

1. عموميات {التاليات}

1. مفهوم متالية: كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية N في R تسمى **متالية عددية**. لتغير n .

2. مصطلحات وتعابير: التاليات تستعمل بعض المصطلحات العامة:

1. يرمز عادة لتالية بالرموز: $W, V, U, \dots$.
2. يرمز لصورة عدد طبيعي n بتالية بالشكل $U(n)$ أو U_n ونقرأ: U دليل n .
3. العدد U_n يسمى الحد العام للتالية وهو الحد الذي رتبته n .
4. نرمز لتالية كذلك بـ U_n أو $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

أمثلة: u هي التالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالشكل: $U_n = \frac{1}{n}$

الحد الذي رتبته 100 لهذه التالية هو: $U_{100} = \frac{1}{100}$

ملاحظة: يمكن أن تكون التالية معرفة بدواً من رتبة معينة.

3. طرق توليد متالية: يمكن توليد متالية بالطرق المولدة:

1. إعطاء قيمة كل مدود التالية (عدد المدود منته):

$$\text{مثال: } 1, 4, \frac{11}{2}, \dots$$

2. بعبارة من الشكل $U_n = f(n)$

تعطى التالية على شكل دستور يسمح بحساب كل حد بدلالة n مباشرة.

$$\text{مثال: } u \text{ متالية معرفة بالعلاقة التالية: } U_n = 2n^2 - 3$$

في هذه الحالة نجد الحد الأول: $U_0 = -3$ والحد الثاني $U_1 = 2 \times 1^2 - 3 = -1$ الحد العشرون $u_{19} = 2 \times 19^2 - 3 = 719$

3. بعلاقة تراجعية:

يمكن تعريف متالية بإعطاء:

$$\bullet \text{ الحد الأول } U_0$$

• العلاقة التي تسمح بتعيين كل حد انطلاقاً من الحد السابق. ونسمي هذه العلاقة "علاقة تراجعية".

$$\text{مثال: } v \text{ متالية معرفة بمدّها الأول } v_0 = 2 \text{ والعلاقة: } v = 3v_n - 2$$

$$\text{لدينا: } v_1 = 3 \times v_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$$

4. التمثيل البياني لتالية:

التمثيل البياني لتالية U هو مجموع النقط ذات الإحداثيات $(n; U_n)$ في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ للمستوي.

مثال: لتكن U متالية معرفة على N حيث: $U_n = n^2 + 4$ (لدينا التمثيل التالي).

5. اتجاه تغير متالية:

(U_n) متالية معرفة على N :

(a) إذا كانت $U_n < U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n ، نقول أن التالية متزايدة تماماً.

(b) إذا كانت $U_n > U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n ، نقول أن التالية متناقصة تماماً.

(c) إذا كانت $U_n = U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n ، نقول أن التالية ثابتة.

ملاحظة: عندما نستبدل الرمز $<$ أو $>$ بالرمز $\geq$ أو $\leq$ نقول إن التالية u متزايدة أو متناقصة.

متالية رتيبة: نقول عن متالية أنها رتيبة إذا وفقط إذا كانت متزايدة (تماماً) أو متناقصة (تماماً).

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متالية (U_n) يمكن أن ندرس إشارة $U_{n+1} - U_n$

أمثلة:

دراسة اتجاه تغير المتالية U حيث: $U_n = n^2$

$$\text{لدينا: } U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

نجد أن $n^2 < n^2 + 2n + 1$ معناه $U_n < U_{n+1}$ إذا التالية متزايدة تماماً.

2. المتاليات الحسابية

1.2/ تعريف: نقول عن متتالية (U_n) أنها متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r حيث:

من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n + r$ (نقصد بها المرور من حد إلى الحد الموالي له بإضافة نفس العدد الثابت) كذلك $U_{n+1} - U_n = r$
نسمي r أساس المتتالية (U_n) . مثال: $U_{n+1} = U_n - 2$ مع $U_0 = 2$.

ملاحظة: إذا كان $r = 0$ فإن الحدود متساوية وعليه المتتالية ثابتة.

2.2/ حساب الحد العام (U_n) : يمكن حساب الحد العام بإحدى الطريقتين الوالتين:

1. بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس r

(U_n) متتالية حسابية ذات الحد الأول U_0 والأساس r معناه:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $U_n = U_0 + nr$ (المتتالية الحسابية للأعداد الفردية: $U_n = 1 + 2n$, $r = 2/u_0 = 1$)

2. بإعطاء حد كفي للمتتالية والأساس:

(U_n) متتالية حسابية علم حد منها U_p كفي والأساس r معناه:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $U_n = U_p + (n - p)r$

مثال: (U_n) متتالية حسابية حيث $u_{10} = 15$ وأساسها $r = \frac{3}{2}$

$$u_{35} = 15 + (35 - 10) \times \frac{3}{2} = 52.5 \text{ ومنه: } u_n = u_{10} + (n - 10) \times \frac{3}{2}$$

3. خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية:

تكون الأعداد $a; b; c$ بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كانت: $a + c = 2b$
يسمى العدد b **بالسبب الوسيط** للعددين a و c .

مثال: الأعداد 2, 7, 12 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية لأن: $2 + 12 = 2 \times 7$.

4. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 والأساس r معناه

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{(u_1 + u_n)}{2} \text{ وكذلك من أجل } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

نحصل على مجموع حدود متتالية متتابعة لمتتالية حسابية بالقاعدة: **(الحد الأخير + الحد الأول) $\times$ عدد الحدود**

5. نتيجة:

متتالية الأعداد الطبيعية غير النعدمة هي متتالية حسابية، حدها الأول 1 وأساسها 1:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99(99+1)}{2} = 4950 \text{ مثال:}$$

3.2 / اتجاه التغير:

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث:

- إذا كان r موجباً تماماً فالمتتالية **متزايدة** تماماً.
- إذا كان r سالباً تماماً فالمتتالية **متناقصة** تماماً.
- إذا كان r معدماً فالمتتالية **ثابتة**.

ملاحظة: معامل توجيه المستقيم في كل تمثيل لمتتالية حسابية هو أساس المتتالية الممثلة.

أمثلة:

أدرس تغيرات كل من: $u_n = 3 + 4n$ و $v_n = 1 - 4n$ ثم مثلها بيانياً في معلم للمستوى $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

3. المتاليات الهندسية

1.3/ تعريف: نقول عن متالية (U_n) أنها متالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم q حيث:

من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = q \times U_n$ (نقصد بها المرور من حد إلى الحد الموالي له بالضرب في نفس العدد الثابت q)

نسمي q أساس المتالية (U_n) . مثال: $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$ مع $q = \frac{1}{2}$.

ملاحظة: إذا كانت $q = 1$ فإن الحدود متساوية وعليه نالمتالية ثابتة.

2.3/ حساب الحد العام (U_n) : يمكن حساب الحد العام بإحدى الطريقتين الموليتين:

1. بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس q

(U_n) متالية هندسية ذات الحد الأول U_0 والأساس q معناه:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $U_n = q^n \cdot U_0$ (مثال: لتكن متالية هندسية حيث: $U_0 = 1$, $q = 2$)

2. بإعطاء حد كفي للمتالية والأساس

(U_n) متالية هندسية علم حد منها U_p كفي والأساس q معناه:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $U_n = U_p \times q^{n-p}$

مثال: (U_n) متالية هندسية حيث $u_3 = \frac{15}{7}$ وأساسها $q = \frac{3}{2}$

$$u_5 = u_3 \cdot q^{5-3} = \left(\frac{15}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{ومنه: } u_n = u_3 + q^{n-3}$$

3. خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متالية هندسية:

تكون الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متالية هندسية إذا وفقط إذا كانت: $a \times c = b^2$
يسمى العدد b بالوسط الهندسي للعددين a و c .

مثال: الأعداد 5, 1 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متالية هندسية لأن: $1 \times 25 = 5^2$.

4. مجموعة حدود متتابعة لتالية هندسية:

(U_n) متالية هندسية أساسها q حيث $q \neq 1$

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

كذلك من أجل u_1 لدينا: $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

5. تلميح:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 لدينا

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = \frac{1-2^{9+1}}{1-2} = 2^{10} - 1 \quad \text{مثال:}$$

3.3/ اتجاه التغير لتالية هندسية:

(U_n) متالية هندسية محدداً الأول u_0 وأساسها q بحيث $u_0 > 0$; $q > 0$ لدينا:

• إذا كانت $q > 1$ فالمتالية متزايدة تماماً.

• إذا كانت $0 < q < 1$ فالمتالية متناقصة تماماً.

• إذا كانت $q = 1$ فالمتالية ثابتة.

(U_n) متالية هندسية محدداً الأول u_0 وأساسها q بحيث $u_0 < 0$; $q > 0$ لدينا:

• إذا كانت $q > 1$ فالمتالية متناقصة تماماً.

• إذا كانت $0 < q < 1$ فالمتالية متزايدة تماماً.

• إذا كانت $q = 1$ فالتالية ثابتة.

ملاحظة: إذا كانت $q < 0$ سالب فالتالية الهندسية ليست رتيبة (ليست متزايدة ولا ليست متناقصة)

مثال

أدرس تغيرات كل من: $u_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ و $v_n = \frac{3}{2^n}$ المعرفات على $\mathbb{N}$:

لدينا u_n من الشكل $u_0 \cdot q^n$ وهي متتالية هندسية حيث: $u_0 = 2$ و $q = \frac{3}{2}$

بما أن u_0 موجب و $q = \frac{3}{2} > 1$ فإن التالية $u_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ متزايدة تماما

(البرهان بالتراجع)

1 | مبدأ الاستدلال بالتراجع:

لتكن $p(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.
للإثبات صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يجب أن:

1. نتحقق من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $p(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $p(n)$ ونبرهن صحة هذه الخاصية من أجل $n+1$ أي $p(n+1)$.

مثال 1: لنثبت صحة الخاصية التالية:

من أجل كل عدد طبيعي n : $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$

1. من أجل $n = 0$ لدينا: $1 = (0+1)^2$ متفقة من أجل $n = 0$.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n \geq 0$ أي: $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$.

ولنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+3+5+\dots+(2n+3) = (n+2)^2$

$$1+3+5+\dots+(2n+3) = [1+3+5+\dots+(2n+1)] + (2n+3)$$

$$= (n+1)^2 + (2n+3)$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$$

$$= n^2 + 4n + 4$$

$$= (n+2)^2$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$

مثال تطبيقي: التتالية العددية (U_n) معرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$.

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq -2$.

(تدرب على حل بكالوريوس في التتاليات)

Bac2010 الموضوع الثاني: (06نقطة)

لتكن (U_n) التتالية العددية المعرفة بـ: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{4}$.

1) أكتب الحدود U_1 ، U_2 و U_3 .

2) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_n < 2$.

التتاليات

ب-بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

ج-استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (V_n) المرفقة من أجل كل n طبيعي ب: $V_n = U_n - 2$.

أ-بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها ومدها الأول.

ب-اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، أن:

$$U_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{ج - ماهي نهاية المتتالية } (U_n) ?$$

4) أمسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$

Bac2013 الموضوع الأول: (05 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المرفقة ب: $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)U_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي.

1- عين قيمة a من أجلها تكون المتتالية (U_n) ثابتة.

2- نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة a متى تكون المتتالية (U_n) مساوية، ثم امسب عندئذ U_n ومجموع n مدا الأول من المتتالية.

3- عين قيمة a متى تكون المتتالية (U_n) هندسية، ثم عين في هذه الحالة كلاً من U_{50} ومجموع 50 مدا الأول منها.

4- نفرض $a=4$. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $U_n = 3^n + 2$ ، ثم بين أن:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

(تدريب على حل وضعيات في التتاليات)

Bac2012الموضوع الثاني: (05نقاط)

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسمح هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد).

يرمز U_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في مسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$.

1) أ- حسب كلاً من U_0 ، U_1 و U_2 .

ب- هل التتالية (U_n) هندسية؟ هل هي مساوية؟ برر إجابتك.

ج- بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $U_{n+1} = 1,05U_n - 5000$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $V_n = U_n - 100000$.

أ- بين أن التتالية (V_n) هندسية، حدد أساسها ومدها الأول.

ب- أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$.

3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب- ابتداء من أي سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المتد على سحبه في نهاية كل سنة؟

بكالوريا تجريبية للإمداد ثانويات الوطن (ماي 2017):

بعد إصدار الدولة الجزائرية لقانون التقاعد الجديد في جانفي 2017، لاحظنا أن عددا كبيرا من موظفي التربية لولاية تيزي وزو أودعوا ملفات التقاعد لدى مصلحة الصندوق الوطني للتقاعد. ولما قامت هذه المصلحة بدراسة هذه الوضعية، وجدت أن في 31 أوت 2016 بلغ عدد موظفي التربية لولاية تيزي وزو 20000 موظفا، وخلال كل سنة من السنوات القادمة سيحال 10% منهم على التقاعد، و بهدف تعديل عدد موظفيها مع احتياجات القطاع لهذه الولاية، قررت توظيف 1500 عاملا خلال كل سنة.

نرمز من أجل كل عدد طبيعي n بـ: u_n إلى عدد عمال التربية لولاية تيزي وزو في 31 أوت من السنة $(2016+n)$.

1) عيّن u_0 ثم حسب u_1 و u_2 . هل (u_n) متتالية هندسية؟ علّل.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 1500$

ب) هل يرتفع عدد الموظفين من سنة إلى أخرى؟ برر إجابتك.

3) نعتبر التتالية (v_n) العرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 15000$.

• بين أن التتالية (v_n) هندسية بطلب تعيين أساسها. هل (v_n) متقاربة؟

4) أكتب كلاً من u_n و v_n بدلالة n .