$

@abdaabowl

ميل المماس = مشتقة الدالة

نوجد المشتقة $\frac{١}{س ص} \times (١ \times ص + ص' س) =$ صفر

$\Leftarrow ص + ص' س =$ صفر $\quad ص' = \frac{-ص}{س}$

ميل المستقيم $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-١}{١} = -١ \Leftarrow ص' = -١$

بالتعويض في [١] $\frac{-ص}{س} = -١ \Leftarrow ص = س$

بالتعويض عن س في المستقيم $ص = -س$

$ص = -ص \Leftarrow ٢ص = ٠ \Leftarrow ص = ٠$

$\Leftarrow س =$ صفر

معادلة المماس

$ص - ٠ = ص' (س - ٠) \Leftarrow ص = -(س - ٠) \Leftarrow ص = -س$

(٥) إذا كان $ص = أ هـ^{س} + ب هـ^{-س}$ يمس المستقيم $ص = ٣س + ١$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات أوجد قيمتي أ، ب

الحل: المستقيم يمس المنحنى أي مشتقة الدالة = ميل المستقيم [١]

نوجد مشتقة الدالة $ص' = أ هـ^{س} - ب هـ^{-س}$

عند نقطة التقاطع مع المحور ص

أي س = صفر $\Leftarrow ص = ٣ \times ٠ + ١ \Leftarrow ص = ١$

∴ النقطة هي (١، ٠)

$ص' = أ \times هـ^{٠} - ب هـ^{٠} \Leftarrow ص' = أ - ب$

@abdagbowi

، ميل المماس للمستقيم $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-٣}{١} = -٣$

بالتعويض في [١] $أ - ب = -٣$ ← [٢]

النقطة تحقق المعادلة الأصلية

$١ = أ هـ + ب هـ$ ⇐ $١ = أ + ب$ ← [٣]

$١ = أ + ب$

بحل المعادلتين [٢] ، [٣] $-٣ = -أ - ب$

$٢ = -٢$ ⇐ $أ = -١$

بالتعويض في [٣] $١ = -١ + ب$ ⇐ $ب = ٢$

(٦) إذا كان المماس للمنحنى $ص = ٣س^{٢} - ٢أ س$ موازياً لمحور الصادات أوجد قيمة $أ$ عند $س = ١$

الحل: المماس // محور الصادات ⇐ ميل العمودي $= ٠$

أي $\frac{-١}{\text{ميل المماس}} =$ صفر [١] ، ميل المماس $ص'$

∴ يوجد $ص' : ٣ص ص' - ٢أ ص' = ١$

$٣ \times ١ ص' - ٢أ \times ص' = ١$ ⇐ $٣ ص' - ٢أ ص' = ١$

$ص' (٣ - ٢أ) = ١$ ⇐ $ص' = \frac{١}{٣ - ٢أ}$

بالتعويض في [١] ⇐ $\frac{-١}{\frac{١}{٣ - ٢أ}} = ٠$

$-(٣ - ٢أ) = ٠$ ⇐ $٢أ = ٣$ ⇐ $أ = \frac{٣}{٢}$

@abdalqbowi

(٧) أوجد معادلة المماس والناظم للمنحنى $س + \sqrt{س ص} - ص = ٢$ عند النقطة $(٢ ، ٢)$

الحل: نوجد $ص' : ١ + \frac{١ ص + ص' س}{٢\sqrt{س ص}} - ص' = ٠$

بالتعويض عن النقطة $١ + \frac{١ \times ٢ + ص' \times ٢}{٢\sqrt{٤}} - ص' = ٠$

$\frac{٢ + ٢ ص'}{٤} - ص' = -١ \Leftarrow \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} ص' - ص' = -١$

$\frac{-١}{٢} ص' = \frac{-٣}{٢} \Leftarrow ص' = -٣$

معادلة المماس $(ص - ٢) = ٣ (س - ٢)$

$\Leftarrow ص - ٢ = ٣س - ٦ \Leftarrow ص + ٣س + ٤ =$ صفر

معادلة الناظم $ص - ٢ = -\frac{١}{٣}(س - ٢)$

$ص - ٢ = -\frac{١}{٣}س + \frac{٢}{٣} \Leftarrow ص + \frac{١}{٣}س = \frac{٨}{٣}$

(٨) إذا كان المماس افقي لمنحنى عند النقطة $(٢ ، ٣)$ أوجد معادلته

الحل: المماس افقي أي ميله = صـــفر

$\Leftarrow ص' =$ صـــفر

معادلة المماس $ص - ٣ =$ صـــفر $(س - ٢)$

$ص - ٣ =$ صـــفر

@abdagbowl

الدرس الحادي عشر: مبرهنة رول

شروط المبرهنة:

(١) أن تكون الدالة د(س) متصلة على [أ، جـ]

(٢) أن تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على]أ، جـ[

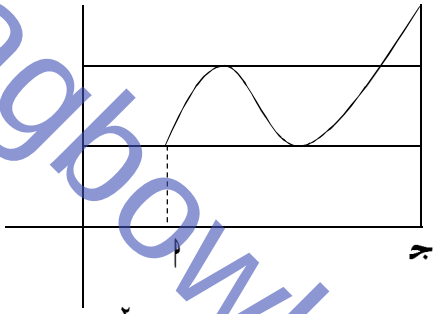
(٣) أن يكون د(أ) = د(جـ)

النتيجة: إذا تحقق الشروط فإنه يوجد قيمة واحدة على الأقل ب ∈]أ، جـ[بحيث

د´(ب) = صـــفر

التفسير الهندسي لمبرهنة رول:

إذا كانت الدالة أو المنحنى محققة شروط مبرهنة رول فإنه يوجد نقطه واحدة على الأقل المماس عندها يوازي محور السينات (المماس أفقي)



مثال: إذا كان صـ = س^{٢} − ١ ، س ∈ [−١، ١] ادرس تحقق شروط رول

الحل: ١) الدالة كثيرة حدود ∴ متصلة على [−١، ١]

٢) الدالة كثيرة حدود ∴ قابلة للاشتقاق على]−١، ١[د´(س) = ٢س

٣) د(أ) = د(−١) = ١ − ١ = صـــفر

د(جـ) = د(١) = ١ − ١ = صـــفر ⇐ د(أ) = د(جـ)

الدالة محققة شروط رول ∴ يوجد ب ∈]−١، ١[بحيث د´(ب) = صـــفر

@abdagbowl

$\Leftarrow ٢ب = صفر \Leftarrow ب = صفر \in]-١، ١[$

هذا النوع الأول من مسائل هذا الدرس أما النوع الثاني يعطي معلومات عن المبرهنة ويطلب إيجاد قيمة متغير أ أو ب أو غيره

مثال: إذا كانت $د(س) = ٢س^{٢} - ٥$ تحقق شروط رول على $[أ، ٨]$ أوجد قيمة أ

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط رول ∴ $د(أ) = د(جـ)$

$\Leftarrow ٢أ^{٢} - ٢ \times ٦٤ = ٢أ^{٢} - ١٢٨$

$\Leftarrow أ^{٢} = ٦٤ \Leftarrow أ = \pm ٨$

$أ = ٨$ مرفوض (لماذا) $\Leftarrow أ = -٨$

تمارين:

(١) ادرس تحقق شروط رول للدالة $صـ = س^{٢} - ٤س$ على الفترة $[١، ٣]$ ثم أوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على $[١، ٣]$ كثيرة حدود

٢) $د'(س) = ٢س - ٤$ قابلة للاشتقاق على $]١، ٣[$

٣) $د(أ) = د(١) = ١ - ٤ = -٣$

$د(جـ) = د(٣) = ٩ - ٣ \times ٤ = ٩ - ١٢ = -٣$

$د(أ) = د(جـ)$ الدالة محققة لشروط رول

$\Leftarrow د'(ب) = صفر \Leftarrow ٢ب - ٤ = صفر$

$\Leftarrow ٢ب = ٤ \Leftarrow ب = ٢ \in]١، ٣[$

@abdagbowl

(٢) إذا كانت د(س) = لـو(٤ – س ٢) ← [–١ ، ١] بين إذا كانت تحقق شروط رول على الفترة المرفقة وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة ∀ س ∈ [–١ ، ١] حقق ذلك بالنظر

٢) د ′(س) = $\frac{-٢س}{٤ - س^{٢}}$ قابلة للاشتقاق على]–١ ، ١[

٣) د(أ) = د(–١) = لـو ٤ – ١ = لـو ٣

د(جـ) = د(١) = لـو ٤ – ١ = لـو ٣

د(أ) = د(جـ) الشروط محققة ⇐ د ′(ب) = صـــفر

⇐ $\frac{-٢ب}{٤ - ب^{٢}}$ = صفر المقـــام ≠ صـــفر

∴ –٢ب = صفر ⇐ ب = صـــفر ∈]–١ ، ١[

(٣) إذا كان د(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ← [–٢ ، ٢] هل الدالة السابقة تحقق شروط رول أوجد قيمة ب الناتجة

الحل: ١) الدالة متصلة على [–٢ ، ٢]

٢) د ′(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ الدالة قابلة للاشتقاق على]–٢ ، ٢[

لاحظ أن الدالة غير قابلة للاشتقاق على [–٢ ، ٢]

٣) د(أ) = د(–٢) = صـــفر

د(جـ) = د(٢) = صـــفر

د(أ) = د(جـ) الشروط محققة ⇐ د ′(ب) = صـــفر

@abdagbowi

$$\Leftarrow \frac{-٢ب}{٢\sqrt{٤-ب^{٢}}} = \text{صفر} \quad \text{المقام} \neq \text{صفر}$$

$$\Leftarrow ٢ب = \text{صفر} \Leftarrow ب = \text{صفر} \in]-٢ ، ٢[$$

(٤) بين فيما إذا كانت $صـ = \text{جاس جتاس}$ تحقق رول على $[٠ ، \pi]$ وأوجد ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على الفترة $[٠ ، \pi]$

٢) $د'(س) = \text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جاس جاس}$

$= \text{جتا}^{٢}س - \text{جا}^{٢}س = \text{جتا}٢س$ الدالة قابلة للاشتقاق

٣) $د(أ) = د(٠) = \text{صفر}$

$د(جـ) = د(\pi) = \text{صفر}$

$د(أ) = د(ب)$ (حقق ذلك) الدالة محققة شروط رول

$د'(ب) = \text{صفر} \Leftarrow \text{جتا}٢ب = \text{صفر}$

$٢ب = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ب = \frac{\pi}{٤} \in]٠ ، \pi[$

(٥) بين فيما إذا كانت $صـ = \text{جاس} + \text{جتاس}$ تحقق رول على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

٢) $د'(س) = \text{جتاس} - \text{جاس}$

٣) $د(أ) = د(٠) = ١$ حقق ذلك

@abdagbowl

د(جـ) = د(π) = ١ حقق ذلك

د(أ) = د(جـ) الدالة محققة الشروط

∴ د´(ب) = صفر ⇐ جتاب – جاب = صفر

جتاب = جاب وهذا يتحقق عند ب = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$ ∋]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(٦) بين فيما إذا كانت صـ = ٢ جتاس تحقق رول على [٠ ، ٢π] وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على [٠ ، ٢π]

٢) صـ´ = – جا س ٢ جتاس لـو ٢

٣) د(أ) = د(٠) = ٢ جتا٠ = ٢١ = ٢

د(جـ) = د(٢π) = ٢ جتا٢π = ٢١ = ٢

د(أ) = د(جـ) الشروط محققة ⇐ د´(ب) = صفر

⇐ – جاس٢ جتاس لـو ٢ = صفر ⇐ – جاس ٢ جتاس = صفر

إما ٢ جتاس = صفر مرفوض (لماذا)

∴ – جاس = صفر ⇐ س = صفر ∋]٠ ، ٢π[

أو س = π ∋]٠ ، ٢π[

(٧) إذا كانت د(س) = لـو(٩ – س٢) تحقق رول على [–٢ ، ٢] أوجد قيمة أ

الحل: ∵ الدالة تحقق رول ⇐ د(أ) = د(جـ)

@abdagbowl

$\Leftarrow$ لـو $(٩-٤) =$ لـو $(٩-أ^{٢})$

$\Leftarrow ٥ = ٩ - أ^{٢} \Leftarrow$ $أ^{٢} = ٤ \Leftarrow$ $أ = \pm ٢$

$أ = -٢$ مرفوض (لماذا) $أ = ٢$

(٨) إذا كانت $د(س) = هـ^{س^{٢}-٩}$ تحقق شروط رول على $[١، ٣]$ أوجد قيمة $أ$ ثم أوجد قيمة $ب$ الناتجة.

الحل: ∵ الدالة تحقق رول ∴ $د(أ) = د(جـ)$

$هـ^{أ^{٢}-٩} = هـ^{٩-٩} \Leftarrow$ $هـ^{أ^{٢}-٩} = هـ^{صفر}$

$\Leftarrow أ^{٢} - ٩ =$ صفر $\Leftarrow أ^{٢} = ٩ \Leftarrow$ $أ = \pm ٣$

$أ = ٣$ مرفوض لأن عنده سيكون $أ = جـ$ ∴ $جـ = -٣$

الآن نوجد قيمة $ب$ الناتجة

$د'(ب) =$ صفر $\Leftarrow ٢ب هـ^{ب^{٢}-٩} =$ صفر

إما $هـ^{ب^{٢}-٩} =$ صفر مرفوض

(لأنه بأخذ لوغاريتم الطرفين لـو صفر غير معرف)

$\Leftarrow ٢ب =$ صفر $\Leftarrow ب =$ صفر $\ni]-٣، ٣[$

(٩) إذا كان $صـ = \sqrt{س} + \sqrt{٤ - س} - ٢$ تحقق شروط رول على $[٠، جـ]$ أوجد $جـ$ ثم أوجد قيمة $ب$ الناتجة.

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط رول ∴ $د(أ) = د(جـ)$

$\Leftarrow \sqrt{٠} + \sqrt{٤ - ٠} - ٢ = \sqrt{جـ} + \sqrt{٤ - جـ} - ٢$

$\sqrt{جـ} + \sqrt{٤ - جـ} - ٢ =$ صفر

@abdagbowi

$\Leftarrow -\sqrt{٤-جـ} = \sqrt{جـ} - ٢$ بالتربيع

$\Leftarrow ٤-جـ = جـ - ٤\sqrt{جـ} + ٤$

$\Leftarrow -٢جـ = -٤\sqrt{جـ}$ بالتربيع

$\Leftarrow ٤جـ^{٢} = ١٦جـ$

$\Leftarrow ٤جـ^{٢} - ١٦جـ = صفر \Leftarrow ٤جـ(جـ - ٤) = صفر$

إما $٤جـ = صفر \Leftarrow جـ = صفر$ مرفوض لأنه عندها $جـ = ١$

أو $جـ - ٤ = صفر \Leftarrow جـ = ٤$

الآن نوجد قيمة ب الناتجة

$د'(ب) = صفر \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{ب}} - \frac{١}{٢\sqrt{٤-ب}} = صفر$ بالضرب $\times ٢$

$\frac{١}{\sqrt{ب}} = \frac{١}{\sqrt{٤-ب}}$ بالتربيع

$\frac{١}{ب} = \frac{١}{٤-ب} \Leftarrow ٤-ب = ب$

$\Leftarrow ٢ب = ٤ \Leftarrow ب = ٢ \in]٠، ٤[$

@abdagbowi

الدرس الثاني عشر: مبرهنة القيمة المتوسطة

شروط المبرهنة:

(١) أن تكون الدالة د(س) متصلة على [أ ، جـ]

(٢) أن تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على]أ ، جـ[

النتيجة: يوجد قيمة واحدة على الأقل ب ∈]أ ، جـ[

بحيث $د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ}$

أول نوع من مسائل هذا الدرس هو أثبات أن الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة وإيجاد قيمة ب الناتجة.

مثال: إذا كان $د(س) = ٢س^{٢} - ٤$ ، س ∈ [١ ، ٣] بين فيما إذا كانت الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) د(س) متصلة على [١ ، ٣]

٢) $د'(س) = ٤س$ قابلة للاشتقاق على]١ ، ٣[

$$د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ} \Leftarrow ٤ب = \frac{(٤ - ١ \times ٢) - (٤ - ٩ \times ٢)}{١ - ٣}$$

$$\Leftarrow ٤ب = \frac{١٤ + ٢}{٢} \Leftarrow ٨ب = ١٦ \Leftarrow ب = ٢ \in]١ ، ٣[$$

والنوع الثاني من المسائل هو إعطاء معلومات متعلقة بالمبرهنة ويطلب إيجاد المتغير

مثال: إذا كان ب = ٤ تحقق القيمة المتوسطة للدالة $د(س) = م س^{٣} - ٢$ على [صفر ، ٢] أوجد قيمة م

@abdagnowi

الحل: الدالة محققة لشروط القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ} \quad ، \quad د'(ب) = ٣م ب^{٢}$$

$$٣م ب^{٢} = \frac{(٢ - ٨م) - (صفر)}{٢ - صفر} \Leftarrow ١٦ \times ٣م = \frac{٢ + ٢ - ٨م}{٢}$$

$$\Leftarrow ٤٨م = ٤م \Leftarrow ٤٤م = صفر \Leftarrow م = صفر$$

تمارين: (١) أوجد قيمة ب التي تحقق شروط القيمة المتوسطة:

أ) $د(س) = س^{٣} - س^{٢}$ على $[-٣ ، ٢]$

الحل: الدالة متصلة على $[-٣ ، ٢]$ كثيرة حدود

$د'(س) = ٣س^{٢} - ٢س$ قابلة للاشتقاق على $]-٣ ، ٢[$

$$\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ} \Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ = \frac{(٩ - ٢٧-) - (٤ - ٨)}{٣ + ٢}$$

$$٣جـ^{٢} - ٢جـ = ٨ \Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ - \frac{٣٦ + ٤}{٥} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ - ٨ = صفر \Leftarrow (٣جـ + ٤)(جـ - ٢) = صفر$$

إما $٣جـ + ٤ = صفر \Leftarrow جـ = \frac{-٤}{٣} \ni]-٣ ، ٢[$

أو $جـ - ٢ = صفر \Leftarrow جـ = ٢ \ni]-٣ ، ٢[$

ب) $د(س) = لـو(س - ١)$ على $[٢ ، هـ + ١]$

الحل: الدالة متصلة على $[٢ ، هـ + ١]$

@abdagbowi

د(س) = $\frac{1}{س-1}$ قابلة للاشتقاق على]٢ ، هـ + ١[

$\Leftarrow$ الدالة محققة للقيمة المتوسطة $\Leftarrow$ د(ب) = $\frac{د(جـ)-د(أ)}{جـ-أ}$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{ب-1}$ = $\frac{لـو(هـ+1-1)-لـو(2-1)}{هـ+1-2}$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{ب-1}$ = $\frac{لـوهـ-لـو1}{هـ-1}$

$\frac{1}{ب-1}$ = $\frac{1-صفر}{هـ-1}$ $\Leftarrow$ ب - ١ = هـ - ١ $\Leftarrow$ ب = هـ $\ni$]٢ ، هـ + ١[

ت) د(س) = جتا٢س + س على [٠ ، π]

الحل: الدالة متصلة على [٠ ، π]

د(س) = -٢جا٢س + ١ قابلة للاشتقاق على]٠ ، π[

$\Leftarrow$ الدالة محققة للقيمة المتوسطة

د(ب) = $\frac{د(جـ)-د(أ)}{جـ-أ}$

$\Leftarrow$ -٢جا٢ب + ١ = $\frac{(جتا٢π+π)-(جتا٠+٠)}{π-٠}$

$\Leftarrow$ -٢جا٢ب + ١ = $\frac{1-π+1}{π}$

$\Leftarrow$ -٢جا٢ب + ١ = ١ $\Leftarrow$ -٢جا٢ب = صفر $\Leftarrow$ جا٢ب = صفر

$\Leftarrow$ ٢ب = صفر ومنه ب = صفر

@abdagbowl

ث) $د(س) = ٤س + \frac{٤}{س}$ على $[١ ، ٤]$

الحل: الدالة متصلة على $[١ ، ٤]$

$د'(س) = ٤ - \frac{٤}{س^٢}$ قابلة للاشتقاق على $]١ ، ٤[$

$\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ}$

$\Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^٢} = \frac{(٤ + ٤) - (١ + ١٦)}{٣} \Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^٢} = \frac{٨ - ١٧}{٣}$

$\Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^٢} = \frac{٩}{٣} \Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^٢} = ٣ \Leftarrow \frac{٤}{ب^٢} = -١$

$\Leftarrow ب^٢ = ٤ \Leftarrow ب = \pm ٢$

$ب = -٢$ مرفوض $\notin]١ ، ٤[\Leftarrow ب = ٢$

(٢) إذا كان $ب = ٣$ هي القيمة التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة

$د(س) = س^٣ - ٢س^٢$ على $[٠ ، جـ]$ فما قيمة $جـ$

الحل: $د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ}$

$\Leftarrow ٣ب^٢ - ٤ب = \frac{(جـ^٣ - ٢جـ^٢) - (\text{صفر} - \text{صفر})}{جـ - \text{صفر}}$

$\Leftarrow ٣ \times ٤ - ٩ = \frac{جـ^٣ - ٢جـ^٢}{جـ}$

$\Leftarrow ١٥ = \frac{جـ^٣ - ٢جـ^٢}{جـ} \Leftarrow ١٥جـ = جـ^٣ - ٢جـ^٢$

@abdaqbawi

$\Leftarrow$ جـ^{٣} − ٢جـ^{٢} − ١٥جـ = صفر $\Leftarrow$ جـ(جـ^{٢} − ٢جـ − ١٥) = صفر

إما جـ = صفر مرفوض (لماذا)

$\therefore$ (جـ − ٥)(جـ + ٣) = صفر $\Leftarrow$ جـ − ٥ = صفر $\Leftarrow$ جـ = ٥

أو جـ + ٣ = صفر $\Leftarrow$ جـ = −٣ مرفوض

(لأنه عندها سيكون الحد الأعلى للفترة أصغر من الحد الأدنى)

(٣) لتكن د(س) = س^{٢} + ل س تحقق شروط القيمة المتوسطة على [٠، ٣]

، د$'$(جـ) = ١ أوجد قيمة ل ، جـ الناتجة

الحل: لاحظ أن مسمى القيمة الناتجة جـ وعنده سوف نسمي الحد الأعلى ب

د$'$(جـ) = $\frac{\text{د(ب) − د(أ)}}{\text{ب − أ}}$ $\Leftarrow$ ١ = $\frac{\text{(٩ + ٣ل) − صفر}}{\text{٣ − صفر}}$

$\Leftarrow$ ٣ = ٩ + ٣ل $\Leftarrow$ ٣ل = −٦ $\Leftarrow$ ل = −٢

، د$'$(جـ) = ١

$\Leftarrow$ ٢جـ + ل = ١ بالتعويض عن ل في المعادلة

$\Leftarrow$ ٢جـ − ٢ = ١ $\Leftarrow$ ٢جـ = ٣ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{٣}{٢}$ $\ni$]٠، ٣[

(٤) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{م س}^{٢} - \text{س} + ١ & ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٣\text{س}^{٢} - \text{ل س} & ١ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

تحقق شروط القيمة المتوسطة أوجد قيمتي ل ، م

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة

$\therefore$ الدالة متصلة ، قابلة للاشتقاق

@abdagbowi

نبدأ بالاتصال $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^-} د(س)$

$\Leftarrow ٣ \times ١ - ل \times ١ = م \times ١ - ١ + ١ \Leftarrow م = ٣ - ل \leftarrow [١]$

ثم الاشتقاق $د'(س)^+ = د'(س)^-$

$\Leftarrow ٢م س - ١ = ٦س - ل \Leftarrow ٢م \times ١ - ١ = ٦ \times ١ - ل$

$٢م = ٦ - ل + ١ \Leftarrow ٢م = ٧ - ل \leftarrow [٢]$

$٣ - ل = م$ ، $٢م = ٧ - ل$ $\times -١$

$٣ - ل = م$

$-٢م = -٧ + ل$ بالجمع

$-م = -٤ \Leftarrow م = ٤$

بالتعويض عن م $\Leftarrow ٤ = ٣ - ل \Leftarrow -ل = ١ \Leftarrow ل = -١$

(٥) إذا كان $د(س) = س^٢ - ٥س + ٦$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على $[١ ، ٣]$ برهن أن $ب = \frac{١ + ٣}{٢}$

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة $\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(ج) - د(١)}{ج - ١}$

$\Leftarrow ٢ب - ٥ = \frac{(٦ + ١٥ - ٩) - (٦ + ١٥ - ١^٢)}{٣ - ١}$

$\Leftarrow ٢ب - ٥ = \frac{-(٦ + ١٥ - ١^٢)}{-(٣ - ١)} \Leftarrow ٢ب - ٥ = \frac{(٣ - ١)(٢ - ١)}{(٣ - ١)}$

$\Leftarrow ٢ب - ٥ = ١ - ٢$

$\Leftarrow ٢ب = ١ + ٣ \Leftarrow ب = \frac{١ + ٣}{٢}$

@abdagbowl

الدرس الثالث عشر: دراسة تغير الدالة من المشتقة الأولى

سبق وأن درسنا تزايد وتناقص الدالة في الصف الثاني علمي وذلك باستخدام القاعدة التالية: إذا كان $س_١ < س_٢$ ووجد أن $د(س_١) < د(س_٢)$ فإن الدالة تزايدية وإذا كان بين $س_١ < س_٢$ ووجد أن $د(س_١) > د(س_٢)$ فإن الدالة تناقصية واستخدمنا لذلك فكرة البناء.

مثال للتذكير بذلك: ادرس اطراد الدالة $د(س) = ٣س - ٤$ على ح

الحل: نفرض $س_١ < س_٢$

$\Leftarrow ٣س_١ < ٣س_٢ \Leftarrow ٣س_١ - ٤ < ٣س_٢ - ٤$

$\Leftarrow د(س_١) < د(س_٢)$ أي أن الدالة تزايدية

مثال: ادرس اطراد الدالة $د(س) = ٣ - ٤س$ على ح

الحل: $س_١ < س_٢ \Leftarrow -٤س_١ > -٤س_٢$

لاحظ قلب إشارة المتراجحة لأننا ضربنا × عدد سالب

$\Leftarrow ٣ - ٤س_١ > ٣ - ٤س_٢$

أي $د(س_١) > د(س_٢)$ ومنه الدالة تناقصية

ولكن هنا سوف ندرس تزايد وتناقص الدالة باستخدام المشتقة الأولى وقبل ذلك سوف ندرس كيفية إيجاد النقاط الحرجة.

النقاط الحرجة:

وهي النقاط التي تكون $د'(س)$ عندها مساوية للصفر أو النقاط التي مشتقة الدالة عندها غير معرفة.

@abdaqbowl

خطوات إيجاد النقاط الحرجة:

(١) نوجد $د'(س)$.

(٢) نضع $د'(س) =$ صـــفر .

(٣) نحل المعادلة لإيجاد قيم $س$ فتكون هي الحرجة.

(٤) إذا كانت $د'(س) \neq$ صـــفر ووجدت قيم المشتقة عندها غير معرفة فإن هذه القيم تكون حرجة.

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $د(س) = ٢س^{٢} - ٤س$

الحل: $د'(س) = ٤س - ٤$

$\Leftarrow د'(س) =$ صـــفر $\Leftarrow ٤س - ٤ =$ صـــفر

$\Leftarrow ٤س = ٤ \Leftarrow س = ١ \Leftarrow س = ١$ نقطة حرجة

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $د(س) = ٢س^{٣} + ٤س$

الحل: $د'(س) = ٦س^{٢} + ٤ \neq$ صفر (لماذا)

لأنه بوضعها $=$ صـــفر لا تحل (حقق ذلك بالنظر) ستجد أنه يظهر جذر عدد سالب أي غير معرفة على طول $ح$ بمعنى لا توجد نقاط حرجة

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

الحل: $د'(س) = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}} \neq$ صـــفر لأن المقام $\neq$ صـــفر

المشتقة غير معرفة عند $س = ١$

$\Leftarrow س = ١$ نقطة حرجة

والان كيفية دراسة التزايد والتناقص والقيم القصوى من المشتقة الأولى:

@abdaqbawi

(١) نوجد النقاط الحرجة.

(٢) ندرس التزايد والتناقص حول النقاط الحرجة بمعنى $د'(س)$ قبل وبعد النقاط الحرجة أي إذا كانت:

١/ $د'(س) >$ صـــفر قبل الحرجة فإن الدالة تناقصية في هذه الفترة.

٢/ $د'(س) <$ صـــفر قبل الحرجة فإن الدالة تزايدية في هذه الفترة.

(٣) بنفس الطريقة ندرس التزايد والتناقص بعد النقطة الحرجة وقبلها.

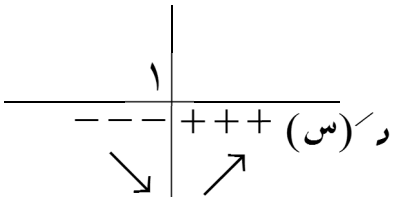
(٤) وبعد دراسة التزايد والتناقص يمكن تحديد النقاط القصوى وذلك إذا كان قبل النقطة الحرجة تزايد وبعدها تناقص فإن النقطة عظمى ويمكن إيجاد قيمتها بالتعويض عن النقطة الحرجة بالدالة الاصلية لإيجاد المركبة الصادية فلو كانت النقطة $(أ ، ب)$ مثلاً فإننا نقول يوجد نقطة عظمى أو صغرى عند $س = أ$ قيمتها $ص = ب$

مثال: ادرس تزايد وتناقص الدالة $د(س) = س^{٢} - ٢س$ وأوجد القيم القصوى أن وجدت

الحل: $د'(س) = ٢س - ٢ \Leftarrow د'(س) =$ صـــفر

$\Leftarrow ٢س - ٢ =$ صـــفر $\Leftarrow ٢س = ٢ \Leftarrow س = ١$

$\therefore س = ١$ حرجة



قبل $س = ١$ نجد أن $د'(س)$ سالبة

$\therefore$ الدالة تناقصية

بعد $س = ١$ نجد أن $د'(س)$ موجبة $\therefore$ الدالة تزايدية

قبل $س = ١$ سالبة وبعدها موجبة

@abdagbowl

⇐ عند س = ١ قيمة صغرى قيمها د(١) = ١^{٢} − ٢ × ١ = − ١ بمعنى

(١ ، − ١) نقطة صغرى

تمارين:

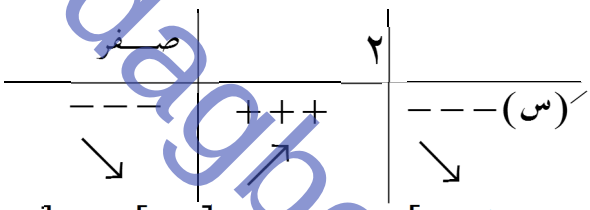
(١) إذا كانت د(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والحرجة

الحل: د´(س) = ٦س − ٣س^{٢} ⇐ د´(س) = صفر

⇐ ٦س − ٣س^{٢} = صفر ⇐ ٣س (٢ − س) = صفر

إما ٣س = صفر ⇐ س = صفر (حرجة)، ٢ − س = صفر

⇐ − س = − ٢ ⇐ س = ٢ (حرجة)



تناقص في الفترة]− ∞ ، صفر[،]٢ ، ∞[

تزايد في الفترة]صفر ، ٢[

صغرى عند س = صفر قيمتها د(٠) = ٠ أي النقطة (صفر ، صفر)

عظمى عند س = ٢ قيمتها د(٢) = ٤ أي النقطة (٢ ، ٤)

(٢) إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + س أوجد القيم القصوى والنقاط الحرجة إن أمكن للدالة على الفترة [١ ، ٢]

الحل: د´(س) = ٣س^{٢} − ٤س + ١ ⇐ د´(س) = صفر

@abdagbowi

$\Leftarrow 3س^{2} - 4س + 1 = صفر \Leftarrow (3س - 1)(س - 1) = صفر$

إما $3س - 1 = 0 \Leftarrow س = \frac{1}{3}$ (حرجة) $\notin [1، 2]$ تهمل

أو $س - 1 = 0 \Leftarrow س = 1$ (حرجة)

	١		٢	
$د'(س)$		++++ ↗		

$د'(س)$ بعد $س = 1$ وقبل $س = 2$ موجبة

($س$ الافتراضية بين ١، ٢ هي $\frac{3}{2}$)

الدالة تزايدية على طول الفترة $[1، 2]$

لا توجد قيم قصوى لأن الدالة لم تغير سلوكها في الفترة $[1، 2]$

(٣) أوجد القيم القصوى ونقاط الحرجة للدوال:

١) $د(س) = س^{4} - 2س^{2}$

الحل: $د'(س) = 4س^{3} - 4س \Leftarrow 4س^{3} - 4س = صفر$

$\Leftarrow 4س(س^{2} - 1) = صفر$

إما $4س = صفر \Leftarrow س = صفر$ (حرجة)

أو $س^{2} - 1 = صفر \Leftarrow س^{2} = 1 \Leftarrow س = \pm 1$ (حرجة)

	-1		صفر		١		
$د'(س)$	− − − ↘		+ + + ↗		− − − ↘		+ + + ↗

@abdaqbowi

صغرى عند س = −١ قيمتها صـ = −١ أي (−١، −١)

عظمى عند س = صفر قيمتها صـ = صفر أي (صفر، صفر)

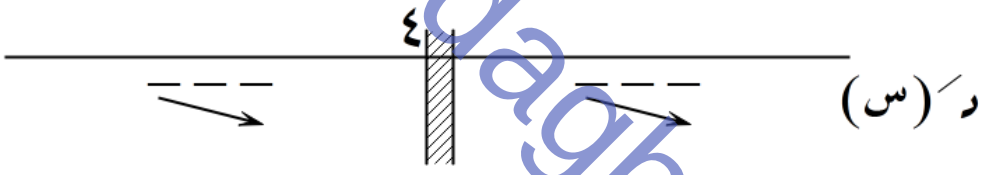
صغرى عند س = ١ قيمتها صـ = −١ أي (١، −١)

٢) د(س) = $\frac{٢س}{س - ٤}$

الحل: د´(س) = $\frac{١ \times (س - ٤) - ٢ \times ٢س}{(س - ٤)^{٢}}$

⇐ د´(س) = $\frac{٢س - ٨ - ٢س}{(س - ٤)^{٢}}$ ⇐ د´(س) = $\frac{-٨}{(س - ٤)^{٢}}$ ≠ ٠

المشتقة غير معرفة عند س = ٤ ∴ فهي حرجة



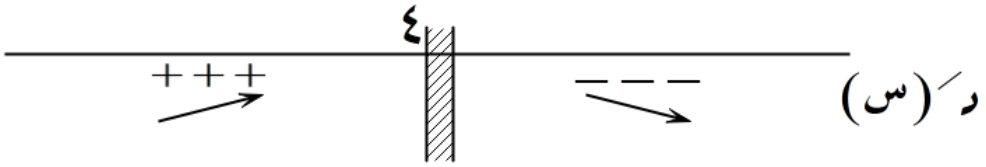
لا توجد قيم قصوى لاحظ التظليل عند س = ٤ لأن الدالة غير معرفة عندها أي د(٤) = ∞

٣) د(س) = $\frac{١}{(س - ٤)^{٢}}$

الحل: د´(س) = $\frac{-٢(س - ٤)}{(س - ٤)^{٤}}$ = $\frac{-٢}{(س - ٤)^{٣}}$ ≠ صفر

المشتقة غير معرفة عند س = ٤ ∴ فهي حرجة

@abdaghbowi



لا توجد قيم قصوى لأن تغير الدالة حول س = ٤ ولكن الدالة غير معرفة عندها

@abdagbowl

(٤) إذا كانت $د(س) = س^{٣} - ل\ س$ لها نقطة حرجة عند $س = ١$ أثبت أن

$ل = ٣$

الحل: نقطة حرجة $\Leftarrow د'(س) =$ صفر $\Leftarrow ٣س^{٢} - ل =$ صفر

$\Leftarrow ٣ \times ١^{٢} - ل =$ صفر $\Leftarrow ٣ - ل =$ صفر $\Leftarrow ل = ٣$

(٥) إذا كان $د(س) = ١٢ أ س - ٤س^{٢}$ قيمة صغرى عند $س = ١$ أوجد قيمة أ

الحل: قيمة صغرى أن أنها كانت حرجة

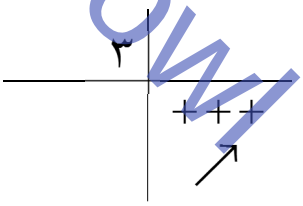
$\Leftarrow د'(س) =$ صفر $\Leftarrow ١٢أ - ٨س =$ صفر

$\Leftarrow ١٢أ - ٨ \times ١ =$ صفر $\Leftarrow ١٢أ = ٨ \Leftarrow أ = \frac{٢}{٣}$

(٦) الدالة $د(س) = لـو (س - ٣)$ تزايدية أم تناقصية على مجموعة تعريفها وضح ذلك.

الحل: م.ت لها $س - ٣ > ٠ \Leftarrow س > ٣$

أي $]٣، \infty[$ $\Leftarrow د'(س) = \frac{١}{س - ٣}$



أي أنها تزايدية لاحظ أننا درسنا الدالة بعد ٣ فقط (لماذا)

@abdagbawi

الدرس الرابع عشر: دراسة تغير الدالة من المشتقة الثانية

من المشتقة الثانية يمكن دراسة التزايد والتناقص (إذا كانت $د''(س) < صفر$ فإن الدالة تناقصية وإذا كانت $د''(س) > صفر$ فإن الدالة تزايدية) ولكن يفضل دراسة التزايد والتناقص من المشتقة الأولى لما سبق

ومن المشتقة الثانية ندرس التقعر والتحدب أو ما يسمى تقعر إلى أعلى وتقعر إلى أسفل ، ونقاط الانعطاف كالتالي:

(١) نوجد $د''(س)$ ونضع $د''(س) = صفر$ ونوجد س فتكون هي نقطة انعطاف إذا غيرت المشتقة سلوكها حول هذه النقطة أو كانت $د''(س)$ غير معرفة عند النقطة فإن النقطة انعطاف

(٢) إذا كانت $د''(س) < صفر$ فإن الدالة مقعرة إلى اعلى وإذا كانت $د''(س) > صفر$ فإن الدالة مقعرة لأسفل (محدبة)

مثال: ادرس التقعر والتحدب وأوجد نقاط الانعطاف إن وجدت للدوال:

(١) $د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢}$

الحل: $د'(س) = ٦س^{٢} - ٦س$

$د''(س) = ١٢س - ٦$ نضع $د''(س) = ٠$

$\Leftarrow ١٢س - ٦ = صفر \Leftarrow ١٢س = ٦ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\therefore س = \frac{١}{٢}$ انعطاف

	$\frac{١}{٢}$	
$د''(س)$	+ + +	− − −
	+	−

الدالة مقعرة لأسفل في الفترة $]-\infty ، \frac{١}{٢}[$

@abdaghbowi

الدالة مقعرة لأعلى في الفترة $\left]\frac{١}{٢}، \infty\right[$

(٢) $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

الحل: $د'(س) = \frac{-١}{(س-١)^{٢}}$ $\Leftarrow$ $د''(س) = \frac{٢(س-١)}{(س-١)^{٤}}$

$\Leftarrow$ $د''(س) = \frac{٢}{(س-١)^{٣}} \neq$ صفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ $\therefore$ فهي انعطاف

تحدب في الفترة $]-\infty، ١[$

تقعر في الفترة $]١، \infty[$

	١	
	−	+

تمارين: (١) أوجد نقاط الانعطاف وجد هل الدالة مقعرة أم محدبة:

١) $د(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}$

الحل: $د'(س) = ٤س^{٣} - ٤س$ ، $د''(س) = ١٢س^{٢} - ٤$

$د''(س) =$ صفر $\Leftarrow$ $١٢س^{٢} - ٤ =$ صفر

$\Leftarrow$ $١٢س^{٢} = ٤$ $\Leftarrow$ $س^{٢} = \frac{٤}{١٢}$ $\Leftarrow$ $س = \pm \frac{٢}{\sqrt{٣} \times ٢}$

$\Leftarrow$ $س = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$ انعطاف

	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$		$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	
	+	−		+

@abdagbowi

الدالة مقعرة في الفترة $\left]-\infty ، -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ ، $\left]\frac{1}{\sqrt{3}} ، \infty\right[$

الدالة محدبة $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}} ، \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

٢) $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$

الحل: $د'(س) = \frac{١ \times (س - ١) - ٢ \times (٢س - ٣)}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow د'(س) = \frac{٢س - ٢ - ٢س + ٣}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow د'(س) = \frac{١}{(س - ١)^{٢}} \Leftarrow د''(س) = \frac{-١ \times (٢)(س - ١)}{(س - ١)^{٤}}$

$\Leftarrow د''(س) = \frac{-٢}{(س - ١)^{٣}} \neq$ صفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

	١	
$د''(س)$	−	+

مقعرة في الفترة $]-\infty ، ١[$

محدبة في الفترة $]١ ، \infty[$

(٢) إذا كانت $د'(٢) = ٠$ ، $د''(٢) < ٠$ فإن $د(٢)$ هي .....

الحل: صغرى لأن $د''(٢) < ٠$

@abdagbowi

(٣) إذا كانت د ′(س) = ٦س − ٣س ٢ فإن منحنى الدالة مقعر نحو الأعلى في الفترة .....

الحل: هامش الحل د ″(س) = ٦ − ٦س ⇐ س = ١

	١	
د ″(س)	−	+

∴ مقعرة نحو الأعلى في الفترة]−∞ ، ١[

@abdagbowl

الدرس الخامس عشر: الفروع اللانهائية والمقاربات

في الفروع اللانهائية نجد أن:

(١) إذا كانت م . ت للدالة ع أي $]-\infty ، \infty[$ فإن لهذه الدالة فرعان لانهائيان.

(٢) إذا كانت م . ت للدالة ع / $\{أ\}$ فإن لهذه الدالة أربعة فروع لانهائية.

(٣) إذا كانت م . ت للدالة ع / $\{أ ، ب\}$ فإن لهذه الدالة ستة فروع لانهائية.

(٤) بعض الدوال ليس لها فروع إذا كانت م . ت لها لا تؤول إلى ∞ أو إلى $-\infty$

مثال: أوجد الفروع اللانهائية للدوال التالية:

(١) $د(س) = ٢س^{٢} - ٥س$

الحل: م.ت = ع (لماذا) $\Leftarrow$ للدالة فرعان

(٢) $د(س) = \frac{١}{س - ٣}$

الحل: م.ت للدالة ع / $\{٣\}$ $\Leftarrow$ للدالة أربعة فروع لانهائية

(٣) $د(س) = \frac{س}{س^{٢} - ٩}$

الحل: م.ت للدالة ع / $\{\pm ٣\}$

$\Leftarrow$ للدالة ستة فروع لانهائية

(٤) $د(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$

الحل: م.ت للدالة $[-٣ ، ٣]$ (حقق ذلك)

$\Leftarrow$ ليس للدالة فروع لانهائية

(٥) ما دون ذلك نكتفي بذكر وجود الفروع اللانهائية من عدمه.

@abdagbawi

تمارين: أذكر عدد الفروع اللانهائية أن وجدت:

(١) $د(س) = \frac{١}{س}$

الحل: م.ت $= ح / \{٠\}$ ⇐ للدالة أربعة فروع لانهائية

(٢) $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤}$

الحل: الدالة معرفة $\forall$ $س^{٢} - ٤ \geq ٠$

$س^{٢} = ٤$ ⇐ $س = \pm ٢$

+ + +	− − −	+ + +
٢		−٢

م.ت $=]-\infty ، -٢] \cup [٢ ، \infty[$ ⇐ يوجد للدالة فروع لانهائية

(٣) $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل: الدالة معرفة $\forall$ $٤ - س^{٢} \geq$ صفر

$س^{٢} = ٤$ ⇐ $س = \pm ٢$

− − −	+ + +	− − −
٢		−٢

م.ت $= [-٢ ، ٢]$ لا يوجد فروع لانهائية

(٤) $د(س) = ٢س^{٢} - ٤$

الحل: م.ت $= ح$ كثيرة حدود

⇐ للدالة فرعان لانهائيان

@abdagbowi

المقاربات: لإيجاد المقاربات نتبع الآتي:

(١) إذا كانت $\lim_{س \to ا} د(س) = \pm \infty$

فإن $س = ا$ معادلة مقارب رأسي

فمثلاً: $د(س) = \frac{٢}{س - ٥}$

نجد أن $\lim_{س \to ٥} د(س) = \infty$ وبذلك فإن $س = ٥$ معادلة المقارب الرأسي

(٢) إذا كان $\lim_{س \to \infty} د(س) = ب$

فإن $ص = ب$ معادلة المقارب الأفقي

فمثلاً: إذا كان $د(س) = \frac{٢س - ١}{٣س - ٤}$

فإن $\lim_{س \to \infty} د(س) = \frac{٢}{٣}$ وبالتالي فإن $ص = \frac{٢}{٣}$ معادلة المقارب الأفقي

(٣) إذا كان $\lim_{س \to \infty} د(س) = \pm \infty$ فإن للدالة مقارب مائل معادلته $ص =$ ناتج قسمة البسط على المقام وهذا خاص بالدوال الكسرية التي درجة بسطها تزيد عن درجة مقامها بدرجه.

فمثلاً: $د(س) = \frac{٢س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

$\lim_{س \to \infty} د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

نوجد معادلته

@abdagbowl

$$\begin{array}{r|l} ٢س^{٢} - ٤ & س - ٢ \\ \hline ٢س^{٢} - ٤س & ٢س + ٤ \\ \hline ٤س - ٤ \\ ٤س - ٨ \\ \hline ٤ \end{array}$$

معادلته $ص = ٢س + ٤$ ويمر بالنقطتين

س	٠	٢-
ص	٤	٠

$$د(س) = س + ٢ - \frac{١}{س - ١}$$ ،

نجد أن مقاربه مائل بالنظر معادلة هي $ص = س + ٢$

ويمر بالنقطتين

س	٠	٢-
ص	٢	٠

تمارين: (١) أوجد المقاربات للدوال التالية:

١) $د(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢}$

الحل: م.ت $= ح / \{٢\}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} د(س) = \infty \Leftarrow س = ٢$ معادلة مقارب رأسي

$\lim_{س \to \infty} د(س) = ١$ (لماذا) $\Leftarrow ص = ١$ مقارب أفقي

لا يوجد مقارب مائل لوجود المقارب الأفقي

٢) $د(س) = \frac{س^{٢} + ٣}{س - ٢}$

@abdagbowi

الحل: م.ت $= ع / \{٢\}$

$\lim_{س \to ٢} د(س) = \infty \Leftarrow س = ٢$ معادلة مقارب رأسي

، $\lim_{س \to \infty} د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

$$\begin{array}{r|l} س^{٢} + ٣ & س + ٢ \\ \hline \not{س^{٢}} - ٢س & \overline{س - ٢} \\ \hline ٢س + ٣ & \\ \not{٢س} - ٤ & \\ \hline ٧ & \end{array}$$

معادلة المائل $ص = س + ٢$ ويمر بالنقطتين

س	٠	٢-
ص	٢	٠

(٢) إذا كانت للدالة $د(س) = \frac{٢س - ٤}{أ س + ٣}$ مقارب أفقي $ص = ٢$ فإن أ =

.....

الحل: هامش الحل: $\frac{٢}{أ} = ٢ \Leftarrow أ = ١$

$\therefore$ الحل: أ $= ١ \Leftarrow أ = ١$

(٣) إذا كان $د(س) = س - ب + \frac{٥}{س - ١}$ مقارب مائل معادلته $ص = س + ٤$

فإن قيمة ب = ...

الحل: هامش الحل: بالمقارنة $\not{س} - ب = \not{س} + ٤$

$-ب = ٤ \Leftarrow ب = -٤$

@abdaabowi

∴ الحل: ب = – ٤

الدرس السادس عشر: دراسة تغير الدالة

خطوات دراسة تغير الدالة:

(١) إيجاد م . ت للدالة ومنه إيجاد الفروع اللانهائية والمقاربات.

(٢) إيجاد المشتقة الأولى ومنه إيجاد النقاط الحرجة ودراسة تزايد وتناقص الدالة وتحديد القيم القصوى أن وجدت.

(٣) إيجاد المشتقة الثانية ومنها إيجاد نقاط الانعطاف ودراسة التقعر والتحدب.

(٤) تحديد النقاط المساعدة.

(٥) رسم الجدول الكلي للدالة.

(٦) رسم الدالة.

تمارين: (١) ادرس تغير الدوال التالية ثم ارسم بيانها:

١) $د(س) = \frac{س}{س - ١}$

الحل: ١/ م . ت = ح / {١} ⇐ يوجد أربعة فروع لانهائية

$\lim_{س \to ١} د(س) = \infty$ ⇐ س = ١ معادلة مقارب رأسي

$\lim_{س \to \infty} د(س) = ١$ ⇐ ص = ١ مقارب أفقي – لا يوجد مقارب مائل

٢/ $د'(س) = \frac{١ \times س - ١ \times (س - ١)}{(س - ١)^{٢}} = \frac{س - ١ - س}{(س - ١)^{٢}}$

$د'(س) = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}} \neq$ صفر

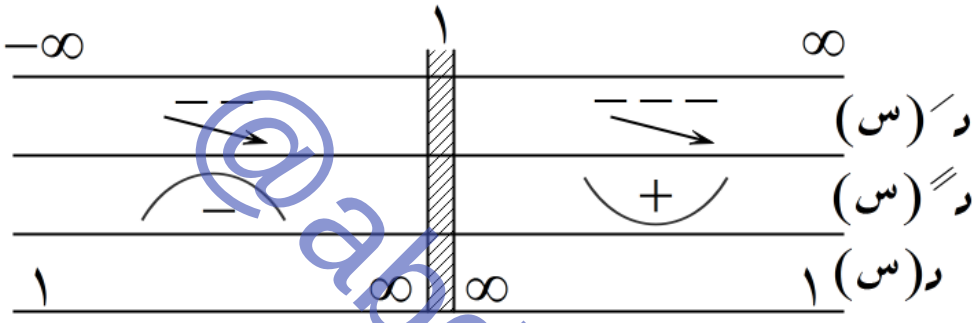
@abdagbowi

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي حرجة

٣/ $د''(س) = \frac{-١ \times ٢ (س - ١)}{(س - ١)^{٤}} = \frac{٢}{(س - ١)^{٣}} \neq ٠$

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

٤/ والجدول الكلي

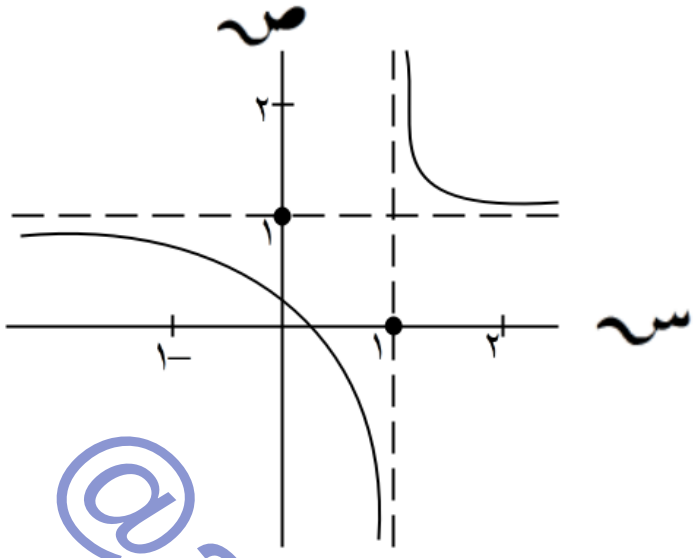


٥/ النقاط المساعدة

$(٢، ٢)، \left(-١، \frac{١}{٢}\right)، (صفر، صفر)$

٦/ الرسم

@abdagbowl



@abdagbowl

٢) $صـ = \frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$

الحل: ١/ م . ت $= ع / \{١\}$ ⇐ يوجد أربعة فروع لانهائية

$\lim_{س \to ١} د(س) = \infty$ ⇐ $س = ١$ مقارب رأسي

$\lim_{س \to \infty} د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

$$\begin{array}{r|l} س + ١ & \\ \hline س^{٢} + ٣ & س - ١ \\ \hline س^{٢} - س & \\ \hline س + ٣ & \\ س - ١ & \\ \hline ٤ & \end{array}$$

معادلته $صـ = س + ١$ ويمر بالنقطتين

س	٠	١-
ص	١	٠

٢/ $د'(س) = \frac{(س - ١)(٢س) - (س^{٢} + ٣)(١)}{(س - ١)^{٢}}$

$د'(س) = \frac{٢س^{٢} - ٢س - س^{٢} - ٣}{(س - ١)^{٢}}$

⇐ $د'(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{(س - ١)^{٢}} =$ صفر

⇐ $س^{٢} - ٢س - ٣ =$ صفر

⇐ $(س - ٣)(س + ١) =$ صفر

إما $س = ٣$ أو $س = -١$ نقاط حرجة

@abdagbowl

٣/ $د''(س) = \frac{(س-١)^{٢}(٢س-٢)-(س^{٢}-٢س-٣)\times ٢(س-١)}{(س-١)^{٤}}$

$د''(س) = \frac{(س-١)(٢)(س-١)^{٢}-٢(س^{٢}-٢س-٣)}{(س-١)^{٤}}$

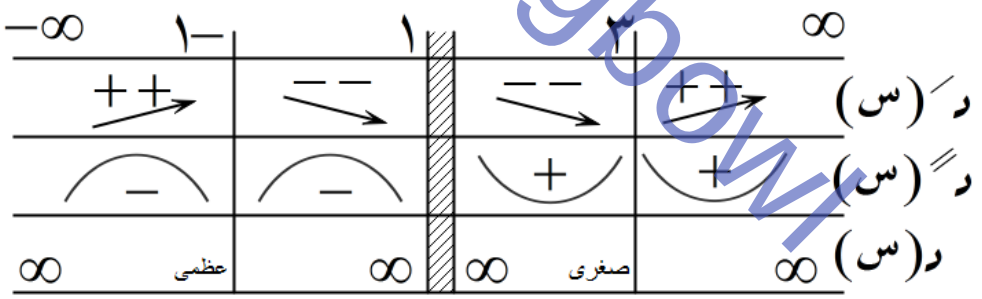
$\Leftarrow د''(س) = \frac{٢(س^{٢}-٢س+١)-٢(س^{٢}-٢س-٣)}{(س-١)^{٣}}$

$\Leftarrow د''(س) = \frac{٢س^{٢}-٤س+٢-٢س^{٢}+٤س+٦}{(س-١)^{٣}}$

$\Leftarrow د''(س) = \frac{٨}{(س-١)^{٣}} \neq$ صفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

٤/ الجدول الكلي:

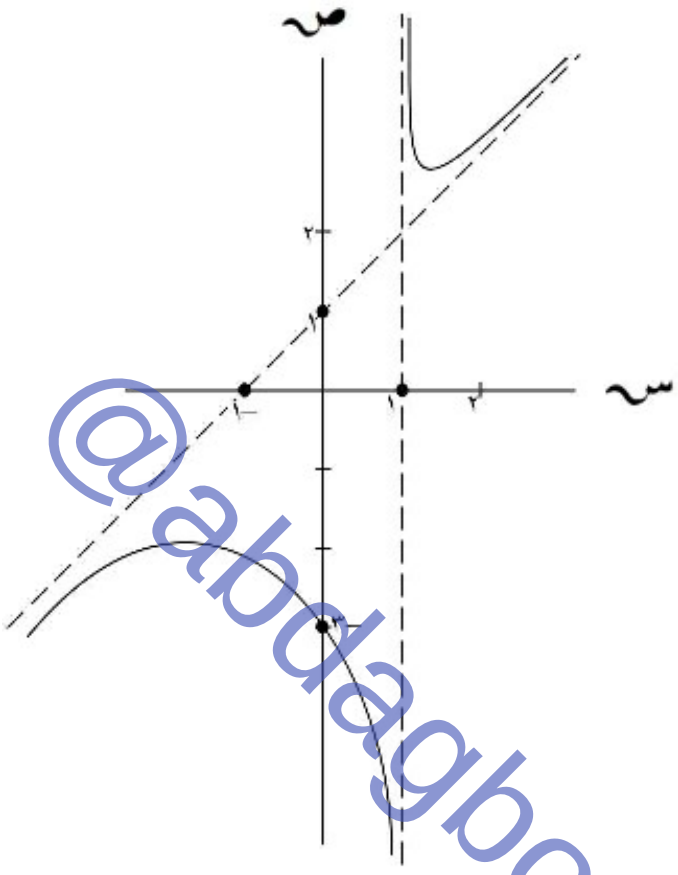


٥/ النقاط المساعدة:

$(٢، ٧)$ ، $(-٢، ٢,٥)$ ، (صفر ، -٣)

@abdagbowl

٦/ الرسم:



@abdagbowl

٣) $د(س) = \frac{١}{س - ١} + ٣ - س$

الحل: ١/ م . ت $= ح / \{١\}$ يوجد للدالة أربعة فروع لانهائية

$\lim_{س \to ١} د(س) = \infty \Leftarrow س = ١$ مقارب رأسي

من شكل الدالة لها مقارب مائل معادلته $ص = س - ٣$ ويمر بالنقطتين

س	٠	٣
ص	٣-	٠

٢/ $د'(س) = -\frac{١}{(س - ١)^{٢}} = -١ =$ صفر

$\Leftarrow -١ = -\frac{١}{(س - ١)^{٢}} \Leftarrow ١ = \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow (س - ١)^{٢} = ١ \Leftarrow (س - ١) = \pm ١$

إما $س - ١ = ١ \Leftarrow س = ٢$ حرجة

أو $س - ١ = -١ \Leftarrow س =$ صفر حرجة

٣/ $د''(س) =$ صفر $= \frac{-١ \times ٢ (س - ١)}{(س - ١)^{٤}}$

$\Leftarrow د''(س) = \frac{٢}{(س - ١)^{٣}} \neq$ صفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي نقطة انعطاف

@abdlagbowi

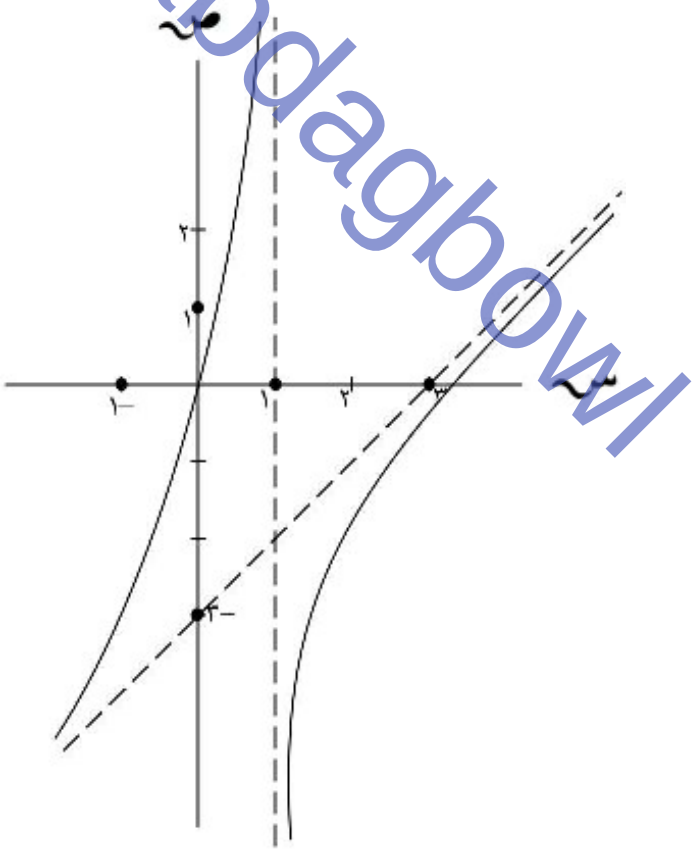
٤/ الجدول:

	$-\infty$	صفر	١	٢	∞
$د'(س)$		$++$	$--$	$--$	$++$
$د''(س)$		$-$	$-$	$+$	$+$
$د(س)$	∞	عظمى ∞	∞	صغرى ∞	∞

٥/ النقاط المساعدة:

$$\left(\frac{٨}{٩}، ٤\right)، (\text{صفر، صفر})، \left(-١، \frac{٣}{٤}\right)$$

٦/ الرسم:



@abdagbowl

٤) $د(س) = \frac{س}{س - ٢} - ٣$

الحل: ١/ م . ت $= ح / \{٢\}$ للدالة أربعة فروع لانهائية

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} د(س) = \infty \Leftarrow س = ٢$ مقارب رأسي

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} د(س) = ٢ \Leftarrow ص = ٢$ مقارب أفقي

لا يوجد مقارب مائل

٢/ $د'(س) = \frac{(١)(س - ٢) - (١)س}{(س - ٢)^{٢}} = -$ صـــفر

$\Leftarrow د'(س) = \frac{-٢}{(س - ٢)^{٢}} \neq$ صـــفر

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ٢$ فهي حرجة

٣/ $د''(س) = \frac{-(-٢ \times ٢)(س - ٢)}{(س - ٢)^{٤}} = \frac{٤}{(س - ٢)^{٣}} \neq$ صـــفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ٢$ فهي انعطاف

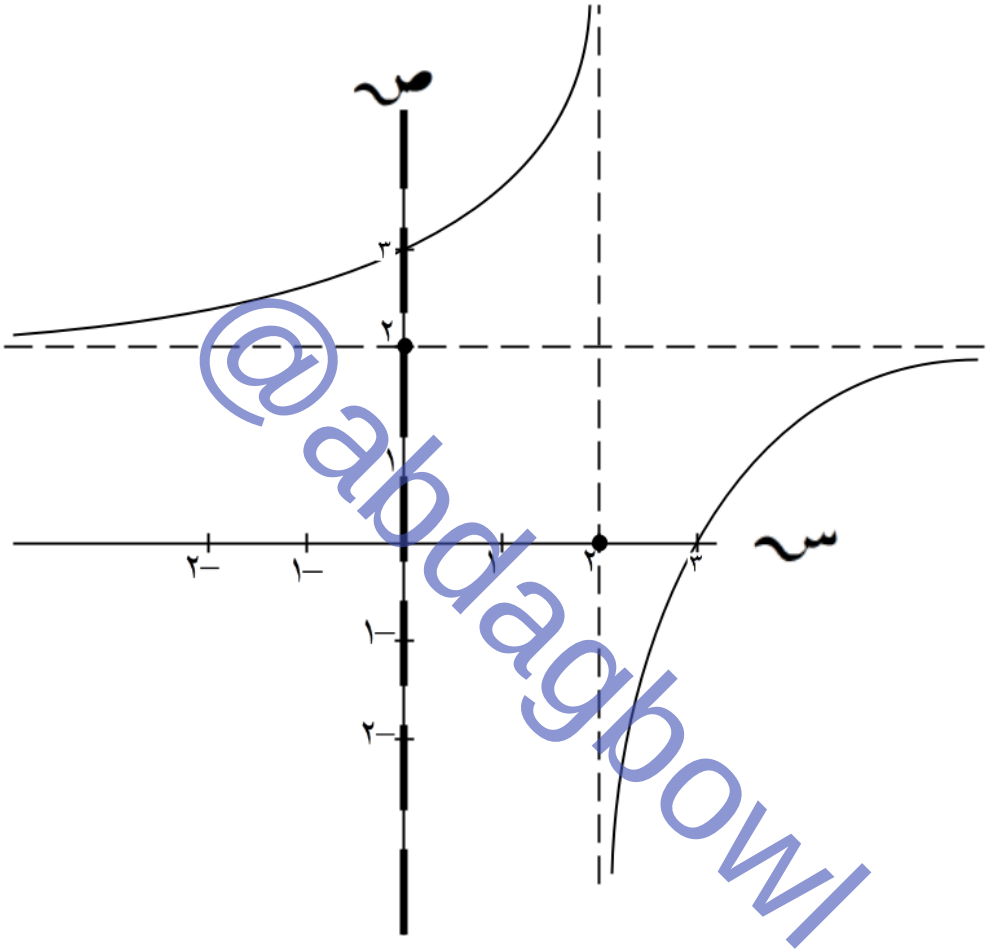
٤/ الجدول:

س	$-\infty$		٢		∞
$د'(س)$	$--$		غير معرفة	$---$	
$د''(س)$	$-$		غير معرفة	$+$	
$د(س)$	تناقص	∞	∞	تناقص	٢

@abaagbowi

٥/ النقاط المساعدة: (٣ ، ٠) ، (٤ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٠ ، ٣)

٦/ الرسم:



@abdagbowl

٥) $صـ = \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ١}$

الحل: ١/ م . ت $= ع / \{١\}$ يوجد أربعة فروع لانهائية

$\lim_{س \to ١} د(س) = \infty \Leftarrow س = ١$ مقارب رأسي

$\lim_{س \to \infty} د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

$$\begin{array}{r|l} س^{٢} - ٢س & س - ١ \\ \hline -(س^{٢} - س) & س - ١ \\ \hline -س + ١ & \\ -(-س + ١) & \\ \hline ٠ & \end{array}$$

معادلته $صـ = س - ١$ ويمر بالنقطتين

س	٠	١
ص	-١	٠

٢/ $د'(س) = \frac{(س - ١)(٢س - ٢) - (س^{٢} - ٢س)(١)}{(س - ١)^{٢}}$

$د'(س) = \frac{٢س^{٢} - ٤س + ٢ - س^{٢} + ٢س}{(س - ١)^{٢}}$

$د'(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ٢}{(س - ١)^{٢}} \neq$ صفر لان $\Delta <$ للبسط صفر

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي حرجة

@abdagbowl

/٣

$$د''(س) = \frac{(س-١)^{٢}(٢س-(٢-)) - (س^{٢}-٢س+٢)\times ٢(س-١)}{(س-١)^{٤}}$$

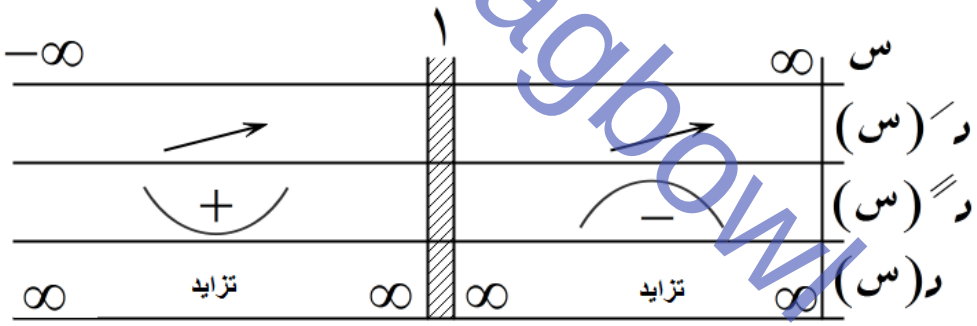
$$د''(س) = \frac{٢(س-١)^{٢} - ٢س^{٢} + ٤س - ٤}{(س-١)^{٣}}$$

$$\Leftarrow د''(س) = \frac{٢س^{٢} - ٤س + ٢ - ٢س^{٢} + ٤س - ٤}{(س-١)^{٣}}$$

$$\Leftarrow د''(س) = \frac{-٢}{(س-١)^{٣}} \neq صفر$$

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

٤/ الجدول:

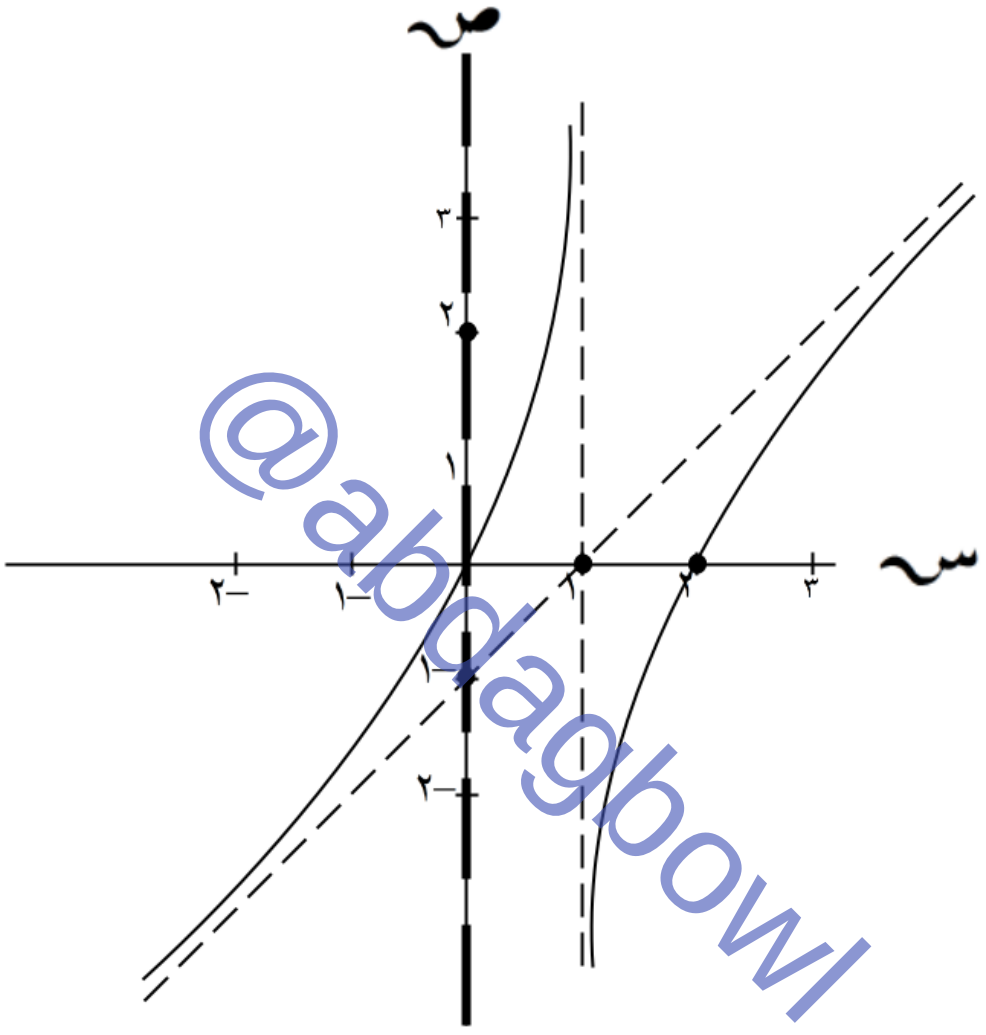


٥/ النقاط المساعدة:

$$(٢، ٠)، \left(٣، \frac{٣}{٢}\right)، (صفر، صفر)، \left(-١، -\frac{٣}{٢}\right)، -٢$$

@abdagbawi

٦/ الرسم:



@abdagbowl

٦) $ص = ١ - \frac{س + ٢}{س^{٢}}$

الحل: ١/ م.ت للدالة $= ح / \{٠\}$ ⇐ للدالة أربعة فروع لانهائية

$\lim_{س \to ٠} د(س) = \infty$ ⇐ $س =$ صفر مقارب رأسي أي محور $ص$ يصبح مقارب

$\lim_{س \to \infty} د(س) = ١$ ⇐ للدالة مقارب أفقي معادلته $ص = ١$

لا يوجد مقارب مائل

٢/

$د'(س) =$ صفر $= \frac{س^{٢} \times ١ - (س + ٢) \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{-س^{٢} - ٢س^{٢} + ٤س}{س^{٤}}$

$د'(س) = \frac{س^{٢} + ٤س}{س^{٤}}$ ⇐ $د'(س) = \frac{س(س + ٤)}{س^{٤}}$

$د'(س) = \frac{س + ٤}{س^{٣}} =$ صفر ⇐ $س + ٤ =$ صفر

$س = -٤$ نقطة حرجة

٣/ $د''(س) = \frac{س^{٣} \times ١ - (س + ٤) \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{س^{٣} - ١٢س^{٢} - ٣س^{٣}}{س^{٦}}$

$د''(س) = \frac{-٢س^{٣} - ١٢س^{٢}}{س^{٦}}$ ⇐ $د''(س) = \frac{-٢س^{٢}(س + ٦)}{س^{٦}}$

⇐ $د''(س) = \frac{-٢(س + ٦)}{س^{٤}} =$ صفر $س + ٦ =$ صفر

⇐ $س = -٦$ نقطة انعطاف

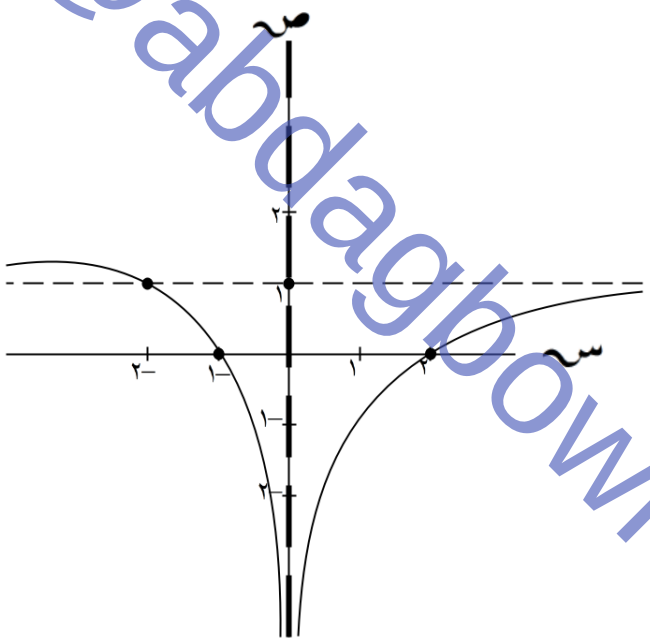
@abdaqbowi

٤/ الجدول الكلي:

س	$-\infty$		٦−		٤−		صفر		∞
د′(س)		++		++		−−		++	
د″(س)		+		−		−		−	
د(س)	١			عظمى	∞		∞	∞	

٥/ النقاط المساعدة: (١، −٢)، (٢، صـــفر) (، −١ صفر)

٦/ الرسم:



@abdagbowl

(٢) مستعيناً بالجدول التالي أكمل الفراغات:

س	$-\infty$		١		٠		-١		$-\infty$
$د'(س)$	+	٠	−	−		−	٠	+	
$د''(س)$		+					−		
$د(س)$	$-\infty$	-٣	∞	∞		$-\infty$	-٣	$-\infty$	

١) مجموعة تعريف الدالة .....

٢) الدالة تزايدية على .....

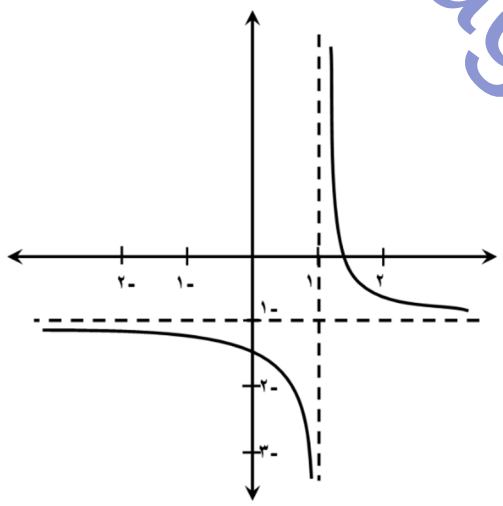
٣) منحنى الدالة مقعر نحو الأسفل في الفترة .....

٤) القيمة العظمى المحلية للدالة عند النقطة .....

الحل:

١) ح / $\{٠\}$ ٢) في الفترة $]١، \infty[$ ٣) $]-\infty، صفر[$ ٤) $(-١، -٣)$

(٣) مستعيناً بالرسم أكمل الفراغات:



١) معادلة المقارب الرأسي

$س =$ .....

٢) $\lim_{س \to \infty} د(س) =$ .....

٣) منحنى الدالة مقعر نحو الأسفل في الفترة .....

٤) منحنى الدالة يقطع السينات في .....

الحل:

١) $س = ١$ ٢) -١ ٣) $]-\infty، ١[$ ٤) $\frac{٣}{٢}$

@abdagbowl

تمارين إضافية على الاشتقاق:

(١) إذا كان د(س) = س^{٢} + ٢س + ٢ فإن بيان الدالة يقطع محور الصادات في النقطة ..... **الحل:** (صفر ، ٢)

(٢) إذا كان $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س + ١}$ فإن بيان الدالة يقطع محور السينات في النقطة ..... **الحل:** $= \left(٠، \frac{٣}{٢}\right)$

(٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٣س − ٤ فإن قيمة جـ الناتجة من تحقق مبرهنة رول في الفترة [−٤، ١] هي ..... ، قيمة جـ الناتجة من تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على نفس الفترة هي .....

الحل: الفراغ الأول $-\frac{٣}{٢}$ والفراغ الثاني $\frac{٣}{٢}$

(٤) إذا كان $د(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ فإن:

أ/ للدالة مقارب أفقي معادلته .....

ب/ للدالة مقارب رأسي معادلته .....

الحل: أ/ ص = ١ ب/ س = −٢

(٥) منحنى الدالة صـ = س^{٢} − ٢س مقعر إلى .....

الحل: نحو الاعلى (حقق ذلك)

(٦) إذا كان صـ = لـو قاس أوجد صـ$'$

الحل: $صـ' = \frac{قاس ظاس}{قاس} = ظاس$

@abdagbowi

(٧) إذا كان $هـ^{س ص} = ٢$ برهن أن $ص' = \frac{٢ص}{س^٢}$

الحل: بأخذ لوغارتم الطرفين

$س ص = لـو ٢ \Leftarrow ١ص + ص' س = ٠$

$س ص' = -ص \Leftarrow ص' = \frac{-ص}{س}$

$$\Leftarrow ص'' = \frac{-س ص' + ص \times ١}{س^٢} = \frac{-ص + \frac{-ص}{س} \times -س}{س^٢}$$

$$= \frac{ص + ص}{س^٢} = \frac{٢ص}{س^٢} = \text{الايسر}$$

(٨) إذا كانت للدالة $ص = ٢ أ س^٢ - ٣س$ نقطة انعطاف فإن قيمة أ = ...

الحل: أ = صفر

(٩) إذا كان $د(س) = هـ^{٣س} - لـو(٢س + ١)$ أوجد $د'(٠)$

الحل: $د'(س) = ٣ هـ^{٣س} - \frac{٢}{٢س + ١} \Leftarrow د'(٠) = ٣ \times هـ^{٠} - ٢ = ١$

(١٠) إذا كان $د(س) = جاس$ فإن $د(\pi) + د(-\pi) =$ .....

الحل: صفر (حقق ذلك)

(١١) لتكن $ص = هـ^{-١ س}$ أثبت أن $ص'' = ص$

الحل: $ص' = -هـ^{-١ س}$ ، $ص'' = -(-هـ^{-١ س}) = هـ^{-١ س} = ص$

@abdalbow

(١٢) إذا كان $صـ = \frac{١}{٣} ع^{٢} + ٤$ ، $ع = ٣س$ فأوجد قيمة س التي تجعل $\frac{ د ص}{ د س} = ٤$

الحل: $٤ = \frac{٢}{٣} ع \times ٣ \Leftarrow ٤ = \frac{٢}{٣} \times ٣ س \times ٣$

$\Leftarrow ٢ = ٣س \Leftarrow س = \frac{٢}{٣}$

(١٣) أوجد قيمة ا التي تجعل $صـ = ٤س + ا$ مماساً للدالة $د(س) = ٢ (س + ٢)^{٢}$

الحل: الشرط: ميل المستقيم = مشتقة الدالة

$\frac{-٤}{-١} = ٤ (س + ٢) \Leftarrow س = -١$

ومنه $صـ = ٢ (-١ + ٢)^{٢} = ٢$

$\therefore ٢ = ٤ \times -١ + ا \Leftarrow ٤ + ٢ = ا \Leftarrow ا = ٦$

(١٤) إذا كان $\frac{ د ص}{ د س}$ غير معرف عند نقطة معينة فإن المماس عند هذه النقطة يكون .....

الحل: موازياً لمحور الصادات

(١٥) إذا كان $صـ = (جاس)^{ظاس}$ أثبت أن $صـ` = صـ (١ + قا^٢ س لـو جاس)$

الحل:

$لـوص = ظاس لـوجاس \Leftarrow \frac{صـ`}{صـ} = ظاس \times \frac{جتاس}{جاس} + لـوجاس قا^٢ س$

@abdagbowl

$$\Leftarrow \frac{صـ'}{صـ} = ١ + قا^{٢}س \, لـوجاس \quad \Leftarrow صـ' = صـ\left(١ + قا^{٢}س \, لـوجاس\right)$$

(١٦) إذا كانت $سـ = \left(هـ^{س}\right)^{صـ}$ أثبت أن $س^{٢} \, ص'' + ٣ \, س \, ص' + ص =$ صفر

الحل: $لـو \, س = س صـ$ بأخذ لـو للطرفين

$$\Leftarrow صـ = \frac{لـوس}{س} \quad \Leftarrow صـ' = \frac{١ - لـوس}{س^{٢}} \quad \Leftarrow صـ'' = \frac{-٣ + ٢لـوس}{س^{٣}}$$

بالتعويض في المعادلة

$$= س^{٢} \times \frac{-٣ + ٢لـوس}{س^{٣}} + ٣س \frac{(١ - لـوس)}{س^{٢}} + \frac{لـوس}{س}$$

$$= \frac{٣}{س} + \frac{٢لـوس}{س} - \frac{٣}{س} + \frac{لـوس}{س} = \text{صفر}$$

(١٧) إذا كان $ر'(س) = هـ^{س} - س$ وكان للدالة $ر(س)$ نقطة انعطاف فإن

$س =$ ..... **الحل:** صفر

(١٨) إذا كان $صـ^{٢} - ٢\sqrt{س} =$ صفر أثبت أن $\frac{ص ٤}{س ٤} = \frac{١}{ص^{٣}}$

الحل: $٢ صـ صـ' - \frac{١}{\sqrt{س}} = ٠ \quad \Leftarrow صـ' = \frac{١}{٢\sqrt{س} \, صـ}$

$$\Leftarrow صـ'' = \frac{١}{صـ^{٢} \times صـ} = \frac{١}{صـ^{٣}} = \text{الايسر}$$

(١٩) إذا كان $صـ = ٢س - ٥ + \frac{١}{س - ١}$ فإن معادلة المقارب المائل هي .....

الحل: $صـ = ٢س - ٥$

@abualgbowl

(٢٠) إذا كان $صـ = هـ^{٢س}$ فإن $صـ'' - ٢صـ' = $ .....

الحل: صفر (حقق ذلك)

(٢١) وضح أن الدالة $د(س) = س + جاس$ ليس لها نقطة حرجة في $\left]٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

الحل: $د'(س) = ١ + جاس$ $\Leftarrow$ $١ + جاس = ٠$ $\Leftarrow$ $جاس = -١$

$\Leftarrow س = \frac{\pi ٣}{٢}$ ∉ $\left]٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

(٢٢) إذا كان $هـ^{صـ} = ٢^{س}$ أوجد $صـ''$

الحل: $هـ^{\frac{١}{ص}} = ٢^{س}$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{ص} = س \, لـو ٢$ $\Leftarrow$ $صـ = \frac{١}{س \, لـو ٢}$

$صـ' = \frac{-١}{س^{٢} \, لـو ٢}$ $صـ'' = \frac{-١}{لـو ٢} \times \frac{-١ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣} \, لـو ٢}$

(٢٣) إذا كان $صـ = س^{س}$ فما الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور الموجب لمحور السينات عند $(١ ، ١)$

الحل: $ظا هـ = د'(س)$ $\Leftarrow$ $س \, لـو ص = صـ \, لـو س$

$\Leftarrow ١ \, لـو ص + \frac{ص'}{ص} \times س = صـ' \, لـو س + \frac{صـ}{س}$

$\Leftarrow لـو ١ + صـ' \times \frac{١}{١} = صـ' \times لـو ١ + \frac{١}{١}$

$\Leftarrow$ صفر $+ صـ' = ١$ $\Leftarrow$ $صـ' = ١$

@abdagbowi

ظاهـ = ١ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

(٢٤) إذا كان د(س) = أ $هـ^{س}$ ، ر(س) = لـوس أثبت أن
(د ○ ر)$'$(س) = أ

الحل: (د ○ ر)$'$(س) = د$'$(ر(س)) × ر$'$(س)

= أ $هـ^{لـوس}$ × $\frac{١}{س}$ = أ س × $\frac{١}{س}$ = أ = الايسر

(٢٥) إذا كان للدالة د(س) = ٤س^{٢} + أ^{٣} جتاس نقطة انعطاف عند س = صفر
أثبت أن قيمة أ = ٢

الحل: د$'$(س) = ٨س − أ^{٣} جاس

د$''$(س) = ٨ − أ^{٣} جتاس

⇐ ٨ − أ^{٣} جتاس = صفر

⇐ − أ^{٣} × ١ = − ٨ ⇐ أ^{٣} = ٨ ⇐ أ = ٢

(٢٦) إذا كان صـ = (٢٧ − أ^{٢}) جاع ، ع = جتاس $\frac{د صـ}{د س}$ = − ١٢ عند
س = $\frac{\pi ٣}{٢}$ فأوجد أ

الحل: − ١٢ = (٢٧ − أ^{٢}) جتاع × − جاس

⇐ − ١٢ = (٢٧ − أ^{٢}) جتا (جتاس) × − جاس

⇐ − ١٢ = (٢٧ − أ^{٢}) جتا $\frac{\pi ٣}{٢}$ × − جا صفر

⇐ − ١٢ = (٢٧ − أ^{٢}) ⇐ − ١٢ = ٢٧ − أ^{٢}

@abdagbowl

$\Leftarrow أ^{٢} - ١٧أ + ١٢ = صفر \Leftarrow أ = ٤$ ، $أ = ٣$

(٢٧) إذا كانت للدالة $د(س) = س^{٢} - ١٢ س$ قيمة قصوى عند $س = ب$ فإن $ب =$ ..... **الحل:** $= ٦$ (حقق ذلك)

(٢٨) إذا كانت $د(س) = هـ^{كـ س}$ ، $د'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = -٤$ فإن $كـ =$ .....

الحل: $= ٤$ (حقق ذلك)

@abdagbowl

٢

التكامل

@abdagbowl

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

قوانين سابقة قد تحتاجها في التكامل

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ت(س)} = \frac{\text{معامل أكبر درجة في البسط}}{\text{معامل أكبر درجة في المقام}}$ وذلك عندما تكون درجة البسط = درجة المقام

(٢) لإكمال المربع نقوم بإضافة مربع نصف معامل الحد الأوسط

فمثلاً: لإكمال $د(س) = س^{٢} + ٢س$ نقوم بإضافة $\left(\frac{٢}{٢}\right)^{٢} = ١$

ليصبح: $د(س) = \left(س^{٢} + ٢س + ١\right) - ١ = (س + ١)^{٢} - ١$ ونحتاج لهذه الفكرة عند بناء الدوال.

(٣) $هـ^{س لو ا} = هـ^{لو ا^{س}} = ا^{س}$

(٤) $١ + ظا^{٢}هـ = قا^{٢}هـ$ ، $١ + ظتا^{٢}هـ = قتا^{٢}هـ$

$\frac{١}{جتا^{٢}س} = قا^{٢}س$ ، $\frac{١}{جا^{٢}س} = قتا^{٢}س$

(٥) $\sqrt[ن]{ص} = ص^{\frac{١}{ن}}$ فمثلاً $\sqrt{ص} = ص^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{ص} = ص^{\frac{١}{٣}}$

(٦) $ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$ ، $ظتاس = \frac{١}{ظتاس}$ ، $\frac{١}{ظاس} = \frac{جتاس}{جاس}$

(٧) $جا٢س = ٢جاس\ جتاس$ ، $جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س$ ، $جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س$

(٨) $جتا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ + جتا٢س)$ ، $جا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)$

(٩) $(ظاس)' = قا^{٢}س$ ، $(ظتاس)' = -قتا^{٢}س$ ، $(قاس)' = قاس\ ظاس$

$(قتاس)' = -قتاس\ ظتاس$ ، $(جاس)' = جتاس$ ، $(جتاس)' = -جاس$

@abdagbowi

(١٠) ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل الناظم}}$ ، لـو هـ = ١ ، لـو ١ = ٠ ، هـ^{٠} = ١

(١١) إذا كانت جتاس = ٠ $\Leftarrow$ س = كπ + $\frac{\pi}{٢}$

وإذا كانت جاس = ٠ $\Leftarrow$ س = كπ

(١٢) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $(أ^{ر})^{ن} = أ^{ر ن}$ ، $أ^{ر} \times أ^{ن} = أ^{ر+ن}$ ، $أ^{ر-ن} = \frac{أ^{ر}}{أ^{ن}}$

(١٣) تحويل حاصل الضرب إلى مجموع أو فرق:

جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جا(س + ص) + جا(س − ص))

جتاس جاص = $\frac{١}{٢}$ (جا(س + ص) − جا(س − ص))

جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س + ص) + جتا(س − ص))

جاس جاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س + ص) − جتا(س − ص))

(١٤) جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتاس) ، جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتاس)

@abdagbowl

الدرس الأول: التكامل بالتعريف

يستخدم الرمز مجـ للدلالة على المجموع فمثلاً $\overset{٣}{\underset{ر=٠}{مجـ}}$ جميع الأعداد الطبيعية من

صفر إلى ٣ أي $\overset{٣}{\underset{ر=٠}{مجـ}} ر = ٠ + ١ + ٢ + ٣ = ٦$

، $\overset{٦}{\underset{ر=٢}{مجـ}} ر = ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$

وبالتالي فإن: (١) $\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

(٢) $\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

(٣) $\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ر^{٣} = \frac{ن^{٢}(ن+١)^{٢}}{٤}$

وتؤخذ هذه القواعد كمسلمات سوف نستخدمها في إيجاد التكامل بطريقة التعريف (مجموع ريمان)

(٤) $\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} (س + ص) = \overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} س + \overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ص$

(٥) $\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ا = ن ا$ حيث ا ثابت

(٦) $\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ا س = ا \overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} س$

@abdagbawi

(٧) الحساب التقريبي لمساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات

(التكامل بالتعريف) يعطى بالعلاقة:

$$\text{سط}_{ا}^{ب} = \int_{ا}^{ب} د(س)\,ءس = ل = \lim_{ن\to\infty} \sum_{ر=١}^{ن} \Delta س_ر \times د(س_ر^*)$$

حيث $\Delta س_ر = \frac{ب-ا}{ن}$ ، $س_ر^* = ا + ر \times \frac{ب-ا}{ن}$

مثال: أوجد $\int_{١}^{٣} ٢س\,ءس$ بطريقة التعريف

الحل: $\Delta س_ر = \frac{ب-ا}{ن} = \frac{٣-١}{ن} = \frac{٢}{ن}$

$$س_ر^* = ا + ر \times \frac{ب-ا}{ن} = ١ + ر\frac{٢}{ن}$$

$$، د(س_ر^*) = ٢\left(١ + ر\frac{٢}{ن}\right) = ٢ + ر\frac{٤}{ن}$$

$$\Leftarrow ل = \lim_{ن\to\infty} \sum_{ر=١}^{ن} \Delta س_ر \times د(س_ر^*)$$

$$= \lim_{ن\to\infty} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٢}{ن} \times \left(٢ + ر\frac{٤}{ن}\right) \Leftarrow ل = \lim_{ن\to\infty} \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(٢ + ر\frac{٤}{ن}\right)$$

$$\Leftarrow ل = \lim_{ن\to\infty} \frac{٢}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ٢ + \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر \right)$$

$$\Leftarrow ل = \lim_{ن\to\infty} \frac{٢}{ن} \left(ن \times ٢ + \frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)$$ وبالنظر $\Leftarrow ل = ٤ + ٤ = ٨$

@abdagbowi

تمارين:

(١) باستخدام تعريف التكامل المحدود (تكامل ريمان) احسب ما يأتي:

١) $\int_{١}^{٣} ٢س \, ءس$ سبق حلها ف الأمثلة وحلها النهائي $= ٨$

٢) $\int_{-٢}^{٠} (س+١)^{٢} \, ءس$

الحل: $\Delta س_ر = \frac{\text{صفر} + ٢}{ن} = \frac{٢}{ن}$ ، $س_ر^* = -٢ + \frac{٢}{ن} ر$

$د(س_ر^*) = \left(-٢ + \frac{٢}{ن} ر + ١\right)^{٢} = \left(-١ + \frac{٢}{ن} ر\right)^{٢} = ١ - \frac{٤}{ن} ر + \frac{٤}{ن^{٢}} ر^{٢}$

$\Leftarrow ل = \lim_{ن \to \infty} \frac{٢}{ن} \left(١ - \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر + \frac{٤}{ن^{٢}} \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢}\right)$

$\Leftarrow ل = \lim_{ن \to \infty} \frac{٢}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ١ - \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر + \frac{٤}{ن^{٢}} \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢}\right)$

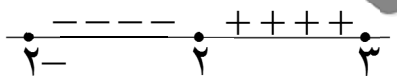
$ل = \lim_{ن \to \infty} \frac{٢}{ن} \left(١ \times ن - \frac{٤}{ن} \left(\frac{ن(ن+١)}{٢}\right) + \frac{٤}{ن^{٢}} \left(\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}\right)\right)$

بالنظر $\Leftarrow ل = ٢ - ٤ + \frac{١٦}{٦} = ٢ - \frac{١٦}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٣) $\int_{-٢}^{٣} |س - ٢| \, ءس$

الحل: $س - ٢ =$ صفر $\Leftarrow س = ٢ \in [-٢ ، ٣]$ تؤخذ ضمن التكامل

@abdagbowl



$$\Leftarrow ل = \int_{-٢}^{٢} -(س-٢)\,ى س + \int_{٢}^{٣} (س-٢)\,ى س$$

نفرض $ل_١ = \int_{-٢}^{٢} -س+٢\,ى س$ ، $ل_٢ = \int_{٢}^{٣} س-٢\,ى س$ ونوجد كلاً منهما

أولاً $ل_١$: $\Delta س_ر = \frac{٢+٢}{ن} = \frac{٤}{ن}$ ، $س_ر^* = -٢ + ر\frac{٤}{ن}$

$$د(س_ر^*) = -\left(-٢ + ر\frac{٤}{ن}\right) + ٢ = ٢ - ر\frac{٤}{ن} = ٤ - ر\frac{٤}{ن}$$

$$ل_١ = \int_{-٢}^{٢} د(س)\,ى س = \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٤}{ن} \text{مجـــ}_{ر=١}^{ن} \left(٤ - ر\frac{٤}{ن}\right)$$

$$\Leftarrow ل_١ = \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٤}{ن}\left(\text{مجـــ}_{ر=١}^{ن} ٤ - \frac{٤}{ن}\text{مجـــ}_{ر=١}^{ن} ر\right)$$

$$\Leftarrow ل_١ = \text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{٤}{ن}\left(٤ن - \frac{٤}{ن}\times\frac{(ن)(ن+١)}{٢}\right) \Leftarrow ل_١ = ١٦ - ٨ = ٨$$

الان نوجد $ل_٢ = \int_{٢}^{٣} س-٢\,ى س$

$$\Delta س_ر = \frac{٣-٢}{ن} = \frac{١}{ن} \text{ ، } س_ر^* = ٢ + ر\frac{١}{ن}$$

$$د(س_ر^*) = ٢ - \left(ر\frac{١}{ن} + ٢\right) = ر\frac{١}{ن}$$

@abdlagbowl

$$ل_{٢} = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} \left(ر \frac{١}{ن} \right) \frac{١}{ن} \times \frac{١}{ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ن^{٢}} \left(\frac{ن(ن+١)}{٢} \right) \Leftarrow ل_{٢} = \frac{١}{٢}$$

ومنه $ل = ل_{١} + ل_{٢} = ٨ + \frac{١}{٢} = \frac{١٦+١}{٢} = \frac{١٧}{٢}$

(٢) باستخدام تعريف التكامل أثبت أن:

١) $\int_{أ}^{ب} ج \, دس = ج(ب - أ)$

الحل: $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = أ + ر\frac{ب - أ}{ن}$ ، $د(س_{ر}^{*}) = ج$

$$ل = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=١}^{ن} ج \frac{ب - أ}{ن} = \lim_{ن \to \infty} ن ج \frac{ب - أ}{ن}$$

$$\Leftarrow ل = ن ج \frac{ب - أ}{ن} = ج(ب - أ) = \text{الايسر}$$

٢) $\int_{أ}^{ب} س \, دس = \frac{ب^{٢} - أ^{٢}}{٢}$

الحل: $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = أ + ر\frac{ب - أ}{ن}$

، $د(س_{ر}^{*}) = أ + ر\frac{ب - أ}{ن}$

@abdalgbowri

$$\Leftarrow \text{ل} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \left(\text{ا} + \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \text{ر} \right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ا} + \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} \right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \left(\text{ن ا} + \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{ن} (\text{ن} + 1)}{2} \right) \right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \text{ا} (\text{ب} - \text{ا}) + \frac{(\text{ب} - \text{ا})(\text{ب} - \text{ا})}{2} = (\text{ب} - \text{ا}) \left(\text{ا} + \frac{(\text{ب} - \text{ا})}{2} \right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = (\text{ب} - \text{ا}) \left(\frac{2\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}}{2} \right) = \frac{(\text{ا} + \text{ب})}{2} (\text{ب} - \text{ا})$$

$$= \frac{\text{ب}^2 - \text{ا}^2}{2} = \text{الايسر}$$

(٣) أثبت أن $\int_{-2}^{4} (\text{س}^2 + \text{س} + 1) \, \text{د س} = 36$ بطريقة التعريف

الحل: $\Delta \text{س}_\text{ر} = \frac{4 + 2}{\text{ن}} = \frac{6}{\text{ن}}$ ، $\text{س}_\text{ر}^* = -2 + \text{ر} \frac{6}{\text{ن}}$

$$\text{د}(\text{س}_\text{ر}^*) = \left(-2 + \text{ر} \frac{6}{\text{ن}} \right)^2 + \left(-2 + \text{ر} \frac{6}{\text{ن}} \right) + 1$$

$$\text{د}(\text{س}_\text{ر}^*) = 4 - \frac{24}{\text{ن}} \text{ر} + \frac{36}{\text{ن}^2} \text{ر}^2 - 2 + \frac{6}{\text{ن}} \text{ر} + 1$$

$$\text{د}(\text{س}_\text{ر}^*) = 3 - \frac{18}{\text{ن}} \text{ر} + \frac{36}{\text{ن}^2} \text{ر}^2$$

@abdagbowi

$$ل = \lim_{ن \to \infty} \frac{٦}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ٣ - \frac{١٨}{ن} ر + \frac{٣٦}{ن^٢} ر^٢ \right)$$

$$ل = \lim_{ن \to \infty} \frac{٦}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ٣ - \frac{١٨}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر + \frac{٣٦}{ن^٢} \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ \right)$$

$$ل = \lim_{ن \to \infty} \frac{٦}{ن} \left(٣ \times ن - \frac{١٨}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} + \frac{٣٦}{ن^٢} \times \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} \right)$$

بالنظر $ل = ٣ - ١٨ + ٥٤ + ٧٢$

$\Leftarrow ل = - = ٣٦ + ٧٢ = ٣٦$

@abdagbowl

الدرس الثاني: قواعد على التكامل المحدود

(١)إذا كانت الدالة معرفة على [ا، ب] فإننا نقول انها قابلة للتكامل على [ا، ب] (كموله)

(٢) إذا كانت الدالة متصلة على [ا، ب] فإننا نقول أنها قابلة للتكامل على [ا، ب] (كموله)

فمثلاً: $\int_{-١}^{٣} س^{\frac{٢}{٣}}\ ءس$ ، $\int_{-٣}^{٠} \frac{ءع}{ع-١}$ ، $\int_{-٥}^{٠} |ص|\ ءص$ كلها دوال كمولة

بينما $\int_{-٢}^{٤} \sqrt{س-١}\ ءس$ ، $\int_{١}^{٢} \frac{١}{ع-١}\ ءع$ غير كموالتين

لأن الأولى تعطي قيم سالبة تحت الجذر أي غير معرفة عند فترة التكامل والثانية تعطي صفر في المقام عند ع = ١ أي غير معرفة عند ع = ١ وبالتالي غير معرفة على فترة التكامل.

(٣) إذا كان جـ عدد ثابت فإن $\int_{ا}^{ب} جـ\ ءس = جـ(ب-ا)$

فمثلاً: $\int_{٢}^{٤} ٥\ ءس = ٥(٤-٢) = ٥ \times ٢ = ١٠$

، $\int_{١}^{٢} جا\frac{\pi}{٤}\ ءس = جا\frac{\pi}{٤}(٢-١) = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $\int_{ب}^{٤} ا\ ءس = ا(٤ - \text{صفر}) = ٤ا$

@abdagbowl

(٤) إذا كانت د(أ) موجودة فإن $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ﻫس = $ صفر

فمثلاً: $\int_{٥}^{٥} هـ^{س^٢}\,ﻫس = $ صفر بالنظر

(٥) $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\,ﻫس$

فمثلاً: $\int_{٥}^{٢} ١٠\,ﻫس = -\int_{٢}^{٥} ١٠\,ﻫس = -١٠(٥-٢) = -٣٠$

(٦) $\int_{أ}^{ب} ك\,د(س)\,ﻫس = ك\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس$ ، ك ثابت

فمثلاً: $\int_{٢}^{٢} ٥\,لـوس^٢\,ﻫس = ٥\int_{٢}^{٢} لـوس^٢\,ﻫس = ٥ \times$ صفر = صفر

(٧) $\int_{أ}^{ب} د_١(س) \mp د_٢(س)\,ﻫس = \int_{أ}^{ب} د_١(س)\,ﻫس \mp \int_{أ}^{ب} د_٢(س)\,ﻫس$

(٨) إذا كانت د(س) كموله على [أ، ب] وكان أ < جـ < ب

فإن $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,ﻫس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ﻫس$

فمثلاً: إذا كانت $\int_{١}^{٣} د(س)\,ﻫس = ٢$ ، $\int_{٣}^{١} د(س)\,ﻫس = ٧$ ، $\int_{٣}^{١} هـ(س)\,ﻫس = ٨$

@abdlagbowl

فإن $\int_{٣}^{٠} [٣د(س) - هـ(س)] ى س = ٣ \int_{٣}^{٠} د(س) ى س - \int_{٣}^{٠} هـ(س) ى س$

$= ٣ \int_{٣}^{٠} د(س) ى س - \int_{٣}^{٠} هـ(س) ى س = ٣ \times ٧ - ٨ = ٢١ - ٨ = ١٣$

$\because \int_{١}^{٣} د(س) ى س = \int_{١}^{٠} د(س) ى س - \int_{٣}^{٠} د(س) ى س$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} د(س) ى س = ٢ - ٧ = -٥$

تمارين: أكمل الفراغات التالية: (١) $\int_{١}^{١٢} ٣ ى س =$ .....

هامش الحل: $= ٣(١٢ - ١) = ٣(١١) = ٣١$ ∴ الحل: ٣١

(٢) $\int_{٢}^{٣} جا \frac{\pi}{٦} ى س =$ .....

هامش الحل: $جا \frac{\pi}{٦} (٣ - ٢) = \frac{١}{٢} (١) = \frac{١}{٢}$ ∴ الحل: $\frac{١}{٢}$

(٣) $\int_{٢}^{٢} هـ^{جا س^{٢}} ى س =$ .....

هامش الحل: لان الحد الأدنى للتكامل = الحد الأعلى للتكامل مباشرتاً التكامل

= صفر ∴ الحل: صفر

@abdagbowl

(٤) إذا كان $\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس = ٩$ ، $\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس = ٤$ فإن $\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس =$ .....

هامش الحل: $\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{١}^{٣} د(س)\,ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس$

بالتعويض $٩ = ٤ + \int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس \Leftarrow$ $\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = ٩ - ٤ = ٥$

∴ الحل: ٥

(٥) إذا كان $\int_{٢}^{٧} د_١(س)\,ءس = ١٢$ وكان $\int_{٧}^{٢} د_٢(س)\,ءس = -٤$

فإن $\int_{٢}^{٧} د_١(س) - ٣\,د_٢(س)\,ءس =$ .....

هامش الحل: $\int_{٢}^{٧} د_١(س) - ٣\,د_٢(س)\,ءس$

$= \int_{٢}^{٧} د_١(س)\,ءس - ٣ \int_{٢}^{٧} د_٢(س)\,ءس$

$= \int_{٢}^{٧} د_١(س)\,ءس + ٣ \int_{٧}^{٢} د_٢(س)\,ءس = ١٢ + ٣ \times -٤ =$ صـــفر

∴ الحل: صفر

(٦) إذا كان $\int_{٥}^{١} د(س)\,ءس = ٢٠$ فإن $\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس =$ .....

@abdagbowl

هامش الحل: $\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس = -\int_{٥}^{١} د(س)\,ءس = -\times ٢٠ = -٢٠$

∴ الحل: -٢٠

(٧) إذا كان $\int_{١}^{٩} د(س)\,ءس = ٣٥$ وكان $\int_{١}^{٥} د(س) = ٢$

فإن: ١) $\int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس =$ .....

هامش الحل: $\int_{١}^{٩} د(س)\,ءس = \int_{١}^{٥} د(س)\,ءس + \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس$

$\Leftarrow ٣٥ = ٢ + \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس \Leftarrow \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس = ٣٣$ ∴ الحل: ٣٣

٢) $\int_{٥}^{٩} ٢\,د(س)\,ءس =$ .....

هامش الحل: $= ٢\int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس = ٢ \times ٣٣ = ٦٦$

(٨) إذا كان $\int_{١}^{ك} ١٥\,ءس = ٩$ فإن ك = ...

هامش الحل: $١٥(ك - ١) = ٩ \Leftarrow ١٥ك - ١٥ = ٩$

$\Leftarrow ١٥ك = ٢٤ \Leftarrow ك = \frac{٢٤}{١٥}$ ∴ الحل: $\frac{٢٤}{١٥}$

@abdagbowl

الدرس الثالث: المقارنة بين التكاملات

اذا كان د(س) قابلة للتكامل وكان د(س) ≥ ٠ فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≥ ٠

فمثلا $\int_{١}^{٣}$ س^{٢} – ١ ءس ≥ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالبناء

١ ≤ س ≤ ٣ ⇐ ١ ≤ س^{٢} ≤ ٩

٠ ≤ س^{٢} – ١ ≤ ٨ الدالة في الفترة الموجبة أي ان د(س) ≥ ٠ ومنه

$\int_{١}^{٣}$ س^{٢} – ١ ءس ≥ ٠

ومثلا $\int_{٤}^{٥}$ – ٤ س^{٢} ءس ≥ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالبناء

٤ < س < ٥ ⇐ ١٦ ≤ س^{٢} ≤ ٢٥ ومنه – ٦٤ ≤ – س^{٣} ≤ – ١٢٥

– ١٢ ≤ – ٤ س^{٢} ≤ – ٢١ الدالة في الفترة السالبة ومنه

⇐ د(س) ≤ ٠ ⇐ $\int_{٤}^{٥}$ – ٤ س^{٢} ءس ≤ ٠

ومثلا $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتاس ءس ≥ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالنظر لان جتاس في الربع الأول موجبة لكل القيم

@abdagbowi

ومثلا $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتاس -٤ د س ≥ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالبناء مع العلم ان جتاس في الربع الثاني أي جتاس $\geq ٠ \Leftarrow$ جتاس $- ٤ \geq -٤ \Leftarrow$ ر(س) ≥ ٠ أي الدالة في الفترة السالبة

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جتاس} - ٤ \, د س \geq ٠$$

تمارين :

برهن ان : $\int_{٠}^{١} \frac{\text{جتا}\pi س}{٣ - س^{٣}} د س \geq ٠$

جتاπس $\times \frac{١}{٣ - س^{٣}}$ و جتاπس في فترة التكامل موجبة لأنها ستكون في الربع الأول و $\frac{١}{٣ - س^{٣}}$ بالبناء نجد ان

$٠ \leq$ س $\leq ١ \Leftarrow ٠ \leq س^{٣} \leq ١$ ومنه $-٣ \geq س^{٣} - ٣ \geq -٢$

$-\frac{١}{٣} \leq \frac{١}{٣ - س^{٣}} \leq -\frac{١}{٢}$ لاحظ انقلاب إشارة المتراجحة ولاحظ ان الفترة سالبة

جتاπس $\times \frac{١}{٣ - س^{٣}}$

↓ ↓

موجبة × سالبة = سالبة اذن الدالة سالبة وبالتالي $\int_{٠}^{١} \frac{\text{جتا}\pi س}{٣ - س^{٣}} د س \geq ٠$

@abdagbowi

٢) قارن بين $\int_{١}^{٤} س^{٢}\,ه^{س}\,د س$ ، $\int_{١}^{٤} ه^{س}\,د س$ الحل:

$س^{٢} - ٢س$ نحاول اثبات ان الدالة السابقة اكبر من الصفر او اقل من الصفر فإذا كانت اصغر من الصفر فان الدالة الأولى اقل من الثانية واذا كانت اكبر من الصفر فان الدالة الأولى أكبر من الثانية نلاحظ ان الدالة في هذه الصورة لا تبنى فنقوم بأخذ العامل المشترك $س(س-٢)$ ونبني كل دالة لوحدها

$١ \geq س \geq ٤$ ، $١ \geq س \geq ٤$

$٠ \geq س - ١ \geq ٣$

↓ ↓

موجبة × موجبة

$\int_{١}^{٤} س^{٢}\,ه^{س}\,د س \leq \int_{١}^{٤} ه^{س}\,د س$

٣) قارن بين : $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتاس\,د س$ ، $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جاس\,د س$ الحل

بنفس طريقة السؤال السابق نضع جتاس – جاس

$جتاس - جتا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$

$\Leftarrow -٢جا\frac{١}{٢}\left(س + \frac{\pi}{٢} - س\right)جا\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٢} + س\right)$

$\Leftarrow -٢جا\frac{\pi}{٤}\,جا\left(٢س - \frac{\pi}{٢}\right) = -\frac{٢}{\sqrt{٢}}جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ سالبة × سالبة

يمكن التوصل إلى ذلك بالبناء

@abdaqbowi

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جتاس ؤس} \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جاس ؤس}$$

٤) اثبت ان : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس+١ ؤس} \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس+١ ؤس}$ الحل

الحل بنفس الطريقة نضع الدالتين بالصورة $\text{جتاس} + \text{✗} - \text{جاس} - \text{✗}$

$= \text{جتاس} - \text{جاس} = \text{جتاس} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

$= -٢\,\text{جا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{2} - \text{س}\right)\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{2} + \text{س}\right)$

$= -٢\,\text{جا}\frac{\pi}{٤} \times \text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)$ حاصل ضرب الدالتين الأولى سالبة والثانية

بالبناء نجد ان $\frac{\pi}{٤} \geq \text{س} \geq \frac{\pi}{2} \Leftarrow ٠ \geq \text{س} - \frac{\pi}{٤} \geq \frac{\pi}{٤}$

$٠ \geq \text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) \geq \frac{١}{\sqrt{٢}}$ موجبة

أي ان إشارة الدالة كلها سالبة × موجبة = سالبة

ومنه $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس+١ ؤس} \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس+١ ؤس}$

@abdagbowi

الدرس الرابع : مبرهنة الحدين الأدنى والاعلى

اذا كان ك ، ل عددين حقيقيين وكان $\forall$ س $\in$ [ا ، ب] ك $\geq$ د(س) $\geq$ ل

وكانت د قابلة للتكامل فإن ك (ب − ا) $\geq \int_{ا}^{ب}$ د(س) ء س $\geq$ ل (ب − ا)

ويتم إيجاد الحدين الأدنى والاعلى باستخدام فكرة البناء التي سبق دراستها في الصف الثاني ثانوي

فمثلا : $\int_{٢}^{٤}$ ٢س − ٤ ء س اذا اردنا إيجاد الحدين الأدنى والاعلى نتبع الاتي

ببناء الدالة : ٢ $\leq$ س $\leq$ ٤ $\Leftarrow$ ٤ $\leq$ ٢س $\leq$ ٨

$\Leftarrow$ ٠ $\leq$ ٢س − ٤ $\leq$ ٤

$\Leftarrow$ ٤ (٤−٢) $\leq \int_{٢}^{٤}$ ٢س − ٤ ء س $\leq$ ٠ (٤−٢)

$\Leftarrow$ ٨ $\leq \int_{٢}^{٤}$ د(س) ء س $\leq$ ٠

ومنه فإن الحد الأدنى للتكامل هو صفر والحد الأعلى له هو ٨

تمارين: اوجد الحدين الأعلى والادنى دون حساب التكامل

١) $\int_{١}^{٢}$ ٥ س^{٢} + ٣ ء س

الحل:

ببناء الدالة حول حدود التكامل ينتج أن:

@abdagbowl

$$١ \geq س \geq ٢$$
$$\Leftarrow ١ \geq س^{٢} \geq ٤$$
$$\Leftarrow ٥ \geq ٥ س^{٢} \geq ٢٠ \Leftarrow ٨ \geq ٥ س^{٢}+٣ \geq ٢٣$$
$$٨(٢-١) \leq \int_{١}^{٢} ٥ س^{٢}+٣ \, ىس \leq ٢٣(٢-١)$$

ومما سبق نجد ان الحد الادنى للتكامل هو٨ والحد الأعلى هو ٢٣

٢) $\int_{-٢}^{٤} ٢ س^{٢}+١ \, ىس$

الحل: $-٢ \geq س \geq ٤ \Leftarrow ٠ \geq س^{٢} \geq ١٦$ لاحظ قاعدة الطي

$$\Leftarrow ٠ \geq ٢ س^{٢} \geq ٣٢ \Leftarrow ١ \geq ٢ س^{٢}+١ \geq ٣٣$$

$$\Leftarrow ١(٤+٢) \geq \int_{-٢}^{٤} ٢ س^{٢}+١ \, ىس \geq ٣٣(٤+٢)$$ ومنه نجد ان الحد الأدنى هو ٦

والحد الأعلى هو ١٩٨

٣) $\int_{٢}^{٣} س^{٢}+٢س \, ىس$

الحل: يجب في هذا الدرس ان تبنى الدالة دون تجزئتها ولذلك نستخدم اكمال المربع

لتصبح الدالة بالصورة $(س^{٢}+٢س+١)-١$ = $(س+١)^{٢}-١$ وبالبناء

$$\Leftarrow ٢ \geq س \geq ٣ \Leftarrow ٣ \geq (س+١) \geq ٤$$
$$\Leftarrow ٩ \geq (س+١)^{٢} \geq ١٦$$
$$\Leftarrow ٨ \geq (س+١)^{٢}-١ \geq ١٥$$

@abdagbowl

$$٨(٣-٢) \geq \int_{٢}^{٣} (س+١)^{٢} - ١ \, ىس \geq ١٥(٣-٢)$$ ومنه الحد الأدنى هو ٨

والحد الأعلى ١٥

٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جاس - جتاس \, ىس$

الحل: نضع الدالة بالصورة

$$جتا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right) - جتاس$$

$$= -٢ جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - س + س\right) جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - س - س\right)$$

$$= -٢ جا\frac{\pi}{٤} \times جا\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} جا\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)$$

والدالة في صورتها الأخيرة يمكن بنائها حول حدود التكامل

$$٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٢}$$

$$\Leftarrow -\frac{\pi}{٤} \leq س - \frac{\pi}{٤} \leq \frac{\pi}{٤} \Leftarrow -\frac{١}{\sqrt{٢}} \leq جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right) \leq \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$-١ \leq \frac{٢}{\sqrt{٢}} جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right) \leq ١$$

$$\Leftarrow -١(٠ - \frac{\pi}{٢}) \leq \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢}{\sqrt{٢}} جا\left(س - \frac{\pi}{٤}\right) \leq ١(٠ - \frac{\pi}{٢})$$

@abdagbowl

ومنه الحد الأدنى هو $-\frac{\pi}{2}$ والحد الأعلى هو $\frac{\pi}{2}$

٥) $\int_{١}^{٥} لوس \, ىس$

الحل: $١ \geq س \geq ٥ \Leftarrow لو١ \geq لوس \geq لوه$

$\Leftarrow$ صفر $(٥-١) \geq \int_{١}^{٥} لوس \, ىس \geq لوه(٥-١)$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى صفر والحد الأعلى $٤لوه$

٦) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١+جاس} \, ىس$

الحل: $\frac{\pi}{٢} \geq س \geq ٠ \Leftarrow ١ \geq جاس \geq ٠ \Leftarrow ١ \geq ١+جاس \geq ٢$

$\Leftarrow ١ \leq \sqrt{١+جاس} \leq \sqrt{٢}$

$\Leftarrow \left(\frac{\pi}{٢}-٠\right) \geq \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١+جاس} \, ىس \geq \sqrt{٢}\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right)$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى $\frac{\pi}{٢}$ و الحد الأعلى $\frac{\sqrt{٢}\pi}{٢}$

٧) $\int_{٠}^{٢} هـ^{س} \, ىس$

الحل: $٣ \geq س \geq ٠ \Leftarrow هـ^{٣} \geq هـ^{س} \geq هـ^{٠} \; ، \; هـ^{٠}=١$

@abdaghbowi

$\Leftarrow ١(٣-٠) \geq \int_{٠}^{٣} هـ^{س} \, ىس \geq هـ^{٣}(٣-٠)$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى ٣ والحد الأعلى $٣هـ^{٣}$

٨) $\int_{١}^{٣} هـ^{٤س} + ٦هـ^{س} + ٩ \, ىس$

الحل: $(هـ^{٢س} + ٣)^{٢}$ مربع كامل بالبناء

$١ \geq س \geq ٣ \Leftarrow ٢ \geq ٢س \geq ٦ \Leftarrow هـ^{٢} \geq هـ^{٢س} \geq هـ^{٦}$

$\Leftarrow هـ^{٢} + ٣ \geq هـ^{٢س} + ٣ \geq هـ^{٦} + ٣$

$\Leftarrow (هـ^{٢} + ٣)^{٢} \geq (هـ^{٢س} + ٣)^{٢} \geq (هـ^{٦} + ٣)^{٢}$

$\Leftarrow ٢(هـ^{٦} + ٣)^{٢} \leq \int_{١}^{٣} (هـ^{٢س} + ٣)^{٢} \, ىس \leq (هـ^{٢} + ٣)^{٢} (٢)$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى $= ٢(هـ^{٢} + ٣)^{٢}$ والحد الأعلى $= ٢(هـ^{٦} + ٣)^{٢}$

٩) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جا^{٢}س + ٢جاس + ١) \, ىس$

الحل: $(جاس + ١)^{٢}$ بالبناء

$٠ \geq س \geq \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ٠ \leq جاس \leq ١ \Leftarrow ١ \leq جاس + ١ \leq ٢$

$\Leftarrow ١ \leq (جاس + ١)^{٢} \leq ٤$

@abdagbowi

$$\Leftarrow \left(0-\frac{\pi}{2}\right)1 \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جاس}+1)^2 \, \text{د}س \leq 4\left(0-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftarrow \text{الحد الأدنى } \frac{\pi}{2} \text{ والحد الأعلى } \pi 2$$

١٠) $\int_{0}^{\text{لو}_2} \frac{\text{هـ}^{س} \, \text{د}س}{\sqrt{\text{هـ}^{2س}+1}}$

الحل: $\frac{\text{هـ}^{س}}{\sqrt{\text{هـ}^{2س}+1}} = \sqrt{\frac{\text{هـ}^{2س}}{\text{هـ}^{2س}+1}} = \sqrt{\frac{1-(1+\text{هـ}^{-2س})}{\text{هـ}^{2س}+1}} = \sqrt{1-\frac{1}{\text{هـ}^{2س}+1}}$

بالبناء $0 \leq س \leq \text{لو}_2 2 \Leftarrow 1 \leq \text{هـ}^{س} \leq 4 \Leftarrow 2 \leq \text{هـ}^{2س}+1 \leq 5$

$$\Leftarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\text{هـ}^{2س}+1} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftarrow -\frac{1}{5} \geq -\frac{1}{\text{هـ}^{2س}+1} \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftarrow \frac{4}{5} \leq 1-\frac{1}{\text{هـ}^{2س}+1} \leq \frac{1}{2} \Leftarrow \sqrt{\frac{4}{5}} \leq \sqrt{1-\frac{1}{\text{هـ}^{2س}+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \text{لو}_2 \leq \int_{0}^{\text{لو}_2} \text{د}(س) \, \text{د}س \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{لو}_2$$

الحد الأدنى $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{لو}_2$ والحد الأعلى $\frac{2}{\sqrt{5}} \text{لو}_2$

١١) $\int_{1}^{4} (س^2 - 4س + 4) \, \text{د}س$

الحل: $(س-2)^2$ بالبناء

@abdagbowi

$$١ \geq س \geq ٤ \quad \Leftarrow \quad -١ \geq س - ٢ \geq ٢$$

$$\Leftarrow ٠ \leq (س - ٢)^{٢} \leq ٤ \qquad \text{لاحظ قاعدة الطي}$$

$$\Leftarrow ٠ (٤ - ١) \leq \int_{١}^{٤} (س - ٢)^{٢} \, ءس \leq ٤ (٤ - ١)$$

الحد الأدنى صفر والحد الأعلى ١٢

@abdagbowl

الدرس الخامس: قواعد التكامل

(١) تعريف التكامل الغير محدد: إذا كانت ل دالة متصلة وقابلة للاشتقاق بحيث

ل َ (س) = د(س) فإن ل دالة أصلية للدالة د(س) أو تكامل غير محدد للدالة د

ويرمز لها بالرمز ∫ د(س) ء س = ل

(٢) إذا كان ل َ١ (س) = ل َ٢ (س) فإن ل١ (س) − ل٢ (س) = ث

(٣) إذا كان ل١ (س) = ل٢ (س) فإن ل َ١ (س) − ل َ٢ (س) = ٠

(٤) تكامل الدالة الثابتة:

إذا كان د(س) = ا ، ا ∈ ح فإن: ∫ د(س) ء س = ∫ ا ء س = ا س + ث

فمثلاً: ∫ ٥ ء س = ٥ س + ث ،

$\int جا\frac{\pi}{٤}\ ء س = جا\frac{\pi}{٤}\ س + ث = \frac{١}{\sqrt{٢}}\ س + ث$ ،

∫ هـ٤ ء س = هـ٤ س + ث حيث هـ هو الأساس الطبيعي

(٥) تكامل دالة القوة:

$\int س^{ن}\ ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، ن ≠ −١

وعند ن = −١ فإن $\int س^{ن}\ ء س = \int \frac{١}{س}\ ء س = لو|س| + ث$

فمثلاً $\int س^{٥}\ ء س = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ث = \frac{س^{٦}}{٦} + ث$

، $\int س^{-٤}\ ء س = \frac{س^{-٤+١}}{-٤+١} + ث = \frac{س^{-٣}}{-٣} + ث = \frac{-١}{٣س^{٣}} + ث$

@abdagbowi

، $\int س^{هـ} \, ds = \frac{س^{هـ+١}}{هـ+١} + ث$ ، $\int س^{لو ٣} \, ds = \frac{س^{لو ٣+١}}{لو ٣+١} + ث$

، $\int \frac{١}{\sqrt{س}} \, ds = \int س^{\frac{١}{٢}} \, ds = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٦) $\int \frac{د}{ds} د(س) \, ds = د(س) + ث$ أي مشتقة التكامل = الدالة نفسها

فمثلاً $\int د'(س^{٢}) \, ds = س^{٢} + ث$ ، $\int د'(جتا س) \, ds = جتا س + ث$

(٧) $\int د'(س) \, ds = د(س) + ث$

فمثلاً $\int \frac{س^{٧}}{٧} \, ds = س^{٦} + ث$ ، $\int د'(\sqrt{س}) \, ds = \sqrt{س} + ث$

(٨) $\int ا \, د(س) \, ds = ا \int د(س) \, ds$

فمثلاً $\int ٥ س^{٤} \, ds = ٥ \int س^{٤} \, ds = ٥ \times \frac{س^{٥}}{٥} + ث = س^{٥} + ث$

(٩) $\int د_{١}(س) \mp د_{٢}(س) \, ds = \int د_{١}(س) \, ds \mp \int د_{٢}(س) \, ds$

فمثلاً $\int ٢س^{٢} - ٣س + ١ \, ds = \frac{٢س^{٣}}{٣} - \frac{٣س^{٢}}{٢} + س + ث$

، $\int س^{٢} + \frac{١}{س} - \sqrt{س} \, ds = \frac{س^{٣}}{٣} + لو|س| - \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + لو|س| - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

، $\int \left(\sqrt{ص} - \frac{٣}{ص}\right)^{٢} \times \frac{٦}{ص} \, dص = \int \sqrt{ص} + \frac{٩}{ص^{٢}} \, dص$

@abdagbowl

$$= \int ص - ٦ص^{-\frac{١}{٢}} + ٩ ص^{-٢} \, ص = \frac{ص^{٢}}{٢} - \frac{٦ ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ٩ \frac{ص^{-١}}{-١} + ث$$

$$= \frac{١}{٢} ص^{٢} - ١٢ ص^{\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{ص} + ث$$

(١٠) تكامل دالة مرفوعة لقوة:

$$\int (د(س))^{ن} \, د'(س) \, س = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن+١} + ث \quad ، ن \neq -١$$

وإذا كانت $ن = -١$ فإن $\int (د(س))^{ن} \, د'(س) \, س = لو|د(س)| + ث$

أي أن شروط تكامل دالة مرفوعة لقوة أن تكون (دالة مرفوع لقوة) (مشتقة الداخل) ويكون تكاملها (الدالة المرفوعة لقوة) مضاف للقوة واحد ومقسوم على القوة بعد الإضافة.

أمثلة: أوجد التكاملات التالية:

١) $\int (٥س^{٢} - ٤)^{٦} (١٠ س) \, س$

الحل: $(٥س^{٢} - ٤)$ ← دالة مرفوعة لقوة ، $(١٠ س)$ ← مشتقة الداخل

$$= \frac{(٥س^{٢} - ٤)^{٧}}{٧} + ث$$

٢) $\int (٢س^{٣} + ٦س)^{٣} (س^{٢} + ١) \, س$

الحل: بضرب حدود المقدار الثاني ×٦ والقسمة عليه يصبح:

$$\frac{١}{٦} \int (٢س^{٣} + ٦س)^{٣} (٦س^{٢} + ٦) \, س$$

@abdagbowl

$(٢س^{٣} + ٦س) \leftarrow$ دالة مرفوعة لقوة ، $(٦س^{٢} + ٦) \leftarrow$ مشتقة الداخل

$$= \frac{١}{٦} \frac{(٢س^{٣} + ٦س)^{٤}}{٤} + ث$$

$$= \frac{١}{٢٤} (٢س^{٣} + ٦س)^{٤} + ث$$

٣) $\int س^{٢} \left(\frac{١}{س} + س\right)^{٢} \, ٤س$

الحل: نلاحظ ان الدالة $س^{٢}$ ليست مشتقة الداخل ولكن القوتين متساويتين يمكن ان نجعل القوتين قوة واحدة

التكامل = $\int س \left(\left(\frac{١}{س} + س\right)^{٢}\right) \, ٤س$

$$\int (١ + س^{٢})^{٢} \, ٤س = \int ١ + ٢س^{٢} + س^{٤} \, ٤س = س + ٢\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} + ث$$

٤) $\int \frac{١}{س^{٢}} \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٥} \, ٤س$

الحل: نلاحظ ان $\frac{١}{س^{٢}}$ هي مشتقة $\left(١ - \frac{١}{س}\right)$ ومنه التكامل هو

$$\frac{\left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٦}}{٦} + ث$$

٥) $\int \frac{(لـو س)^{٤}}{س} \, ٤س$

@abdagbowl

الحل: نلاحظ ان $\frac{١}{س}$ هي مشتقة $لـوس$ ومنه التكامل = $\frac{(لـوس)^{٥}}{٥} + ث$

٦) $\int \frac{جتا٢س}{\sqrt{١+جتا^{٢}س}}\, ءس$

الحل: نلاحظ ان $جا٢س = ٢جاس\, جتاس$ وهي مشتقة $١+جتا^{٢}س$

التكامل = $\frac{(١+جتا^{٢}س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{٣}(١+جتا^{٢}س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٧) $(١+هـ^{س})^{٣}\, هـ^{س}\, ءس$

الحل: نلاحظ ان الخارج مشتقة الداخل ومنه التكامل = $\frac{(١+هـ^{س})^{٤}}{٤} + ث$

(١١) تكامل الدالة الاسية:

$\int ا^{د(س)}\, د'(س) لـوا\, ءس = ا^{د(س)} + ث$ أي ان شرط الدالة الاسية هو ان تكون موضوعة بصورة الدالة الاسية × مشتقة الاس × لوغارتم الأساس وعندها يكون التكامل هو الدالة الاسية نفسها

والحالة الخاصة لهذا النوع من التكامل هو

$\int هـ^{د(س)}\, د'(س)\, ءس = هـ^{س} + ث$ وذلك لان $لـوهـ = ١$

مثال: احسب التكاملات الاتية:

١) $\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\, ءس$

@abdaqbowi

الحل: $\int \frac{٢}{لـو ه} \times ه^{\sqrt{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} ءس = \frac{٢}{لـو ه} ه^{\sqrt{س}} + ث$

٢) $\int ه^{جتاس} جاس ءس$

الحل: $= - \int ه^{جتاس} (- جاس) ءس = - ه^{جتاس} + ث$ دالة اسية ×مشتقة الاس

٣) $\int \frac{ه^{س}}{ه^{س} + ١} ءس$

الحل: $= \int ه^{س} (ه^{س} + ١) + ث = لـو(ه^{س} + ١) + ث$

نلاحظ ان التكامل دالة مرفوعة لقوة × مشتقة الداخل ولكن القوة -١

(١٢) تكامل الدوال الكسرية:

النوع الأول: سبق طرحه وهو ان يكون البسط مشتقة للمقام وقوة المقام الكلية

$ن = -١$ وعندها التكامل = لوغارتم المقام :

$$\int \frac{د'(س)}{د(س)} ءس = لـو|د(س)| + ث$$

فمثلا: $\int \frac{٢س - ١}{س^{٢} - س} ءس$

الحل: نلاحظ ان دالة البسط هي مشتقة لدالة المقام وان قوة المقام الكلية = ١

ومنه التكامل = $لـو|س^{٢} - س| + ث$

النوع الثاني: ان تكون دالة البسط مشتقة داخل دالة المقام وقوة المقام الكلية $ن \neq ١$

وعندها ترفع دالة المقام الى البسط ويحول التكامل الى دالة مرفوعة لقوة × مشتقة الداخل

@abdalgbowri

فمثلا: $\int \frac{٢س - ١}{(س^{٢} - س)^{٣}}$ ء س

الحل: $\int (٢س-١)(س^{٢} - س)^{-٣}$ ء س $= \frac{(س^{٢} - س)^{-٣+١}}{-٣+١} + ث$

$= \frac{(س^{٢} - س)^{-٢}}{-٢} + ث$

ومثلاً: $\int \frac{قتا^{٢} س}{(ظتاس-٤)^{٢}}$ ء س تكاملها $= -\int \frac{-قتا^{٢} س}{(ظتاس-٤)^{٢}}$ ء س

$= -\int -قتا^{٢} س (ظتاس-٤)^{-٢}$ ء س $= \frac{-(ظتاس-٤)^{-١}}{-١} + ث$

$= (ظتاس-٤)^{-١} + ث$

ومثلاً: $\int ظاس قا^{٢} س$ ء س تكاملها $\frac{ظا^{٢} س}{٢} + ث$ لان الثانية مشتقة الأولى مع

اعتبار الأولى دالة مرفوعة لقوة قوتها ١

ومثلاً: $\int \frac{جتاس}{جا^{٢} س}$ ء س $= \int جتاس \times جا^{-٢} س$ ء س $= -جا^{-١} س + ث$

$= \frac{-١}{جاس} + ث = -قتاس + ث$

(١٣) تكامل الدوال المثلثية:

شرط تكامل الدالة المثلثية ان تكون موضوعة بصورة الدالة المثلثية × مشتقة الزاوية وعندها تكامل تكامل مثلثي كما هو موضح بالجدول التالي:

@abdaqbowr

الدالة	تكاملها	الدالة	تكاملها
جاس	–جتاس	ظاس	–لـو جتاس
جتاس	جاس	ظتاس	لـو جاس
قا^{٢} س	ظاس	قاس ظاس	قاس
قتا^{٢} س	–ظتاس	قتاس ظتاس	–قتاس

فمثلاً: $\int ٥س\ جتاس^{٢}\ ءس$ نجد انها مثلثية × مشتقة الزاوية مع إحلال ٢س محل ال ٥

نجد ان تكاملها = $٥\int س\ جتاس^{٢}\ ءس = \frac{٥}{٢}\int ٢س\ جتاس^{٢}\ ءس$

$= \frac{٥}{٢}$ جاس^{٢} + ث

ومثلاً: $\int \frac{قا^{٢}\ \sqrt{س}}{\sqrt{س}}\ ءس$ تكاملها $= ٢\int قا^{٢}\ \sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}\ ءس$

مثلثية × مشتقة الزاوية = ٢ظا $\sqrt{س}$ + ث

(١٤) قيمة التكامل المحدود:

$\int_{أ}^{ب} د'(س)\ ءس = د(ب) - د(أ)$

فمثلا : $\int_{١}^{٣} س\ ءس = \frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{١}^{٣} = \frac{١}{٢} \times ٩ - \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{٨}{٢} = ٤$

تمارين على القواعد السابقة:

١) $\int ٢^{س} + جا٢س + \sqrt{س}\ ءس$

@abdagbowi

الحل: $\int \frac{1}{\ln 2} \times 2^{س} \times \ln 2 + 2 \times \frac{1}{2} جا ٢س + س^{\frac{1}{2}}$ ءس

$$= \frac{1}{\ln 2} 2^{س} - \frac{1}{2} جتا ٢س + \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ث$$

٢) $\int_{ب}^{ا} هـ^{س} + ٢س$ ءس

الحل: $= هـ^{س} + \frac{٢س^{٢}}{٢} |_{ب}^{ا} = هـ^{س} + س^{٢} |_{ب}^{ا} = (هـ^{١} + ١^{٢}) - (هـ^{٠} + ٠)$

$= هـ + ١ - ١ = هـ$

٣) $\int$ جتا^{٢}س جاس + جتاس ظاس ءس

الحل: الأولى دالة قوة × مشتقة الداخل والثانية تحويل مثلثي

$$\int جتا^{٢}س \, جاس + جتاس \times \frac{جاس}{جتاس} ءس$$

$$= \int جتا^{٢}س \, جاس + جا س ءس = -\frac{جتا^{٣}س}{٣} - جتاس + ث$$

٤) $\int س(س^{٢} + ١)^{٥} + ٢^{٢س} \ln 2$ ءس

الحل: الأولى مشتقة الداخل والثانية دالة مرفوعة لقوة + دالة اسية محققة للشرط

$$= \frac{١}{٢} \int ٢س(س^{٢} + ١)^{٥} + \frac{١}{٢} \int ٢^{٢س} \ln 2 \times ٢$$ ءس

@abdalgbowi

$$= \frac{١}{٢} \frac{(س^{٢}+١)^{٦}}{٦} + \frac{١}{٢} \times ٢^{س^{٢}} + ث$$

$$= \frac{١}{١٢} (س^{٢}+١)^{٦} + \frac{١}{٢} ٢^{س^{٢}} + ث$$

٥) $\int \frac{جا^{٢}س}{١ - جتا^{٢}س} \, ءس$

الحل: $= \int \frac{١ - جتا^{٢}س}{١ - جتا^{٢}س} \, ءس = \int ١ \, ءس = س + ث$

٦) $\int لـو هـ^{٢+٥جاس} + قتا^{٢}٣س \, ءس$

الحل: $= \int لـو هـ^{٢+٥جاس} ءس + \int قتا^{٢}٣س \, ءس$

$= \int ٢+٥جاس + \int قتا^{٢}٣س \, ءس = ٢س - جتا٥س - \frac{١}{٣} ظتا٣س + ث$

٧) $\int \frac{٢}{١ - جتا٢س} \, ءس$

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام ولذلك نستخدم التحيل المثلثي المناسب

$$\int \frac{٢}{٢جا^{٢}س} \, ءس = \int قتا^{٢} س \, ءس = - - ظتاس + ث$$

٨) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١} \, ءس$

الحل: البسط مشتقة لداخل المقام وقوة المقام الكلية = ١

ومنه التكامل = $لـو|هـ^{س} + ١| + ث$

@abdagbowl

٩) $\int \frac{\text{جاس}}{(١+\text{جتاس})^{٢}}$ ؤس

الحل: البسط مشتقة لداخل المقام وقوة المقام الكلية لا تساوي الواحد

التكامل = $= \int \text{جاس}\,(١+\text{جتاس})^{-٢}$ ؤس

$= -\int -\text{جاس}\,(١+\text{جتاس})^{-٢}$ ؤس

$= -\frac{(١+\text{جتاس})^{-١}}{-١} + \text{ث} = \frac{١}{١+\text{جتاس}} + \text{ث}$

١٠) $\int \frac{\text{لـو س}}{\text{س}}$ ؤس

الحل: نعتبر البسط دالة مرفوعة لقوة والمقام مشتقة الداخل

$= \int (\text{لـو س})^{١} \frac{١}{\text{س}}$ ؤس $= \frac{(\text{لـو س})^{٢}}{٢} + \text{ث}$

١١) $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}٥\text{س}}$ ؤس

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام لذلك نستخدم التحويل المثلثي المناسب

$\int \text{قا}^{٢}٥\text{س}$ ؤس $= \frac{١}{٥}\int ٥\,\text{قا}^{٢}٥\text{س}$ ؤس

$= \frac{١}{٥}\,\text{ظا}٥\text{س} + \text{ث}$

١٢) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\;\text{هـ}^{\text{ظاس}} + ٢$ ؤس

@abdagbowi

الحل: دالة اسية × مشتقة الاس + دالة ثابتة

$$\int قا^{٢}س \; هـ^{ظاس} + ٢ \; ع س = هـ^{ظاس} + ٢س + ث$$

١٣) $\int \frac{هـ^{٢س} - ١}{هـ^{س} - ١} \; ع س$

الحل: البسط ليس مشتقة المقام نستخدم التحليل الجبري

$$= \frac{(هـ^{س} - ١)(هـ^{س} + ١)}{هـ^{س} - ١} \; ع س$$

$$= \int (هـ^{س} + ١) \; ع س$$

$$= هـ^{س} + س + ث$$

١٤) $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢} + ٢س + ١}{س + ١} \; ع س$

الحل: البسط ليس مشتقة لداخل المقام نستخدم التحويل المناسب وهو التحليل

$$\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)(س+١)}{س+١} \; ع س = \int_{١}^{٢} (س+١) \; ع س = \frac{س^{٢}}{٢} + س$$

$$\left(٢ + \frac{٤}{٢}\right) - \left(١ + \frac{١}{٢}\right)$$

$$= ٤ - \frac{١}{٢} - ١ = ٣ - \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

١٥) $\int جتا \pi س + جتا^{٤} س \; جاس \; ع س$

الحل: الأولى مثلثية والثانية قوة × مشتقة الداخل

@abdagbowi

والتكامل = $\frac{١}{\pi}\int \pi$ جتاπس − جتا^{٤}س (−جاس) دس

$= \frac{١}{\pi}$ جاπس $- \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} + ث$

١٦) $\int \frac{س-١}{س^{٢}+٢س-٣}$ دس

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام (حقق ذلك)

$= \int \frac{س-١}{(س-١)(س+٣)}$ دس $= \int \frac{١}{س+٣}$ دس $=$ لو$|س+٣| + ث$

١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٢ قا^{٢}س ظاس دس

الحل: نعتبر الثانية دالة مرفوعة لقوة والأولى مشتقة الداخل لها

$= \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$٢ $=$ ظا^{٢}س $=$ ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ − ظا^{٢}٠ $= ٣ - ٠ = ٣$

١٨) $\int \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٣} \frac{دس}{س^{٢}}$

الحل: دالة قوة × مشتقة الداخل $= \frac{\left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٤}}{٤} + ث$

١٩) $\int \frac{س+١}{س^{٢}-١}$ دس

الحل: البسط ليس مشتقة المقام نستخدم التحويل المناسب وهو التحليل

@abdaabowi

$$\int \frac{س+١}{(س-١)(س+١)}\,ﻫس = \int \frac{١}{س-١}\,ﻫس = لـو|س-١| + ث$$

٢٠) $\int_{١}^{٥} \frac{ﻫس}{س}$

الحل: البسط مشتقة لداخل المقام وقوة المقام الكلية ١

$$\int_{١}^{٥} \frac{١}{س}\,ﻫس = لـو|س|\Big|_{١}^{٥} = لـو|٥| - لـو|١| = لـو\frac{٥}{١} = لـوه$$

٢١) $\int \frac{٢س}{٧+س^{٢}}\,ﻫس$

الحل: البسط مشتقة المقام وقوة المقام الكلية = ١

التكامل = $لـو|س^{٢}+٧| + ث$

٢٢) $\int_{١}^{٢} \frac{٥(لـو(س)+٣)}{س}\,ﻫس$

الحل: دالة مرفوعة لقوة × في مشتقة الداخل

$$= ٥\int_{١}^{٢} (لـو(س)+٣) \times \frac{١}{س}\,ﻫس = \frac{٥(لـو(س)+٣)^{٢}}{٢}\Big|_{١}^{٢}$$

$$= \frac{٥(لـو(هـ)+٣)^{٢}}{٢} - \frac{٥(لـو(١)+٣)^{٢}}{٢} = ٤٠ - ٤٥ = \frac{١٢٥}{٢}$$

٢٣) $\int \frac{س^{٣}}{س^{٢}-٩}\,ﻫس$

@abdagbowi

الحل: البسط ليس مشتقة المقام والتحليل لا يفيد نستخدم القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} س^{٣} & س^{٢}-٩ \\ \hline س^{٣}-٩س & س \\ \hline ٩س & \end{array}$$

$$= \int س + \frac{٩س}{س^{٢}-٩} \, د س$$

$$= \int س \, د س + \frac{١}{٢} \int \frac{٢س}{س^{٢}-٩} \, د س$$

$$= \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٩}{٢} \text{لو} \left| س^{٢}-٩ \right| + ث$$

٢٤) $\int \frac{١ - \text{جا} س}{س + \text{جتا} س} \, د س$

الحل: البسط مشتقة المقام وقوة المقام الكلية $= ١$

$\therefore$ التكامل $= \text{لو} \left| س + \text{جتا} س \right| + ث$

٢٥) $\int هـ^{\text{جا}^{٢}س} \, \text{جا}٢س \, د س$

الحل: أسية x مشتقة الأس

$$= \int هـ^{\text{جا}^{٢}س} \times ٢ \, \text{جا} س \, \text{جتا} س = هـ^{\text{جا}^{٢}س} + ث$$

تكامل بعض الدوال الخاصة:

(١) تكامل $\text{جتا}^{٢}س$ ، $\text{جا}^{٢}س$ وتنقسم الى نوعين:

@abdaqbowi

النوع الأول: ان يكون ن فردي وفي هذه الحالة تحول الدالة الى حاصل ضرب

جتا^{ن}س = جتا^{١}س × جتا$^{ن-١}$ س

او حاصل ضرب جا^{ن}س = جا^{١}س ×جا$^{ن-١}$س حيث ن−١ زوجي وبعد ذلك تحول القوة المرفوعة لاس زوجي بنظرية فيثاغورث

فمثلاً: ١) $\int$ جتا^{٣}س وس = $\int$ جتاس (جتا^{٢}س) وس

= $\int$ جتاس (١ − جا^{٢}س) وس = $\int$ جتاس وس − $\int$ جتاس جا^{٢}س وس

= جاس − $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + ث

٢) $\int$ جا^{٥} س وس بنفس الطريقة = $\int$ جاس (جا^{٤}س) وس

= $\int$ جاس (١ − جتا^{٢} س)^{٢} وس = $\int$ جاس (١ − ٢ جتا^{٢}س + جتا^{٤}س) وس

= $\int$ جاس وس − ٢ $\int$ جتا^{٢}س جاس وس + $\int$ جاس جتا^{٤}س وس

= − جتاس + ٢ $\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ − $\frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥}$ + ث

النوع الثاني: ان يكون الـ ن زوجي وهنا توضع الدالة بصورة

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)

فمثلاً: $\int$ جا^{٢}س وس = $\int$ $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س) وس

@abdagbow

$= \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ جا٢س + ث = $\int \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ جتا}٢س \right) ؤس$

$= \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٤}$ جا٢س + ث

ومثلاً: $\int \text{ جتا}^{٤} س ؤس = \int (\text{جتا}^{٢} س)^{٢} ؤس$

$= \int \left(\frac{١}{٢} (١ + \text{ جتا}٢س) \right)^{٢} ؤس$

$= \frac{١}{٤} \int (١ + ٢ \text{ جتا}٢س + \text{ جتا}^{٢}٢س) ؤس$

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} \text{ جتا}٢س + \frac{١}{٤} \int \text{ جتا}^{٢}٢س ؤس$

$= \frac{١}{٤} س + \frac{١}{٤} \text{ جا}٢س + \frac{١}{٢} \int (١ + \text{ جتا}٤س) ؤس$

$= \frac{١}{٤} س + \frac{١}{٤} \text{ جا}٢س + \frac{١}{٨} \left(س + \frac{١}{٤} \text{ جا}٤س \right) + ث$

(٢) تكامل $\text{ظا}^{ن} س$ ، $\text{ظتا}^{ن} س$ وتنقسم إلى نوعين:

النوع الأول: إذا كان ن فردي تحول إلى حاصل ضرب $\text{ظا}^{١} س$ أو $\text{ظتا}^{١} س$ مضروبة في $\text{ظا}^{ن-١} س$ أو $\text{ظتا}^{ن-١} س$ حيث ن − ١ سيكون زوجي وتحول النسبة المرفوعة لأس زوجي بصيغة $\text{قتا}^{٢} س = \text{ظتا}^{٢} س + ١$ أو $\text{قا}^{٢} س = \text{ظا}^{٢} س + ١$

النوع الثاني: إذا كان ن زوجي نستخدم التحويل مباشرتاً كما سبق عندما ن = ٢ واستخدام قوة القوة عند ن من مضاعفات ٢

مثلاً: ١) $\int \text{ظا}^{٣} س ؤس$

@abdagbowi

الحل: $= \int$ ظاس $($ظا^{٢} س$)$ ء س $= \int$ ظاس $($قا^{٢} س $- ١)$ ء س

$= \int$ ظاس قا^{٢} س $-$ ظاس $= \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} +$ لـو $|$جتاس$| + $ ث

٢) $\int$ ظتا^{٣} س ء س

الحل: $= \int$ ظتاس $($قتا^{٢} س $- ١)$ ء س

$= \int$ ظتاس قتا^{٢} س $-$ ظتاس

$= - \frac{\text{ظتا}^{٢}\text{س}}{٢} -$ لـو $|$جاس$| + $ ث

مثال: $\int$ ظا^{٢} س ء س $= \int$ قا^{٢} س $- ١$ ء س $=$ ظاس $-$ س $+$ ث

، $\int$ ظتا^{٢} س ء س $= \int$ قتا^{٢} س $- ١$ ء س $= -$ ظتاس $-$ س $+$ ث

النوع الثالث: تكامل ظا^{ن} س ، ظتا^{ن} س حيث ن > ٢ فردي أو زوجي نضع

التكامل بصورة $\int$ ظا$^{ن-٢}$ + ظا^{ن} س $-$ ظا$^{ن-٢}$ س $\cdot$ ء س

مثال١: $\int$ ظا^{٤} س ء س $= \int$ ظا$^{٤-٢}$ س + ظا^{٤} س $-$ ظا$^{٤-٢}$ س ء س

$= \int$ ظا^{٢} س + ظا^{٤} س $-$ ظا^{٢} س ء س $= \int$ (ظا^{٢} س + ظا^{٤} س$) -$ ظا^{٢} س ء س

$= \int$ ظا^{٢} س $(١ +$ ظا^{٢} س$) -$ ظا^{٢} س ء س

لاحظ لا نأخذ هنا عامل مشترك مره أخرى

@abdagbowl

$$= \int \text{ظا}^{٢}س \, \text{قا}^{٢}س - \text{ظا}^{٢}س \, ؤس = \int \text{ظا}^{٢}س \, \text{قا}^{٢}س - \text{قا}^{٢}س + ١ \, ؤس$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٣}س}{٣} - \text{ظاس} + س + ث$$

مثال٢: $\int \text{ظا}^{٥}س \, ؤس = \int \text{ظا}^{٥-٢}س + \text{ظا}^{٥}س - \text{ظا}^{٥-٢}س \, ؤس$

$$= \int \text{ظا}^{٣}س + \text{ظا}^{٥}س - \text{ظا}^{٣}س \, ؤس = \int \text{ظا}^{٣}س \left(١ + \text{ظا}^{٢}س\right) - \text{ظا}^{٣}س$$

$$= \int \text{ظا}^{٣}س \, \text{قا}^{٢}س - \text{ظاس} \left(\text{ظا}^{٢}س\right) ؤس$$

$$= \int \text{ظا}^{٣}س \, \text{قا}^{٢}س - \text{ظاس} \left(\text{قا}^{٢}س - ١\right) ؤس$$

$$= \int \text{ظا}^{٣}س \, \text{قا}^{٢}س - \text{ظاس} \, \text{قا}^{٢}س + \text{ظاس} \, ؤس$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٤}س}{٤} - \frac{\text{ظا}^{٢}س}{٢} - \text{لـو} \left|\text{جتاس}\right| + ث$$

سؤال: أوجد $\int \text{ظا}^{٣}س + \text{ظا}^{٥}س \, ؤس$

لحل هذا السؤال يمكن توزيع التكامل ولكن ستكون الخطوات كثيرة ولذلك سنستخدم ما سبق وهو أخذ عامل مشترك

$$= \int \text{ظا}^{٣}س \left(١ + \text{ظا}^{٢}س\right) ؤس = \int \text{ظا}^{٣}س \, \text{قا}^{٢}س \, ؤس$$

↓ ↓

دالة القوة مشتقة الداخل

$$= \frac{\text{ظا}^{٤}س}{٤} + ث$$

@abdaghbowi

(٤) تكامل الدوال بصورة $\text{جا}^{٧}س\ \text{جتا}^{٧}س$

تحول إلى $(\text{جاس}\ \text{جتاس})^{٧}$ ثم نستخدم قانون $\text{جا}٢س = ٢\ \text{جاس}\ \text{جتاس}$

بصوره المختلفة.

مثال: $\int \text{جا}^{٢}س\ \text{جتا}^{٢}س\ ؤس$

الحل: $= \int (\text{جاس}\ \text{جتاس})^{٢}\ ؤس = \int (\frac{١}{٢}\ \text{جا}٢س)^{٢}\ ؤس$

$= \int \frac{١}{٤}\ \text{جا}^{٢}٢س\ ؤس = \int \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٤س)\ ؤس$

$= \frac{١}{٨}س - \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٤}\ \text{جا}٢س + ث = \frac{١}{٨}س - \frac{١}{٣٢}\ \text{جا}٢س + ث$

(٥) تكامل الدوال بصورة $\text{جا}^{ن}س\ \text{جتا}^{ق}س$ بشرط أحد القوتين فردي والآخر زوجي

نفك الفردي بصورة قوة الوحدة × الزوجي وتحول ذات القوة الزوجية الناتجة من الفك بفيثاغورث.

مثال: $\int \text{جا}^{٢}س\ \text{جتا}^{٣}س\ ؤس$

الحل: $= \int \text{جا}^{٢}س\ (\text{جتاس})\ (\text{جتا}^{٢}س)\ ؤس$

$= \int \text{جا}^{٢}س\ \text{جتاس}\ (١ - \text{جا}^{٢}س)\ ؤس$

$= \int \text{جا}^{٢}س\ \text{جتاس} - \text{جا}^{٤}س\ \text{جتاس} = \frac{\text{جا}^{٣}س}{٣} - \frac{\text{جا}^{٥}س}{٥} + ث$

(٧) تكامل $\text{جا}^{ن}س\ \text{جتا}^{ق}س$ ، م فردي ، ن فردي

نفك الأس الأصغر بصورة قوة الوحدة × زوجي ونستخدم فيثاغورث بنفس الطريقة

@abdlagbowi

مثال: $\int جا^{٣}س\ جتا^{٥}س\ ءس = \int جاس \times جا^{٢}س \times جتا^{٥}س\ ءس$

$= \int جاس\ (١ - جتا^{٢}س) \times جتا^{٥}س\ ءس$

$= \int جاس\ جتا^{٥}س - جاس\ جتا^{٧}س\ ءس$

$= -\frac{جتا^{٦}س}{٦} + \frac{جتا^{٨}س}{٨} + ث$

(٨) تكامل $جا^{أ}س\ جتا^{ب}س$ أي مختلفة الزوايا نستخدم تحويل حاصل ضرب نسبتين إلى جمع أو طرح

مثال: $\int جا٥س\ جتا٦س\ ءس$

الحل: $= \int \frac{١}{٢}(جا(٥س + ٦س) + جا(٥س - ٦س))$

$= \int \frac{١}{٢}(جا١١س + جا(-س))\ ءس$

$= \int \frac{١}{٢} جا١١س - جاس\ ءس$

$= \frac{١-}{٢} \times \frac{١}{١١} جتا١١س + جتاس + ث$

$= \frac{١-}{٢٢} جتا١١س + جتاس$

@abdagbowl

تمارين: أوجد تكامل الدوال التالية:

(١) $\int ٢جا^{٢}س \, ىس$

الحل: $= \int ١ - جتا٢س \, ىس = س - \frac{١}{٢} جا٢س + ث$

(٢) $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{٠} جتا^{٢}٢س \, ىس$

الحل: $\int \frac{١}{٢}(١ + جتا٤س) \, ىس = \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٨} جا٤س \Big|_{\frac{-\pi}{٢}}^{٠}$

$= \left(\frac{١}{٢} \times ٠ + ٠ \times \frac{١}{٨} + \frac{-\pi}{٤}\right) - \left(\pi - ٢ \times \frac{١}{٨} + جا - ٢\right) =$ صفر $= \frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٤}$

(٣) $\int جتا^{٤}س \, ىس$

الحل: سبق حلها كمثال.

(٤) $\int جتا^{٤}س \, جاس \, ىس$

الحل: دالة القوة ← مشتقة الداخل ينقصها فقط إشارة سالب

التكامل $= \frac{-جتا^{٥}س}{٥} + ث$

(٥) $\int ظا^{٢}س - ١ \, ىس$

الحل: $= \int قا^{٢}س - ١ - ١ \, ىس = \int قا^{٢}س - ٢ \, ىس = ظاس - ٢س + ث$

@abdagbowl

(٦) $\int جا^{٢}س\ جتا^{٣}س\ ؤس$

الحل: نفك الفردي ثم فيثاغورث $= \int جا^{٢}س \times جتاس\ (جتا^{٢}س)\ ؤس$

$= \int جا^{٢}س\ جتاس\ (١ - جا^{٢}س)\ ؤس$

$= \int جا^{٢}س\ جتاس - جا^{٤}س\ جتاس\ ؤس = \frac{جا^{٣}س}{٣} - \frac{جا^{٥}س}{٥} + ث$

(٧) $\int جا٥س\ جتا٧س\ ؤس$

الحل: الزوايا مختلفة نستخدم تحويل حاصل ضرب نسبتين إلى جمع أو طرح

$= \int \frac{١}{٢}(جا(٥س + ٧س) + جا(٥س - ٧س))\ ؤس$

$= \frac{١}{٢}\int جا٢ ١س - جا٢س\ ؤس$

$= \frac{-١}{٢} \times \frac{١}{١٢}\ جتا٢ ١س + \frac{١}{٤}\ جتا٢س + ث$

$= \frac{-١}{٢٤}\ جتا٢ ١س + \frac{١}{٤}\ جتا٢س + ث$

(٨) $\int جا^{٣}س\ جتاس\ ؤس$

↓ ↓

الحل: دالة قوة مشتقة الداخل

$= \frac{جا^{٤}س}{٤} + ث$

@abdagbowi

(٩) $\int$ جتا٤س جتا٢س ءس

الحل: لاحظ الزوايا مختلفة

$$\int \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\left(٤س+٢س\right)+\text{جتا}\left(٤س-٢س\right)\right) \text{ ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\int \text{جتا}٦س + \text{جتا}٢س \text{ ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦}\text{جا}٦س + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\text{جا}٢س + ث$$

$$= \frac{١}{١٢}\text{جا}٦س + \frac{١}{٤}\text{جا}٢س + ث$$

(١٠) $\int$ جتا^{٢}س جا^{٢}س ءس

الحل: سبق حلها كمثال.

@abdagbowl

الدرس السادس: التكامل بالتجزئة

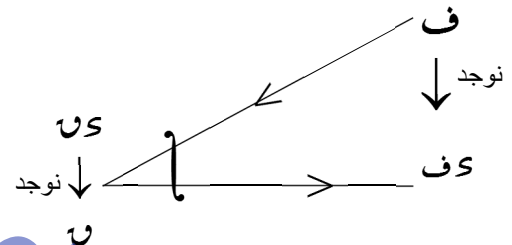
نستخدم طريقة التجزئة لحساب التكامل إذا لم نستطيع إيجاد التكامل بالقواعد السابقة

وكان التكامل بصورة حاصل ضرب دالتين مختلفتين مثل:

(١) مثلثية × جبرية (٢) مثلثية × أسية

(٣) جبرية × لوغارتمية (٤) لوغارتمية × أسية

ويتم ذلك بفرض أحدى الدالتين بـ ف والأخرى بـ ﻫ ن بالصورة التالية

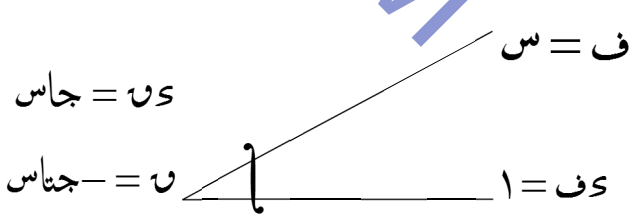


تبعاً للقانون وهو $\int$ ف ﻫ ن = ف × ﻫ ن − $\int$ ﻫ ن × ﻫ ف

مثال: $\int$ س جاس ﻫ س

الحل: نلاحظ أن الجبري ليس مشتقة لزاوية النسبة بمعنى لا نستطيع أن نكاملها مثلثي

بالتجزئة نفرض



$\Leftarrow$ $\int$ س جاس = ل = س × − جتاس − $\int$ − جتاس × ١ ﻫ س

= − س جتاس + $\int$ جتاس ﻫ س

@abdagbowi

$= -س جتاس + جاس + ث$

لاحظ الفرق $\int س جاس^{٢} \, ءس$ لن نكاملها بالتجزئة لأنه يمكن أن تكامل بالقواعد

$= \frac{١}{٢} \int ٢س جاس^{٢} \, ءس = \frac{-١}{٢} جتاس^{٢} + ث$

مثال: أوجد $\int س لـوس \, ءس$

الحل: نفرض $ف = لـوس$

$ءف = \frac{١}{س} ءس$

$ءث = س$

$ث = \frac{س^{٢}}{٢}$

$ل = لـوس \times \frac{س^{٢}}{٢} - \int \frac{س^{٢}}{٢} \times \frac{١}{س} \, ءس$

$ل = \frac{س^{٢}}{٢} لـوس - \frac{١}{٢} \int س \, ءس = \frac{س^{٢}}{٢} لـوس - \frac{١}{٢} \frac{س^{٢}}{٢} + ث$

$\Leftarrow ل = \frac{س^{٢}}{٢} لـوس - \frac{١}{٤} س^{٢} + ث$

مثال: أوجد $\int هـ^{س} جتاس \, ءس$

الحل: نفرض $ف = جتاس$

$ءف = -جاس$

$ءث = هـ^{-س}$

$ث = -هـ^{-س}$

لاحظ هنا يمكن عكس الفرض

$ل = جتاس \times -هـ^{-س} - \int -هـ^{-س} \times -جاس \, ءس$

@abdalgbowri

$$ل = -جتاس\ هـ^{-س} - \int هـ^{-س}\ جاس\ ءس$$

لا زالت المشكلة

$$ل_{١}$$ ①

تجزئة مرة أخرى $ل_{١}$

$ف = جاس$

$ءن = هـ^{-س}$

$ءف = جتاس$

$ن = -هـ^{-س}$

$$ل_{١} = جاس \times -هـ^{-س} - \int -هـ^{-س} \times جتاس\ ءس$$

$$ل_{١} = -جاس\ هـ^{-س} + \int هـ^{-س}\ جتاس\ ءس \leftarrow (ل)$$

$$ل_{١} = -جاس\ هـ^{-س} + ل$$ بالتعويض عن $ل_{١}$ في ①

$$ل = -جتاس\ هـ^{-س} + جاس\ هـ^{-س} - ل \Rightarrow$$

$$٢ل = -جتاس\ هـ^{-س} + جاس\ هـ^{-س} \Rightarrow$$

$$ل = \frac{١}{٢}(-جتاس\ هـ^{-س} + جاس\ هـ^{-س}) + ث \Rightarrow$$

مثال: أوجد $\int لـوس\ ءس$

الحل: نفرض

$ف = لـوس$

$ءن = ءس$

$ءف = \frac{١}{س}$

$ن = س$

$$ل = س\ لـوس - \int س \times \frac{١}{س}\ ءس$$

@abdaghowi

$$\text{ل} = \text{س لـوس} - \int \text{وس} = \text{س لـوس} - \text{س} + \text{ث}$$

وهذا المثال يمكن اعتباره قاعدة

$$\int \text{لـوس}\ \text{وس} = \text{س لـوس} - \text{س} + \text{ث}$$

تمارين: أوجد التكاملات الآتية:

(١) $\int \text{س جاس}\ \text{وس$$ سبق حلها كمثال

(٢) $\int (\text{س}^{٢} - \text{س})\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{وس}$

الحل: نفرض $\text{ف} = \text{س}^{٢} - \text{س}$

$\text{وف} = (٢\text{س} - ١)\ \text{وس}$

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ون} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\text{ل} = (\text{س}^{٢} - \text{س})\ \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\ (٢\text{س} - ١)\ \text{وس}$$

التجزئة مرة أخرى

$\text{ل}_{١}$ ← $\boxed{١}$

$$\text{ل}_{١} = \text{ف} = ٢\text{س} - ١$$

$\text{وف} = ٢$

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ون} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\text{ل}_{١} = (٢\text{س} - ١)\ \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times ٢\ \text{وس}$$

$$\Leftarrow \text{ل}_{١} = (٢\text{س} - ١)\ \text{هـ}^{\text{س}} - ٢ \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{وس}$$

@abdagbowl

$\Leftarrow$ ل$_{١}$ = (٢س − ١) هـ^{س} − ٢هـ^{س} + ث

بالتعويض عن ل$_{١}$ في [١]

ل = (س^{٢} − س) هـ^{س} − (٢س − ١) هـ^{س} + ٢هـ^{س} + ث

(٣) $\int$ (س + ٣) جا^{٢}س د س

ف = س + ٣ ، د ن = جا^{٢}س

د ف = ١ ، ن = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س) = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س

ل = (س + ٣)($\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س) − $\int$ ($\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س) × ١ د س

ل = (س + ٣)($\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س) − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} − $\frac{١}{٨}$ جتا٢س + ث

(٤) $\int$ س هـ^{س} د س

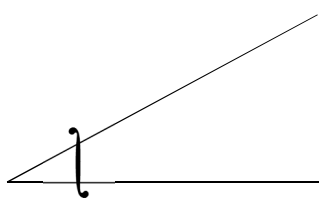
ف = س ، د ن = هـ^{س}

د ف = ١ ، ن = هـ^{س}

ل = س هـ^{س} − $\int$ هـ^{س} × ١ د س = س هـ^{س} − هـ^{س} + ث

(٥) $\int$ س^{٢} هـ^{س} د س

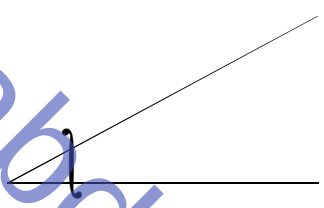
@abdagbowl



ل = ∫ س٢ هس − ٢س هس ى س

↓

ل١ التجزئة مرة أخرى ..... (١)

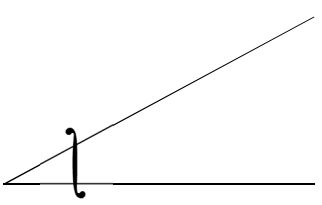


ل١ = ٢س هس − ∫ ٢هس ى س = ٢س هس − ٢هس

بالتعويض عن ل١ في (١)

ل = س٢ هس − ٢س هس + ٢هس + ث

(٦) ∫ س جتا $\frac{س}{٢}$ ى س



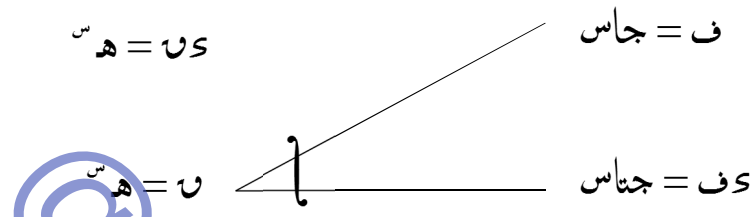
ل = ٢س جا $\frac{س}{٢}$ − ∫ ٢ جا $\frac{س}{٢}$ × ١ ى س

@abdagbow

$$ل = ٢س\ جا\frac{س}{٢} + ٢ \times ٢\ جتا\frac{س}{٢} + ث$$

$$ل = ٢س\ جا\frac{س}{٢} + ٤\ جتا\frac{س}{٢} + ث$$

(٧) $\int هـ^{س}$ جاس $ءس$



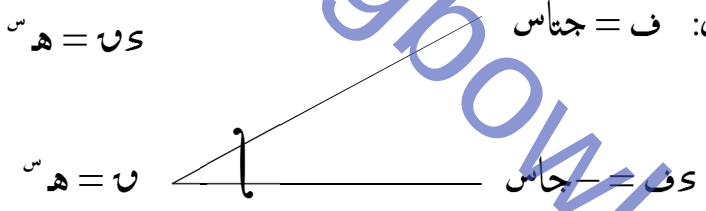
$ل = هـ^{س}$ جاس $- \int هـ^{س}$ جتاس $ءس$ ← (١)

↓

$ل_{١}$

التجزئة مرة أخرى

ل: ف = جتاس



$ل_{١} = هـ^{س}$ جتاس $+ \int هـ^{س}$ جاس $ءس$

$ل_{١} = هـ^{س}$ جتاس $+ ل$ بالتعويض عن $ل_{١}$ في (١)

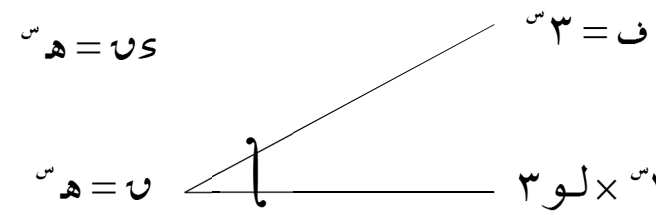
$ل = هـ^{س}$ جاس $- هـ^{س}$ جتاس $- ل$

$٢ل = هـ^{س}$ جاس $- هـ^{س}$ جتاس

@abdagbowl

$$ل = \frac{١}{٢}(هـ^{س} \text{ جاس} - هـ^{س} \text{ جتاس}) + ث$$

(٨) $\int هـ^{س} \, ٣^{س} \, ىس$



$$ل = ٣^{س} \, هـ^{س} - \int هـ^{س} \times ٣^{س} \, لـو٣ \, ىس$$

$$\Leftarrow ل - لـو٣ \times ل = ٣^{س} \, هـ^{س} \quad \Leftarrow ل(١ - لـو٣) = ٣^{س} \, هـ^{س}$$

$$ل = \frac{٣^{س} \, هـ^{س}}{١ - لـو٣} + ث$$

@abdagbowl

الدرس السابع: التكامل بالتعويض

يمكن استخدام التعويض في أغلب مسائل التكامل ولكن نحن سوف نركز هنا على التكاملات التي يتعذر علينا حلها بالطرق السابقة (القواعد – التجزئة) وسنحاول بيان كل نوع من خلال دراسة المثال.

فمثلاً $\int \frac{س\ ٥س}{(٣ - س^{٢})^{٥}}$ ، هذا التكامل يمكن حله بتصعيد المقام إلى البسط

$$= \frac{١}{٢}\int ٢س(٣ - س^{٢})^{-٥}\ ٥س$$

$$= \frac{\frac{١}{٢}(٣ - س^{٢})^{-٤}}{-٤} = ث + \frac{-١}{٨(٣ - س^{٢})^{٤}} + ث$$

ولكن إذا صعب على الطالب حله فيمكن الاستعانة بالتعويض وذلك كالآتي:

بفرض ما داخل القوس بـ ع وذلك لأن الدالة مرفوعة لقوة (الفرض لما داخل القوة)

$$\Leftarrow ع = ٣ - س^{٢} \quad \Leftarrow ٥ع = -٢س\ ٥س$$ بالتعويض في التكامل

$$\Leftarrow \frac{١}{٢}\int ع^{-٥}\ ٥ع = \frac{١}{٢}\frac{ع^{-٤}}{-٤} + ث = \frac{١}{-٨ع^{٤}} = \frac{١}{٨(٣ - س^{٢})^{٤}} + ث$$

أما $\int (١ + س^{٣})^{٣}\ س^{٥}\ ٥س$ ، هذا التكامل بالضرورة استخدام التعويض لأن الدالة الخارجية قوتها أكبر من دالة الداخل بمعنى لا يمكن وضعها بصورة

$$(د(س))^{ن} \times د'(س)$$

التعويض:

$$ع = (١ + س^{٣}) \quad \Leftarrow ٥ع = ٣س^{٢}\ ٥س$$

@abdagbowi

بالتعويض $\Leftarrow \int ع^{٣} \times س^{٥} \times \frac{ع ص}{٣ س^{٢}} = \frac{١}{٣} \int ع^{٣} \times س^{٣} \times ع ص$

$= \frac{١}{٣} \int ع^{٣} (١ - ع) \times ع ص = \frac{١}{٣} \int ع^{٤} - ع^{٣} \ ع ص$

$= \frac{١}{٣} \frac{ع^{٥}}{٥} - \frac{١}{٣} \frac{ع^{٤}}{٤} + ث = \frac{١}{١٥} (١ + س^{٣})^{٥} - \frac{١}{١٢} (١ + س^{٣})^{٤} + ث$

فمثلاً: $\int$ س جاس^{٢} س ص يمكن حلها مباشرتاً كالآتي

$= \frac{١}{٢} \int ٢ س$ جاس^{٢} س ص $= - \frac{١}{٢}$ جتاس^{٢} $+ ث$

ولكن إذا غابت الفكرة عن الطالب يمكن أن يستخدم التعويض بوضع

ع $= س^{٢}$ (الفرض للزاوية)

$\Leftarrow ع ص = ٢ س$ س ص

بالتعويض $= \int س \times$ جاع $\times \frac{ع ص}{٢ س} = \frac{١}{٢} \int$ جاع ع ص

$= - \frac{١}{٢}$ جتاع $+ ث = - \frac{١}{٢}$ جتاس^{٢} $+ ث$

ومثلاً: $\int$ س $\sqrt{س^{٢} - ٢}$ س ص

يمكن حلها بطريقة مباشرة بتحويلها إلى قوة

$= \int$ س $(س^{٢} - ٢)^{\frac{١}{٢}}$ س ص $= \frac{١}{٢} \int ٢ س (س^{٢} - ٢)^{\frac{١}{٢}}$ س ص

$= \frac{\frac{١}{٢} (س^{٢} - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٣} (س^{٢} - ٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

@abdagbowi

ولكن إذا صعب على الطالب ذلك يمكن الرجوع للتعويض في الجذرية بوضع ع

بالجذر ثم التربيع: نضع ع $= \sqrt{س^{٢} - ٢}$

بالتربيع $ع^{٢} = س^{٢} - ٢ \Leftarrow ٢ع\,ع = ٢س\,س$

بالتعويض التكامل $= \int س \times ع \times \frac{ع}{س}\,ع$

$$= \int ع^{٢}\,ع = \frac{ع^{٣}}{٣} + ث = \frac{\left(\sqrt{س^{٢} - ٢}\right)^{٣}}{٣} + ث$$

$$= \frac{١}{٣}\left(س^{٢} - ٢\right)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

أما $\int س\sqrt{س - ١}\,س$

فإن التعويض ضرورة لحل التكامل نضع ع $= \sqrt{س - ١}$

بالتربيع $ع^{٢} = س - ١ \Leftarrow ٢ع\,ع = س$

بالتعويض التكامل $= \int س \times ع \times ٢ع\,ع$

$$= \int \left(ع^{٢} + ١\right) \times ٢ \times ع^{٢}\,ع = \int ٢ع^{٤} + ٢ع^{٢}\,ع$$

$$= \frac{٢ع^{٥}}{٥} + \frac{٢ع^{٣}}{٣} + ث = \frac{٢}{٥}(س - ١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٣}(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

مما سبق نلاحظ أن التعويض احياناً يكون اختياري واحياناً يكون إجباري.

ومثلاً: $\int هـ^{س^{٢}} \times س\,س$

يمكن حلها مباشرتاً $= \frac{١}{٢}\int ٢س\,هـ^{س^{٢}}\,س = \frac{١}{٢}هـ^{س^{٢}} + ث$

@abdagbowl

ويمكن حلها بالتعويض بوضع ع = س^{٢} (لاحظ الفرض لأس الدالة)

نضع ع = س^{٢} ⇐ دع = ٢س دس

بالتعويض التكامل = $\int هـ^{ع} \times س \times \frac{دع}{٢س}$

$= \frac{١}{٢} \int هـ^{ع} دع = \frac{١}{٢} هـ^{ع} + ث = \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}} + ث$

أما $\int هـ^{س^{٢}} س^{٣} دس$

فإن التعويض اجباري (لان قوة مشتقة دالة الأس أكبر من قوة دالة الأس نفسها)

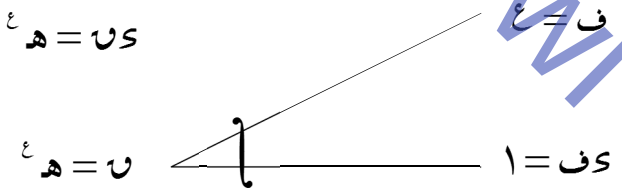
بوضع ع = س^{٢}

دع = ٢س دس

بالتعويض $\int هـ^{ع} \times س^{٣} \times \frac{دع}{٢س}$

$= \frac{١}{٢} \int هـ^{ع} \times س^{٢} دع = \frac{١}{٢} \int هـ^{ع} \times ع دع$

لاحظ أن التعويض هنا لم يحل التكامل ولكن اظهر التكامل كدالة تحل بالتجزئة نضع



$ل = ع هـ^{ع} - \int هـ^{ع} \times ١ دع$ ⇐ ل = ع هـ^{ع} − هـ^{ع} + ث

التكامل = $\frac{١}{٢}(س^{٢} هـ^{س^{٢}} - هـ^{س^{٢}}) + ث$

وهناك حالات خاصة سوف نناقشها في التمارين.

@abdagbowl

تمارين: أوجد التكاملات التالية:

(١) $\int (س^{٣}+١)^{٣}\, س^{٥}\, د س$

الحل: سبق حلها كمثال

(٢) $\int \frac{(س+٣)}{(س-٢)^{٢}}\, د س$

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام ⟸ الحل بالقواعد غير ممكن نستخدم التعويض

نضع $ع = (س-٢)$ (ما داخل الدالة المرفوعة لقوة)

$د ع = ١\, د س$

بالتعويض التكامل $= \int \frac{س+٣}{ع^{٢}} \times د ع$

$= \int \frac{(ع+٢)+٣}{ع^{٢}} \times د ع = \int \frac{ع+٥}{ع^{٢}}\, د ع = \int \frac{١}{ع} + ٥ ع^{-٢}\, د ع$

$= لـو|ع| + \frac{٥ ع^{-١}}{-١} + ث = لـو|ع| - \frac{٥}{ع} + ث$

$= لـو|س-٢| - \frac{٥}{س-٢} + ث$

(٣) $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt{١+س^{٢}}}\, د س$

الحل: لا يمكن حلها إلا بالتعويض (لماذا)

نضع $ع = \sqrt{١+س^{٢}}$ بالتربيع

@abdagbow

$ع^{٢} = ١ + س^{٢} \Leftarrow \not{٢} س \, س = \not{٢} ع \, ع$

بالتعويض $\int \frac{س^{٣}}{ع} \times \frac{ع \, ع}{س}$

$= \int س^{٢} \, ع = \int (ع^{٢} - ١) \, ع = \frac{ع^{٣}}{٣} - ع + ث$

(٤) $\int \frac{١}{س \, لـو س} \, س$

الحل: يمكن وضع التكامل بالصورة $\int \frac{\frac{١}{س}}{لـو س} \, س$

البسط مشتقة المقام وقوة المقام الكلية $= ١$

$\therefore$ التكامل $= لـو |لـو س| + ث$

حل آخر بالتعويض نضع $لـو س = ع$

$\frac{١}{س} \, س = ع$ بالتعويض

$= \int \frac{١}{س \times ع} \times س \, ع = \int \frac{١}{ع} \, ع = لـو |ع| + ث$

$= لـو |لـو س| + ث$

(٥) $\int \frac{لـو س}{س (١ + لـو س)} \, س$

الحل: هنا وجب التعويض

نضع $ع = ١ + لـو س$ لاحظ لم نضع $ع = لـو س$ (لماذا)

@abdagbawi

$$ع = \frac{١}{س} \quad ع س$$

بالتعويض التكامل $= \int \frac{لـوس}{لـوس ع} \times لـوس \quad ع س$

$$= \int ع \quad ع س = ع \times \frac{(ع - ١)}{ع} = \int ١ - \frac{١}{ع} \quad ع س$$

$$= ١ + لـوس - لـو|١ + لـوس| + ث$$

(٦) $\int \left(لـوس + \frac{١}{لـوس} \right) \frac{١}{س} \quad س س$

الحل: يمكن حلها بالقواعد بعد فك القوس

$$\int \frac{لـوس}{س} + \frac{١}{س \, لـوس} \quad س س = \int لـوس \times \frac{١}{س} + \frac{\frac{١}{س}}{لـوس} \quad س س$$

$$= \frac{(لـوس)^{٢}}{٢} + لـو|لـوس| + ث$$

حاول حلها بالتعويض بوضع $لـوس = ع$ وقارن الحلين

(٧) $\int \frac{١}{س^{٢}} جتا \frac{١}{س} \quad س س$

الحل: لاحظ $\frac{-١}{س^{٢}}$ هي مشتقة الزاوية $\therefore$ تكامل مثلثي

$$= - \int \frac{-١}{س^{٢}} جتا \frac{١}{س} \quad س س = - جا \frac{١}{س} + ث$$

حل آخر بالتعويض

@abdaghbowl

نضع $ع = \frac{١}{س} \Leftarrow د ع = \frac{-١}{س^{٢}} د س$

بالتعويض $\int \frac{١}{س^{٢}} \times جتا ع \times -س^{٢} د ع$

$= -\int جتا ع د ع = -جا ع + ث = -جا \frac{١}{س} + ث$

(٨) $\int س \sqrt{س + ١} د س$

الحل: وجب التعويض

نضع $ع = \sqrt{س + ١} \Leftarrow ع^{٢} = س + ١$

$\Leftarrow ٢ ع د ع = د س$

بالتعويض $= \int س \times ع \times ٢ ع د ع$

$= \int (ع^{٢} - ١)(٢ ع^{٢}) د ع$

$= \int ٢ ع^{٤} - ٢ ع^{٢} د ع = \frac{٢ ع^{٥}}{٥} - \frac{٢ ع^{٣}}{٣} + ث$

$= \frac{٢}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٩) $\int (لـوس)^{٢} د س$

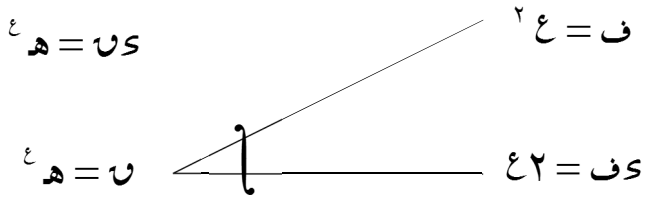
الحل: وجب التعويض

$ع = لـوس \Leftarrow د ع = \frac{١}{س} د س$ بالتعويض

@abdagbowl

$\int ع^{٢} \times س\, ى ع$ ، $س = هـ^{ع}$ (لماذا)

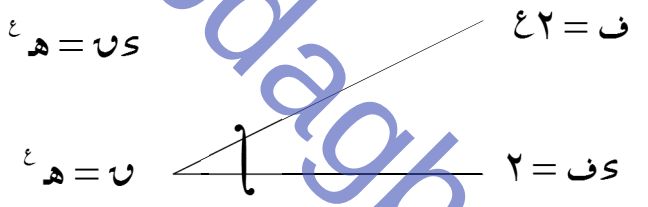
$= \int ع^{٢} \times هـ^{ع}\, ى ع$ بالتجزئة



$ل = ع^{٢} هـ^{ع} - \int ٢ع هـ^{ع}\, ى ع$

↓ بالتجزئة مرة أخرى

$ل_{١}$



$ل_{١} = ٢ع هـ^{ع} - ٢\int هـ^{ع}\, ى ع \Leftarrow ل_{١} = ٢ع هـ^{ع} - ٢هـ^{ع}$

$ل = ع^{٢} هـ^{ع} - ٢ع هـ^{ع} + ٢هـ^{ع} + ث$

$ل = (لـوس)^{٢} هـ^{لوس} - ٢(لـوس) هـ^{لوس} + ٢هـ^{لوس} + ث$

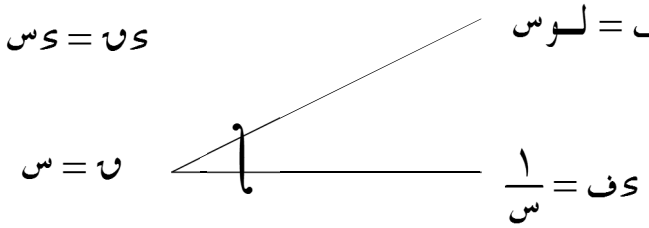
$ل = (لـوس)^{٢} \times س - ٢(لـوس)(س) + ٢س + ث$

(١٠) $\int (لـوس)\, ى س$

الحل: تتبع صيغه خاصه وهي $\int د(س)\, ى س$ وفيها نعتبر $د(س) = ف$

@abdagbowl

، ءس = ءن وهنا تحل بالتجزئة مباشرتاً



ل = س لـوس − ∫ س × ١/س ءس = س لـوس − س + ث

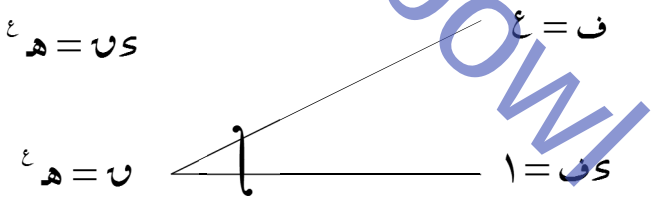
وقد سبق حلها بهذه الطريقة في التجزئة

والآن سنحلها بالتعويض:

نفرض ع = لـوس ⇐ ءع = ١/س ءس بالتعويض ، س = هـ^ع

التكامل = ل = ∫ ع × س ءع

= ∫ ع × هـ^ع ءع بالتجزئة



⇐ ل = ع هـ^ع − ∫ هـ^ع × ١ ءع ⇐ ل = ع هـ^ع − هـ^ع + ث

⇐ ل = لـوس هـ^لـوس − هـ^لـوس + ث = س لـوس − س + ث

لاحظ هنا التعويض ليس دائماً يبسط التكامل ولذلك لا نحل بالتعويض إلا إذا عجزنا عن الحل بالقواعد السابقة والتجزئة.

@abdagbowl

(١١) $\int$ جتا $\sqrt{س}$ د س

الحل: التعويض هنا وجب

نضع ع $= \sqrt{س} \Leftarrow$ ع^{٢} $=$ س $\Leftarrow$ ٢ع د ع $=$ د س

بالتعويض $\int$ جتا ع × ٢ع د ع $= \int$ ٢ع جتا ع د ع بالتجزئة

ف $=$ ع^{٢} ⟵ د ف $=$ ٢ع

د ق $=$ جتا ع ⟵ ق $=$ جا ع

ل $=$ ٢ع جا ع $- \int$ ٢جا ع د ع $\Leftarrow$ ل $=$ ٢ع جا ع $+$ ٢جتا ع $+$ ث

ل $=$ ٢ $\sqrt{س}$ جا $\sqrt{س}$ $+$ ٢جتا $\sqrt{س}$ $+$ ث

(١٢) $\int$ س^{٣} هـ$^{س^{٢}}$ د س

الحل: سبق حلها كمثال.

(١٣) $\int$ هـ$^{\text{جتاس}}$ جا٢س د س

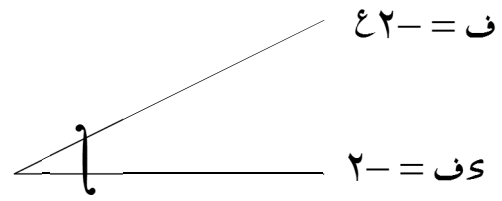
الحل: نلاحظ أن جا٢س ليس مشتقة الأس وهنا نستخدم التعويض لتبسيط المسألة

نضع ع $=$ جتاس $\Leftarrow$ د ع $=$ $-$ جاس د س

بالتعويض ل $= \int$ هـ^{ع} × ٢ جاس جتاس × $\frac{\text{د ع}}{-\text{جاس}}$

@abdagbowl

ل = − ٢ ∫ هـ^ع جتاس ىع = − ٢ ∫ هـ^ع × ع ىع بالتجزئة

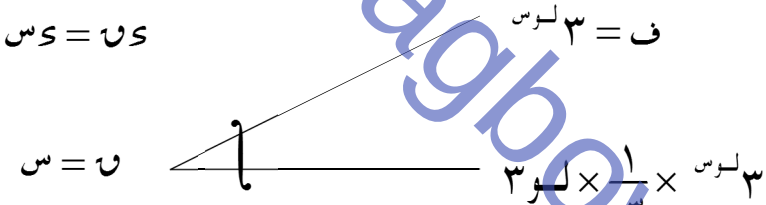


ل = − ٢ع هـ^ع − ∫ − ٢ هـ^ع ىع ⇐ ل = − ٢ع هـ^ع + ٢هـ^ع + ث

ل = − ٢ جتاس هـ^جتاس + ٢ هـ^جتاس + ث

(١٤) ∫ ٣^لوس ىس

الحل: تتبع حالة ∫ د(س) ىس يمكن حلها بالتجزئة



ىف = ٣^لوس × $\frac{١}{س}$ × لـو٣

ل = ٣^لوس × س − ∫ $\frac{١}{\text{ثـ}}$ × ٣^لوس × ثـ لـو٣ ىس

ل = ٣^لوس س − لـو٣ ∫ ٣^لوس ىس

↓

ل

⇐ ل = ٣^لوس س − لـو٣ × ل

@abdagbowl

ل − لـو٣ ل = س ٣^لـوس

⇐ ل (١ − لـو٣) = س ٣^لـوس ⇐ ل = س ٣^لـوس / (١ − لـو٣) + ث

ويمكن حلها بالتعويض بوضع ع = لـوس ⇐ ى ع = ١/س ى س

بالتعويض ل = ∫ ٣^ع × س ى ع = ∫ ٣^ع × هـ^ع ى ع بالتجزئة

ف = ٣^ع ⟵ ى ف = لـو٣ × ٣^ع ⟵ ى ن = هـ^ع ⟵ ن = هـ^ع

ل = ٣^ع هـ^ع − ∫ لـو٣ × ٣^ع هـ^ع

ل = ٣^ع هـ^ع − لـو٣ (ل) ⇐ ل − لـو٣ ل × ٣^ع هـ^ع

⇐ ل (١ − لـو٣) = ٣^ع هـ^ع ⇐ ل = ٣^ع هـ^ع / (١ − لـو٣)

⇐ ل = ٣^لـوس × هـ^لـوس / (١ − لـو٣) = ٣^لـوس × س / (١ − لـو٣) + ث

(١٥) ∫ ظا √س / (√س − √س جا^٢ √س) ى س

الحل: للتشابك في شكل المسألة نستخدم التعويض

بوضع ع = √س ⇐ ع^٢ = س ⇐ ٢ع ى ع = ى س

@abdaghowl

بالتعويض $\int \frac{\text{ظا}ع \times ٢ \text{ظا}ع \, \text{ق}^{٢}ع \, \text{د}ع}{ع - \text{جا}^{٢}ع} = \int \frac{٢ \text{ظا}ع \times \text{د}ع}{(١ - \text{جا}^{٢}ع)}$

$= ٢ \int \frac{\text{ظا}ع}{\text{جتا}^{٢}ع} \, \text{د}ع = ٢ \int \text{ظا}ع \, \text{ق}^{٢}ع \, \text{د}ع$

$= ٢ \times \frac{\text{ظا}^{٢}ع}{٢} + ث = \text{ظا}^{٢}ع + ث$

$= \text{ظا}^{٢} \sqrt{س} + ث$

(١٦) $\int \frac{\text{د}س}{س^{٦} + س}$

الحل: (حالة خاصة) نأخذ عامل مشترك بأكبر أس في المقام ثم التعويض

$\int \frac{\text{د}س}{س^{٦}\left(١ + \frac{١}{س^{٥}}\right)} = \int \frac{\text{د}س}{س^{٦}\left(١ + \frac{١}{س^{٥}}\right)}$

نضع $ع = ١ + س^{-٥} \Leftarrow \text{د}ع = -٥ س^{-٦} \, \text{د}س$ بالتعويض

$ل = \int \frac{١}{س^{٦}(ع)} \times \frac{\text{د}ع}{-٥ س^{-٦}} = \frac{-١}{٥} \int \frac{\text{د}ع}{ع} = \frac{-١}{٥}$ لـو $|ع| + ث$

$\Leftarrow ل = -\frac{١}{٥}$ لـو $|١ + س^{-٥}| + ث$

(١٧) $\int \frac{\text{د}س}{س(س^{٧} + ١)}$

الحل: حالة خاصة بنفس طريقة رقم ١٦

@abdlaghowi

$$ل = \int \frac{ وس}{س^{٨} + س} = \int \frac{ وس}{س^{٨}\left(١ + \frac{س}{س^{٨}}\right)}$$

$$= \int \frac{ وس}{س^{٨}\left(١ + س^{-٧}\right)}$$ نضع $ع = ١ + س^{-٧}$

$\Leftarrow وع = -٧ س^{-٨}\ وس$ بالتعويض

$$ل = \int \frac{ وع}{س^{٨} \times ع \times -٧ س^{-٨}} = -\frac{١}{٧} \int \frac{ وع}{ع} = -\frac{١}{٧} لـو|ع| + ث$$

$$\Leftarrow ل = -\frac{١}{٧} لـو|١ + س^{-٧}| + ث$$

(١٨) $\int \frac{جتاس}{جا^{٥}س + جاس}\ وس$

الحل: البسط ليس مشتقة المقام نستخدم التعويض حتى يتضح شكل التكامل

$ع = جاس \Leftarrow وع = جتاس\ وس$ بالتعويض

$$ل = \int \frac{جتاس}{ع^{٥} + ع} \times \frac{ وع}{جتاس} = \int \frac{ وع}{ع^{٥} + ع}$$

حالة خاصة بنفس طريقة رقم ١٦

$$ل = \int \frac{ وع}{ع^{٥}\left(١ + ع^{-٤}\right)}$$ ، نضع $ف = ١ + ع^{-٤} \Leftarrow وف = -٤ ع^{-٥}\ وع$

$$ل = \int \frac{ وف}{ع^{-٥}(ف - ١) ٤ ع^{-٥}} = \int \frac{ وف}{ف} = -\frac{١}{٤} لـو|ف|$$

$$= -\frac{١}{٤} لـو|١ + ع^{-٤}| = -\frac{١}{٤} لـو|١ + جا^{-٤}س| + ث$$

@abdagbawi

الدرس الثامن: إيجاد معادلة المنحنى إذا عُلم المماس

مما سبق وجدنا أن $د'(س)$ **هي ميل المماس للمنحنى ومنه نجد أن:**

١) معادلة المنحنى $=$ ⌠ ميل المماس

٢) الدالة الأصلية $=$ ⌠ مشتقة الدالة

٣) معادلة المنحنى $=$ ⌠ $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}}$

فمثلاً: إذا كان ميل المماس $= ٢س^{٢} - ١$ ويمر بالنقطة $(١، ١)$ فإنه لإيجاد ميل المنحنى نضع $\frac{ص}{س} = ٢س^{٢} - ١$

ثم نكامل الطرفين بعد وضعها بصورة $ص = ٢س^{٢} - ١$ $س$

$$\Leftarrow ص = \frac{٢س^{٣}}{٣} - س + ث \Leftarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow ١ = \frac{٢ \times ١}{٣} - ١ + ث \quad \Leftarrow ١ = \frac{٢}{٣} - ١ + ث$$

$$\Leftarrow ٢ = \frac{٢}{٣} + ث \quad \Leftarrow ث = ٢ - \frac{٢}{٣} \quad \Leftarrow ث = \frac{٤}{٣}$$

وبالتعويض في $\boxed{١}$ نحصل على معادلة المنحنى وهي

$$ص = \frac{٢}{٣} س^{٣} - س + \frac{٤}{٣}$$

ومثلاً: إذا كان ميل العمودي $ص = ٣س - ٢$ ويمر بالنقطة $(١، ٢)$ فإنه لإيجاد معادلة المنحنى نضع ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

@abdagbowi

$$\frac{\text{د}س}{\text{د}ص} = -٢ - ٣س \Leftarrow \frac{-١}{\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}} = ٣س - ٢ \qquad \div \text{د}س$$

$$\frac{\text{د}س}{٣س - ٢} = -\int \text{د}ص \Leftarrow \frac{-١}{\text{د}ص} = \frac{٣س - ٢}{\text{د}س}$$

$$\frac{١}{٣} \text{لـو} |٣س - ٢| = -ص + ث \Leftarrow [١]$$

$$\Leftarrow \text{لـو} |٣ - ٢| = -٢ + ث$$

$$\text{لـو}١ = -٢ + ث \Leftarrow ٠ = -٢ + ث \Leftarrow ث = ٢$$

بالتعويض في [١] $\text{لـو} |٣س - ٢| = -ص + ٢$

ومثلاً: إيجاد الدالة الأصلية للدالة $ص = س^{٣} - ١$ عند $س = ٠$

نضع $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = س^{٣} - ١ \Leftarrow \int \text{د}ص = \int س^{٣} - ١ \, \text{د}س$

$$ص = \frac{س^{٤}}{٤} - س + ث \Leftarrow [١]$$

$$\because س = ٠ \Leftarrow ص = ٠ - ١ = -١$$

$$-١ = ٠ - ٠ + ث \Leftarrow ث = -١$$

بالتعويض في [١] $\Leftarrow ص = \frac{س^{٤}}{٤} - س - ١$

تمارين: (١) أوجد الدالة الأصلية للدالة $د(س) = ٢س + ٣$ إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة $(٢، ١)$

الحل: نضع الدالة بصورة $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ لأنها تمثل مشتقة

@abdagbowl

$\frac{ص}{س} = ٢س + ٣ \Leftarrow ص = ٢س + ٣ \ س$

$\Leftarrow ص = \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٣س + ث \Leftarrow [١]$

$\Leftarrow ١ = ٤ + ٣ \times ٢ + ث \Leftarrow ث = ١٠ - ١$

$\Leftarrow ث = -٩$ بالتعويض في [١]

$ص = س^{٢} + ٣س - ٩$ وهذه هي الدالة الاصلية

(٢) أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له $\frac{١}{س}$ ويمر بالنقطة (٢، ٣)

الحل: ميل المماس = مشتقة الدالة

$\Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{١}{س} \times س$

$\Leftarrow ص = لـو|س| + ث \Leftarrow [١]$

$\Leftarrow ٣ = لـو٢ + ث \Leftarrow ث = ٣ - لـو٢$

بالتعويض [١] $ص = لـو|س| + ٣ - لـو٢$ وهذه هي معادلة المنحنى

(٣) إذا كان ميل العمودي $\frac{ص}{س}$ أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢، ٢)

الحل: ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}} \Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$\Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{-١}{\frac{ص}{س}} \Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{-س}{ص}$

$ص \ ص = -س \ س \Leftarrow \frac{ص^{٢}}{٢} = -\frac{س^{٢}}{٢} + ث \Leftarrow [١]$

@abdagbowl

$\Leftarrow \frac{٤}{٢} = -٢ + ث \Leftarrow ٢ = -٢ + ث \Leftarrow ث = ٤$

بالتعويض في [١] $\Leftarrow \frac{صـ^{٢}}{٢} = ٤ + \frac{-س^{٢}}{٢}$

(٤) إذا كان $\frac{ص}{س} = \frac{١}{س}$ والمنحنى يمر بالنقطة (١، ٢) أوجد صـ

الحل: بالضرب $\times$ س $\Leftarrow ص = \frac{س}{س} \Leftarrow ص = لـو|س| + ث \Leftarrow$ [١]

$\Leftarrow ٢ = لـو١ + ث \Leftarrow ٢ = ٠ + ث$

$\Leftarrow ث = ٢$ بالتعويض في [١]

$صـ = لـو|س| + ٢$

(٥) إذا كان ميل المماس $= \frac{صـ}{س}$ أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢، ٢)

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{صـ}{س}$ نضرب $\times \frac{س}{صـ}$

$\Leftarrow \frac{ص}{صـ} = \frac{س}{س} \Leftarrow لـو|ص| = لـو|س| + ث \Leftarrow$ [١]

$\Leftarrow لـو٢ = لـو٢ + ث \Leftarrow ث = ٠$

بالتعويض في [١] $لـو|ص| = لـو|س| + ٠ \Leftarrow لـو|ص| = لـو|س|$

(٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة هو $د(س) = س + جا٢س$ أوجد معادلة المنحنى إذا علمت أن $ل(٠) = \frac{١}{٣}$

الحل: $\frac{ص}{س} = س + جا٢س \Leftarrow ص = س + جا٢س$ س

@abdagboowi

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} + \text{ث} \quad \leftarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow \text{س} = ٠ \ ، \ \text{ص} = \frac{١}{٣}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٣} = ٠ - \frac{١}{٢}\text{جتا}٠ + \text{ث} \quad \Leftarrow \frac{١}{٣} = -\frac{١}{٢} + \text{ث}$$

$$\Leftarrow \text{ث} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} \quad \Leftarrow \text{ث} = \frac{٣+٢}{٦} \quad \Leftarrow \text{ث} = \frac{٥}{٦}$$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} + \frac{٥}{٦}$

@abdagbowl

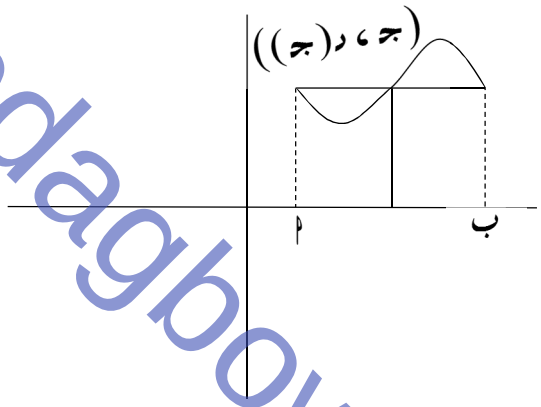
الدرس التاسع: مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

شروط المبرهنة: أن تكون الدالة متصلة على $[أ، ب]$

النتيجة: يوجد على الأقل $جـ \in [أ، ب]$ يحقق العلاقة

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ى س = د(جـ)(ب - أ)$$

التفسير الهندسي للمبرهنة: إذا كانت الدالة متصلة على $[أ، ب]$ وكان بيانها فوق محور السينات فإن $س_{أ}^{ب}ط$ تكافئ مساحة المستطيل الذي بعداه $(ب - أ)$ ، $د(جـ)$



مثال: أوجد قيمة $جـ$ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل إذا كانت

$$د(س) = \sqrt{س}\ ،\ س \in [٠، ٩]$$

الحل: الدالة متصلة على $[٠، ٩]$

$\Leftarrow$ توجد نقطة واحدة على الأقل $جـ \in [٠، ٩]$

$$\int_{٠}^{٩} \sqrt{س}\ ى س = \sqrt{جـ}(٩ - ٠) \Leftarrow \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} |_{٠}^{٩} = \sqrt{جـ} \times ٩$$

@abdagbowl

$$\Leftarrow \frac{٢}{٣}\sqrt{٩^{٣}} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٠} = ٩ \times \sqrt{جـ} \Leftarrow \frac{٢}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣} \times \cancel{٩} = ٩\sqrt{جـ}$$

$$\Leftarrow جـ = ٤ \in [٠، ٩] \quad \text{بالتربيع} \quad \sqrt{جـ} = ٢$$

تمارين: (١) أوجد قيمة جـ التي تحقق القيمة المتوسطة لحساب التكامل:

١) $د(س) = س + ١ \quad س \in [١، ٣]$

الحل: الدالة متصلة $\therefore$ يوجد $جـ \in [١، ٣]$ بحيث

$$\int_{١}^{٣} (س + ١)\, ىس = (٣ - ١)(جـ + ١)$$

$$\Leftarrow \left[\frac{س^{٢}}{٢} + س\right]_{١}^{٣} = (٢)(جـ + ١)$$

$$\Leftarrow \left(٣ + \frac{٩}{٢}\right) - \left(١ + \frac{١}{٢}\right) = ٢(جـ + ١)$$

$$\Leftarrow ٢(جـ + ١) = ٦ \Leftarrow ٢(جـ + ١) = ٤ + ٢$$

$$\Leftarrow ٣ = جـ + ١ \Leftarrow جـ = ٣ - ١ \Leftarrow جـ = ٢ \in [١، ٣]$$

٢) $\int_{٠}^{٩} \left(\sqrt{س} - ٢\right) ىس$

الحل: الدالة متصلة على $[٠، ٩]$ يوجد $جـ \in [٠، ٩]$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{٩} \sqrt{س} - ٢\, ىس = (٩ - ٠)\left(\sqrt{جـ} - ٢\right)$$

$$\Leftarrow \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س \Big|_{٠}^{٩} = (٩)\left(\sqrt{جـ} - ٢\right)$$

@abdagbow

$$\Leftarrow \left(\frac{٢}{٣}\sqrt[٣]{٩} - ٢ \times ٩\right) - \left(٠ - ٠ \times \frac{٢}{٣}\right) = ٩\left(\sqrt{جـ} - ٢\right)$$

$$\left(\frac{٢}{\cancel{٣}} \times ٩ \times \cancel{٣} - ١٨\right) = ٩\left(\sqrt{جـ} - ٢\right)$$

$$\Leftarrow ١٨ - ١٨ = ٩\left(\sqrt{جـ} - ٢\right) \quad \Leftarrow ٩\left(\sqrt{جـ} - ٢\right) = ٠$$

$$\Leftarrow \sqrt{جـ} - ٢ = ٠ \Leftarrow \sqrt{جـ} = ٢ \Leftarrow جـ = ٤ \in [٠، ٩]$$

٣) $\int_{٠}^{٣} س^{٢} - ٢س + ٣ \, ىس$

الحل: الدالة متصلة على $[٠، ٣]$ $\therefore$ يوجد $جـ \in [٠، ٣]$ بحيث

$$\int_{٠}^{٣} س^{٢} - ٢س + ٣ \, ىس = (جـ^{٢} - ٢جـ + ٣)(٣ - ٠)$$

$$\left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{\cancel{٢}س^{٢}}{\cancel{٢}} + ٣س\right]_{٠}^{٣} = (جـ^{٢} - ٢جـ + ٣)(٣)$$

$$\left(\frac{٢٧}{٣} - ٩ + ٩\right) - (٠) = (جـ^{٢} - ٢جـ + ٣)(٣)$$

$$\Leftarrow \cancel{٩} = (جـ^{٢} - ٢جـ + ٣)\cancel{(٣)} \Leftarrow \cancel{٩} = جـ^{٢} - ٢جـ + \cancel{٣}$$

$$\Leftarrow جـ^{٢} - ٢جـ = ٠ \Leftarrow جـ(جـ - ٢) = ٠$$

إما $جـ = ٠ \in [٠، ٣]$ أو $جـ - ٢ = ٠ \Leftarrow جـ = ٢ \in [٠، ٣]$

@abdagbowl

(٢) إذا كان العدد جـ = $\frac{١}{٢}$ يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

$\int_{ك}^{٤} (٢س - ١)\, ى س$ **أوجد قيمة** ك

الحل: $\int_{ك}^{٤} (٢س - ١)\, ى س = \left(٢ \times \frac{١}{٢} - ١\right)(٤ - ك)$

$\Leftarrow \left[\frac{٢س^{٢}}{٢} - س\right]_{ك}^{٤} = ٠ \Leftarrow (١٦ - ٤) - (ك^{٢} - ك) = ٠$

$\Leftarrow ١٢ - ك^{٢} + ك = ٠ \Leftarrow ك^{٢} - ك - ١٢ = ٠$

$\Leftarrow (ك - ٤)(ك + ٣) = ٠ \Leftarrow ك = ٤$ أو $ك = -٣$

(٣) أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

$\int_{٠}^{\pi ٢} (جتاس + \frac{١}{٢} جا٢س)\, ى س$

الحل: $\int_{٠}^{\pi ٢} (جتاس + \frac{١}{٢} جا٢س)\, ى س = (جتاجـ + \frac{١}{٢} جا٢جـ)(\pi ٢ - ٠)$

$\Leftarrow جاس - \frac{١}{٤} جتا٢س \Big|_{٠}^{\pi ٢} = (جتاجـ + \frac{١}{٢} جا٢جـ)(\pi ٢)$

$\Leftarrow \left(٠ - \frac{١}{٤}\right) - \left(١ \times \frac{١}{٤} - ٠\right) = (جتاجـ + \frac{١}{٢} جا٢جـ)(\pi ٢)$

$\Leftarrow ٠ = (جتاجـ + \frac{١}{٢} جا٢جـ)(\pi ٢) \Leftarrow ٠ = جتاجـ + \frac{١}{٢} جا٢جـ$

@abdagbowl

$\Leftarrow$ جتاجـ + $\frac{١}{٢}$ × ٢ جاجـ جتاجـ = ٠ $\Leftarrow$ جتاجـ (١ + جاجـ) = ٠

إما جتاجـ = ٠ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{\pi}{٢}$ أو $\frac{\pi ٣}{٢}$

أو ١ + جاجـ = ٠ $\Leftarrow$ جاجـ = −١ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{\pi ٣}{٢}$

(٤) إذا كان جـ = ١ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

$\int_{أ}^{ب}$ س^{٢} دس = ٣ **فأوجد** أ ، ب

الحل: $\int_{أ}^{ب}$ س^{٢} دس = ٣ $\Leftarrow$ $\frac{س^{٣}}{٣}|_{أ}^{ب}$ = ٣

$\Leftarrow$ $\frac{ب^{٣}}{٣} - \frac{أ^{٣}}{٣}$ = ٣ $\Leftarrow$ ب^{٣} − أ^{٣} = ٩ ← [١]

$\int_{أ}^{ب}$ س^{٢} دس = جـ^{٢} (ب − أ) $\Leftarrow$ ٣ = ١ (ب − أ) $\Leftarrow$ ب − أ = ٣

ب = ٣ + أ ← [٢]

من [١] (ب − أ) (ب^{٢} + ب أ + أ^{٢}) = ٩ $\Leftarrow$ ٣ (ب^{٢} + ب أ + أ^{٢}) = ٩

$\Leftarrow$ (ب^{٢} + ب أ + أ^{٢}) = ٣ $\Leftarrow$ (أ + ٣)^{٢} + أ (أ + ٣) + أ^{٢} = ٣

$\Leftarrow$ ٩ + ٦ أ + أ^{٢} + ٣ أ + أ^{٢} = ٣

$\Leftarrow$ ٣ أ^{٢} + ٩ أ + ٩ − ٣ = ٠ $\Leftarrow$ ٣ أ^{٢} + ٩ أ + ٦ = ٠

$\Leftarrow$ أ^{٢} + ٣ أ + ٢ = ٠ $\Leftarrow$ (أ + ٢) (أ + ١) = ٠

@abdagbowl

إما $أ + ٢ = ٠ \Leftarrow أ = -٢$

أو $أ + ١ = ٠ \Leftarrow أ = -١$

عندما $أ = -٢ \Leftarrow ب = ٣ - ٢ = ١$

عندما $أ = -١ \Leftarrow ب = ٣ - ١ = ٢$

(٥) إذا كان $\int_{أ}^{ب} \frac{ءس}{\sqrt{س}} = ٤$ ، **القيمة** $ج = ٤$ **تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة**

أوجد أ ، ب

الحل: $\int_{أ}^{ب} \frac{ءس}{\sqrt{س}} = ٤ \Leftarrow \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} |_{أ}^{ب} = ٤$

$\Leftarrow ٢\sqrt{ب} - ٢\sqrt{أ} = ٤ \Leftarrow \sqrt{ب} - \sqrt{أ} = ٢ \leftarrow [١]$

$\int_{أ}^{ب} \frac{ءس}{\sqrt{س}} = ٤ \Leftarrow \frac{١}{\sqrt{٤}} (ب - أ) = ٤ \Leftarrow \frac{١}{٢} (ب - أ)$

$\Leftarrow ٤ = \frac{١}{٢} (ب - أ) \Leftarrow ٨ = ب - أ$

$ب = ٨ + أ$ بالتعويض في [١]

$\sqrt{٨ + أ} - \sqrt{أ} = ٢ \Leftarrow \sqrt{٨ + أ} = ٢ + \sqrt{أ}$

بالتربيع $٨ + أ = ٤ + ٤\sqrt{أ} + أ$

$\sqrt{أ} = ١ \Leftarrow$ بالتربيع

$أ = ١$ ، $٨ = ب - أ \Leftarrow ٨ = ب - ١ \Leftarrow ب = ٩$

@abdagbowi

مسائل إضافية على التكامل

(١) اختر الإجابة الصحيحة:

$$\int \frac{\text{قاس}}{\text{ظتاس}}\, \text{د س} = [\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{ث} \text{ ، قتاس} + \text{ث} \text{ ، قاس} + \text{ث} \text{ ، } -\text{قاس} + \text{ث}]$$

الحل الصحيح: قاس + ث

(٢) $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}}} =$ .....

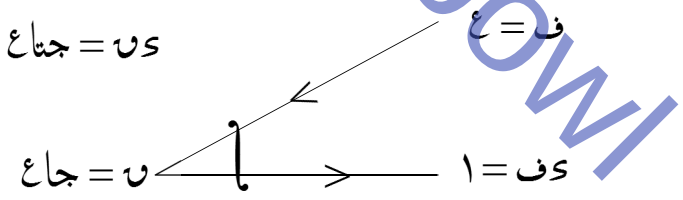
الحل الصحيح: $٢\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$ (حقق ذلك)

(٣) أوجد $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \text{جتاهـ}^{\text{س}}\, \text{د س}$.

الحل: الخارج ليس مشتقة داخل الزاوية، نستخدم التعويض.

بوضع $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ع} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{د س} = \text{د ع}$ بالتعويض في التكامل

$$\int \text{ع}^{٢} \times \text{جتاع} \times \frac{\text{د ع}}{\text{ع}} = \int \text{ع جتاع د ع}$$ بالتجزئة



التكامل $= \text{ل} = \text{ع جاع} - \int \text{جاع د ع}$

$= \text{ع جاع} - \text{جتاع} + \text{ث} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جاهـ}^{\text{س}} + \text{جتاهـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(٤) $\int \text{ظا}^{٥}\text{س قا}^{٢}\text{س}\, \text{د س} =$ .....

الحل: $= \frac{\text{ظا}^{٦}\text{س}}{٦} + \text{ث}$

@abdagbowl

(٥) إذا كان $\int_{أ}^{١٣} ٢ \, ءس = ١٢$ فإن أ = ...

الحل: أ = ٣ (توصل إلى ذلك)

(٦) $\int_{أ}^{أ} د(س) \, ءس =$ .....

الحل: صفر

(٧) $\int ظتا^{٢}س \, قتا^{٢}س \, ءس =$ .....

الحل: $\frac{-١}{٣}$ قتا^{٣}س

(٨) $\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس + \int_{ب}^{أ} د(س) \, ءس =$ .....

الحل: صفر

(٩) $\int_{ب}^{٣} هـ^{٢لوس} \, ءس =$ [٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ٦]

الحل = ٩

(١٠) إذا كان $\int_{١}^{أ} \frac{٢}{س} \, ءس = ٠$ فإن أ = ...

الحل: أ = ١ (أثبت إلى ذلك)

(١١) $\int ظا^{٣}س \, جتا^{٣}س \, ءس =$ .....

الحل: $-\frac{١}{٤}$جتا^{٤}س (توصل إلى ذلك)

@abdagbowl

(١٢) $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{د س}{س} = ا$ فإن قيمة ا = ...

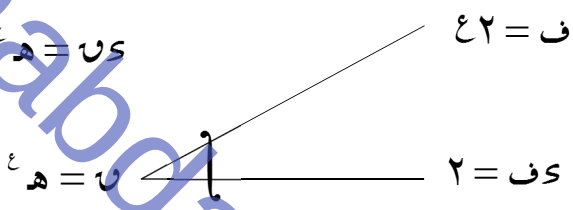
الحل: ا = ١

(١٥) أوجد: $\int هـ^{\sqrt{س}}$ د س.

الحل: بالتعويض

ع = $\sqrt{س}$ ⇐ ع^{٢} = س ⇐ ٢ع د ع = د س

= $\int هـ^{ع}$ × ٢ع د ع بالتجزئة



ل = ٢ع هـ^{ع} − $\int$ ٢هـ^{ع} د ع = ٢ع هـ^{ع} − ٢هـ^{ع} + ث

= ٢ $\sqrt{س}$ هـ$^{\sqrt{س}}$ − ٢هـ$^{\sqrt{س}}$ + ث

(١٣) أوجد: $\int \sqrt{١ + جا س}$ د س

الحل: $\int \sqrt{جا^{٢}\frac{س}{٢} + جتا^{٢}\frac{س}{٢} + ٢ جا\frac{س}{٢} جتا\frac{س}{٢}}$ د س

ما تحت الجذر مربع كامل = $\int \sqrt{\left(جا\frac{س}{٢} + جتا\frac{س}{٢}\right)^{٢}}$ د س

$\int جا\frac{س}{٢} + جتا\frac{س}{٢}$ د س = −٢ جتا$\frac{س}{٢}$ + ٢ جا$\frac{س}{٢}$ + ث

@abdagpowl

(١٤) أوجد: $\int \frac{\text{جا}^{٢}٢س}{١ + \text{جتا}٢س}$ ﺩس

الحل:

$$\int \frac{\cancel{٢}\,\text{جاس}\,\cancel{\text{جتاس}} \times ٢\,\text{جاس}\,\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{٢}\,\cancel{\text{جتا}^{٢}س}}$$ ﺩس

$$\int ٢\,\text{جا}^{٢}س \text{ ﺩس} = ٢\int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س) \text{ ﺩس}$$

$$= س - \frac{١}{٢}\text{جا}٢س + ث$$

(١٥) أوجد: $\int \frac{هـ^{\text{ظاس}}}{١ + \text{جتا}٢س}$ ﺩس

الحل:

$$\int \frac{هـ^{\text{ظاس}}}{٢\,\text{جتا}^{٢}س} \text{ ﺩس} = \int \frac{١}{٢} هـ^{\text{ظاس}} \cdot \text{قا}^{٢}س \text{ ﺩس} = \frac{١}{٢} هـ^{\text{ظاس}} + ث$$

(١٦) $\int_{أ}^{ب} (س-٣)$ ﺩس $= -٤$ أوجد قيمة $م$.

الحل:

$$\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س \Big|_{أ}^{م} = -٤ \Leftarrow (\frac{م^{٢}}{٢} - ٣م) - ٠ = -٤$$

$$م^{٢} - ٦م = -٨ \Leftarrow م^{٢} - ٦م + ٨ = ٠$$

$$(م-٤)(م-٢) = ٠ \Leftarrow م = ٤ \text{ أو } م = ٢$$

(١٧) أوجد قيمة $ك$ إذا كان $\int_{١}^{ك} \text{لو}_{هـ^{س}} هـ^{س+٣}$ ﺩس $= ٧$

@abdagbowl

الحل:

$$\int_{1}^{ك} \text{لـوهـ}^{س+٣} - \text{لـوهـ}^{س}\ \text{د}س = ٧$$

$$\int_{1}^{ك} (س+٣)\text{لـوهـ} - س\text{لـوهـ}\ \text{د}س = ٧ \Leftarrow \int_{1}^{ك} س+٣-س\ \text{د}س = ٧$$

$$\int_{1}^{ك} ٣\ \text{د}س = ٧ \Leftarrow ٣(ك-١) = ٧$$

$$\Leftarrow ٣ك - ٣ = ٧ \Leftarrow ٣ك = ١٠ \therefore ك = \frac{١٠}{٣}$$

(١٨) أوجد قيمة ا إذا كان: $\int_{ا}^{\pi} \text{جتاس}\ \text{د}س = -١$ $\quad ٠ < ا < \pi$

الحل: $\text{جاس}\left|_{ا}^{\pi}\right. = -١$

$$\text{جا}\pi - \text{جا}ا = -١ \Leftarrow -\text{جا}ا = -١ \Leftarrow \text{جا}ا = ١ \Leftarrow ا = \frac{\pi}{٢}$$

(١٩) أوجد: $\int \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\text{جا}٢س}\ \text{د}س$

الحل:

$$\int \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{٢\text{جاس جتاس}} \times \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{د}س$$

$$\int \frac{\text{ظاس}}{٢\text{جاس جتاس}} \times (\text{ظاس})^{-\frac{١}{٢}}\ \text{د}س$$

@abdagbowl

$$\int \frac{1}{2جتا^2 س} \times (ظاس)^{-\frac{1}{2}} \, ءس = \int \frac{1}{2} قا^2 س \times (ظاس)^{-\frac{1}{2}} \, ءس$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} (ظاس)^{\frac{1}{2}} + ث = (ظاس)^{\frac{1}{2}} + ث$$

(٢٠) أوجد: $\int \frac{لوس - ١}{(لوس)^2} \, ءس$

الحل: بالتعويض $ع = لوس \Leftarrow ءع = \frac{1}{س} ءس$

$$ل = \int \frac{ع - ١}{ع^2} \, ءع = \int \frac{1}{ع} - \frac{1}{ع^2} \, ءع$$

$$ل = لو|ع| - \frac{ع^{-١}}{-١} + ث = لو|(لوس)| - \frac{1}{لوس} + ث$$

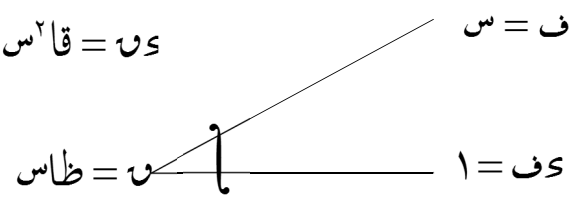
(٢١) أوجد: $\int س \, ظا^2 س \, ءس$

الحل:

$$ل = \int س (قا^2 س - ١) \, ءس \Leftarrow ل = \int س \, قا^2 س - س \, ءس$$

$$\downarrow$$

$$ل_١$$



$$ل_١ = س \, ظاس - \int ظاس \, ءس$$

@abdagbowl

$$ل_{١} = س\ ظا\ س + لـو\ |جتاس|$$

$$ل = س\ ظا\ س + لـو\ |جتاس| - \frac{س^{٢}}{٢} + ث$$

(٢٢) أوجد: $\int \frac{جاس}{١ + جتا٢س}\ ءس$

الحل:

$$\int \frac{جاس}{٢جتا^{٢}س}\ ءس = \frac{١}{٢}\int جتا^{-٢}س \times جاس\ ءس$$

$$= \frac{-١}{٢}\frac{جتا^{-١}س}{-١} = \frac{١}{٢جتاس} + ث$$

(٢٣) $\int \frac{س^{٤} + قتا^{٢}٥س}{-١ - س^{٥} + ظتا٥س}\ ءس$

الحل:

نلاحظ ببساطة أن البسط هو مشتقة المقام بعد ضرب البسط $\times -٥$ وموازنة ذلك

$$\times -\frac{١}{٥}$$

$$ل = -\frac{١}{٥}لـو|-١ - س^{٥} + ظتا٥س| + ث$$

@abdagbowl

المحتويات

هذا الكتاب: ١

التفاضل ٤

النهايات ٥

قوانين سابقة قد تحتاجها في النهايات والاتصال: ٥

الدرس الأول: نهاية الدالة عند نقطة ٨

الدرس الثاني: نهاية الدالة عند ∞ ١٦

الدرس الثالث: نهايات الدالة (صفرية $\times$ محدودة) (النوع الأول) ٢٠

الدرس الرابع: نهاية الدوال المثلثية النوع الثاني قاعدة (السندوتش) ٢٥

الدرس الخامس: نهايات الدوال المثلثية النوع الثالث (القلب والتثبيت) ٣٠

الدرس السادس: نهايات الدوال المثلثية النوع الرابع (قوانين التحويل المثلثي) ٣٨

الاتصال ٤٨

الدرس الأول: دراسة اتصال الدوال ٤٨

الدرس الثاني: إيجاد قيمة المتغير إذا عُلم أن الدالة متصلة ٥٦

تمارين إضافية على النهايات والاتصال: ٦٢

قوانين سابقة قد تحتاجها في الاشتقاق: ٦٥

الاشتقاق ٦٧

الدرس الأول: مشتقة الدوال الجبرية ٦٧

الدرس الثاني: مشتقة الدوال المثلثية ٧٦

الدرس الثالث: مشتقة الدوال اللوغارتمية ٨١

الدرس الرابع: مشتقة الدوال الاسية ٨٦

الدرس الخامس: مشتقة تركيب دالتين ٩٠

الدرس السادس: المشتقة بقاعدة التسلسل ٩٢

الدرس السابع: اشتقاق الدوال الضمنية ٩٧

الدرس الثامن: تطبيقات على اشتقاق الدوال الضمنية ١٠٢

الدرس التاسع: المشتقة النونية ١٠٦

الدرس العاشر: معادلة المماس والناظم ١١٢

الدرس الحادي عشر: مبرهنة رول ١٢٠

الدرس الثاني عشر: مبرهنة القيمة المتوسطة ١٢٧

الدرس الثالث عشر: دراسة تغير الدالة من المشتقة الأولى ١٣٣

@abdagbowi

الدرس الرابع عشر: دراسة تغير الدالة من المشتقة الثانية ١٤١
الدرس الخامس عشر: الفروع اللانهائية والمقاربات ١٤٥
الدرس السادس عشر: دراسة تغير الدالة ١٥٠
تمارين إضافية على الاشتقاق: ١٦٦
التكامل ١٧٣
قوانين سابقة قد تحتاجها في التكامل ١٧٤
الدرس الأول: التكامل بالتعريف ١٧٦
الدرس الثاني: قواعد على التكامل المحدود ١٨٣
الدرس الثالث: المقارنة بين التكاملات ١٨٨
الدرس الرابع : مبرهنة الحدين الأدنى والاعلى ١٩٢
الدرس الخامس: قواعد التكامل ١٩٩
الدرس السادس: التكامل بالتجزئة ٢٢٣
الدرس السابع: التكامل بالتعويض ٢٣١
الدرس الثامن: إيجاد معادلة المنحنى إذا عُلم المماس ٢٤٦
الدرس التاسع: مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل ٢٥١
مسائل إضافية على التكامل ٢٥٧

@abdagbowl

بُشْرَى سَارَّة

اقتني نسختك من كتب سلسلة الابداع

مميزات السلسلة:

1-أحدث نماذج اختبارات القبول لجامعات صنعاء- تعز- اب- ذمار- عمران- عدن، لجميع الكليات الطبية والعلمية(هندسة- حاسوب- تجارة) .2- حلول النماذج من قبل دكاترة ومعيدي جامعة صنعاء ومنفصلة عن الأسئلة نهاية الكتاب.

3- تحتوي على ملخصات قيمة لمواد اختبار القبول. 4- تدرس في العديد من المراكز التدريبية بأمانة العاصمة.

5- تحتوي على أسس ومعايير القبول للكليات. 6- تحتوي على خطوات التنسيق والتسجيل بالجامعات.



@abdaabowl

نقاط البيع:

- **صنعاء (مكتبة دار الفكر بوابة جامعة صنعاء جوار ايلول- كشك الجامعة- مكتبة الوسطية- كشك السنينة- كشك الوحدة التحرير-كشك الثقافة بالتحرير جوار مدرسة جمال- مكتبة التعليم العالي جامعة21سبتمبر- مجمع زاد التجاري)**
- **أب - مكتبة العالمية – شارع العدين جوار كلية التربية.**
- **للطلب للمحافظات او المكتبات التواصل على الرقم 770056229**

سجل االالان

نتمنى لطلبتنا الأعزاء التوفيق والامتياز بالثانوية العامة ونحيطكم علماً بأن فريق إعداد كتب سلسلة الابداع يقيم البرنامج التأهيلي لاجتياز اختبار القبول الجامعي للكليات الطبية(بشري-اسنان- صيدلة- مختبرات- تمريض) والعلمية(الهندسة- الحاسوب –التجارة)

مميزات البرنامج:

1- كادر تدريسي ذو كفأه وخبرة من دكاترة ومعيدي جامعة صنعاء ومدرسي ثانوية جمال عبدالناصر والكويت.

2- حصول طلبة البرنامج على المقاعد الأولى بالكليات الطبية والعلمية للأعوام السابقة.

3- تدريس المفاهيم والمواضيع الهامة لاختبارات القبول بالإضافة إلى اساسيات الجامعة وكتب الثانوية المقررة بالاختبار.

4- حلول نماذج الاختبارات للأعوام السابقة والحصول عليها مع الملخصات مجاناً.

5- اختبارات تجريبية نهاية البرنامج.

6- يوجد برنامج خاص لتأهيل الطلبة بمادة اللغة الإنجليزية عبارة عن ثلاث دورات مكثفة تأهلك لاجتياز اختبار المادة.

7- توجد مجموعات بالتلجرام والوتس خاصة لطلبة البرنامج تنزل فيها المحاضرات والنماذج ومناقشتها.

للتسجيل والاشتراك بقنوات التلجرام والوتس التواصل على الأرقام(777917375 – 770056229)

يقام البرنامج بالعديد من المراكز التدريبية بأمانة العاصمة

من الكادر التدريسي للبرنامج:

-د/ قيس الصباحي -جامعة صنعاء . د/ إبراهيم المعمري- جامعة صنعاء. د/ يوسف النمر-جامعة صنعاء- جمال سابقاً

د/ حاكمة الهبوب- جامعة صنعاء. د/ أسماء قائد- جامعة صنعاء. أ. شائع فرحان- ثانوية الكويت.

أ. أمين الغيلي- ثانوية جمال عبدالناصر. أ. أسماء رسام- جامعة صنعاء

@abdaghawi