بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السّودان المفتوحة

برنامج الحاسوب

الرياضيات المتقطعة2

رمز المقرر ورقمه: حسب 3093

إعداد المادة العلمية:

د. نور الدين عبد الرحمن نور الدين

التحكيم العلمي: د. عبد الباسط محمد شريف محمد

تصميم تعليمي : د. عبد الباسط محمد شريف محمد

التدقيق اللغوي : أ. الهدي عبد الله محمد محمد أحمد

التصميم الفني : منى عثمان أحمد النّقة

منشورات جامعة السودان المفتوحة، الطبعة الأولى 2008

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج أيّ جزء من هذا الكتاب، وبأيّ وجه من الوجوه، إلاّ بعد الموافقة المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

الحمد لله فالق الإصباح وجاعل الليل سرمدا والشمس والقمر حسبانا، الذي جعل الشمس والقمر والنجوم مسخرات بأمره ألا له الخلق والأمر تبارك الله رب العالمين. والصلاة والسلام على البشير النذير رحمة الله للعالمين وشفيع الخلق أجمعين وإمام المتقين وقائد الغر المحجلين والمبعوث رحمة للعالمين. صلوات ربي و صلاته وتسليماته عليه وعلى من سار على دربه واهتدى بهديه إلى يوم الدين، وبعد.

عزيزي الدارس مرحبا بك إلى هذا المقرر "الرياضيات المتقطعة 2" .

الرياضيات المتقطعة (Discrete mathematics) وتدعى أيضا الرياضيات المتناهية أو الرياضيات المحددة (Finite Mathematics)، هي دراسة **البنى الرياضية** التي تكون متقطعة أساسا، بمعنى أنها لا تستدعي وجود صفة **الاتصال** ولا تتطلبه لكي تدرس هذا الموضوع.

معظم الموضوعات التي تدرسها الرياضيات المتقطعة ترتبط **بمجموعات** (قابلة للعد) countable sets .

اكتسبت الرياضيات المتقطعة شعبية واسعة خلال العقود الأخيرة بسبب تطبيقاتها الواسعة في علوم الحاسوب . فمصطلحات و ترميزات الرياضيات المتقطعة مفيدة للدراسة و التعبير عن مسائل الكائنات objects في البرمجة الحاسوبية و **الخوارزميات**. بعض فروع الرياضيات المتقطعة تفيد أيضا في دراسة بعض مسائل الأعمال و الاقتصاد .

ويشتمل هذا الكتاب على الوحدات التالية :

الوحدة الأولى من مقرر " الرياضيات المتقطعة2" موضوعها "الخوارزميات" تناولت تعريف الخوارزمية وتعدد خواصها، إضافة إلى مزايا الخوارزميات وتركيبها،بالإضافة إلى شرح طرق كتابة وتمثيل الخوارزمية .

تناولت الوحدة كذلك تعقيد الخوارزميات وذلك من خلال : الحالة الأفضل (best case) للخوارزمية – الحالة الأسوأ (worst case) للخوارزمية – الحالة المتوسط (Average case) للخوارزمية.

الوحدة الثانية ناقشت "طرق العد"، وذلك من خلال القواعد الرئيسة لطرق العد، حيث تناولت قاعدتين رئيستين لطرق العد هما: مبدأ قاعدة المجموع ، ومبدأ قاعدة الضرب. وتعرضت الوحدة إلى التباديل والتوافيق حيث تناولت نظرية التباديل ، والعلاقة بين التباديل والتوافيق ، نظرية التوافيق ، وتناولت الوحدة كذلك التباديل والتوافيق العامة. حيث عرفت على عدّ طرق ترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة ، وتناولت أيضاً النظرية العامة لترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة ، كذلك عدّ طرق الاختيار غير المرتب لعدد من العناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر، وبحثت الوحدة كذلك في القاعدة العامة للاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة، مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

الوحدة الثالثة من المقرر تناولت" نظرية الرسم"، حيث ستدرس في هذه الوحدة الرسم غير الموجه والرسم الموجه ، وكذلك تعريف الحدود المتوازية والحلقية ، والرسم البسيط ، والرسم الكامل. وتتناول الوحدة المسارات والدارات والرسم المترابط ، مسار ايلر ومسار هاميليتونين ، وسوف نتعرف على تمثيل الرسوم والمصفوفة المتجاورة ، ومتتابعة الحدود ، المصفوفة المتعارضة ،وتتناول الوحدة خوارزمية المسار الأقصر، وهنا يتم تعريف الرسم الموزون وتشرح الوحدة خطوات خوارزمية المسار الأقصر، تتناول الوحدة كذلك الرسوم المتماثلة والمتممة حيث ستتعرف على الرسمين المتماثلينG_1 , G_2 ، وستتعرف كذلك على الرسم المتمم الذاتي.

الوحدة الرابعة "الأشجار" تعتبر الأشجار أحد أهم أنواع الرسوم التي تجد استخداماً وتطبيقاً واسعاً في علم الحاسوب، إذ يتم استخدمها في تجسيد هياكل البيانات وفي تصميم الخوارزميات.

سوف نتعرف في الوحدة على الشجرة الحرة وكيف يمكن أن ننشئ شجرة ذات جذر من الشجر الحرة ، وتتناول الوحدة أشجار التعريف الهرمي ، وتجد في الوحدة شرحاً لترميز هوفمان ، تتعرض الوحدة لصفات الأشجار وفيه نبحث عن الأشجار الثنائية،وشجرة البحث الثنائية، وتتناول الوحدة الأشجار الممتدة وفيه نوضح الخوارزميات التي يمكن أن تستخدم لإيجاد الشجرة الممتدة T على الرسم G .

الوحدة الخامسة وموضوعها "نماذج الشبكة وشبكات بتري" تتناول نماذج الشبكة، وفيه تعريف لشبكة النقل ، والتدفق في الشبكة وسوف نتعرف على خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على الشبكة ، وتتناول الوحدة شبكات بتري وهي نماذج رسومية يمكن استخدامها لنمذجة ودراسة المعالجة المتزامنة .

الوحدة السادسة تبحث في الدوائـر الموحدة (Combinatorial Circuits) وهي دوائر لا ذاكرة لها، وسوف نتعرف في هذه الوحدة على البوابات NOT,OR,AND ، وعلى كيفية ربط الدوائر الموحدة، وصفات الدوائر الموحدة ، كما تتناول الوحدة الجبر البوولي ، حيث تقدم المسلمات الواجب تحقيقها لنطلق على الفئة غير الخالية B جبراً بولياناً ، وتبحث الوحدة في الدوال البوولية وهي دوال تساعد في إنشاء الدوائر الموحدة، وهدفت هذه الوحدة إلى عمل تطبيقات في كيفية استخدام بوابات أخرى لتصميم الدائرة الموحدة .

الوحدة السابعة "الآلات محدودة الحالات"، فقد تناولت الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات وذلك عن طريق عرض مثال يشرح الفكرة الأساسية ، وبناء على هذا المثال نعرف الآلة محدودة الحالات ، وتبحث الوحدة في آلات تذكر / تمييز الأنماط، حيث طرحت عدداً من الأمثلة لآلات محدودة الحالات تم تصميمها بحيث تكون لديها القدرة على تذكر أنماط مدخلات معينة.

الوحدة الثامنة تناولت "الأوتوماتا محدودة الحالات واللغات". عرضت الوحدة تعريفاً للأوتوماتا محدودة الحالات مبني على أن بعض الحالات هي حالات قبول، وشرحت الوحدة قبول السلاسل المدخلة وهدفت من ذلك تصميم أوتوماتا محدودة الحالات تقبل السلاسل ، كما بحثت الوحدة في اللغات والنحو وفيها تعريف اللغة الرسمية ، النحو ،

شكل باكوس ناير، وعددت الوحدة أصناف النحو: نحو حساس السياق ، نحو حر السياق ، نحو منتظم ،حددت الوحدة العلاقة بين النحو المنتظم والأوتوماتا محدودة الحالات ، وهدفت الوحدة من ذلك إلى تحويل الاوتوماتا إلى نحو منتظم ، وكذلك تحويل النحو المنتظم إلى أوتوماتا.

كل وحدة من هذه الوحدات تحمل عنواناً جامعاً يعبر عن موضوعاتها ، ولكل منها مقدمة وخلاصة ، كما زودت كل وحدة بعدد من أسئلة التقويم الذاتي ، و بعدد من التدريبات والمناشط ، وكذلك تشمل كل وحدة مسردً للمصطلحات والكلمات التي وردت. كما ذيلنا وحدات هذا المقرر بقائمة للمصادر والمراجع المتنوعة التي تم الاستعانة بها في بناء الوحدات ليلجأ إليها الدارس إذا ما أحتاج تفاصيل أكثر.

عزيزي الدارس ، لدى قراءك هذا الكتاب أرجو أن لا يغيب عن ذهنك أن مادة هذا الكتاب هي الحد الأدنى من المعرفة في موضوعه ، الذي يسمح بإثرائه على الدوام بالرجوع إلى القراءات المساعدة والاطلاع عليها .

وفيما يلي أهم الأهداف العامة لهذا المقرر.

الأهداف العامة للمقرر

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذا المقرر يؤمل أن تكون لك القدرة على:

- **شرح** مفهوم الخوارزمية بالأمثلة.
- **توضيح** أساسيات طرق العدّ والقواعد الأساسية لها.
- **استخدام** الرسم لحل الكثير من المشاكل العملية.
- **استخدام** الأشجار في تجسيد هياكل البيانات و تصميم الخوارزميات.
- **حلّ** مسائل لنماذج الشبكة وشبكات بتري
- **تصميم** دائرة موحدة باستخدام البواباتOR, AND و NOT من الدالة البوولية.
- **توضيح** الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات عن طريق الأمثلة.
- **شرح** الفكرة الأساسية للأوتوماتا محدودة الحالات عن طريق الأمثلة.

وختاماً نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم إضافة جديدة لمكتبة جامعة السودان المفتوحة من خلال هذا الكتاب. ونسأل الله تعالى أن يكون هذا العمل خالصا لوجهه، وأن يكون في ميزان حسناتنا وأن ينتفع به الجميع ، ويغفر لنا ما سهونا عنه وعجزنا عن إدراكه.

محتويات المقرر

الوحدة	اسم الوحدة	الصفحة
1	الخوارزميات	1
2	طرق العد	31
3	نظرية الرسم	67
4	الأشجار	101
5	نماذج الشبكة وشبكات بتري	135
6	الجبر البولي والدوائر الموحدة	175
7	الآلات محدودة الحالات	219
8	الاوتوماتا محدودة الحالات واللغات	243

الوحدة الأولى
الخوارزميـات

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	3
تمهيد	3
أهداف الوحدة	4
1. تعريف الخوارزمية	**5**
2. طرق كتابة وتمثيل الخوارزمية	**9**
3. تعقيد الخوارزميات	**12**
1.3 رتبة الدالة	14
2.3 رتبة الخوارزمية	16
الخلاصة	21
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	23
إجابات التدريبات	24
مسرد المصطلحات	28
المراجع	29

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة الأولى من مقرر " الرياضيات المتقطعة2" وموضوعها "الخوارزميات "القسم الأول من الوحدة يتناول تعريف الخوارزمية وتعديد خواصها، وكذلك يستعرض القسم مزايا الخوارزميات وتركيبها.

القسم الثاني من الوحدة يبحث في طرق كتابة وتمثيل الخوارزمية. وهنا ستوضح لنا الوحدة كيفيه التعبير عن الخوارزمية:

كخريطة تدفق المخطط الانسيابي، الشفرة المزيفة .

القسم الثالث والأخير من الوحدة يتناول تعقيد الخوارزميات وذلك من خلال : الحالة الأفضل (best case) للخوارزمية، الحالة الأسوأ (worst case) للخوارزمية، الحالة المتوسطة (Average case) للخوارزمية.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **توضح** مفهوم الخوارزمية بالأمثلة.
- **تعدد** خواص الخوارزمية.
- **تعبر** عن الخوارزمية كخريطة تدفق أو بلغة برمجة افتراضية.
- **تكتب** برامج بلغة BASIC .

توطئة

إن حلّ المسائل بواسطة الحاسوب يتطلب التعبير عن حلّ المسألة كمجموعة محدودة ومرتبة من الإيعازات أو الأوامر (Instructions).إن هذه المجموعة المحدودة والمرتبة من الإيعازات تسمى خوارزمية (Algorithm). في هذه الوحدة سنبين بالتفصيل ما تعنيه الخوارزمية وسنوضح مفهوم الخوارزمية بالأمثلة.

1. تعريف الخوارزمية

الخوارزمية (Algorithm) عبارة عن مجموعة من الخطوات الرياضية والمنطقية والمتسلسلة اللازمة لحل مشكلة ما.

الخوارزمية هي مجموعة محدودة من الإيعازات أو الخطوات. وسميت الخوارزمية بهذا الاسم نسبة إلى العالم المسلم الفارسي أبو جعفر **محمد بن موسى الخوارزمي** الذي ابتكرها في القرن التاسع الميلادي ، وكلمة خوارزم(Algorism) في الأصل كانت مقتصرة على القوانين الرياضية التي تستخدم الأرقام العربية وطورت في اللاتينية من الخوارزمي (Al-Khwarizmi) لتصبح (Algorithm) في القرن الثامن عشر الميلادي لتشمل جميع إجراءات حل المشكلات وتنفيذ المهمات.

خواصها

I. الدقة **(Precision)**: يجب أن تكون الخطوات المكونة للخوارزمية مصاغة بدقة وضبط وإحكام.

II. المفردية **(Uniqueness)**: يجب أن تكون نتائج تنفيذ الخطوات الوسطى في الخوارزمية معرفة بطريقة مفردة وتعتمد على المدخلات للخوارزمية وعلى نتائج الخطوات السابقة.

III. المحدودية **(Finiteness)**: يجب أن تتوقف الخوارزمية بعد تنفيذ عدد محدود من الخطوات.

IV. المدخلات (**Input**): يجب أن تكون هنالك مدخلات للخوارزمية.

V. المخرجات (**Output**): على الخوارزمية إنتاج مخرج أو مخرجات.

VI. العمومية (**Generality**): يجب أن تكون الخوارزمية قابلة للتطبيق على مجموعة من المدخلات.

مزايا الخوارزميات:

① وصف خطوات الحل بشكل واضح ومحدد .

② عدم اعتماد الخوارزمية على أسلوب معين في المعالجة .

③ إمكانية استخدام الخوارزمية نفسها لحل جميع المشاكل المشابهة .

④ سهولة فهم خطوات حل المشكلة واستيعابها .

⑤ إمكانية اكتشاف الأخطاء التي قد تحدث بيسر وسهولة .

⑥ تعد الخوارزمية وسيلة من وسائل التوثيق .

تركيبها

هناك ثلاث تراكيب لبناء البرامج وكتابة الخوارزميات . الفكرة تكمن في أن أي برنامج أو خوارزمية يجب أن تتكون من هذه التراكيب الثلاثة فقط : التسلسل (sequence) ، الاختيار (selection) ، التكرار (repetition) .

❶ التسلسل : تكون الخوارزمية عبارة عن مجموعة من التعليمات المتسلسلة ، هذه التعليمات قد تكون إما بسيطة أو من النوعين التاليين .

❷ الاختيار : بعض المشاكل لا يمكن حلها بتسلسل بسيط للتعليمات ، وقد تحتاج إلى اختبار بعض الشروط وتنظر إلى نتيجة الاختبار ،إذا كانت النتيجة صحيحة تتبع مساراً يحتوي تعليمات متسلسلة ، وإذا كانت خاطئة تتبع مساراً آخراً مختلفاً من التعليمات . هذه الطريقة هي ما تسمى اتخاذ القرار أو الاختيار .

❸ التكرار: عند حل بعض المشاكل لا بد من إعادة نفس تسلسل الخطوات عدداً من المرات . وهذا ما يطلق عليه التكرار .

وقد أثبت أنه لا حاجة إلى تراكيب إضافية. استخدام هذه التراكيب الثلاثة يسهل فهم الخوارزمية واكتشاف الأخطاء الواردة فيها وتغييرها .

المثال التالي يوضح خوارزمية تتصف بالخواص أعلاه.

مثال(1.1.1): خوارزمية العثور على القيمة الأكبر في متتابعة محدودة.

الخوارزمية التالية تبحث عن القيمة الأكبر في المتتابعة المعطاة.

$$S(1), S(2),\ldots,S(n)$$

وترجع القيمة الأكبر من المتغير LARGE

a) عرّف المتغيرات I و LARGE ، حيث I هو فهرس للعنصر الحالي من المتتابعة تحت الاختبار، و LARGE هو المتغير الذي يحمل قيمة العنصر الأكبر وأعطها القيم الأولية التالية:

$$I := 1$$

$$LARGE := \mathbf{S}(1)$$

b) ابحث في المتتابعة عن عنصر أكبر، إن وجد فاجعله القيمة التي يحملها المتغير LARGE

$$If\ S(I) > LARGE$$

اجعل

$$LARGE := S(I)$$

c) إذا وصلت عملية البحث للعنصر الأخير، تتوقف الخوارزمية وتكون القيمة الأكبر هي LARGE

$$If\ I = N$$

اطبع LARGE و توقف Stop.

d) واصل عملية البحث بزيادة قيمة I بواحد والعودة للخطوة (2)

$$I := I + 1$$

$$GOTO\ \ step(2)$$

الآن إذا نظرنا للخوارزمية أعلاه فسنجد أن خطوات الخوارزمية قد تمت صياغتها بدقة وإحكام مما يمكن بسهولة من تحويل الخوارزمية إلى برنامج بإحدى لغات برمجة الحاسوب وهذا يحقق صفة الدقة والإحكام (Precision). الشكل (1.1.1) يبين تمثيلاً للخوارزمية بلغة BASIC، حيث توفر الأسطر من 10–50 طريقة لإدخال عناصر المتتابعة إلى الحاسوب. السطرين 60 و70 يقابلان الخطوة 1من الخوارزمية، السطر 80 يقابل الخطوة 2، السطر 90 يقابل الخطوة 3 وتتم طباعة قيمة المتغير LARGE في السطر 90 أيضاً، والأسطر 100 و 110 يقابلان الخطوة 4

```
10  INPUT N
20  DIM S(N)
30 FOR I = 1 TO N
40  INPUT S(I)
50  NEXT I
60  I = 1
70  LARGE = S(1)
80  IF S(I)> LARGE THEN LARGE = S(I)
90  IF I = N THEN PRINT LARGE : END
100  I = 1 + 1
110  GOTO  80
```

الشكل (1.1.1)

إذا تم إدخال عناصر المتتابعة S وإدخال قيمة N فإن كل الخطوات المكونة للخوارزمية تنتج نتائج مفردة ولا تعتمد أي خطوة سوى على المدخلات وناتج الخطوات السابقة لها مما يحقق الصفة الثانية وهي المفردية (Uniqueness).

الخوارزمية تتوقف بعد عدد محدود من الخطوات يعتمد على قيمة N، وهذا يحقق شرط المحدودية (Finiteness)، كما إن الخوارزمية تتلقى مدخلات (INPUT) وهي

عناصر المتابعة S وقيمة N وتنتج مخرجات (OUTPUT) هي قيمة المتغير LARGE.

أخيراً نجد أن الخوارزمية هي خوارزمية عامة (General) يمكن استخدامها لإيجاد العنصر الأكبر LARGE لأي متتابعة S تتكون من أي عدد من العناصر N .

تدريب (1)

اكتب برنامجاً بلغة BASIC يدخل اسم المستخدم ورقمه وراتبه الأساسي وعلاوته ثم يطبع تقريراً على الشاشة فيه اسم المستخدم ورقمه وراتبه الصافي .

2. طرق كتابة وتمثيل الخوارزمية

عزيزي الدارس ،

في هذا القسم ، سوف نتعرض لطرق كتابة وتمثيل الخوارزمية، بجانب كتابة الخوارزمية كمجموعة من الخطوات مصاغة باللغة الطبيعية وموضحة باستخدام المتغيرات .

يمكن التعبير عن الخوارزمية:

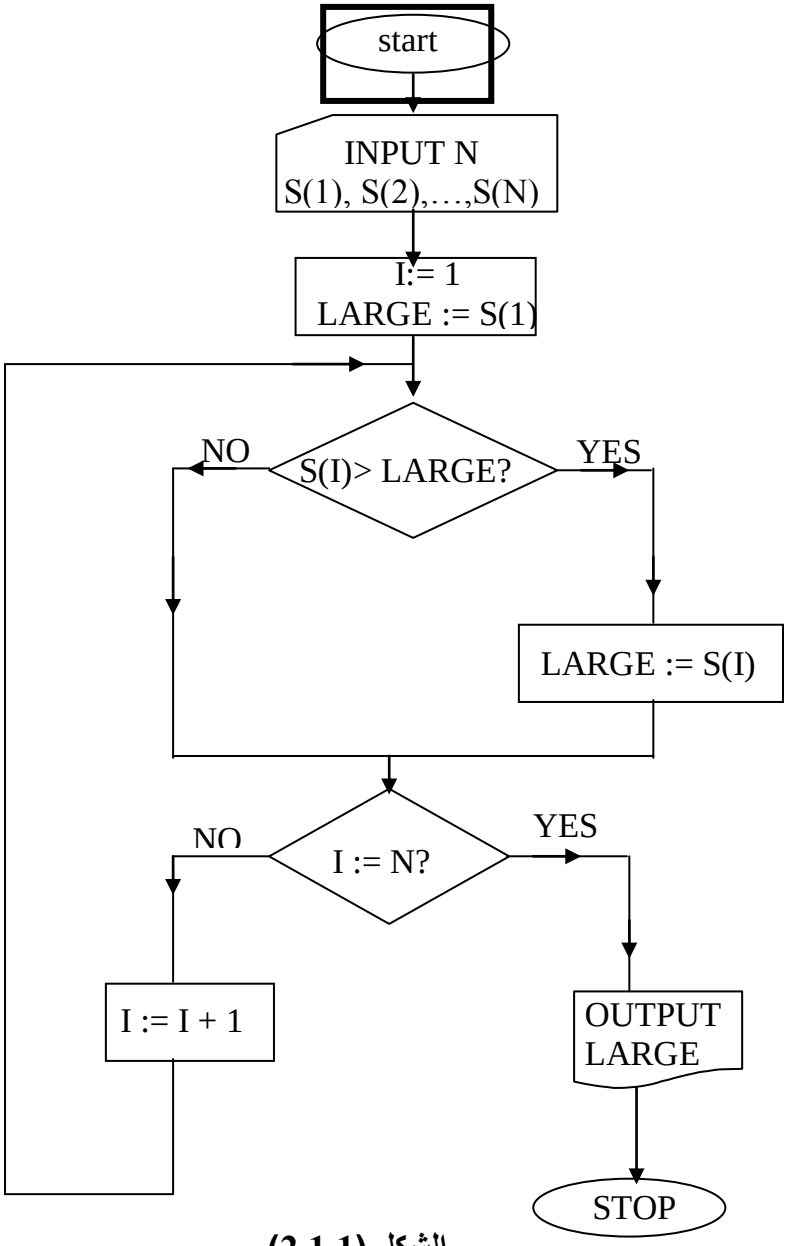
❐ كخريطة تدفق (المخطط الانسيابي) flowchart : هو تمثيل مصور للخوارزمية يوضح خطوات حل المشكلة من البداية إلى النهاية مع إخفاء التفاصيل لإعطاء الصورة العامة للحل . ويمكن تصنيفها إلى أصناف ثلاثة هي :

- مخططات سير العمليات التتابعية (Sequential Flowcharts) .
- مخططات سير العمليات ذات التفرع (Branched Flowcharts).
- مخططات سير العمليات ذات التكرار والدوران (Loop Flowcharts) .

❐ الشفرة المزيفة (pseudo code) : تمثل الخوارزمية بلغات البشر كالإنجليزية أو الفرنسية أو العربية، أو بلغات البرمجة كالباسكال (Pascal) . البعض يستخدم الكثير من

التفاصيل و البعض الآخر يستخدم القليل ... فلا قاعدة معينة لكتابة هذا النوع من الشفرات .

المثال (1.1.1) مصاغ باللغة الطبيعية وموضح باستخدام المتغيرات أو الشكلين (2.1.1) و(3.1.1) يعبران عن الخوارزمية في المثال (1.1.1) كخريطة تدفق وشفرة مزيفة على التوالي.


start
INPUT N
S(1), S(2),…,S(N)
I:= 1
LARGE := S(1)
NO
S(I)> LARGE?
YES
LARGE := S(I)
NO
I := N?
YES
I := I + 1
OUTPUT
LARGE
STOP

الشكل (2.1.1)

```
Procedure  FIND_ LARGE(S,N);
 integer N, I ;
 real S(N), LARGE
  I := 1 ;
LARGE := S(1);
 while 1 <= N do ;
  begin
if S(I) > LARGE then LARGE := S(I) ;
  I := I + 1 ;
  end;
 return (LARGE) ;
  end .
```

الشكل (3.1.1)

أسئلة تقويم ذاتي (1)

على نسق الخوارزمية في المثال (1.1.1) اكتب الخوارزميات التالية:
الخوارزمية التي تعثر على العدد الأصغر في متتابعة الأعداد S(1), S(2), ...,S(N)؟

تدريب (2)

اكتب برنامجاً بلغة BASIC يحسب المتوسط ومربع الانحراف المعياري لأعداد عددها N.

3. تعقيد الخوارزميات(Complexity of Algorithms)

عزيزي الدارس ، من الواضح أنه من الممكن صياغة أكثر من خوارزمية واحدة لكل مسألة ما، كمثال لذلك إذا أردنا أن نقوم بترتيب عناصر مصفوفة من الأعداد الصحيحة تصاعدياً فإن عملية الترتيب يمكن أن تتم وفقاً لأفكار مختلفة مما ينتج خوارزميات مختلفة، أيضاً إذا أردنا معرفة ما إذا كان عدداً صحيحاً معطى هو عدد أولي أم لا، فإننا نجد أن هنالك العديد من الطرق المختلفة التي يمكن استخدامها لاختبار أولية العدد.

في مثل هذه الحالات فإن العديد من الأسئلة يمكن أن تطرح مثل:

- ✓ أي الخوارزميات أسرع؟
- ✓ ما هو الحجم في الذاكرة الذي تحتاجه الخوارزمية حتى يمكن تنفيذها؟

إن الإجابة عن السؤالين أعلاه تتطلب منا دراسة ما يسمى بتعقيد الخوارزميات (Complexity of Algorithms).

ابتداءً يجب أن نشير إلى أن برنامج الحاسوب المجسد لخوارزمية صحيحة قد يكون برنامجاً بلا فائدة عند استخدام نوع معين من المدخلات إما لأن تنفيذ البرنامج يحتاج لمساحة كبيرة في الذاكرة لا تتوفر أو لأن زمن تنفيذه سيكون طويلاً جداً.

كمثال افترض أن لدينا المجموعة X التي تحتوي على n عنصر، وأن بعض العناصر قد ميزت بالرمز 0 وبعضها ميز بالرمز 1 وطلب منا معرفة عدد المجوعات الجزئية (Subset) للمجموعة X التي بها كحد أدنى عنصر واحد مميز بالرمز 1. افترض أننا قد قمنا بكتابة الخوارزمية التي تقوم بإنتاج كافة المجموعات الجزئية للمجموعة X وتقوم باختبار هذه المجموعات الجزئية وعدّ تلك التي بها كحد أدنى عنصر واحد مميز بالرمز 1، ثم قمنا بتجسيد الخوارزمية كبرنامج بإحدى لغات برمجة الحاسوب.

عند تنفيذ البرنامج سنجد أن البرنامج يعمل بشكل جيد عندما تكون قيم n صغيرة ولكنه يعمل ببطء أو يتوقف كلياً عن العمل عندما تصبح قيمة n كبيرة، وذلك لان عدد

المجموعات الجزئية للمجموعة X يعتمد على قيمة n. ان عدد هذه المجموعات الجزئية هو 2^n. وبالتالي فإن الزمن اللازم لتنفيذ البرنامج سيكون هو 2^n وحدة زمن، أياً كانت قيمة هذه الوحدة الزمنية.

يتضح جلياً إن الزمن 2^n سيزيد بشكل كبير جداً كلما كبرت قيمة n. وبالتالي فإن تنفيذ البرنامج لقيم كبيرة للمدخل n سيكون بلا فائدة.

إن تقدير الزمن الذي سيستغرقه تنفيذ برنامج حاسوب يعتمد على قدرتنا على تحديد معاملات الأداء(Performance Parameters) لبرنامج الحاسوب، وهو أمر صعب لأنه يعتمد على عدد من العناصر مثل كفاءة الحاسوب المستخدم، وطريقة تمثيل البيانات والمترجم المستخدم وغيرها، لهذا فإن تحليل مدى تعقيد الخوارزمية التي بني عليها البرنامج هو الأمر الأسهل والذي يعطينا معلومات مفيدة تجعلنا قادرين على تقدير الزمن المطلوب للتنفيذ عند تحويل الخوارزمية لبرنامج حاسوب.لهذا فمن المهم أن نكون قادرين على تقدير (Estimate) الزمن وحجم الذاكرة التي تحتاجها الخوارزمية المحددة قبل تحويلها لبرنامج حاسوب.

إن الزمن والمساحة المطلوبة في الذاكرة لخوارزمية ما مرتبطان بحجم البيانات المدخلة للخوارزمية، فإذا رمزنا لحجم البيانات المدخلة للخوارزمية بالرمز n، فإن حساب الزمن والمساحة للخوارزمية سيكون في ظل افتراض أن حجم البيانات المدخلة هو n.

إن قياس الزمن اللازم لتنفيذ خوارزمية يمكن أن يتم بعدّ الإيعازات (الأوامر)التي يتم تنفيذها قبل وصول الخوارزمية للمخرج المطلوب، أو بعدّ عدد مرات تنفيذ حلقة تكرارية، أو بعدّ عدد مرات المقارنة إذا كان العمل الرئيسي للخوارزمية هو عملية (عمليات) مقارنة.

كذلك يمكن قياس المساحة المطلوبة في الذاكرة للخوارزمية بتحديد حجم الذاكرة المطلوب لتخزين المتغيرات، مصفوفات البيانات وغيرها.

عند حساب تعقيد خوارزمية فإننا عادة نكون راغبين في معرفة تعقيد الخوارزمية عند قيمة المدخل n التي تجعل أداء الخوارزمية أسوأ ما يمكن من حيث الزمن والمساحة

في الذاكرة (worst case) وعند قيمة المدخل n التي تجعل أداء الخوارزمية أفضل ما يمكن من حيث الزمن ومساحة الذاكرة(best case).

أيضا سنكون راغبين في معرفة تعقيد الخوارزمية عندما يكون الأداء متوسطاً من حيث الزمن والمساحة(Average case).

مثال (1.2.1):

إن الحالة الأسوأ (worst case)، والحالة الأفضل (best case) والحالة المتوسطة (average case) للخوارزمية في المثال (1.1.1) (بافتراض أن طول المتتابعة المدخلة S هو n وأن زمن التنفيذ هو عدد مرات تنفيذ الحلقة) هي جميعها n لأن الحلقة دائماً تنفذ n مرة.

1.3 رتبة الدالة (Function Order)

أجعل f و g دوال في المجموعة $\{1, 2, 3,\ldots\}$

سنكتب

$$f(n)= O (g(n))$$

ونقول إن f(n) لها على الأكثر الرتبة g(n) إذا كان هنالك عدد صحيح موجب C بحيث تكون

$$| f(n) | \leq c | g(n) |$$

لمجموعة محدودة من الأعداد الصحيحة n الأمثلة التالية توضح مفهوم الرتبة (Order)

مثال (2.2.1):

بما أن:

$$n^2 + n + 3 \leq 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 = 9n^2$$

يمكننا أن نأخذ C=9 بناءً على التعريف (1.2.1)، وبالتالي نكتب أن

$$n^2 + n + 3 = O(n^2)$$

مثال (3.2.1):

بما أن

$$1+2+3+.....+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \le \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2$$

يمكننا أن نأخذ C = 1 بناءً على التعريف (1.2.1) وبالتالي نكتب

$$1 + 2 + 3 +.....+ n = O(n^2)$$

مثال(3.2.1):

بما أن

$$\begin{aligned} \left| 3n^3 + 6n^2 - 4n + 2 \right| &\le 3n^3 + 6n^2 + 4n + 2 \\ &\le 6n^3 + 6n^3 + 6n^3 + 6n^3 \\ &= 24n^3 \end{aligned}$$

يمكننا ان نأخذ c= 24 بناءً على التعريف (1.2.1) وبالتالي نكتب

$$3n^3 + 6n^2 - 4n + n = O(n^3)$$

بعد تعريفنا لمفهوم رتبة الدالة سنعرف فيما يلي رتبة الخوارزمية.

2.3 رتبة الخوارزمية (Algorithm Order)

إذا احتاجت خوارزمية لزمن قدرة f(n) وحدة زمنية حتى تتوقف عندما يكون حجم البيانات المدخلة للخوارزمية هو n وكانت

$$f(n) = O(g(n))$$

فإننا نقول إن الزمن الذي تحتاجه الخوارزمية هو من الرتبة O(g(n)).

بالمثل إذا كانت الخوارزمية تحتاج لحجم قدرة f(n) وحدة من الذاكرة عندما كان حجم البيانات المدخلة للخوارزمية هو n وكانت (n) = O(g(n)) فإننا نقول إن الحيز أو المساحة في الذاكرة التي تحتاجها الخوارزمية هو من الرتبة O(g(n)).

المثال التالي يوضح كيف نحسب رتبة خوارزمية:

مثال (5.2.1):

حدد رتبة الزمن الذي تحتاجه الخوارزمية التالية عند الحالة الأفضل (Best case)، الحالة الأسوأ(Worst case) والحالة المتوسطة (average case)، مفترضاً أن حجم البيانات المدخلة للخوارزمية هو N وأن زمن تنفيذ الخوارزمية يحسب بعدد المقارنات التي تتم في الخطوة (3) من الخوارزمية.

<u>الخوارزمية:-</u>

الخوارزمية هي خوارزمية للبحث عن العنصر Target في المصفوفة غير المرتبة S.

معطى المصفوفة S(1), S(2),…,S(N) وقيمة العنصر المراد البحث عنه Target .في حالة وجود القيمة Target في المصفوفة S ترجع الخوارزمية فهرس أول موقع وجدت فيه القيمة (Target) في المصفوفة في المتغير I وفي حالة عدم وجود القيمة (Target) ترجع الخوارزمية القيمة 0 في المتغير I.

a) عرف المتغير I وأعطه القيمة الابتدائية 1

$$I = 1$$

b) إختبر قيمة المتغير I، إذا كانت أكبر من N تتوقف الخوارزمية وترجع القيمة 0 في المتغير 1.

$$\text{if } I > N, \text{ set } I := 0, \text{ stop}$$

c) اختبر وجود القيمة Target إذا كانت موجودة فإن قيمة I تعبر عن الموقع الذي وجدت به Target.

$$\text{If } S(I) = \text{Target} , \text{return}(I), \text{stop}$$

d) واصل عملية البحث بزيادة قيمة المتغير I والعودة للخطوة 2

$$I := I + 1, \text{ GOTO Step2}$$

الحل:

إن الحالة الأفضل (best case) عندما يكون أول عنصر في المصفوفة هو العنصر المراد عنه (Target)، أي عندما تكون S(1)= Target.

في هذه الحالة فإن الخطوة (3) تنفذ مرة واحدة فقط وبالتالي فإن أفضل حالة للخوارزمية سيكون لها الزمن O(1).

إن الحالة الأسوأ (worst case) للخوارزمية هي عندما يكون العنصر المراد البحث عنه Target غير موجود في المصفوفة، في هذه الحالة فإن الخطوة (3) في الخوارزمية ستنفذ n مرة وبالتالي فإن أسوأ حالة للخوارزمية سيكون لها الزمن O(N).

إن الحالة المتوسط (Average case) للخوارزمية هي عندما نفترض الاحتمالين معاً. احتمال العنصر Target في المصفوفة واحتمال عدم وجوده.

عند افتراض وجود العنصر في الموقع I فإن الخطوة (3) من الخوارزمية ستنفذ I مرة. حيث قيمة I هي إما 1 أو 2 أو 3 ،....أو N، أما في حالة عدم وجود العنصر فإن الخطوة (3) تنفذ n مرة، إذن فإن متوسط الاحتمالين معاً هو

$$\frac{(1+2+3+\ldots+N)+N}{N+1} = \frac{N(N+1)/2+N}{N+1}$$

$$\leq \frac{N(N+1)/2 + (N+1)}{(N+1)}$$

$$= N/2 +1 \leq N+1 \leq =2N$$

إذن فإن الحالة المتوسطة للخوارزمية سيكون لها الزمن O(N) .

تنبيه

عند استخدامنا للرتبة باستخدام الرمز O لتحديد مدى فاعلية خوارزمية يجب أن نضع في ذهننا أن الرتبة تعطي فقط تقديراً أعلى (Upper Estimate) للقيمة الحقيقية لمؤشر الأداء المقاس سواء أكان زمناً أو حيزاً في الذاكرة.

لتوضيح هذه الحقيقة، إذا أعطينا كمثال الخوارزميتين A و B وعلمنا أن رتبة الزمن للخوارزميتين هي $O(n^3)$, $O(n^2)$ على التوالي، فإنه سيتبادر لذهننا مباشرةً أن الخوارزمية A أفضل من B من حيث السرعة، ولكن نتيجة لحقيقة أن الرتبة O تعطي تقديراً أعلى يجب أن لا نأخذ ذلك كحقيقة مسلم بها، فقد تكون الخوارزمية B أفضل من A لمدخلات معينة.

لتوضيح حقيقة أن الرتبة O تعطي تقديراً أعلى افترض أن الحيز الذي تحتاجه الخوارزميتان A و B في الذاكرة هو $O(n)$, $O(n^2)$ على التوالي، وأن هذه الرتب قد نتجت من حقيقة ان الخوارزميتين A و B عندما كان حجم المدخلات لهما هو n كانتا تحتاجان لحيز حجمه 300n و 5n2 وحدة من الذاكرة.

الآن إذا أخذنا حجم المدخلات هو $n = 5$ سنجد أن الخوارزمية A تحتاج لحيز حجمه 1500 وحدة من الذاكرة، بينما تحتاج الخوارزمية B لحيز حجمه 125 وحدة من الذاكرة مما يجعل B أكثر فاعلية من A.

ولكن بشكل عام إذا كان حجم n كبيراً، 100 مثلاً فإن أداء الخوارزمية A سيكون أفضل من B.

إن هذا المثال يؤكد على أن الرتبة O تعطي فقط تقديراً أعلى، ولكن رغم هذا يبقى استخدام الرتبة O في قياس كفاءة الأداء للخوارزميات مفيداً.

2.3 الرتب الأكثر شيوعاً:

هنالك نوع معين من رتب الأداء سواء للزمن أو للحيز في الذاكرة كثير الظهور كرتب أداء للخوارزميات. الجدول (1.2.1) يبين هذه الرتب والأسماء المميزة التي تعطى لها.

الرتب الأكثر شيوعاً: الجدول(1.2.1)

الاسم	الرتبة
ثابت(Constant)	O(1)
لوغريثم لوغريثم(Log Log)	O(Lg Lg N)
لوغريثمي(Logarithmic)	O(Lg n)
خطي(Linear)	O(n)
N لوغريثم n (n log n)	O(n Lg n)
تربيعي(quadition)	$O(n^2)$
تكعيبي (Cubic)	$O(n^3)$
(Polynomial)	$O(n^m)$
أسي(Exponential)	$O(m^n), m >= 2$
مضروب(Factorial)	O(n!)

في الجدول (1.2.2)، الرمز lg هو رمز للوغريثم للأساس 2.

باستثناء $O(n^m)$ فإن بقية الرتب في الجدول قد تم تنظيمها بحيث إذا كانت O(f(m)) أعلى من O(g(n)) فإن f(n)<=g(n) لكل قيم n. وبالتالي إذا كان للخوارزميتين A و B رتبة زمن التنفيذ O(f(n)) و O(g(n)) على التوالي، وكانت الخوارزميتينA و B تحتاجان حقيقةً لزمن تنفيذ c_1 f(n) و c_2g(n) وحدة زمن على التوالي وكانت O(f(n)) أعلى من O(g(n))في الجدول (1.2.1) فإن الخوارزمية A أكثر فاعلية في زمن التنفيذ من B عندما تكون قيم المدخلات كبيرة.

أسئلة تقويم ذاتي (2)

1/ من الجدول (1.2.1) اختر الرتبة المناسبة لكل من التعابير التالية:

(أ)6n+1

(ب)6n3- 12n2-1

(ج)3n2 + 2n Lg n

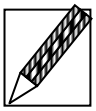
(د) 2lg n-4n+3nlg n

2/ من الجدول (1.2.1) إختر الرتبة المناسبة للتعبير f(g) + f(n) لكل مما يأتي:

أ/ f(n)= O(1),g(n)= O(n2).

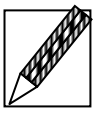
ب/ f(n)= O(n3/2), g(n)= O(n5/2).

تدريب (3)



بين أن $2^n = O(n!)$

تدريب (4)



بين أن **lg (n!) = O(n lg n)**

الخلاصة

عزيزي الدارس ، لقد عرضت لك في هذه الوحدة الأولى من مقرر "الرياضيات المتقطعة2 " الموضوعات الأساسية التالية:

– عرفت الوحدة الخوارزمية **(Algorithm)** بأنها عبارة عن مجموعة من الخطوات الرياضية والمنطقية والمتسلسلة اللازمة لحل مشكلة ما.

– عرضت الوحدة خصائص الخوارزمية: الدقة – المفردية – المحدودية – المدخلات – المخرجات – العمومية.

– كذلك عرضت الوحدة مزايا الخوارزميات:وصف خطوات الحل بشكل واضح ومحدد – عدم اعتماد الخوارزمية على أسلوب معين في المعالجة – إمكانية استخدام الخوارزمية نفسها لحل جميع المشاكل المشابهة – سهولة فهم خطوات حل المشكلة واستيعابها – إمكانية اكتشاف الأخطاء التي قد تحدث بيسر وسهولة –تعد الخوارزمية وسيلة من وسائل التوثيق .

– بينت الوحدة طرق تركيب الخوارزمية:وهي ثلاث تراكيب لبناء البرامج وكتابة الخوارزميات: التسلسل (sequence) ، الاختيار (selection) ، التكرار (repetition) .

– وضحت الوحدة أنه يمكن التعبير عن الخوارزمية: ●كخريطة تدفق (المخطط الانسيابي) ويمكن تصنيفها إلى أصناف ثلاثة:مخططات سير العمليات ذات التفرع (Branched Flowcharts) – مخططات سير العمليات التتابعية (Sequential Flowcharts) – مخططات سير العمليات ذات التكرار والدوران (Loop Flowcharts) .

●الشفرة المزيفة (pseudo code).

– وضحت الوحدة عند حساب تعقيد خوارزمية فإننا عادة نكون راغبين في معرفة تعقيد الخوارزمية عند قيمة المدخل n التي تجعل أداء الخوارزمية أسوأ ما يمكن من حيث الزمن

والمساحة في الذاكرة (worst case) وعند قيمة المدخل n التي تجعل أداء الخوارزمية أفضل ما يمكن من حيث الزمن ومساحة الذاكرة(best case).

أيضا سنكون راغبين في معرفة تعقيد الخوارزمية عندما يكون الأداء متوسطاً من حيث الزمن والمساحة(Average case).

- عرفت الوحدة رتبة الدالة (**Function Order**):

أجعل f و g دوال في المجموعة $\{1, 2, 3,\ldots\}$

سنكتب $f(n)= O(g(n))$

ونقول أن $f(n)$ لها على الأكثر الرتبة $g(n)$ إذا كان هنالك عدد صحيح موجب C بحيث تكون $|f(n)| \leq c |g(n)|$ لمجموعة محدودة من الأعداد الصحيحة n الأمثلة التالية توضح مفهوم الرتبة (Order)

- عرفت الوحدة رتبة الخوارزمية (**Algorithm Order**):

إذا احتاجت خوارزمية لزمن قدرة $f(n)$ وحدة زمنية حتى تتوقف عندما يكون حجم البيانات المدخلة للخوارزمية هو n وكانت$f(n) = O(g(n))$ فإننا نقول ان الزمن الذي تحتاجه الخوارزمية هو من الرتبة $O(g(n))$.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس ،

بعد أن فرغت من دراسة الوحدة الأولى التي عالجت موضوع الخوارزميات من حيث طرق كتابة وتمثيل الخوارزميات وتعقيد الخوارزميات ، ينتقل بك المقرر إلى الوحدة الثانية وعنوانها "طرق العد "وهي تتناول القواعد الرئيسة لطرق العد وتبحث في التباديل والتوافيق، وتتناول الوحدة أيضاً كيفية عد طرق ترتيب عناصر متتابعة تشتمل على عناصر مكررة، وعد طرق الاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة ما مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

```
10    Rem Program To Output Payroll Sheet Of Unknown
      Number Of Employees .
20    Input  "Employee Number:" , N
30    Rem Use 777777 As Control Dummy Variable
40    If N= 777777 Then 130
50    Input "Employee Name:"
60   Input"Employee BASIC Salary:"BS
70   Input "Employee Allowance:",A
80    Rem Calculate Net Salary
90    NS= BS+ A
100   Print N$, NS
110   Rem Now Return To Process Next Employee
120   Go To 20
130   End
```

تدريب (2)

```
10    Rem Mean And Variance Of N Numbers
20    Input "Data Size:", N
30    Rem Initiate Values Of Sum, Sumsq & Counter .
40    Sum = Sumsq = 0
50    Counter =o
60    Input "Input Data: "  ,X
70    Rem Make Sum And Sumsq Of Squares
80    Sum = Sum + X
90    Sumsq = Sumsq +X * X
100   Counter = Counter + 1
110   If Counter < N Then 60
120  Rem Compute Mean And Variance
```

```
130  Mean = Sum / N
140  V= (Sumsq – N*Mean * Mean)/(N - 1)
150   Print "The Mean", Mean
160   Print"The Variance"
170  End
```

تدريب **(3)**

$$2^n = 2(2^{n-1}) = 2(2.2\ldots\ldots.2)$$
$$\leq 2(2.3\ldots n)$$
$$= 2n!$$
$$2^n = O(n!)$$

تدريب **(4)**

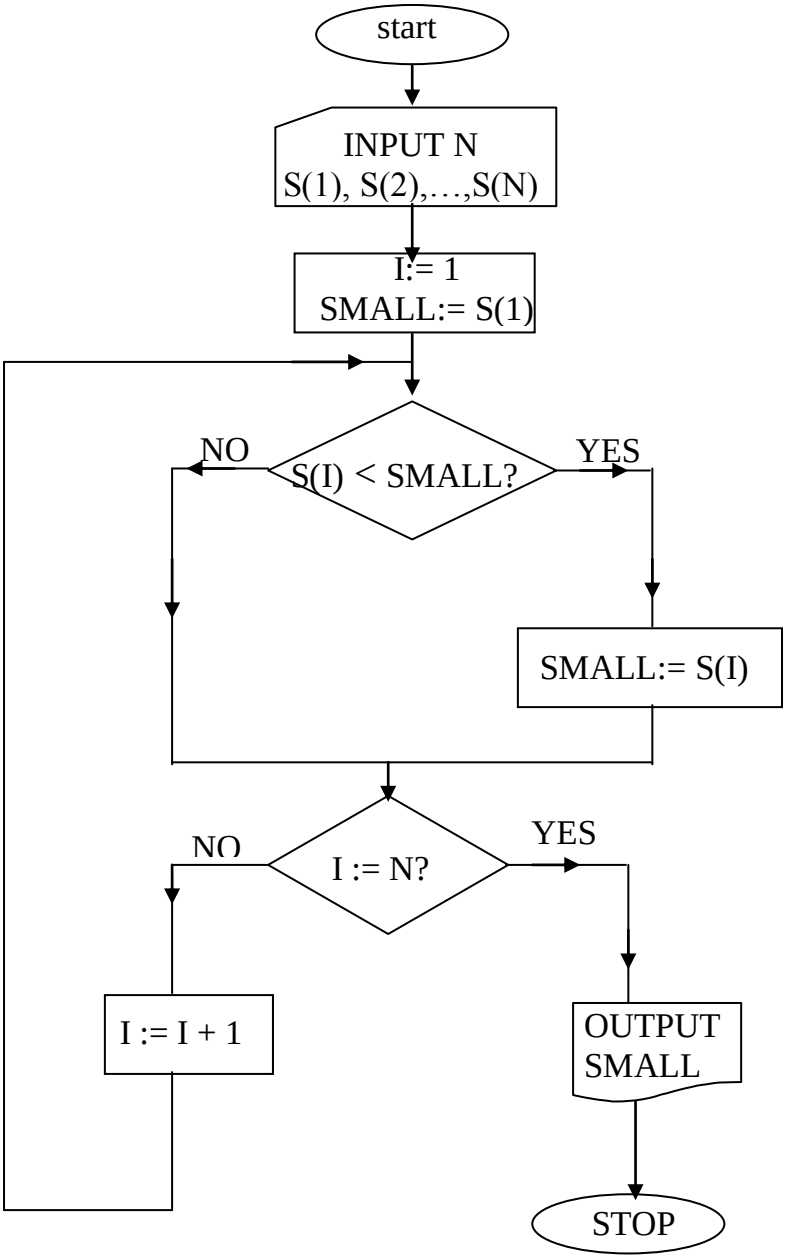
$$n! = n(n-1)\ldots 2\text{-}1$$
$$\leq n.\ n.\ n\ldots.n$$
$$= n^n$$

إذن

$$\log(n!) \leq n \log n$$
$$\log(n!) = O(n \log n)$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة تقويم ذاتي (1)



```
Procedure  FIND SMALL (S,N);
 integer N, I ;
 real S(N), LARGE
  I := 1 ;
   SMALL:= S(1);
 while 1> = N do ;
  begin
if S(I) <  SMALL then SMALL := S(I) ;
  I := I + 1 ;
  end;
 return (SMALL) ;
  end .
```

أسئلة تقويم ذاتي (2)

المسألة(1–أ)

الرتبة المناسبة هي O(n)

المسألة(1–ب)

الرتبة المناسبة هي O(n3)

المسألة(1–ج)

الرتبة المناسبة هي O(n lg n)

(1–د)

الرتبة المناسبة هي O(n lg n)

المسألة (2–أ)

الرتبة المناسبة للتعبير f(n) + g(n) هي O(n2)

المسألة (2–ب)

الرتبة المناسبة للتعبير f(n) + g(n) هي O(n5/2)

مسرد المصطلحات

❁ **الخوارزمية (Algorithm)**

عبارة عن مجموعة من الخطوات الرياضية والمنطقية والمتسلسلة اللازمة لحل مشكلة ما.

❁ **المخطط الانسيابي (flowchart)**

هو تمثيل مصور للخوارزمية يوضح خطوات حل المشكلة من البداية إلى النهاية مع إخفاء التفاصيل لإعطاء الصورة العامة للحل .

المراجع

1- Lin C. L. “Elements of Discrete Mathematics”, McGraw Hill, Computer Science Series, 1977.
2- Richard J. B. “Discrete Mathematics”, Revised Edition London, Maxwell McMillen International Edition, 1984.
3- Seymour lipschutz and Marc Lipson, “Schaum’s Outline of
4- Discrete Mathematics”, 3rd Ed.
5- Kenneth H. Rosen, “Student’s Solution Guide to accompany Discrete Mathematics and Its Applications”, Jerrold Grossman Sixth Edition.

الوحدة الثانية
طرق العد
(Counting Methods)

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	33
تمهيد	33
أهداف الوحدة	34
1. القواعد الرئيسية لطرق العد	**35**
1.2 القاعدة الأولى للعدّ (مبدأ الضرب)	36
2.2 القاعدة الثانية للعدّ (مبدأ المجموع)	38
2. التباديل والتوافيق	41
1.2 نظرية التباديل	43
2.2 العلاقة بين التباديل والتوافيق	46
3.2 نظرية التوافيق	47
3. التباديل والتوافيق العامة	48
1.3 عدّ طرق ترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة	48
2.3 النظرية العامة لترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة	49
3.3 عدّ طرق الاختيار غير المرتب لعدد من العناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر	51
4.3 القاعدة العامة للاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر	52
الخلاصة	56
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	58
إجابات التدريبات	59
مسرد المصطلحات	64
المراجع	65

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،،

نرحب بك إلى الوحدة الثانية من مقرر " **الرياضيات المتقطعة2**" وموضوعها "طرق العد".

القسم الأول من الوحدة يتناول القواعد الرئيسة لطرق العد، حيث نتناول قاعدتين رئيستين لطرق العد هما مبدأ قاعدة المجموع ، مبدأ قاعدة الضرب .

القسم الثاني من الوحدة يبحث في التباديل والتوافيق، حيث سنتناول نظرية التباديل ، والعلاقة بين التباديل والتوافيق ، ونظرية التوافيق.

القسم الثالث من الوحدة يتناول التباديل والتوافيق العامة وفي هذا القسم سنتعرف على عدّ طرق ترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة ، ويتناول القسم أيضاً النظرية العامة لترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة ، كذلك تجد في هذا القسم عدّ طرق الاختيار غير المرتب لعدد من العناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر، ويبحث القسم كذلك في القاعدة العامة للاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تذكر** القواعد الرئيسة لطرق العد.
- **تستخدم** قواعد العد لحساب التباديل.
- **توضح** بالمثال خطوات حساب عدد تباديل r عنصر مأخوذة من مجموعة x.
- **تشرح** بالمثال طرق ترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة.
- **تبرهن** النظرية العامة لترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة.
- **تبين** كيفية حساب عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها اختيار r عنصر من عناصر مجموعة بها n عنصر مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

توطئة

إن العديد من مسائل الرياضيات المتقطعة يتطلب حلها معرفة مسبقة بطرق العد، لهذا فقد قمنا بتخصيص هذا الباب لدراسة أساسيات طرق العدّ والقواعد الأساسية لها.

1. القواعد الرئيسية لطرق العد

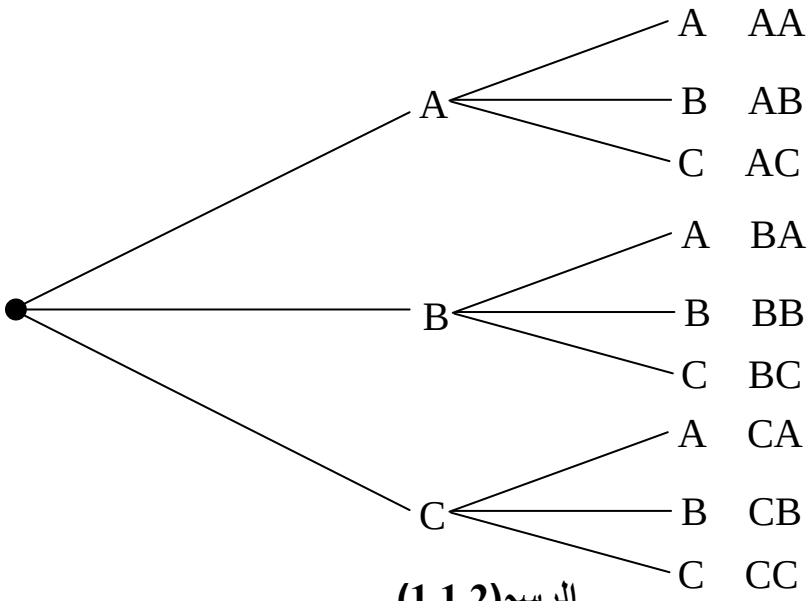
عزيزي الدارس، هنالك قاعدتان رئيسيتان لطرق العدّ، ولكن قبل أن نقدم القاعدة الأولى منها دعنا ننظر في المثال التالي:

مثال (1.1.2):

ما هو عدد السلاسل ذات الطول 2 التي يمكن تكوينها من الحروف الأبجدية A, B, C إذا كان تكرار الحرف مسموحاً به؟

الحل: بما أن السلسلة المراد تكوينها تشتمل على حرفين فقط، فلدينا ثلاث خيارات لاختيار الأول، ولأن التكرار مسموح به فلدينا أيضاً ثلاث خيارات لاختيار الحرف الثاني، لهذا فإن عدد السلاسل التي يمكن تكوينها هو 9 = 3.3.

الرسم (1.1.2) يوضح لماذا قمنا بضرب 3 في 3.



الرسم(1.1.2)

من الرسم نجد أن هنالك ثلاث مجموعات (A, B و C) كل مجموعة بها ثلاث عناصر.

إن هذا المثال يوضح القاعدة الأولى للعدّ.

1.2 القاعدة الأولى للعدّ (مبدأ الضرب)

عزيزي الدارس، إذا كانت هنالك عملية ما تتم في t خطوة، وكانت الطرق التي يمكن ان تتم بها الخطوة الأولى هي n1 طريقة، والطرق التي يمكن ان تتم بها الخطوة الثانية هي n_2، ...، والطرق التي يمكن أن تتم بها الخطوة t هي n_t طريقة. فإن العدد الكلي (T) للطرق التي يمكن أن تتم بها العملية (الفعل أو النشاط) هو

$$n_1 . n_2 . n_3 . \ldots . n_t$$

أي أن

$$T = \prod_{i=1}^{t} n_i$$

في المثال السابق (1.1.2) نجد أن عملية تكوين سلسلة من حرفين تتطلب خطوتين.

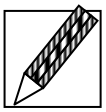
الخطوة الأولى: هي اختيار الحرف الأول وهذا يمكن أن يتم بثلاثة طرق، إذن n1=3 .

الخطوة الثانية: هي اختيار الحرف الثاني وهذا أيضاً يمكن ان يتم بثلاثة طرق،(لأن التكرار مسموح به) إذن n2=3 .

لهذا فإن العدد الكلي لطرق تكوين السلسلة

$$T = n_1 . n_2$$
$$= 3 . 3$$
$$= 9$$

تدريب (1)



إذا كانت المجموعة S تحتوي على n عنصر، $S= \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$، بيّن أن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة S هو 2^n.

مثال (3.1.2):

ما العدد الكلي للسلاسل التي طولها 8 ثنائيات؟ (الثنائية (Bit) إما 0 أو 1).

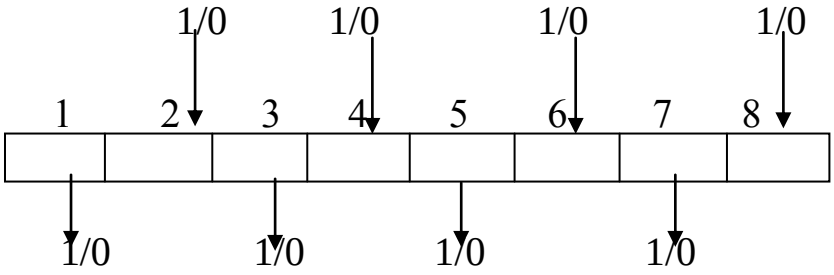
الحل:

تكوين السلسلة التي طولها 8 ثنائيات يحتاج لثمانية (8) خطوات هي:

الخطوة الأولى: اختيار الثنائية الأولى وهذا يعني إما اختيار 0 او 1،إذن $n_1 = 2$.

الخطوة الثانية: اختيار الثنائية الثانية وهذا يعني إما اختيار 0 أو 1،إذن $n_2=2$ وهكذا...

الخطوة الثامنة: اختيار الثنائية الثامنة، وهذا يعني إما اختيار 0 أو 1،إذن $n_8 = 2$ انظر الشكل (2.1.2).



الشكل (2.1.2)

إذن العدد الكلي للسلاسل ذات الطول 8 ثنائيات هو

$$T = n_1 . n_2 \ldots . n_8$$
$$= 2 . 2 \ldots ..2$$
$$= 2^8$$
$$= 256.$$

تدريب (2)

ما العدد الكلي للكلمات المكونة من 4 أحرف التي يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف $S= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$؟

مثال (5.1.2):

كم عدد السلاسل المكونة من 8- ثنائيات والتي تبدأ بالثنائيات 100 أو 111 .

الحل:
إن حل المسألة يتطلب خطوتين .

الخطوة الأولى (S_1): حساب عدد السلاسل التي تبدأ بالثنائيات 100.

الخطوة الثانية (S_2): حساب عدد السلاسل التي تبدأ بالثنائيات 111.؟

الخطوة الأولى (S_1) تتطلب خمس خطوات متتابعة هي :

1- اختيار الثنائية الرابعة، وهذا يعني إما اختيار 0 او 1، إذن $n_1 = 2$.

2- اختيار الثنائية الخامسة، وهذا يعني إما اختيار 0 او 1، إذن $n_2 = 2$.

5- اختيار الثنائية الثامنة؟ وهذا يعني إما اختيار 0 او 1، إذن $n_5 = 2$.

إذن العدد الكلي لطرق إجراء الخطوة الأولى S1 هو

$$T_1 = n_1 \cdot n_2 \ldots n_5$$
$$= 2 \cdot 2 \ldots . 2 = 2^5 = 32$$

الخطوة الثانية(S_2) تتطلب نفس الخطوات الخمسة المتتابعة التي احتاجتها الخطوة الأولى (S_1).

إذن العدد الكلي لطرق إجراء الخطوة الثانية (S_2) هو

$$T_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

إذن العدد الكلي للسلاسل التي تبدأ بالثنائيات 100 أو 111 هو 64 = 32 + 32 =

في المثال أعلاه نلاحظ أننا قمنا بجمع عدد طرق إجراء الخطوة الأولى (S_1) وهوT_1 إلى عدد طرق إجراء الخطوة الثانية(S_2) وهو T_2 لنحصل على النتيجة النهائية.

إن القاعدة الثانية للعدّ توضح لنا متى نقوم بعملية الجمع لنحصل على المجموع الكلي لطرق إجراء عمليةٍ ما.

2.2 القاعدة الثانية للعدّ (مبدأ المجموع)

افترض أن $S_1 , S_2 , \ldots, S_i$ هي مجموعات وأن كل مجموعةS_i بها n_i عنصر.

إذا كان كل زوج من عائلة المجموعات{ $S_1 , S_2 , \ldots, S_i$ }هو زوج منفصل (Pair wise disjoint)، أي أن

$$s_j \cap s_k = \emptyset, j , k = 1, 2, \ldots t , j \neq k$$

فإن العدد الكلي للعناصر التي يمكن اختيارها من S_1 أو S_2 أو.... S_t هو:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t$$
$$= U^t \ S_i$$

i=1

في المثال السابق (5.1.2) يمكننا ان نجعل S_1 هي مجموعة السلاسل المكونة من 8 ثنائيات والتي تبدأ بالثنائيات 100 و S_2 هي مجموعة السلاسل المكونة من 8 ثنائيات التي تبدأ بالثنائيات 111.

وبما أن S_1 منفصلة عن S_2 فإن العدد الكلي للسلاسل التي إما ان تبدأ بالثنائيات 100 أو الثنائية111 بناءً على القاعدة الثانية هي $S_1 \cup S_2$

$$32 + 32 = 64$$

مثال (6.1.2):

ما عدد السلاسل التي طولها 8 ثنائيات والتي إما أن تبدأ بالثنائية 101 او ان تكون الثنائية الخامسة بها هي 0.

الحل:

كما في المثال (5.1.2) فإن عدد السلاسل التي تبدأ بالثنائية 101 هو 32. أما عدد السلاسل التي تكون الثنائية الخامسة بها 0 فهو $2^7 = 128$.

الآن إذا رمزنا لمجموعة السلاسل الأولى S_1 والثانية S_2 فإن S_1 و S_2 ليست مجموعتين منفصلتين وذلك لأن السلاسل التي تبدأ بالثنائية 101 يمكن أن تكون الثنائية الخامسة فيها 0. (كمثال يمكن ان تكون السلسلة هي 10110111).

لحل هذه المسألة وحتى نكون قادرين على تطبيق القاعدة الثانية للعدّ، علينا أن نقوم بتحليل الاحتمالات إلى مجموعات منفصلة

$S_1 = \{S \mid$ S هي سلسلة من 8 ثنائيات حرفها الخامس هو 0 وتبدأ بالثنائيات 101$\}$

$S_2 = \{S \mid$ S هي سلسلة من 8 ثنائيات حرفها الخامس هو 0 ولاتبدأ بالثنائيات 101$\}$

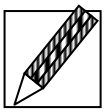
$S_3 = \{S \mid$ S هي سلسلة من 8ثنائيات حرفها الخامس هو 0 وتبدأ بالثنائية 101$\}$

إن $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ يشتمل على السلاسل المراد عدّها.
هنالك 16 سلسلة تبدأ بالثنائية101 والثنائية الخامسة فيها هي 0 إذن $|S_1| = 16$
هنالك 16سلسلة تبدأ بالثنائية 101 والثنائية الخامسة فيها هي 1إذن $|S_3| = 16$
هنالك 2^7 سلسلة حرفها الخامس هو 0 منها 16 تبدأ بالثنائية 101

إذن عدد السلاسل التي حرفها الخامس هو 0 ولا تبدأ بالثنائية 101 هو
$$128 - 16 = 112$$
إذن $|S_2| = 112$

إذن عدد السلاسل التي إما أن تبدأ بالثنائيات 101 او الثنائية الخامسة فيها 0 هو
$$16 + 112 + 16 = 144.$$

تدريب (3)



مجلس إدارة إحدى المؤسسات يضم 10 أشخاص. إذا انعقد المجلس لتشكيل مكتب تنفيذي يتكون من رئيس، أمين عام وأمين خزينة للمجلس.

(أ) بكم طريقة يمكن أن يتم هذا التشكيل؟

(ب) بكم طريقة يمكن أن يتم هذا التشكيل إذا كان الرئيس يجب أن يكون إما " علي " أو " محمد " عضوا المجلس.

(ج) بكم طريقة يمكن أن يتم التشكيل إذا كان " يس " عضو المجلس يجب أن يتولى أحد المكاتب.

2. التباديل والتوافيق (Permutations and Combinations)

إن تبديلة مجموعة من العناصر، تعني تنظيم العناصر آخذين ترتيبها في الاعتبار. بينما نجد أن التوفيقة لمجموعة من العناصر تعني تنظيم العناصر دون أخذ ترتيبها في الاعتبار.

" التبديلة: عبارة عن تطبيق function تقابل من مجموعة منتهية $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ إلى نفسها ويعبر عنها بالشكل

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_3 x_5 \ldots x_2 \end{pmatrix}$$

حيث تحت كل عنصر صورته، أحيانا نسميها تبديلة على المجموعة. بما أن العناصر في الصف العلوي تكتب بطريقة مرتبة فإنه يمكن الاكتفاء بالسطر الثاني (سطر صور العناصر) للتعبير عن التبديلة فنكتب $x_3, x_5, \ldots, x_2$ للدلالة على التبديلة السابقة.

في بعض الأحيان لا نهتم بنوع عناصر المجموعة فنعتبرها أعداداً من 1 إلى n {1,2,3,…، n}.

وبالتالي التبديلة (2431) مثلا هي تعبير مختصرعن التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

التبديلة تطلق أيضا على كل ترتيب في سلسلة لعناصر من مجموعة منتهية. مثلا السلسلة abde عبارة عن تبديلة مكونة من 4 عناصر مأخوذة من المجموعة {a,b,c,d,e,f,,g,h}.

نفس هذه العناصر الأربعة عندما يعاد ترتيبها بشكل آخر فإنها تعطي تبديلة مختلفة. مثلا التبديلة abed تختلف عن الأولى abde لاختلاف ترتيب عناصرهما."

1.2.2 تعريف:

إذا كانت المجموعة X تحتوي على n عنصر مفرد ومعرفة على النحو التالي:

$$X = \{x_1, x_2, ..x_n\}$$

فإن:

(أ) التبديلة من X هي احد طرق ترتيب العناصر

$$x_1, x_2, ..x_n$$

(ب) تبديلة r عنصر من X، حيث $r \leq n$، هي احدى طرق ترتيب r عنصر من X.

(ج) عدد تباديل r عنصر من المجموعة X التي تحتوي على n عنصر يرمـــز له بالرمز $p(n،r)$

(د) توافيق r عنصر من X، حيث $r \leq n$، هي عدد طرق اختيار r عنصـــر من X دون أخذ ترتيب هذه العناصر في الاعتبار.
(هـ) عدد توافيق r عنصر من المجموعة X تحتوي على n عنصر يرمز له بالرمز $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$

مثال (1.2.2):
من أمثلة التباديل للمجموعة $X= \{a, b, c\}$ هي
abc, acb, bac, bca, cab, cba
ومن أمثلة تبديلات عنصرين من X هي:
ab, ac, ba, bc, ca, cb
ومن أمثلة توافيق عنصرين من X هي:
{a,b} , {a,c} , {b,c}
يمكننا استخدام القاعدة الأولى للعدّ لحساب عدد تباديل عنصرين من X، $P(n,r)$، حيث n هي عدد عناصر المجموعة، في المثال $n= 3$ ، $r = 2$.

تدريب (4)

كيف نوجد التبديلات التي وردت في سؤال التقويم السابق بدون أن نقع في التكرار؟

أسئلة تقويم ذاتي (1)

كم عدد التبديلات التي بكل واحدة 3 عناصر مأخوذة من المجموعة {a,b,c,d} ؟

1.2 نظرية التباديل

سوف نستخدم الرمز P(n,r) ونستنتج له صيغة عامة وهي لعدد التباديل لـ n من الأشياء مأخوذاً منها r في كل مرة (التباديل من رتبة r لـ n من الأشياء) P(n,r) ، ويتم بالطريقة الآتية :العنصر الأول في التبديل من نوع r لعدد n من الأشياء يمكن اختياره بعدد n من الاختيارات المختلفة ، أما العنصر الثاني في التباديل فيمكن اختياره بعدد (n-1)من الطرق ويتلو ذلك اختيار العنصر الثالث بعدد (n-2) من الطرق. نستمر على هذا المنوال حتى العنصر رقم r فيتم اختياره بطرق عددها n-r+1 = n-(r-1) وهكذا باستخدام المبدأ الأساسي للعد نحصل على :

عدد تباديل r عنصر من مجموعة بها n عنصر مفرد هي

نظرية 1.2.2

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)..2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

الإثبات:

يجب علينا حساب عدد الطرق المختلفة لترتيب r عنصر يتم إختيارها من مجموعة بها n عنصر.

العنصر الأول يمكن إختياره بعدد طرق يساوي n. بعد إختيار العنصر الأول يمكننـا اختيار العنصر الثاني بعدد طرق يساوي (n-1) وهكذا نستمر في اختيار العناصر حتى نختار العنصر (r-1) ثم العنصر r. هذا العنصر الأخير يمكن اختياره بعدد طـــرق يساوي (n-r+1).

الآن باستخدام القاعدة الأولى للعد فإن عدد الطرق الكلي لاختيار كل العناصر إلـتـي عددها r هو:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

مثال (2.2.2):

ما هو عدد تبديلات عنصرين من المجموعة

$$x= \{a, b, c\}$$

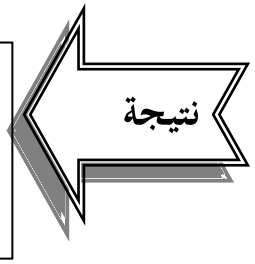
الحل:

بناءً على النظرية (1.2.2) فإن عدد التبديلات هو

$$P(n,r) =P(3,2)= 3.2=6$$

هذه التبديلات الستة هي:

ab, ac, bc, ba, ca, cb



من النظرية (1.2.2) سنجد أن تبديلات n عنصر في مجموعة بها n هي:

$$P(n,n)= n(n-1)(n-2)\ldots2.1$$
$$= n!$$

مثال (3.2.2):

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس، نائب رئيس، سكرتير وأمين خزينة من مجموعة بها 10 أشخاص؟

الحل:

إن اختيارنا للأشخاص الأربعة هو اختيار مرتب، لأن اختيار احدهم كرئيس يختلف عن اختياره كأمين خزينة مثلاً. إذن فإن المسألة هي اختيار 4 أشخاص من مجموعة بها 10 أشخاص مع اخذ الترتيب عند الاختيار في الاعتبار.

إذن من النظرية(1.2.2) فإن عدد الطرق هو

$$P(10,4)= 10.9.8.7= 5040$$

تدريب (5)

ما عدد تبديلات الحروف ABCDEF التي تشتمل على الحروف" DEF " معاً بغض النظر عن ترتيبها؟

أسئلة تقويم ذاتي (2)

من مجموعة بها 6 موظفين في أحد الأقسام بكم طريقة تستطيع اختيار رئيس ونائب له؟ بكم طريقة تستطيع اختيار اثنين منهم لحضور ندوة؟

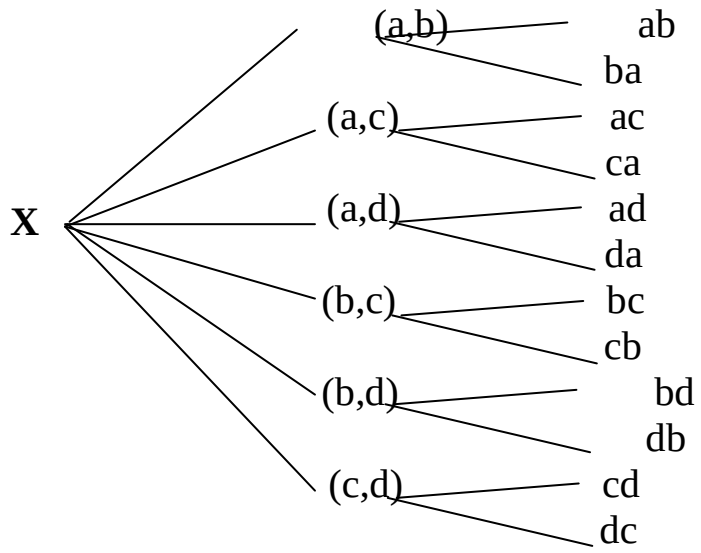
2.2 العلاقة بين التباديل والتوافيق

يمكننا حساب عدد تباديل r عنصر مأخوذة من المجموعة X التي بها n عنصر بتكرار إجراء خطوتين:

الخطوة الأولى: اختار توفيقة r عنصر من X (التوفيقة هي اختيار غير مرتب لعدد r عنصر من X).

الخطوة الثانية: حساب الطرق المختلفة لترتيب عناصر التوفيقة.

كمثال لذلك إذا أردنا حساب عدد تبديلات 2 عنصر من المجموعة X، حيث X = {a, b, c, d}، فيمكننا أولا اختيار توفيقة 2 عنصر من X ثم ترتيب عناصر التوفيقة ثم تكرار العملية بعدد التوافيق الموجودة لعنصرين من المجموعة X. الشكل (1.2.2) يبين التوافيق المختلفة لعنصرين من X ثم طرق ترتيب كل توفيقة.



الشكل (1.2.2)

الآن باستخدام القاعدة الأولى للعد ّفإن عدد تبديلات r عنصر من n عنصر هو حاصل ضرب عدد الطرق المختلفة لاختيار توافيق r عنصر من n في عدد طرق ترتيب r عنصر، أي أن

$$P(n,r) = C(n,r)r!$$

وبالتالي فإن $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

النظرية التالية هي تعميم للنتيجة أعلاه، وهي بالتالي توفر طريقة أخرى لحساب C(n,r).

3.2 نظرية التوافيق

إن عدد توافيق r عنصر من مجموعة بها n عنصر مفرد هو

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

الإثبات: إن إثبات المعادلة الأولى $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$ قد تم إعطاؤه مباشرة قبل النظرية باستخدام القاعدة الأولى للعدّ.

مثال (5.2.2): بكم طريقة مختلفة يمكننا اختيار مجلس من ثلاثة أشخاص من بين مجموعة تضم 10 أشخاص؟

الحل:

إن اختيار أعضاء المجلس الثلاثة هو اختيار غير مرتب وبالتالي فإن عدد الطرق هو:

$$C(10,3) = \frac{P(10,3)}{3!} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10.9.8}{3!} = 120$$

تدريب (6)

كم سلسلة بطول 8-ثنائيات (بت) تشتمل بالضبط على 4 ثنائيات قيمتها 1؟

3. التباديل والتوافيق العامة

في البند السابق تناولنا الترتيب (ordering) والاختيار (selection) دون ان نسمح بالتكرار (Repetition). في هذا البند سنتناول كيفية عد طرق ترتيب عناصر متتابعة تشتمل على عناصر مكررة، وعد طرق الاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة ما مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

1.3 عدّ طرق ترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة

مثال (1.3.2):
بكم طريقة مختلفة يمكننا ترتيب الحروف التالية
MISSISSIPPI

الحل:
لأن هنالك حروف مكررة فإن الإجابة ليست !11، ولكن قيمة أقل من !11.
دعنا نحول المسألة لتصبح كيف نستطيع ملء 11 مكان فارغ بالحروف

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

سنجد أن هنالك C(11,2) طريقة لاختيار مواقع لحرفي P. إذا قمنا باختيار موقعين لحرف P، سنجد أن هنالك C(9,4) طريقة لاختيار مواقع للأحرف الأربعة S. وإذا قمنا بعملية الاختيار لهذه المواقع للأحرف S، سنجد أن هنالك C(5,4) طريقة لاختيار مواقع للأحرف الأربعة I، إذا قمنا بعملية الاختيار هذه سنجد أن هنالك موقعاً واحد قد تبقى للحرف M.

باستخدام القاعدة الأولى للعدّ، سنجد أن الطرق المختلفة لترتيب الحروف هي:

$$C(11,2)\ C(9,4)\ C(5,4)\ C(1,1)$$
$$= \frac{11!}{2!9!} \cdot \frac{9!}{4!5!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{1!}{1!}$$
$$= \frac{11!}{2!\ 4!\ 4!\ 1!}$$
$$= 34.650$$

نلاحظ في القيمة $\frac{11!}{2!\ 4!\ 4!\ 1!}$ أن البسط يعبر عن العدد الكلي للحروف وان الأعداد في المقام 2, 4, 4, 1 يعبر عن عدد مرات تكرار كل حرف. إن هذه الملاحظة يمكن استخدامها لوضع قانون عام.

2.3 النظرية العامة لترتيب عناصر متتابعة بها عناصر مكررة

نظرية 1.3.2

افترض أن المتتابعة S بها n عنصر منها n_1 عنصر مكرر من النوع 1 و n_2 عنصر مكرر من النوع 2 و .....و n_t عنصر مكرر من النوع t. إن عدد الطرق المختلفة لترتيب عناصر المتتابعة S هو:

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!....n_t!}$$

الإثبات:

سنفترض أن لدينا n موقع نريد ملأها بالأحرف لنحصل على ترتيب للمتتابعة S. يمكننا تخصيص مواقع للعناصر n_1 من النوع 1 بعدد طرق يساوي $C(n,n_1)$، إذا قمنا بعملية التخصيص هذه، فيمكننا تخصيص مواقع للعناصر n_2 من النوع 2 بعدد طرق يساوي $C(n-n_1,n_2)$، وإذا قمنا بعملية التخصيص هذه، فيمكننا تخصيص مواقع للعناصر n_3

من النوع 3 بعدد طرق يساوي $C(n-(n_1+n_2),n_3)$، وهكذا..... الآن باستخدام القاعدة الأولى للعدّ سنجد أن الطرق المختلفة لترتيب عناصر S هو.

$$C(n,n_1).C(n-n_1,n_2).C(n-(n_1+n_2),n_3)\dots C(n-(n_1+n_2+n_3+\dots+n_{t-1}),n_t)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-(n_1+n_2),n_3)} \cdots \frac{\dots(n-(n_1+n_2+n_3+\dots+n_{t-1}, n_t)!}{n_t!0!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2!.....n_t!}$$

مثال (2.3.2):

بكم طريقة يمكن تقسيم 8 كتب على ثلاثة طلاب، إذا كان"علي"سيحصل 4 كتب و"يسرا"و"محمد"على كتابين لكل منهما؟

الحل:

سنرمز للكتب التي سيحصل عليها "علي" بالرمز A.

وعلى الكتب التي ستحصل عليها "يسرا" بالرمز B.

وعلى الكتب التي سيحصل عليها "محمد" بالرمز C.

الآن سنختار ترتيباً عشوائياً للكتب وليكن ABAABCCA.

هذا الاختيار العشوائي يعني أن "علي" سيحصل على الكتب 1، 3، 4 و8 و"يسرا" ستحصل على الكتب 2 و 5 و"محمد" سيحصل على الكتب 6 و 7.

إذن فإن عدد الطرق المختلفة لتقسيم الكتب الثمانية على الطلاب الثلاثة هو عدد الطرق المختلفة لترتيب 4 كتب من النوع A و2 كتاب من النوع B و 2 كتاب من النوع C.

من النظرية (1.3.2) فإن عدد الطرق المختلفة هو:

$$\frac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420$$

3.3 عدّ طرق الاختيار غير المرتب لعدد من العناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر

سنتناول الآن كيفية حساب عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها اختيار r عنصر من عناصر مجموعة بها n عنصر مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

مثال (3.3.2):

افترض أن لدينا ثلاثة كتب، الأول في علوم الحاسوب (CS) والثاني في التاريخ (H) والثالث في الفيزياء (P). وأن كل كتاب تتوفر منه 6 نسخ. فبكم طريقه مختلفة يمكننا اختيار 6 كتب؟

الحل:

المسألة في هذا المثال هي اختيار غير مرتب لعدد6 كتب من المجموعة {CS, H, P} مع السماح باختيار أكثر من كتاب من نفس النوع. دعنا الآن نرمز لأحد هذه الاختيارات على النحو التالي:

CS	H	P
XXXX	X	X

أي أننا كررنا اختيار الكتاب CS 4 مرات واختيار كتاباً واحد من H و P.

ومثال لإختيار آخر هو

CS	H	P
	X X	XXXX

أي أننا كررنا اختيارنا كتاب من P أربعة مرات وكررنا اختيارنا للكتاب من Hمرتين ولم نختر أي كتاب من CS.

نلاحظ الآن أن أي ترتيب للحروف X الستة والحرفين ¦ يمثل اختياراً. إذن فإن مسألتنا هي أن نعرف عدد الطرق المختلفة لاختيار موقعين للحرفين "¦ " من 8 مواقع ممكنة، وذلك لأن وضع الحرفين "¦ " في أي مكان بجانب الأحرف X الستة يمثل اختياراً أن هذا العدد هو $C(8,2)= 28$

إذن فإن هنالك 28 طريقة مختلفة لاختيار 6 كتب.

إن الطريقة التي استخدمناها في المثال أعلاه يمكن تعميمها للوصول لقاعدة عامة لعد الطرق المختلفة للاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر.

4.3 القاعدة العامة للاختيار غير المرتب لعناصر من مجموعة مع السماح بتكرار اختيار العنصر

1.2.3.2. قاعدة عامة

إذا كانت X هي مجموعة بها t عنصر فإن عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار غير مرتب لعدد k عنصر مع السماح بتكرار اختيارياً للعنصر من X هو:

$$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k)$$

الإثبات: سنثبت القاعدة العامة على نفس نسق المثال السابق افترض أن

$$X = \{a_1, a_2, \ldots a_t\}$$

وأن لدينا $k + t\text{-}1$ موقع على النحو التالي

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

وأن عدد الرموز هو $k + t\text{-}1$ منها k من النوع X و $t - 1$ من النوع" ¦ "والمطلوب هو ملء هذه المواقع بالأحرف X وتفصل هذه الأحرف عن بعضها البعض بالحرف "¦ " . إن n_1 حرف من الحروف X وحتى أول ظهور للحرف "¦ " يمثل اختيارنا لعدد n_1 من النوع a_1، العدد n_2 من حروف X وحتى الظهور الثاني للحرف "¦ " يمثل اختيارنا لعدد n_2 من النوع a_2 وهكذا (انظر الرسم التالي).

a_1 | a_2 | a_3 | | | a_t

$x_1x_2x_3..x_n \quad x_1x_2....x_n \quad .....$

أن عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار $t - 1$ موقع للحرف " | " هو

$$C(k + t - 1, t - 1)$$

وبالمثل إذا أردنا معرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار k موقع للحرف " X " هو $C(k + t - 1, k)$

إذن $C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k)$

إن أيٍ من القيمتين أعلاه تعبر عن عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار غير مرتب لعدد k عنصر من مجموعة بها t عنصر مع السماح بالتكرار في اختيار العنصر.

مثال (4.3.2):

إذا كانت لدينا ثلاثة مجموعات من الكرات (balls) المجموعة الأولى بها كرات حمراء والثانية زرقاء والثالثة خضراء وأن كل مجموعة بها كحد أدنى 8 كرات.

(أ) بكم طريقة يمكننا اختيار 8 كرات؟

(ب) بكم طريقة يمكننا اختيار 8 كرات بشرط ان تكون هنالك على الاقل كرة واحدة من كل نوع؟

الحل :

(أ) المسألة هي إيجاد عدد الطرق المختلفة لاختيار غير مرتب لعدد 8 عناصر من مجموعة بها 3 أنواع من الكرات وكل نوع به على الأقل 8 عناصر. مع السماح لنا بتكرار الاختيار من نفس النوع.

باستخدام القاعدة العامة (1.2.3.2) فإن $X= \{b_1, b_2, b_3\}$ حيث b_1 هي مجموعة الكرات الحمراء، b_2 مجموعة الكرات الزرقاء و b_3 هي مجموعة الكرات الصفراء، إذن فإن مجموعات العناصر في X هي 3.

العدد الكلي المراد اختياره هو 8.

إذن بالقاعدة العامة فإن عدد الطرق المختلفة لاختيار غير مرتب لعدد 8 كرات هو

$$C(8 + 3 - 1, 3 - 1)$$
$$= C(10 , 2) = 25$$

(ب) يمكننا هنا أيضاً استخدام القاعدة العامة (1.2.3.2) ولكننا سنقوم أولاً باختيار كرة وحدة من كل نوع b_1, b_2, b_3 ، وهذا الاختيار يتم بعدد طرق يساوي 1.الخمسة كرات المتبقية يمكن اختيارها بعدد طرق يساوي

$$C(5 + 3 – 1, 3 – 1) = C(7,2)= 21$$

تدريب (7)

بكم طريقة يمكن تقسيم 12 نسخة من كتاب رياضيات على أربعة طلاب هم "علي"، "يسرا"، "محمد"، و"يس"؟

مثال (6.3.2):

(أ) بكم طريقة يمكن إيجاد أعداد صحيحة وغير سالبة (non negative Integer) تحقق المعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 = 29$$

(ب) كم من الحلول للمعادلة في (أ) تحقق

$$x_4 >= 0, x_3 >2, x_2 >1, x_1 >0$$

الحل:

(أ) إن أي حل للمعادلة هو مكافئ لعملية اختيار غير مرتب لعدد 29 عنصر من مجموعة تشتمل على العناصر $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ مع السماح بالتكرار إذن بالقاعدة العامة (1.2.3.2) فإن عدد الطرق هو

$$C(29 + 4 – 1, 4 – 1)$$
$$= C(32,3) = 4960$$

(ب) إن الشروط $x_4 >= 0, x_3 >2, x_2 >1, x_1 >0$ تعني أن عملية اختيارنا غير المرتب للعدد 29 عنصراً يجب أن تتم بحيث يتم اختيار عنصر واحد على الأقل من النوع x_1 واختيار عنصرين على الأقل من النوع $x2_2$ واختيار ثلاثة عناصر على الأقل من النوع x3.

إذن يجب علينا أولاً اختيار عنصر واحد من النوع x_1 وعنصرين من النوع x_2 وثلاثة عناصر من النوع x_3 ثم اختيار عنصر ليكون مجموع العناصر 29. إن عدد طرق اختيار الـ23 عنصر هو:

$$C(23 + 4 - 1, 4 - 1)$$
$$= C(26,3) = 2600$$

تدريب (8)

كم عدداً صحيح بين 1 و 1,000,000 يكون مجموع الأرقام المكونة له يساوي 15؟

الخلاصة

لقد درسنا – عزيزي الدارس– في هذه الوحدة الموضوعات الأساسية التالية:

① القاعدة الأولى (مبدأ الضرب) إذا كان هنالك عمليةٍ ما تتم في t خطوة متتابعة، وكانت الطرق التي يمكن ان تتم بها الخطوة الأولى هي n1 طريقة، والطرق التي يمكن ان تتم بها الخطوة الثانية هي n2، ...، والطرق التي يمكن أن تتم بها الخطوة t هي nt طريقة. فإن العدد الكلي (T) للطرق التي يمكن أن تتم بها العملية (الفعل أو النشاط) هو:

$$n_1 . n_2 . n_3 . \ldots . n_t$$

أي أن

$$T = \prod_{i=1}^{t} n_i$$

② القاعدة الثانية (مبدأ المجموع) افترض أن S1 , S2 , ..., Si هي مجموعات، وأن كل مجموعة si بها ni عنصر.

إذا كان كل زوج من عائلة المجموعات{ S1 , S2 , ..., Si }هو زوج منفصل (Pair wise disjoint)، أي أن

$$sj \cap sk = 0, j , k = 1, 2, \ldots t , j \neq k$$

فإن العدد الكلي للعناصر التي يمكن اختيارها من S1 أو S2 أو.... St هو

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t$$

$$= \bigcup_{i=1}^{t} Si$$

③ إن تبديلة مجموعة من العناصر تعني تنظيم العناصر آخذين ترتيبها في الاعتبار. بينما نجد أن التوفيقة لمجموعة من العناصر تعني تنظيم العناصر دون أخذ ترتيبها في الاعتبار.

④إذا كانت المجموعة X تحتوي على n عنصر مفرد ومعرفة على النحو التالي:

$$X = \{x_1, x_2, .. x_n\}$$

فإن:

(أ) التبديلة من x هي إحدى طرق ترتيب العناصر

$$x_1, x_2, .. x_n$$

(ب) تبديلة r عنصر من X، حيث $r \leq n$، هي احد طرق ترتيب r عنصر من X.

(ج) عدد تباديل r عنصر من المجموعة X التي تحتوي على n عنصر يرمـــز له بالرمز.

$$P(n,r)$$

(د) توافيق r عنصر من X، حيث $r \leq n$، هي عدد طرق اختيار r عنصـــر من X دون اخذ ترتيب هذه العناصر في الاعتبار.

(هـ) عدد توافيق r عنصر من المجموعة X تحتوي على n عنصر يرمز له بالرمز

$$C(n,r) \text{ أو } \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$$

⑤عدد تباديل r عنصر من مجموعة بها n عنصر مفرد هي:

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)..2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

⑥يمكننا حساب عدد تباديل r عنصر مأخوذة من المجموعة x التي بها عنصر بتكرار إجراء خطوتين:

الخطوة الأولى: اختار توفيقة r عنصر من X (التوفيقة هي اختيار غير مرتب لعدد r عنصر من X).

الخطوة الثانية: بحساب الطرق المختلفة لترتيب عناصر التوفيقة.

⑦عدد توافيق r عنصر من مجموعة بها n عنصر مفرد هو:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،

بعد أن فرغت من دراسة "طرق العد" في الوحدة الثانية ننتقل بك إلى الوحدة الثالثة وهي بعنوان "نظرية الرسم"، وسوف تتعرف فيها على الرسم غير الموجه والموجه. وتجد كذلك تعريف الحدود المتوازية والحلقية ، والرسم البسيط ، والرسم الكامل، وتتناول الوحدة المسارات والدارات،وتمثيل الرسوم والمصفوفة المتجاورة ، ومتتابعة الحدود ، والمصفوفة المتعارضة،وخوارزمية المسار الأقصر، وكذلك تتعرض الوحدة إلى الرسوم المتماثلة والمتممة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

إذا كانت

$$S= \{s_1, s_2,\ldots s_n\}$$

فإن تكوين المجموعة الجزئية يتطلب n خطوة متتابعة هي:

الخطوة الأولى: اختيار s_1 أو عدم اختيارها ضمن المجموعة الجزئية وهذا يمكن أن يتم بطريقتين إذن $n_1 = 2$.

الخطوة الثانية: اختيار s_2 أو عدم اختيارها ضمن المجموعة الجزئية وهذا يمكن أن يتم بطريقتين إذن $n_2 = 2$ وهكذا...

الخطوة n: اختيار s_n أو عدم اختيارها ضمن المجموعة الجزئية وهذا يمكن أن يتم بطريقتين إذن $n_n = 2$.

إذن العدد الكلي للمجموعات الجزئية

$$T= n_1 * n_2 \ldots\ldots * n_n$$
$$= 2 * 2 *\ldots.*2$$
$$= 2^n$$

تدريب (2)

الحل: تكوين الكلمة يتطلب أربعة خطوات.

الخطوة الأولى: اختيار الحرف الأول، وهذا يمكن أن يكون أي من الحروف الثمانية إذن $n_1 = 8$.

الخطوة الثانية: اختيار الحرف الثاني، وهذا يمكن أن يكون أي من الحروف الثمانية إذن $n_2 = 8$ وهكذا.....

إذن العدد الكلي للكلمات المكونة من4 أحرف هو:

$$T= n_1 . n_2 . n_3 . n_4 = 8 . 8 . 8 .8 = 84 = 4096$$

تدريب (3)

(أ) للإجابة عن هذا السؤال فإننا سنستخدم القاعدة الأولى للعدّ.

تشكيل المكتب يتم في ثلاثة خطوات متتابعة، الخطوة الأولى اختيار الرئيس، الثانية اختيار الأمين العام والثالثة هي اختيار أمين المال.

اختيار الرئيس يمكن أن يتم بـ10 طرق إذا تم اختيار الرئيس فإن الأمين العام يمكن اختياره من بين التسعة أشخاص الآخرين، إذن عدد طرق اختيار الأمين العام يساوي 9. إذا تم اختيار الأمين العام فإن أمين الخزينة يمكن اختياره من بين الأشخاص الثمانية المتبقين. إذن عدد طرق اختيار أمين المال = 8.

إذن العدد الكلي لطرق تشكيل المكتب التنفيذي = 10 .9 .8 = 720 طريقة

(ب) إذا كان " علي " هو رئيس المكتب التنفيذي فإن هنالك 8.9 = 72 طريقة لإختيار بقية المكتب التنفيذي. وبالمثل إذا كان " محمد " هو رئيس المكتب التنفيذي فإن هنالك 8.9= 72 طريقة لاختيار بقية المكتب.

بما ان هاتين الحالتين منفصلتين، فأننا سنستخدم القاعدة الثانية للعدّ.

إذن العدد الكلي للطرق 72 + 72 = 144 طريقة.

ج/ إذا كان " يس " هو الرئيس فإن هنالك 8,9 = 72 طريقة لاختيار بقية المكتب التنفيذي.وبالمثل إذا كان" يس " هو الأمين العام فإن هنالك 8.9 = 72 طريقة لاختيار بقية المكتب، وإذا كان " يس " هو أمين الخزينة فإن هنالك أيضاً 8.9 = 72 طريقة لاختيار بقية المكتب التنفيذي. إذن وباستخدام القاعدة الثانية للعدّ. العدد الكلي للطرق=

72+72+72 = 216 طريقة.

تدريب (4)

رتب كل العناصر في شكل دائري، ثم نبدأ في إيجاد التبديلات الأساسية إن جاز التعبير وسيتضح الآن ماذا نقصد.

التبديلة الأساسية الأولى: ابدأ من أحد العناصر وليكن a واختر اتجاهاً معيناً وليكن الاتجاه الموجب وسجل العنصرين الذين ستقابلهما في هذا الاتجاه إلى جانب العنصر a لينتج التبديله abc.التبديلة الأساسية الثانية: نبدأ من العنصر الذي بعد a في نفس الاتجاه وهو b وبنفس الطريقة سنحصل على bcd. التبديلة الأساسية الثالثة: هي cda التبديلة الأساسية الرابعة: dab

الآن أي تبديلة ثلاثية أخرى ستكون مرتبطة بواحدة من هذه التبديلات الأساسية. بمعنى أن عناصرها ستكون نفس العناصر لإحدى هذه التبديلات الأربع.

كل تبديلة أساسية تعطي 6 تبديلات. إذن لدينا 6×4=24 تبديلة مختلفة.

بهذه الطريقة تستطيع إيجاد التبديلات من مجموعة ما دون الوقوع في الخلط والتكرار، لاحظ التبديلات الأساسية هي بالضبط عدد المجموعات ذات الأربعة عناصر من المجموعة المعطاة. نؤكد مرة أخرى على أن التسمية "تبديلة أساسية" ليست اصطلاح رياضي وإنما موضعي فقط لإيصال الفكرة.

التبديلات الناتجة هي:

abc, acb, bca, bac, cab, cba bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb cda،

cad, acd, adc, dca, dac dab, dba, abd, adb, bad,bda

تدريب (5)

أولاً سنقوم بعدّ عدد التبديلات المختلفة التي تشتمل على الحروف " DEF " معاً.

للتأكيد على ان التبديلة تشتمل على الحروف" DEF " كحرف واحد وبقية الحروف A، B، C كحروف مستقلة. إذن فإن المطلوب سيكون هو عدّ تبديلات 4 حروف مأخوذة من مجموعة بها أربعة حروف هي A، B، C و " DEF ".

من نتيجة النظرية (1.2.2) فإن عدد هذه الطرق هو 24 =4.3.2.1 =4!=P(4,4).

تدريب (6)

ان المسألة هي حساب عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار 4 ثنائيات لتأخذ القيمة 1 من 8–ثنائيات. إن عدد الطرق هو :

$$C(8,4) = 70$$

تدريب (7)

يمكننا النظر إلى هذه المسألة باعتبارها اختياراً غير مرتب من مجموعة عناصر مع السماح بالتكرار اذا افترضنا أن ما سيميز هذه الكتب هو اسم الطالب الذي يعطي له الكتاب وبالتالي تصبح المسألة هي كيفية اختيار 12 كتاب لتعطى اسماً بين الأسماء

{ علي، يسرا، محمد، يس } مع السماح بالتكرار.

بالقاعدة العامة (1.2.3.2) فإن عدد الطرق هو:

$$C(12 + 4 – 1, 4-1)$$
$$= C(15,3) = 455.$$

تدريب (8)

لإيجاد عدد الأعداد الصحيحة التي تقع بين 1 و 1,000,000 والتي مجموع الأرقام المكونة لكل منها يساوي 15، سنفترض أن أحد الحلول هو X حيث

$$X= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

هنا افترضنا أن أكبر عدد يمكن أن يكون مجموع أرقامه يساوي 15 مكون من 6 أرقام حيثx_i، $i= 1,2,\ldots 6$ تمثل أحد أرقام العدد X . وبما أن x_i هو رقم فإن $0\leq x_i\leq 9$

إذن فإن عدد الأعداد المراد حسابها هو عدد الأعداد التي تحقق المعادلة

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ حيث $0\leq x_i\leq 9$ و $i= 1,2,\ldots 6$ إذن فإن حل المعادلة هو مكافئ لعملية اختيار غير مرتب لعدد 15 عنصر من مجموعة تشتمل على $\{x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6\}$ حيث $0\leq x_i\leq 9$، $i= 1,2,\ldots 6$.

إذن بالقاعدة العامة (1.3.3.2) فإن عدد الطرق المختلفة للاختيار هو:

$$C(15 + 6 – 1, 6 – 1)$$

$$= C(20 , 5)$$

حيث $xi > = 0$

وبما أننا نريد عدد طرق الاختيار فقط عندما تكون $0 \leq xi \leq 9$ إذن يجب علينا حساب عدد طرق الاختيار عندما تكون $xi >= 10$ وطرح ذلك العدد من العدد الكلي:

$C(20, 5)$ إن عدد طرق الاختيار عندما تكون $x_1 >= 10$، يعني أنه يجب علينا على الأقل اختيار 10 عناصر من النوع x_1 واختيار العناصر المتبقية (5 عناصر)من بقية الأنواع بما فيها x_1.

إن عدد طرق اختيار العناصر الخمسة المتبقية من $\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\}$ يساوي

$$C(5 + 6-1, 6-1)$$
$$= C(10,5)$$

وبالمثل فإن عدد طرق الاختيار عندما تكون $x_2 >= 10$ هو $C(10,5)$

وهكذا الأمر عندما تكون $xi >= 10$، حيث $i= 3, 4, 5, 6$

إذن مجموع عدد طرق الاختيار عندما تكون

$xi >=10$ حيث $i= 1, 2, 3, 4, 5, 6$ هو

$$6\ C(10,5)$$

إذن عدد طرق الاختيار عندما تكون $0 \leq xi \leq 9$ هو

$$C(20,5) - 6c(10,5)$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة تقويم ذاتي (1)

$$P(4,3) = \frac{4!}{1!} = \frac{4*3*2*1}{1} = 24$$

أسئلة تقويم ذاتي (2)

هذا المثال يوضح الفرق، في المطلوب الأول اختيار اثنين لا يكفي بل يجب أن تحدد من منهم الرئيس ومن هو النائب ولذلك للترتيب أهمية وبالتالي عدد الطرق هو

$$P(6,2) = \frac{6!}{(4)!} = 30$$

في حين أن اختيار اثنين لحضور الندوة لا نهتم فيه بالترتيب ولذلك عدد الطرق هو

$$P(6,2) = \frac{6!}{2!\,(4)!} = 15$$

مسرد المصطلحات

❁ **التبديلة Permutation**

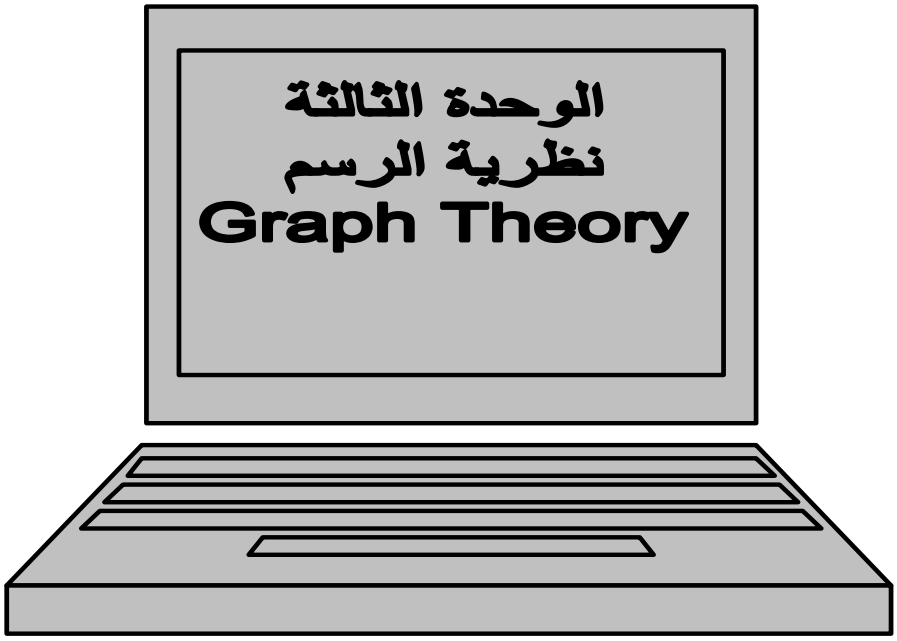
التبديلة مجموعة من العناصر تعني تنظيم العناصر آخذين ترتيبها في الاعتبار.

❁ **التوفيقة Combination**

التوفيقة لمجموعة من العناصر تعني تنظيم العناصر دون أخذ ترتيبها في الاعتبار.

المراجع

1- Lin C. L. “Elements of Discrete Mathematics”, McGraw Hill, Computer Science Series, 1977.
2- Richard J. B. “Discrete Mathematics”, Revised Edition London, Maxwell McMillen International Edition, 1984.
3- Seymour lipschutz and Marc Lipson, “Schaum’s Outline of Discrete Mathematics”, 3rd Ed.
4- Kenneth H. Rosen, “Student’s Solution Guide to accompany Discrete Mathematics and Its Applications”, Jerrold Grossman Sixth Edition.


الوحدة الثالثة
نظرية الرسم
Graph Theory

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	69
تمهيد	69
أهداف الوحدة	70
1. مدخل لنظرية الرسم	71
1.1 الرسم غير الموجه	71
2.1 الرسم الموجه	71
3.1 الحدود المتوازية والحلقية	73
4.1 الرسم البسيط	74
5.1 الرسم الكامل	74
2. المسارات والدارات	78
1.2 الرسم المترابط	79
2.2 مسار إيلر	80
3.2 مسار هاميلتونين	81
3. تمثيل الرسوم	82
1.3 المصفوفة المتجاورة	82
2.3 متتابعة الحدود	83
3.3 المصفوفة المتعارضة	86
4. خوارزمية المسار الأقصر	88
5.الرسوم المتماثلة	92
1.5 الرسوم المتممة	94
الخلاصة	95
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	97
إجابات التدريبات	98
مسرد المصطلحات	99

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة الثالثة من مقرر " الرياضيات المتقطعة2" وموضوعها " نظرية الرسم". تبدأ الوحدة بمدخل لنظرية الرسم وذلك في القسم الأول من الوحدة وفيه تجد تعريف الرسم غير الموجه والموجه، وتجد كذلك تعريف الحدود المتوازية والحلقية ، والرسم البسيط ، والرسم الكامل.

القسم الثاني من الوحدة يتناول المسارات والدارات. وفي هذا القسم نتناول الرسم المترابط ، ومسار ايلر ومسار هاميليتونين .

القسم الثالث يبحث في تمثيل الرسوم وتجد في هذا القسم المصفوفة المتجاورة، ومتتابعة الحدود ، والمصفوفة المتعارضة .

القسم الرابع من الوحدة خوارزمية المسار الأقصر، وهنا يتم تعريف الرسم الموزون ثم ينتقل القسم إلى شرح خطوات خوارزمية المسار الأقصر .

القسم الخامس من الوحدة يتناول الرسوم المتماثلة والمتممة حيث ستتعرف على الرسمين المتماثلين G_1 , G_2 وسنتعرف في هذا القسم كذلك على الرسم المتمم الذاتي.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تعرف** الرسم الموجه والرسم غير الموجه.
- **تعرف** كل من الرسم البسيط – الرسم الكامل.
- **تبين** بالرسم دارة ايلر.
- **تشرح** بالمثال مسار هاميلتوتين.
- **تعطي** أمثلة لرسم مترابط.
- **تعبر** بالرسم عن المصفوفات المتجاورة.
- **تكتب** المصفوفات المتعارضة للرسوم .
- **تشرح** خوارزمية المسار الأقصر.
- **توجد** رسماً متمماً ذاتياً له x عقدة.

1. مدخل لنظرية الرسم

1.1 الرسم غير الموجه (Undirected Graph)

عزيزي الدارس، الرسم أو الرسم غير الموجه (Undirected Graph) G يتكون من المجموعة Vمن العقد (vertices) والمجموعة E من الحدود (Edges) بحيث يكون كل حدث e Є E رابطاً بين زوج غير مرتب من العقد (أي دون تحديد اتجاه للحد).

إذا كان الحد e يربط بين العقدتين v و w فإننا نكتب e= (v, w) أو e = (w, v)

2.1 الرسم الموجه (Direct Graph)

الرسم الموجهة G يتكون من المجموعة Vمن العقد (vertices) والمجموعة E من الحدود (Edges) بحيث يكون كل حد e Є E رابطاً بين زوج مرتب من العقد (أي أن هنالك تحديد لاتجاه الحد).

إذا كان الحد e يربط بين زوج مفرد مرتب من العقد (v, w) فإننا نكتب

e = (v , w).

تعريف :

إن الحد e = (v , w) في الرسم الموجه أو غير الموجه يقال أنه متعارض (incident) على العقدتين v , w وان العقدتين v , w متعارضتان على e ومتجاورتان (adjacent) .

تعريف :

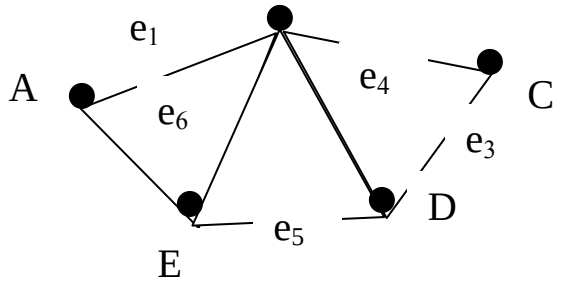
إن الرسم G سواء أكان موجهاً أو غير موجه والذي يتكون من مجموعة العقد V والحدود E يرمز له بالرمز G = (V , E)

مثال (1.3)

الرسم التالي يوضح الرسم Gحيث يشتمل على المجموعة V = { A , B , C , D , E } من العقد، والمجموعة E = { e_1 e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7 } من الحدود.

B

e_2



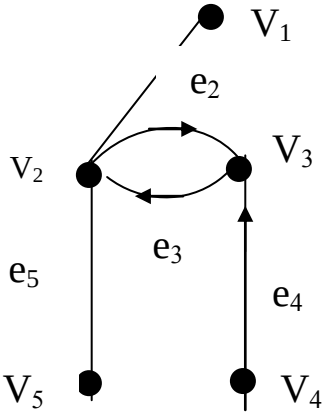
الرسم (1.3)

الحد e_1 يربط بين الزوج غير المرتب من العقد { A , B }والحد e_3 يربط بين الزوج غير المرتب من العقد.{ C , D }

الحد e_1 يكتب $e_1 = (A , B)$ والحد e_3 يكتب $e_3 = (C , D)$ والحد e_6 متعارض مع العقدتين B , E و العقدتين B , E متجاورتين .

مثال (2.3)

الرسم التالي يوضح رسماً موجهاً، حيث تم استخدام الأسهم لتحديد اتجاه الحدود ويشتمل على مجموعة العقـد { $v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5$ } = Vومجمـوعة الحــدود . {$e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6$} = E.

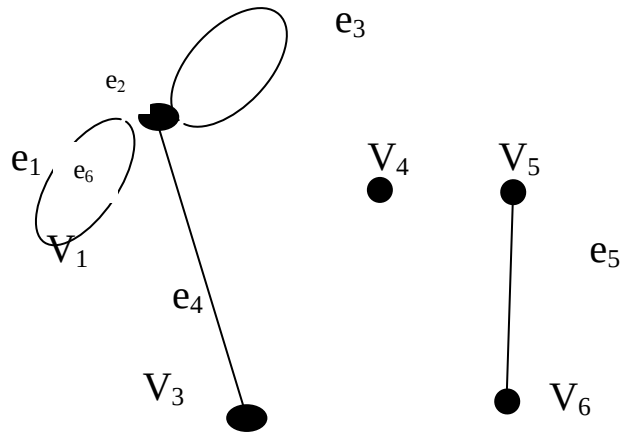


الرسم (2.3)

من الرسم نجد أن e_1 يربط بين زوج العقد المرتب (v_2 , v_1)، وأن الحد e4 يربط بين زوج العقد المرتب .(v_4 , v_3) الحد e1 يكتب $e_1 = (v_2 , v_1)$ والحد e_4 يكتب $e_4 = (v_4 , v_3)$.

3.1 الحدود المتوازية والحلقية (Parallel Edges and Loops)

في الرسم غير الموجه إذا كان هنالك حدان أو أكثر يربطان بين نفس الزوج من العقد فإن هذه الحدود تسمى حدود متوازية ,(Parallel Edges) أما إذا كان هنالك حد يربط العقدة الواحدة مع نفسها فإن الحد يسمى حلقة (Loop).
في الرسم (3.3) نجد أن الحدين e_1 و e_2 هما حدان متوازيان وأن الحد e_3 هو حلقة.



الرسم (3.3)

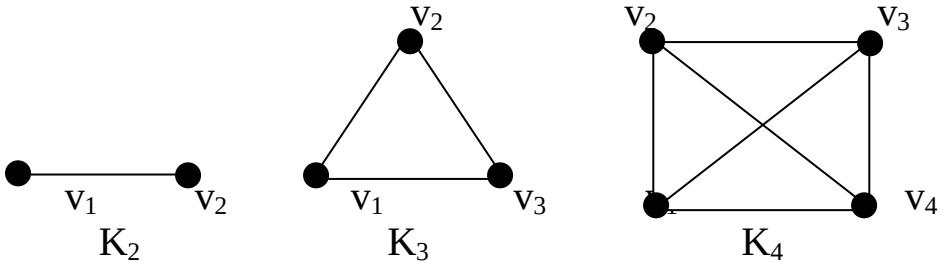
4.1 الرسم البسيط Simple Graph

إن الرسم البسيط هو الرسم الذي لا يشتمل على حدود متوازية أو حلقات.

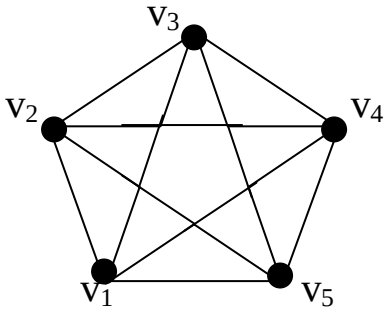
5.1 الرسم الكامل Complete Graph

إن الرسم الكامل على n عقدة يرمز له بالرمز K_n هو رسم يحتوي على حد واحد بين كل زوج مفرد من العقد.

مثال (3.3) /الرسوم التالية توضح , K_2 , K_3 , K_4 و K_5



K_2 K_3 K_4

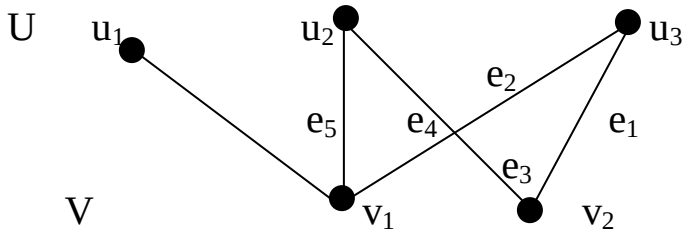


K_5

تعريف :

إن الرسم G الذي يمكن تقسيم عقده إلى مجموعتين V_1و V_2 بحيث يكون كل حد في الرسم متعارض على عقدتين إحداهما من V1 والأخرى من V_2 يسمى الرسم المنشطر(Bipartite Graph) .

مثال (4.3)
الرسم التالي يوضح رسم منشطر



نجد أن أي حد e_i متعارض على عقدتين إحدهما تنتمي للمجموعة v والأخرى تنتمي للمجموعة u .

أسئلة تقويم ذاتي (1)

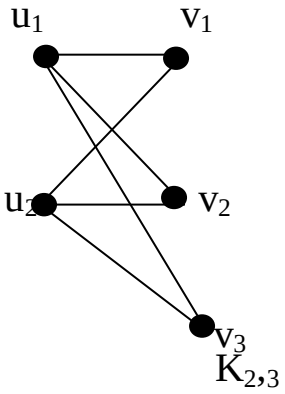
باستخدام الرسم وضح كلا من K_1 , K_6

6.1 تعريف الرسم المنشطر (Complete Bipartite Graph)

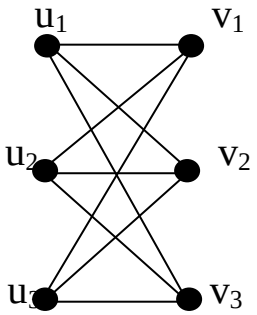
إن الرسم المنشطر الكامل $K_{m,n}$ هو الرسم الذي تقسم عقده إلى مجموعتين جزئيتين غير متقاطعتين تحتويان على m و n عقدة على التوالي، وهنالك حد بين عقدتين في الرسم إذا وفقط إذا كانت أحد العقدتين في إحدى المجموعتين والعقدة الأخرى في المجموعة الأخرى.

مثال :(5.3)

الرسوم التالية توضح $K_{2,3}$ و $K_{3,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

تعريف :إن درجة العقدة vويرمز لها بالرمز deg (v) هي عدد الحدود المتعارضة على العقدة.

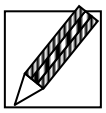
من هذا التعريف نجد أن الحد الذي يمثل حلقة على عقدة ما سيترتب عليه إضافة 2 لدرجة تلك العقدة.

إن مجموع درجات الرسم G هو مجموع درجات العقد المكونة للرسم , G أي أن :

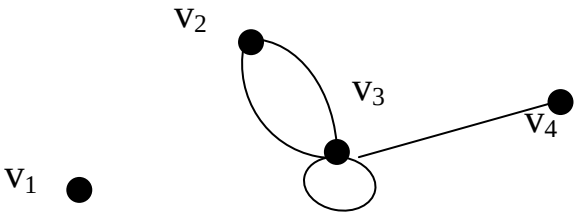
$$\deg(G) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$$

حيث n هي عدد العقد في الرسم G

تدريب (1)



ما درجات كل من العقد الموجودة في الرسم التالي وما مجموع درجات الرسم؟



نظرية : (1.3)

لأي رسم $G= (V , E)$ فإن مجموع درجات الرسم هي ضعف عدد الحدود الموجودة في الرسم ,أي أن

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

حيث $|E|$ هي عدد الحدود في المجموعة E

الإثبات :

إفـتـرض **عزيزي الدارس،** أن $V =\{ v_1 , v_2 , ….., v_n \}$ ومجـمـوعة الحـدود $E =\{ e_1 , e_2 , \dots e_m\}$ أي ان $|E| = M$

الآن دع $e \in E$ إذا كان e هو حلقة فإنه يضيف 2 لمجموع درجات الرسم ,واذا كان e ليس حلقة فإنه متعارض على العقدتين v_i و v_j فإن e يضيف 1 إلى (v_i) deg و 1 إلى (v_j) deg , وبالتالي فإن e يضيف 2 لمجموع درجات الرسم.

إذن فإن كل حد $e \in E$ يضيف 2 لمجموع درجات الرسم وبالتالي فإن

$$2 |E| = \sum_{v_i \in V} \deg (V_i)$$

نظرية : (2.3)

في أي رسم G فإن هنالك عدداً زوجياً من العقد له درجات فردية.

الإثبات :

دع $G = (V , E)$ من النظرية السابقة، فإن المجموع الكلي لدرجات كل العقد هو $T = 2 |E|$ وهو عدد زوجي.

إفترض أن E هو العدد الذي يعبر عن مجموع درجات العقد التي لها درجات زوجية وان O هي العدد الذي يعبر عن مجموع درجات العقد التي لها درجة فردية إذن.

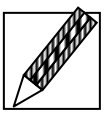
أي أن $T = E + O$

$$O = T – E$$

وبما ان T زوجي و E زوجي فإن O زوجي

ان هذا يعني ان هنالك عدد زوجي من الدرجات الفردية .إذن فإن هنالك عدد زوجي من العقد التي لها درجات فردية.

تدريب (2)



أوجد القاعدة التي يمكن استخدامها لحساب عدد الحدود في الرسم الكامل K_n.

2. المسارات والدارات (Paths and Circuits)

تعريف :المسار (Path) والدارة (Circuit)

في الرسم غير الموجة G فإن التتابع P الذي يأخذ الشكل -$v_0e_1v_1e_2,\ldots v_n$ $_1e_nv_n$ يسمى مسار (Path) بطول .n أو المسار الذي يربط بين العقدتين v_0 و v_n .

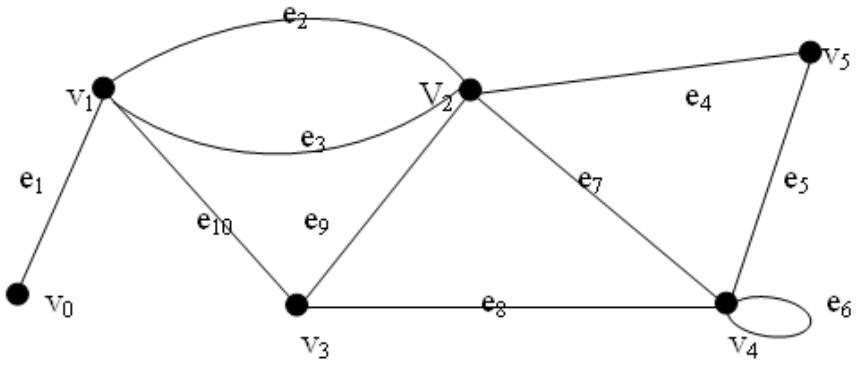
إذا كان P مسار بحيث $v_0 = v_n$ فإن المسار يسمى دارة (Circuit) أو دورة (Cycle) .

تعريف :المسار البسيط :

إن المسار أو الدائرة يكون بسيطاً (simple) إذا كان لا يحتوي على نفس العقدة أكثر من مرة واحدة .أي أن المسار (v_0 , v_1 , v_2 , ..., v_n) مسار بسيط إذا كانت v_0 , v_1 , v_2 ..., v_nهي عقد مفردة. إن الرسم الذي لا يشتمل على أي دورة يسمى رسم لا دوري (a cyclic) .

تدريب (3)

في الرسم التالي بين ما إذا كانت المتتابعات المعطاة هي مسارات , مسارات بسيطة، دارات، أو دارات بسيطة.



a . $v_0e_1v_1e_{10}v_3e_9v_2e_2v_1$

b . $v_3e_5v_4e_8v_5e_{10}v_1e_3v_2$

c . $v_1e_2v_2e_3v_1$

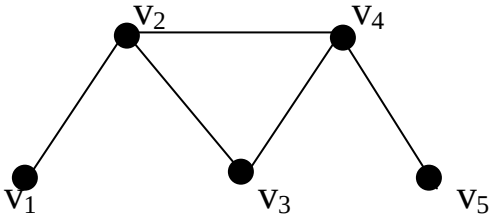
d . $v_5e_9v_2e_4v_3e_5v_4e_6v_4e_8v_5$

1.2 الرسم المترابط (Connected Graph)

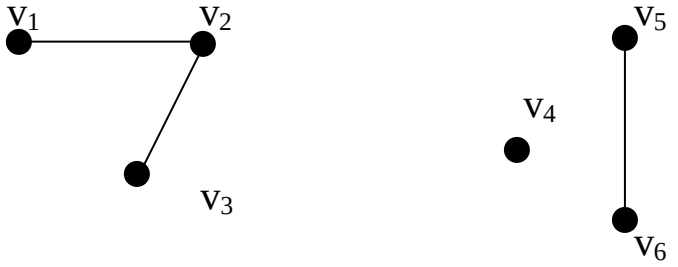
إن الرسم غير الموجه يسمى مترابطاً إذا كان هنالك مسار بين كل زوج من العقد المفردة في الرسم غير ذلك يسمى الرسم غير مترابط ( ) disconnected

مثال (9.3) :

الرسم التالي هو رسم مترابط



بينما الرسم التالي غير مترابط



2.2 مسار إيلر (Euler Path)

إن المسار البسيط الذي يشتمل على كل الحدود الموجودة في الرسم يسمى مسار إيلر .إذا كان هذا المسار هو دارة (Circuit) فإنه يسمى دارة إيلر (Euler Circuit).

نظرية : (4.3)

إذا كان الرسم G يحتوي على دارة إيلر فإن درجة كل عقدة في الرسم عدد زوجي.

الإثبات :

دع G يكون رسماً به دارة ايلر، .أبدأ من أي عقدة على الدارة ثم اتبع الدارة من عقدة لأخرى مزيلاً لكل حد تمر به.عند المرور بكل عقدة فإنك تزيل حداً داخل العقدة وحداً خارجاً من العقدة .إذن فإن إزالة الحدود في الدائرة يترتب عليه إنقاص درجة كل عقدة 2.

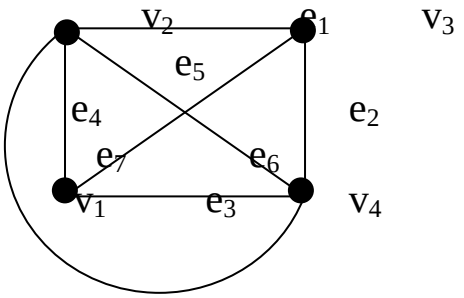
بما أن دائرة إيلر تشتمل على كل الحدود الموجودة في الرسم فإن عملية إزالة الحدود ستنتهي بجعل درجة كل عقدة هي 0.

إذن فإن كل العقد يجب أن تكون لها درجة زوجية.

نظرية (5.3) نظرية إيلر :

إذا كانت كل العقد في الرسم المترابط لها درجة زوجية فإن الرسم يشتمل على دارة ايلر.

مثال: بين إن الرسم التالي لا يحتوي على دارة ايلر.



الحل :

إن العقدتين v1و v3 لهما درجة فردية .إذن من نظرية ايلر فإن الرسم لا يحتوي على دارة ايلر .

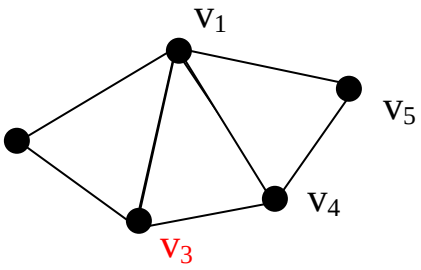
3.2 مسار هاميلتونين Hamiltonian Path

يسمى المسار مسار هاميلتونين إذا كان يمر بكل عقدة موجودة في الرسم مرة واحدة فقط.

إن الدارة التي تمر بكل عقدة في الرسم مرة واحدة فقط عدا العقدة الأخيرة التي تكرر العقدة الأولى فان الدارة تسمى دارة هاميلتون .(Hamiltonian Circuit)

مثال (11.3) :

أوجد دارة هاميلتون في الرسم التالي-:

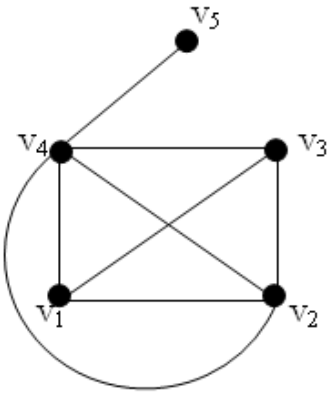


الحل :

الدارة هي $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_1$.

تدريب (4)

بين أن الرسم التالي يحتوي على مسار هاميلتونين ولكن لا يشتمل على دارة هاميلتون



3. تمثيل الرسوم Represention of Graphs

في البند السابق من هذا الفصل كنا نمثل الرسم (Graph)عن طريق رسم العقد وتوصيلها بالحدود .ولكن في بعض الأحيان نحتاج لأن نعبر عن الرسم بطريقة اخرى، كمثال لذلك إذا أردنا أن نعبر عن الرسم بطريقة يمكن تخزينها داخل الحاسوب وتحليلها.

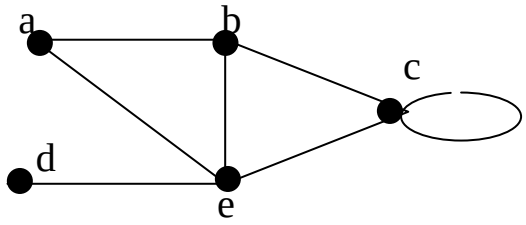
إن الطريقة الأولى لتمثيل الرسوم بشكل يسهل من تخزينها في الحاسوب وتحليلها هي أن يتم تمثيل الرسم كمصفوفة متجاورة (Adjacency Matrix) .

1.3 المصفوفة المتجاورة (Adjacency Matrix)

إن المصفوفة المتجاورة للرسم Gالذي به nعقدة هو المصفوفة N = nxn حيث أي عنصر بها a_{ij} هو عدد الحدود التي تربط بين العقدتين v_i و v_j. وبالتالي فإن

$a_{ij} = 0$ تعني انه لا يوجد حد (edge) يربط بين v_i و v_j

مثال: أن المصفوفة المتجاورة للرسم التالي:



هي المصفوفة

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	1
b	1	0	1	0	1
c	0	1	1	0	1
d	0	0	0	0	1
e	1	1	1	1	0

نلاحظ ان المصفوفة المتجاورة تسمح لنا بتمثيل الحلقات (Loops) ولكنها لا تسمح لنا بتمثيل الحدود المتوازية (Parallel edge) ، أيضاً نشير الى انه اذا كان الرسم لا يحتوي على حلقات فإنه يمكننا الحصول على درجة العقدة بجمع عناصر الصف او العمود للعقدة.

إن المصفوفة المتجاورة لا تمثل حلاً جيداً لتمثيل الرسم لأنها مصفوفة متماثلة (Symmetric)حول القطر الرئيسي للمصفوفة، مما يجعل المعلومات غير تلك المعبر عنها بواسطة القطر نفسه، تظهر مرتين.

2.3 متتابعة الحدود (Edge Sequence)

إذا كان الرسم G يشتمل على مجموعة العقد Vومجموعة الحدود E فإن متتابعة الحدود بطول n من العقدة x الى العقدة y هي مجموعة الحدود S التي تاخذ الشكل التالي:

$$S = \{(V_0 , V_1),(V_1 , V_2), \ldots\ldots,(V_{n-1} , V_n) \}$$

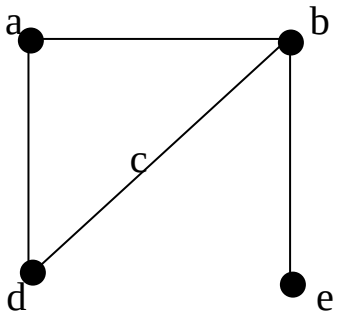
حيث $y=V_n, x=V_0$

إن هذا التعريف يسمح بان تكون الحدود و/أو العقد مكررة، أي أن viيمكن ان تكون xأو y.

نظرية (6.3) :

إذا كانت Aتمثل المصفوفة المتجاورة للرسم البسيط G, فإن العنصر aijفي المصفوفة Anهو عدد متتابعات الحدود بطول n لتي تربط بين العقدتين iو j.

مثال :ان المصفوفة المتجاورة للرسم البسيط التالي :



هي المصفوفة

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

الآن إذا قمنا بحساب A^2فإن:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

الآن إذا أخذنا العنصر المقابل للصف a و العمود c في المصفوفة A^2 والذي نتج عن ضرب الصف a مع العمود c.

$$a\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}c\\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\end{matrix} = 0.0 + 1.1 + 0.0 + 1.1 + 0.1 = 2$$

فإن العدد 2 يعبر عن ان هنالك متتابعتي حدود بطول 2 بين العقدتين a و c, وهما تحديداً

$$(a, b)(b, c)$$

و

$$(a, d)(d, c)$$

وبالتالي فإن أي عنصر في الصف x والعمود y في المصفوفة A^2 هو عدد متتابعات الحدود بطول 2 من العقدة xإلى العقدة y.

إثبات النظرية (6.3) :

سنقوم بإثبات النظرية او برهانها باستخدام الاستدلال الرياضي (Mathematical Induction) .

في حالة $n = 1$, فإن A^1 هي A وفيها يكون العنصر $a_{ij} = 1$ إذا كان هنالك حد يربط العقدتين v_iو v_j , إن هذا الحد هو متتابعة حدود طولها 1. إذن فإن النظرية صحيحة في حالة $n = 1$.

الآن افترض أن النظرية صحيحة للقوة n .سنجد أن

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

وبالتالي فإن العنصر a_{ik} في المصفوفة A^{n+1} يتم الحصول عليه بضرب أزواج العناصر الموجودة في الصف i من المصفوفة A^n بعناصر العمود k من المصفوفة A. كما مبين في الشكل التالي :

العمود k في المصفوفة A

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ . \\ t_j \\ . \\ . \\ t_m \end{pmatrix}$$

الصف i من المصفوفة A^n (s_1 , s_2,.... s_j....s_m)

$$= s_1 t_1 + s_2 t_2 + ... + s_j t_j + \dots s_m t_m$$
$$= a_{ik}$$

بالإستدلال فإن s_j هي عدد متتابعات الحدود بطول n بين العقدتين v_i و v_j في الرسم G

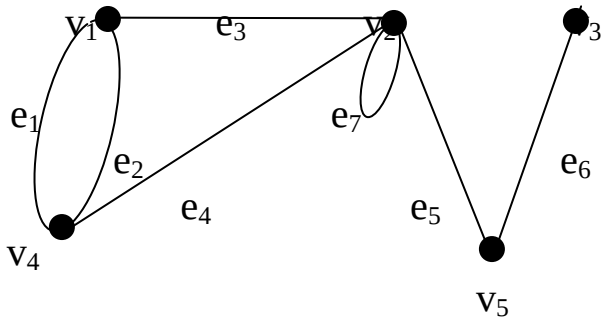
الآن t_j إما ان تكون 1 او 0. إذا كانت t_j تساوي 0 فهذا يعني انه ليس هنالك حد يربط بين v_j و v_K وبالتالي فإن هنالك $s_j t_j = s_j$ متتابعة حدود بطول(n + 1) بين العقدتين v_jو v_K .

إذا كانت tj تساوي 1 فهذا يعني ان هنالك حد يربط بين v_jو v_Kوبالتالي فإن $s_j s_j = s_j$ حيث الحد الأخير هو(v_j , v_K)

إذن فإن العنصر a_{ik} في المصفوفة A^{n+1} يعطي حدود متتابعات الحدود بطول (n + 1) من العقدة v_i الى العقدة v_k .

3.3 المصفوفة المتعارضة (Incidence Matrix)

الطريقة الأخرى والمفيدة في تمثيل الرسم تسمى المصفوفة المتعارضة (Incidence Matrix) في هذه المصفوفة يتم تمييز الصفوف بعقد الرسم والأعمدة بحدود الرسم، ويكون فيها العنصر a_{ij} مساوياً 1 في الصف v والعمود e إذا كان الحد e متعارض على العقدة V كمثال فإن المصفوفة المتعارضة للرسم التالي:



هي:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	1	0	1
v_3	0	0	0	0	0	1	1
v_4	1	1	0	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	1	0

إن المصفوفة المتعارضة تسمح لنا بتمثيل كلاً من الحدود المتوازية، والحلقات.

نشير إلى أن الرسم الذي لا يحتوي على حلقات سيكون في كل عمود فيه اثنان أو أن مجموع كل صف سيعطي درجة العقدة المميزة لذلك الصف.

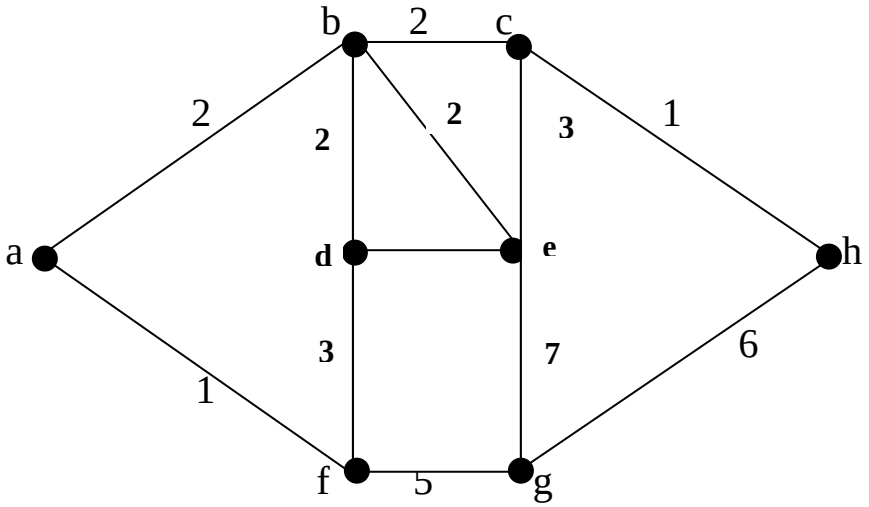
4. خوارزمية المسار الأقصر (Shortest – Path Algorith)

تعريف (3.13) /الرسم الموزون (Weighted Graph) :

الرسم الموزون G هو الرسم الذي يتم فيه إعطاء وزن أو قيمة لكل حد فيه .

القيمة (i,j) w التي تخصص للحد (i,j) تسمى وزن أو قيمة الحد .(i,j)

الرسم التالي يوضح رسم موزون.



إن وزن الرسم G هو مجموع أوزان الحدود الموجودة في الرسم، ووزن المسار هو مجموع أوزان الحدود المكونة للمسار. ويسمى وزن المسار بطول المسار.

في الرسوم الموزونة عادةً ما يكون هدفنا هو العثور على المسار الأقصر، أي المسار ذو الطول الأقصر، بين عقدتين معلومتين.

إن الخوارزمية التالية توجد المسار الأقصر في الرسم G المترابط والموزون.

خوارزمية المسار الأقصر (Shortest Path Algorithm)

إن هذه الخوارزمية توجد المسار الأقصر ما بين العقدتين a و z في رسم مترابط سنرمز لوزن الحد (i , j) بالرمز(i , j) w ومميز، العقدة x بالرمز .L(x). إن المميزات عند بداية الخوارزمية ستكون مميزات مؤقتة، عندما يصبح المميز لعقدة مميز دائم

سنقوم بوضع دائرة حول العقدة .سنستخدم الرمز T ليرمز لمجموعة العقد التي لها مميزات مؤقتة،عند انتهاء الخوارزمية سيكون L(z) هو اقصر مسار بين a و z.

الخوارزمية:

1/ ضع المميزات المؤقتة التالية L (a) = 0، ولكل العقد $x \neq a$ ضع $L(x) = \infty$ وأرمز لمجموعة العقد التي لا مميزات لها بالرمز T .

2/ إذا كانت $Z \notin T$ توقف (هنا سيكون أقصر مسار من aإلى z هو L(z) = ∞

3/ إختر $V \in T$ بحيث يكون V اصغر مميز مؤقت ثم عدل المجموعة T لتصبح:

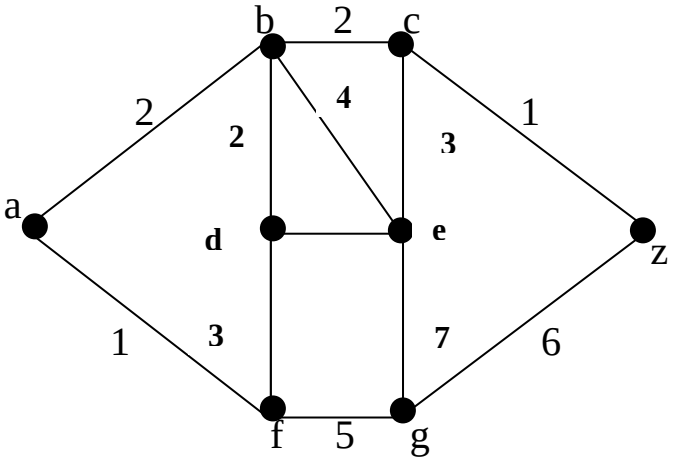
$T = T - \{v\}$.وضع دائرة حول العقدة v ليصبح المميز دائماً.

4/ أعد حساب قيم المميزات المؤقتة لكافة العقد المجاورة للعقدة vعلى النحو التالي:

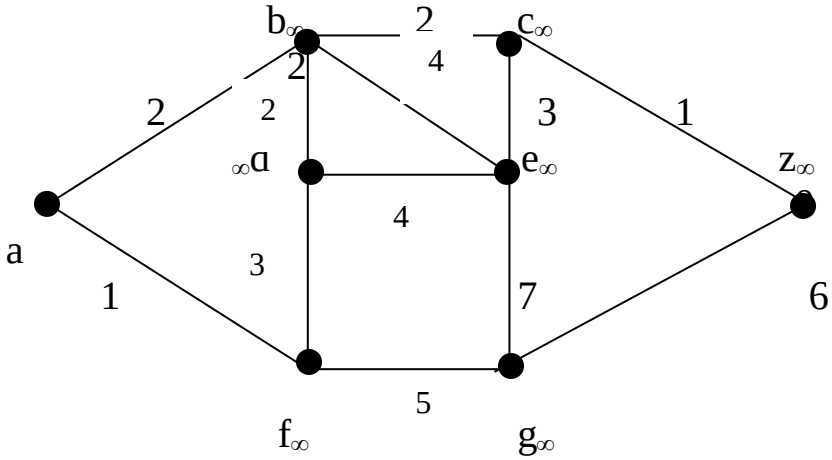
$$V(x) = \min \{ L(x) , L(v) + w(v,x)\}$$

ثم عد للخطوة (2).

سنبين الخوارزمية بتطبيقها على الرسم التالي لإيجاد المسار الأقصر



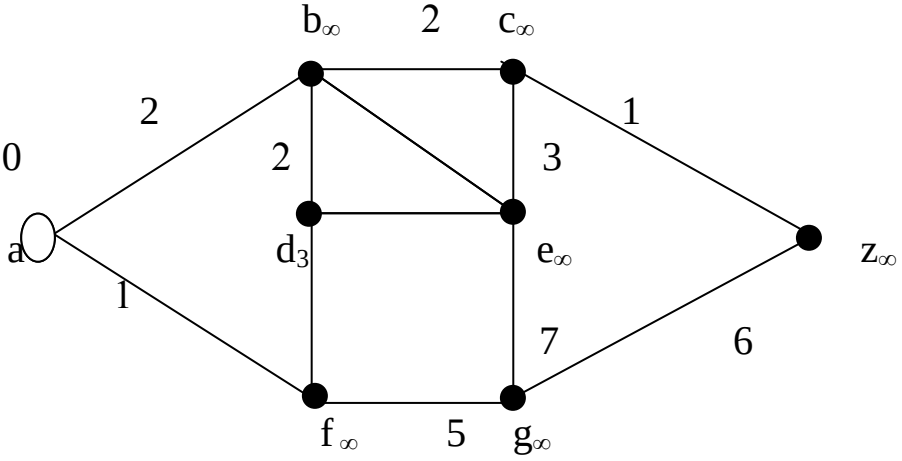
1 - تطبيق الخطوة الأولى من الخوارزمية تنتج الرسم التالي -:



إن المجموعة { a , b , c , d , e , f , g , z } = T هي العقد في الرسم لم يتم رسم دائرة حول أي منها ولها مميزات مؤقتة (Temporary Labels) العقد التي ستأخذ مميز دائم سيتم رسم دائرة حولها.

2 - عند تطبيق الخطوة الثانية نجد أن Z Є T .

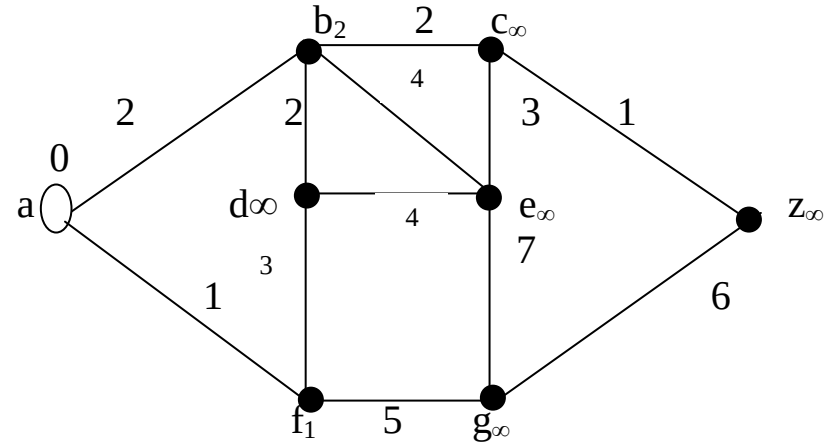
3 -عند تطبيق الخطوة الثالثة ,سنختار aلأن L(a) = 0 وهو اصغر مميز لكل العقد الموجودة في Tثم نقوم برسم دائرة حوله ليصبح مميز دائم كما في الشكل التالي :



4- عند تطبيق الخطوة الرابعة سنقوم بتحديث لقيم مميزات العقد المجاورة للعقدة a وهي b وf . سنحصل على المميزات الجديدة على النحو التالي :

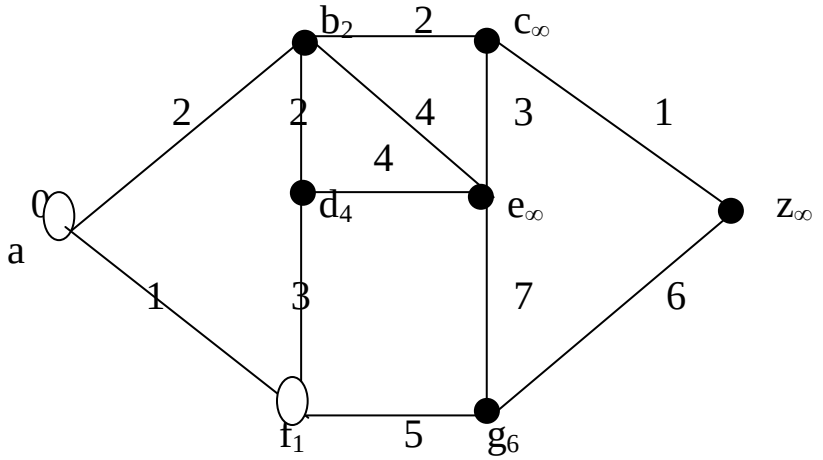
$$L(b) = \min \{ \infty , 0 + 2 \} = 2$$
$$L(f) = \min \{ \infty , 0 + 1 \} = 1$$

ثم نعود للخطوة 2 وقد أصبحت $T = \{ b, c, d, e, f, g, z \}$ وقد أصبح الرسم على النحو التالي :



2. بما أن $z \in T$ سننتقل مباشرةً للخطوة 3.

3. هنا سنقوم باختيار العقدة f لأنها صاحبة اصغر مميز للعقد التي ليس بها دائرة. ثم نقوم برسم دائرة حولها لنحصل على :



2. هنا نقوم بتحديث مميزات العقد المجاورة للعقدة f والتي ليس بها دائرة سابقاً وهي العقدتين g و d حيث تكون لها المميزات الجديدة

$$L(g) = \min \{ \infty, 1 + 5 \} = 6$$
$$L(d) = \min \{ \infty, 1+ 3 \} = 4$$

الرسم السابق يوضح هذه القيم الجديدة للمميزات $L(g)$ و $L(d)$

ثم نعود للخطوة 2 وقد أصبحت $T = \{ b, c, d, e, g, z \}$ وهكذا ...

إذا كررت هذه العملية حتى تم رسم دائرة حول z. فإنه عند العودة منها للخطوة (2) ستنتهي الخوارزمية ستجد أن مميز z هو $L(z) = 5$ وهذا يعني أن المسار الأقصر بين a و z طوله 5 وهو المسار (a, b, c, z).

5.الرسوم المتماثلة(Isomorphism's of Graphs)

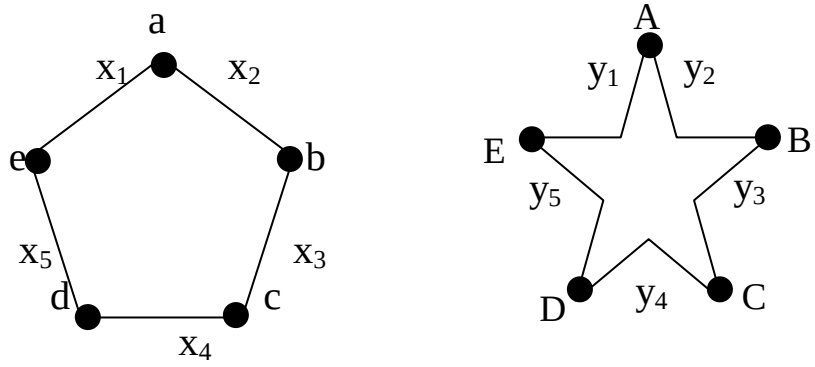
تعريف(1.5.3) :

عزيزي الدارس، الرسمان G_1 و G_2 رسمان متماثلان إذا كانت هنالك الدالة واحد لواحد والشاملة f من عقد G_1 الى عقد G_2 والدالة الواحد لواحد والشاملة g من حدود G_1الى حدود G_2 بحيث يكون الحد e متعارضاً على العقدتين v و w في الرسم G_1 إذا وإذا فقط كان الحد g(e) متعارضاً على العقدتين f(v) و f(w) في الرسم G_2 .

إن الدالتين f و g تسميان التماثل (Isomorphism) .

مثال (1.5.3):

الرسمين التاليين G_1 و G_2 هما رسمان متماثلان



والتماثل تعرفه الدوال التالية:

$$F(a) = A , f(b) = B , f(c) = C , f(d)= D , f(e) = E , h(x_i) = y_i , i = 1,2,3,4,5$$

من تعريف الرسوم المتماثلة و المثال أعلاه نجد أن الرسوم المتماثلة متساوية في عدد العقد والحدود وان هذه العقد والحدود متقابلة ومتطابقة. أي أن الرسمين المتماثلين هما رسم واحد في الأصل والاختلاف بينهما نشأ من المواقع التي تم تحديدها لعقد كل رسم عند رسمه على الورق. إن هذه الحقيقة تؤكدها حقيقة أن الرسوم المتماثلة ستكون لها مصفوفة متعارضة واحدة.

نظرية (1.5.3):

الرسمان G_1 , G_2 متماثلان، إذا وفقط إذا كانت المصفوفات المتعارضة للرسمين متطابقة بترتيب ما للعقد والحدود.

مثال (2.5.3): من المثال (1.5.3)

نجد أن المصفوفة المتعارضة للرسم G_1 وفقاً للترتيب:

a , b , c , d , e و $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5$ هي

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	1	0	0	0
b	0	1	1	0	0
c	0	0	1	1	0
d	0	0	0	1	1
e	1	0	0	0	1

والمصفوفة المتعارضة للرسم G_2 وفقاً للترتيب:

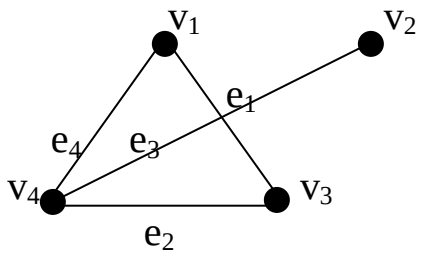
A , B , C , D , E و $y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5$ هي

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
A	1	1	0	0	0
B	0	1	1	0	0
C	0	0	1	1	0
D	0	0	0	1	1
E	1	0	0	0	1

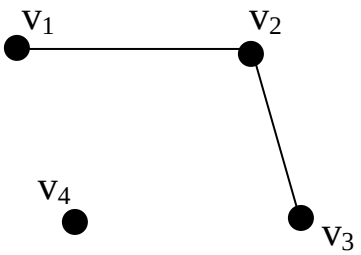
1.5 الرسوم المتممة (Complement Graphs)

تعريف إن الرسم المتمم للرسم البسيط G هو الرسم البسيط $\overline{G}$ الذي له نفس مجموعة العقد الموجودة في G ويكون فيه الحد e موجوداً إذا وفقط إذا لم يكن e موجوداً في الرسم G.

المثال التالي يوضح الرسم المتمم $\overline{G}$ للرسم G.



G



$\overline{G}$

يسمى الرسم G رسم متمم ذاتياً (self-complement)إذا كان G و $\overline{G}$ متماثلين.

الخلاصة

لقد درسنا عزيزي الدارس في هذه الوحدة الموضوعات الأساسية التالية:

✹الرسم غير الموجه G (Undirected Graph) يتكون من المجموعة Vمن العقد (vertices) والمجموعة E من الحدود (Edges) بحيث يكون كل حد e Є E رابطاً بين زوج غير مرتب من العقد (أي دون تحديد اتجاه للحد).

✹ الرسم الموجه (Direct Graph) G يتكون من المجموعة Vمن العقد (vertices) والمجموعة E من الحدود (Edges)، بحيث يكون كل حد e Є E رابطاً بين زوج مرتب من العقد (أي أن هنالك تحديد لاتجاه الحد).

✹ في الرسم غير الموجه إذا كان هنالك حدان أو أكثر يربطان بين نفس الزوج من العقد فإن هذه الحدود تسمى حدوداً متوازية ,(Parallel Edges)، أما إذا كان هنالك حد يربط العقدة الواحدة مع نفسها فإن الحد يسمى حلقة (Loop).

✹الرسم البسيط: هو الرسم الذي لا يشتمل على حدود متوازية أو حلقات.

✹ الرسم الكامل:هو رسم يحتوي على حد واحد بين كل زوج مفرد من العقد.

✹ إن الرسم المنشطر الكامل $K_{m,n}$ هو الرسم الذي تقسم عقده إلى مجموعتين جزئيتين غير متقاطعتين تحتويان على m و n عقدة على التوالي ,وهنالك حد بين عقدتين في الرسم إذا وفقط إذا كانت إحدى العقدتين في إحدى المجموعتين والعقدة الأخرى في المجموعة الأخرى

✹ في الرسم غير الموجه G فإن التتابع P الذي يأخذ الشكل $v_0e_1v_1e_2,\ldots v_{n-1}e_nv_n$ يسمى مساراً (Path)بطول n. أو المسار الذي يربط بين العقدتين v_0 و v_n .إذا كان P مسار بحيث $v_0 = v_n$ فإن المسار يسمى دارة (Circuit) أو دورة (Cycle) .

✹ إذا كان المسار البسيط الذي يشتمل على كل الحدود الموجودة في الرسم يسمى مسار إيلر (Euler Circuit). فإنه يسمى دارة إيلر (Circuit)

✹ يسمى المسار مسار هاميلتونين إذا كان يمر بكل عقدة موجودة في الرسم مرة واحدة فقط.

✹ المصفوفة المتجاورة للرسم G الذي به n عقدة هو المصفوفة N = nxn حيث n أي عنصر بها a_{ij} هو عدد الحدود التي تربط بين العقدتين v_i و v_j. وبالتالي فإن $a_{ij} = 0$ تعني أنه لا يوجد حد (edge) يربط بين v_i و v_j

✹ الرسم الموزون G هو الرسم الذي يتم فيه إعطاء وزن أو قيمة لكل حدٍّ فيه .القيمة (w i,j) التي تخصص للحد (i,j) تسمى وزن أو قيمة الحد .(i,j)

✹ الرسمان G_1 و G_2 رسمان متماثلان إذا كانت هنالك الدالة واحد لواحد والشاملة f من عقد G_1 إلى عقد G_2 والدالة الواحد لواحد والشاملة g من حدود G_1 إلى حدود G_2 بحيث يكون الحد e متعارضاً على العقدتين v و w في الرسم G_1 إذا و إذا فقط كان الحد g(e) متعارضاً على العقدتين f(v) و f(w) في الرسم G_2 .

✹ الرسم المتمم للرسم البسيط G هو الرسم البسيط $\acute{G}$ الذي له نفس مجموعة العقد الموجودة في G ويكون فيه الحد e موجوداً إذا وفقط إذا لم يكن e موجوداً في الرسم G.

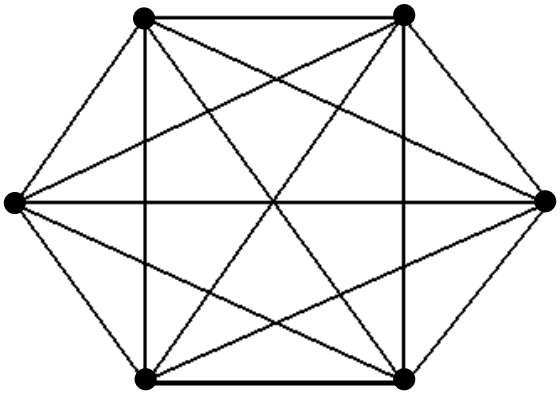
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

فرغت –عزيزي الدارس– من دراسة الوحدة الثالثة التي تناولت "نظرية الرسم" ننتقل بك إلى الوحدة الرابعة وهي بعنوان "الأشجار" حيث تعتبر الأشجار إحدى أهم أنواع الرسوم التي تجد استخداماً وتطبيقاً واسعاً في علم الحاسوب، إذ يتم استخدمها في تجسيد هياكل البيانات وفي تصميم الخوارزميات، وسوف نتعرف في هذه الوحدة على الشجرة الحرة وكيف يمكن أن ننشئ شجرة ذات جذر من الشجر الحرة ، وتجد أيضاً شرحاً لترميز هوفمان، وصفات الأشجار، وفيه نبحث عن الأشجار الثنائية وشجرة البحث الثنائية. وتتناول الوحدة كذلك الأشجار الممتدة .

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة تقويم (1)

K_1



K_6

إجابات التدريبات

تدريب (1)

$\deg(v_1) = 0$
$\deg(v_2) = 2$
$\deg(v_3) = 5$
$\deg(v_4) = 1$
الدرجة الكاملة للرسم هي $\deg(G) = 0 + 2 + 5 + 1 = 8$

تدريب (2)

بما أن G هو رسم كامل فإن كل عقدة متعارضة مع بقية العقد الموجودة في الرسم .إذن فإن درجة كل عقدة من العقد n المكونة للرسم هي $(n-1)$

إذن فإن مجموع درجات كل العقد هو $n(n-1)$

من النظرية (1.3) فإن

$$n(n-1) = 2|E|$$

إذن فإن عدد الحدود في الرسم هو $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$

تدريب (3)

a / هو مسار وهو مسار غير بسيط لتكرار العقدة v_1

b / هو مسار بسيط.

C / هو دارة بسيطة.

d / هو دارة غير بسيطة لتكرار العقدة (v_4).

تدريب (4)

المسار v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 هو مسار هاميلتون ولكن لا توجد دارة هاميلتون لعدم وجود حد يربط بين v_5 و v_1

مسرد المصطلحات

❁ **الرسم غير الموجه Undirected Graph**

الرسم أو الرسم غير الموجه G (Undirected Graph) يتكون من المجموعة Vمن العقد (vertices)والمجموعة E من الحدود (Edges) بحيث يكون كل حد e Є E رابطاً بين زوج غير مرتب من العقد (أي دون تحديد اتجاه للحد).

❁ **الرسم الموجه Direct Graph**

الرسم الموجه G يتكون من المجموعة Vمن العقد (vertices) والمجموعة E من الحدود (Edges) بحيث يكون كل حد e Є E رابطاً بين زوج مرتب من العقد (أي أن هنالك تحديداً لاتجاه الحد).

❁ **الحدود المتوازية Parallel Edges**

حدان أو أكثر يربطان بين نفس الزوج من العقد في الرسم غير الموجه.

❁ **الحلقية Loop**

حد يربط العقدة الواحدة مع نفسها في الرسم غير الموجه.

❁ **الرسم البسيط Simple Graph**

الرسم البسيط هو الرسم الذي لا يشتمل على حدود متوازية أو حلقات.

❁ **الرسم الكامل Complete Graph**

الرسم الكامل على n عقدة يرمز له بالرمز K_n هو رسم يحتوي على حد واحد بين كل زوج مفرد من العقد.

❁ **الرسم المنشطر الكامل Complete Bipartite Graph**

الرسم المنشطر الكامل $K_{m,n}$ هو الرسم الذي تقسم عقده إلى مجموعتين جزئيتين غير متقاطعتين تحتويان على m و n عقدة على التوالي، وهنالك حد بين عقدتين في الرسم إذا وفقط إذا كانت احد العقدتين في إحدى المجموعتين والعقدة الأخرى في المجموعة الأخرى.

❁ المسار Path

في الرسم غير الموجه G التتابع P الذي يأخذ الشكل v0e1v1e2,…vn-1envn يسمى مساراً (Path) بطول n أو المسار الذي يربط بين العقدتين v_0 و v_n .

الدارة Circuitأو الدورة Cycle

إذا كان P مسار بحيث $v_0 = v_n$ فإن المسار يسمى دارة (Circuit) أو دورة (Cycle) .

❁ المسار البسيط

المسار أو الدائرة يكون بسيطاً (simple) إذا كان لا يحتوي على نفس العقدة أكثر من مرة واحدة .أي أن المسار ($v_0 , v_1 , v_2 , \ldots, v_n$) مسار بسيط إذا كانت v_0 , v_1 , v_2 ، $\ldots, v_n$ هي عقد مفردة.

❁ الرسم المترابط Connected Graph

الرسم غير الموجه يسمى مترابطاً إذا كان هنالك مسار بين كل زوج من العقد المفردة في الرسم غير ذلك يسمى الرسم غير مترابط (disconnected).

❁ مسار إيلر Euler Path

المسار البسيط الذي يشتمل على كل الحدود الموجودة في الرسم يسمى مسار إيلر، إذا كان هذا المسار هو دارة Circuit فإنه يسمى دارة إيلر (Euler Circuit)

❁ مسار هاميلتونين Hamiltonian Path

يسمى المسار مسار هاميلتونين إذا كان يمر بكل عقدة موجودة في الرسم مرة واحدة فقط.

الوحدة الرابعة
الأشجار (Trees)

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	**103**
تمهيد	**103**
أهداف الوحدة	**104**
1.الشجرة الحرة	105
1.1أشجار التعريف الهرمي	106
2.1 ترميز هوفمان	107
2.صفات الأشجار	112
1.2 الأشجار الثنائية	116
2.2 شجرة البحث الثنائية	117
3. الأشجار الممتدة	120
1.3 خوارزميات إيجاد الشجرة الممتدة	122
الخلاصة	**128**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**130**
إجابات التدريبات	**131**
مسرد المصطلحات	**134**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة الرابعة من مقرر " الرياضيات المتقطعة2"وموضوعها "الأشجار ".

تبدأ الوحدة وفي قسمها الأول بتعريف الشجرة الحرة وكيف يمكن أن ننشئ شجرة ذات جذر من الشجر الحرة ، ويتناول القسم أشجار التعريف الهرمي ، وتجد في هذا القسم أيضاً شرحاً لترميز هوفمان.

القسم الثاني من الوحدة يتناول صفات الأشجار وفيه نتحدث عن الأشجار الثنائية ،وشجرة البحث الثنائية.

القسم الثالث من الوحدة يتناول الأشجار الممتدة وفي هذا القسم نوضح الخوارزميات التي يمكن أن تستخدم لإيجاد الشجرة الممتدة T للرسم G. سنتناول خوارزميتين هما: خوارزمية بحث العرض أولاً للشجرة الممتدة، خوارزمية بحث العمق أولاً للشجرة الممتدة.

تجد في هذه الوحدة عزيزي الدارس أسئلة التقويم الذاتي وتدريبات وأمثلة مع حلولها .

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تعرف** الشجرة الحرة.
- **تبين** كيف ترسم الشجرة الحرة ذات الجذر.
- **تشرح** بالمثال الفكرة في ترميز هوفمان.
- **تستخدم** شجرة هوفمان لإيجاد الحروف والكلمات المقابلة للترميز.
- **تبرهن** النظرية التي تبين صفات الأشجار.
- **تصف** بالرسم الشجرة الثنائية.
- **تبين** الرموز المستخدمة في خوارزمية البحث في شجرة البحث الثنائية.
- **توضح** بالمثال كيفية استخدام خوارزمية العرض أولاً في إيجاد الشجرة الممتدة T للرسم G.
- **تطبق** خوارزمية بحث العمق أولاً لإيجاد الشجرة الممتدة T للرسم G.

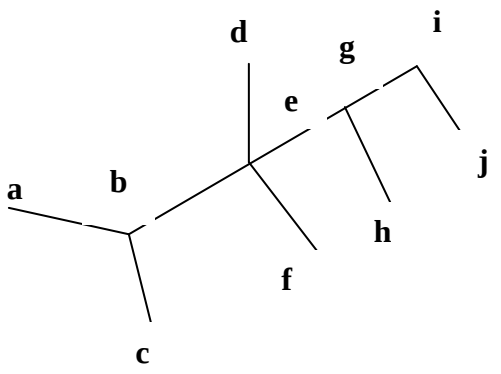
توطئة

عزيزي الدارس، تعتبر الأشجار حدى أهم أنواع الرسوم التي تجد استخداماً وتطبيقاً واسعاً في علم الحاسوب، إذ يتم استخدمها في تجسيد هياكل البيانات وفي تصميم الخوارزميات.

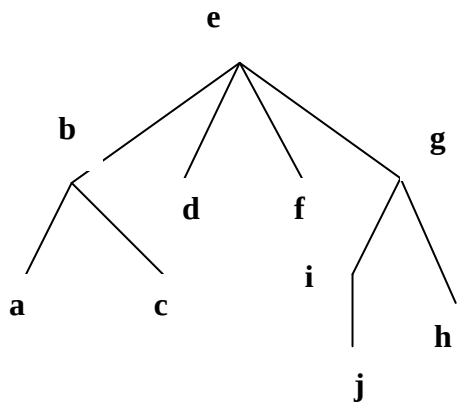
1.الشجرة الحرة (Free Tree)

الشجرة الحرة هي رسم بسيط غير موجّه له خاصية وجود مسار مفرد بين كل زوج من العقد. إذا تم تحديد إحدى عقد الشجرة لتكون جذراً للشجرة فإن الشجرة تسمى شجرة ذات جذر (rooted tree).

مثال (1.1.4) الرسم: (1.1.4) هو مثال لشجرة حرة والرسم (2.1.4) هو مثال لشجرة ذات جذر تم إنشاؤها من الشجرة الحرة في الرسم (1.1.4) بتحديد العقد e كجذر.



الرسم (1.1.4)



الرسم(2.1.4)

نلاحظ في الرسم (1.1.4) أن هنالك مساراً مفرداً بين كل زوج من العقد. كمثال فإن المسار المفرد بين العقدتين c و h هو (c , b , e , g , h).

الرسم (2.1.4) يبين كيف ترسم الشجرة ذات الجذر عادةً حيث يتم وضع العقدة التي تمثل الجزر في قمة الرسم ثم يتم وضع العقد التي يمكن الوصول إليها من الجذر بمسار طوله 1 تحت العقدة التي تمثل الجذر وعلى مستوى واحد. تحت هذه العقد وعلى مستوى واحد يتم وضع العقد التي يمكن الوصول إليها من الجزر بمسار طوله 2، وهكذا ...

يسمى مستوى الرسم الذي يوجد به الجذر بالمستوى 0 والعقد التي توجد تحت الجذر مباشرة يقال أنها على المستوى 1، العقد التي تليها على المستوى 2 وهكذا... أي أن مستوى العقدة v هو طول المسار بين الجذر والعقدة v.

إن المستوى الأقصى الموجود في الشجرة يعرف ما يسمى بارتفاع الشجرة.

مثال (2.1.4)

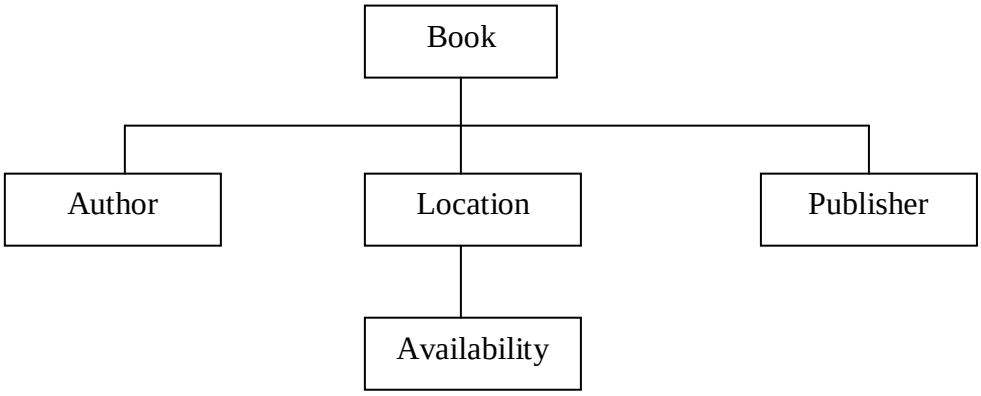
العقد a , b , c , d , e , f , g , h , i , j في الرسم (2.1.4) توجد على المستويات التالية على التوالي 3 , 2 , 2 , 1 , 1 , 0 , 1 , 2 , 1 , 2

أسئلة تقويم ذاتي(1)

ما ارتفاع الشجرة في الرسم (2.1.4)

1.1أشجار التعريف الهرمي (Hierarchical Definition Trees)

الرسم (3.1.4) هو مثال لشجرة تعريف هرمي. مثل هذه الأشجار تستخدم لتبين العلاقات المنطقية بين سجلات قاعدة بيانات. إن الرسم (3.1.4) يمكن استخدامه كنموذج لبناء قاعدة بيانات تحتوي على سجلات كتب في مكتبه.



الرسم (3.1.4)

2.1 ترميز هوفمان(Huffman Codes)

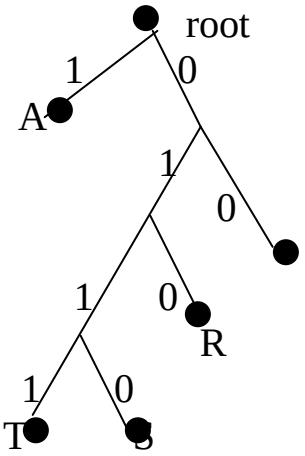
إن الطريقة الشائعة و المستخدمة لتمثيل الحروف داخل الحاسوب هي إستخدام سلاسل ثابتة الطول من الثنائيات لترميز الحروف. الشفرة الأمريكية القياسية لتبادل المعلومات ASCII هي مثال لطريقة ترميز الحروف وتستخدم سلاسل بطول 7 ثنائيات لترميز الحروف. الجدول التالي يبين أمثلة لترميز بعض الحروف باستخدام ASCII.

الحرف	آسكي
A	1000000
B	1000001
C	1000010
1	0110001
2	0110010
!	0100001
X	0101010

ترميز هوفمان يتم فيه تمثيل الحروف بسلاسل ثنائيات متغيرة الطول، وبالتالي فهي تمثل بديلاً لترميز آسكي وطرق الترميز الأخرى التي تستخدم سلاسل ثنائية ثابتة الطول.

الفكرة في ترميز هوفمان مبنية على أن يتم استخدام سلاسل ثنائية قصيرة لتمثيل الحروف الأكثر استخداماً، واستخدام سلاسل ثنائية طويلة لتمثيل الحروف الأقل إستخداماً. وبالتالي وبهذه الطريقة سيكون ممكناً تمثيل الحروف أو السلاسل المكونة للنص أو البرنامج في حيز أقل من الحيز الذي ينتج عن استخدام ترميز آسكي.

ترميز هوفمان يعرف كشجرة ذات جذر كمثال لها الرسم التالي



مثال لترميز هوفمان

لترميز حرف ما، فإننا نبدأ من الجذر وننتقل إلى الأسفل إلى أن نصل للحرف. الثنائية 0 و 1 الموجودة عن شجرة ترميز هوفمان تبين لنا ما إذا كان يجب علينا الانتقال داخل الشجرة يميناً أو يساراً.

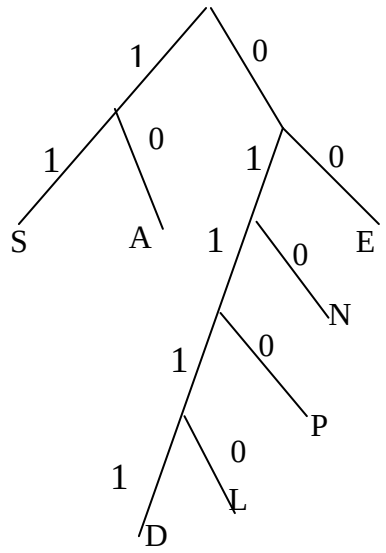
كمثال فإن سلسلة الثنائيات التي تمثل الحرف S في مثال شجرة هوفمان هي 0110. أما إذا أردنا معرفة الحرف أو الحروف التي يمثلها ترميز هوفمان محدداً فما علينا إلا متابعة الشجرة إبتداء من الجذر. كمثال لفك الترميز 01010111 بإستخدام الشجرة في

المثال أعلاه فإننا نبدأ من الجذر وبما أن الحرف الأول هو 0 فإننا ننتقل يميناً، ثم ننتقل يساراً ثم يميناً. عند هذه النقطة سنجد أننا قد وجدنا الحرف الأول وهو R. لمعرفة الحرف الثاني نعود للجذر من جديد ثم نواصل التنقل من حيث ما توقفنا. بما أن الثنائية التالية هي 1 فإننا ننتقل يساراً فنجد مباشرة أننا قد وجدنا الحرف الثاني وهو A. نعود للجذر مرة أخرى وسنجد أن الثنائيات 0111 هي ترميز للحرف T. وبالتالي فإن سلسلة الثنائية 01010111 هر ترميز للحروف أو الكلمة RAT .

عادة ما يتم تحديد شكل شجرة هوفمان بناء على جداول تبين معدّل تكرار ظهور الحروف بحيث يتم إعطاء الحروف الأكثر ظهوراً ترميزاَ قصيراً والحروف الأقل ظهوراً ترميزاَ طويلاً.

تدريب (1)

مستخدماً شجرة هوفمان التالية:



1. أوجد الحروف أو الكلمات المقابلة لكل من الترميز الآتي:

أ- 011000010

ب- 01110100110

ج- 011110010011110

2. مستخدماً شجرة هوفمان أعلاه رمِّز الكلمات التالية:

أ- DEN

ب- NEED

ج- LEADEN

تدريب (2)

صمِّم شجرة هوفمان للحروف الموجودة في الجدول التالي:

الحرف	معدل التكرار / الظهور
I	7.5
U	20.0
B	2.5
S	27.5
C	5.0
H	10.0
M	2.5
P	25.0

أسئلة تقويم ذاتي(2)

أكمل الجدول التالي:

الحرف	الاسكي
A	1000000
B	.....
C	1000010
.....	0110001
2	.....
!	.....
.....	0101010

2.صفات الأشجار (Properties of Trees)

عزيزي الدارس، من تعريف الشجرة " تعرف الشجرة بأنها رسم بسيط له خاصية أن هنالك مسار مفرد بين كل زوج من العقد" يتبين أن الشجرة هي رسم مترابط (Connected) .النظرية التالية تبين صفات الأشجار .

نظرية(1.2.4) :

إذا كانت T هي رسم بسيط به n عقدة فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) T شجرة .

(ب) T رسم مترابط ولا يحتوي على دوائر.

(ج) T رسم مترابط به (n-1) حد.

(د) T رسم لا يحتوي على دوائر وبه (n-1) حد.

الإثبات : لإثبات أن (أ) تؤدي إلى (ب)، افترض(أ) أي أن T شجرة، فمن التعريف الأساسي للشجرة نجد أن الشجرة هي رسم مترابط لأن هنالك مساراً مفرداً بين كل زوج من العقد في T. الآن افترض أن T تحتوي على الدائرة C، ولكن لأن T رسم بسيط فان C لا يمكن أن تكون حلقة (Loop) لأن الرسم البسيط ليس به حلقات. إذن C ستحتوي على الأقل على عقدتين a و b مثلاً. إذا كانت العقدتان a و b واقعتين على دائرة فإن هذا يعني أن هنالك على الأقل مسارين من a إلى b، وهذا يناقض التعريف الأساسي للشجرة، إذن فإن الشجرة T لا يمكن أن تحتوي على دائرة. وبالتالي فإن أي رسم مترابط لا يحتوي على دائرة فهو شجرة.

لإثبات أن (ب) تؤدي الى (ج) افترض أن T رسم مترابط لا يحتوي على دائرة، سنثبت أن عدد الحدود في T هو (n-1) بالاستدلال الرياضي (induction).

إذا كان عدد العقد n في T هو 1 فان T تشتمل على عقدة واحدة ولا تحتوي على أي حد (أي عدد الحدود يساوي 0) وبالتالي فان عدد الحدود يساوي

0= 1 – 1 =n-1 صحيح .

الآن افترض أن النظرية صحيحة لرسم به n عقدة ولا يحتوي على دائرة، يجب علينا إثبات صحة النظرية عندما يكون عدد العقد هو n+1.

افترض ان T هي رسم مترابط لا يحتوي على دائرة و به n+1 عقدة، اختر P بحيث يكون أطول مسار في T ، وبما أن P ليس دائرة فإن P يشتمل على العقدة v التي لها الدرجة 1.

دع *T تكون هي T نفسها بعد مسح العقدة v والحد المتعارض معها، سنجد أن *T هي رسم مترابط لا يحتوي على دائرة وبما أن عدد العقد في T هو n+1 فإن عدد العقد في *T هو n ، وبالاستدلال فإن *T تحتوي على n-1 حد ، إذن T تحتوي على n حد. وهذا يكمل الإثبات بالإستدلال ويثبت أن (ب) تؤدي إلى (ج).

لإثبات أن (ج) تؤدي إلى (د) سنستخدم الإثبات بالتناقض . افترض ان T رسم مترابط به n-1 وعلينا إثبات أن T لا يحتوي على دائرة .

لإثبات ذلك سنفترض العكس أي أن T تحتوي على دائرة واحدة على الأقل، وبما أن إزالة أو (إزاحة) احد الحدود من الدائرة لا يؤدي إلى يصبح الرسم T رسماً غير مترابط فسنفترض أننا قمنا بإزالة أحد الحدود من كل الدوائر الموجودة في الرسم T حتى حصلنا على الرسم *T المترابط والذي لا يحتوي على أي دائرة، الآن الرسم *T هو رسم بسيط مترابط به n عقدة.

من الإثبات السابق ان (ب) تؤدي إلى (ج) نجد أن *T تحتوي على(n-1) حد، وهذا يعني أن T تحتوي على أكثر من n-1 حد وهذا يناقض الفرضية الأولى .إذن T لا تحتوي على أي دائرة، وهذا يثبت أن (ج) تؤدي إلى (د). أخيراً يجب علينا إثبات أن (د) تؤدي إلى (أ) . أي إذا افترضنا أن T رسم لا يحتوي على أي دائرة و به n-1 حد، يجب علينا إثبات أن T شجرة (أي أن T رسم مترابط وهنالك مسار مفرد لكل زوج من العقد في T).

سنثبت أولاً ان T رسم مترابط باستخدام الإثبات بالتناقض، ونفترض أن T رسم غير مترابط، هذا الافتراض يعني أن T مكونة من العناصر

$$T_1 , T_2 , T_3 , ... T_k \quad , k > 1$$

حيث كل من T_i رسم بسيط مترابط.

إذا افترضنا أن كل من T_i له N_i عقدة فمن إثباتنا السابق لحقيقة أن (ب) تؤدي إلى (ج) فإن كل Ti له $(n_i - 1)$ حد.

إذن فإن مجموع حدود رسوم العناصر $T_1 , T_2 , T_3 , ... T_k$ يجب أن يكون مساوياً لحدود الرسم T أي ان :

$$n-1 = (n_1 – 1) + (n_2 – 1) + ……. + (n_k – 1)$$

إذن :

$$n-1 = (n_1 + n_2 + …… +n_k) – k$$

ولأن $K > 1$ فإن $(n – 1)$ أصغر من $(n – k)$ وهذا غير ممكن، إذن T هو رسم مترابط.

الآن تبقى أن نثبت أن هنالك مساراً مفرداً بين كل زوج من العقد في T . سنثبت ذلك بالتناقض أيضاً، إذا افترضنا أن هنالك أكثر من مسار Pi بين العقدتين (a) و (b) في T فإن أحد المسارات سيكون :

$$P_1 = (a , ……., b)$$

ومسار آخر هو

$$P_2 = (a……., b)$$

إن وجود المسارين يعني أننا إذا تبعنا المسار P_1 وألحقناه بالمسار P_2 فإننا سنحصل على دائرة وهذا غير ممكن ومناقض للافتراض الأساسي أن T لا تحتوي على دائرة إذن فان هنالك مساراً مفرداً بين كل زوج من العقد في T. وهذا يكمل إثبات أن (د) تؤدي إلى (أ).

تعريف(1.2.4) :

يتم تعريف المصطلحات التالية عند الحديث عن الأشجار ذات الجذر (Root Tree): إذا كانت T شجرة ذات الجذر v_0 ، وان x , y , z هي عقد في T وأن (v_0 , v_1 , ..., v_n) هو مسار في T فإن:

(أ) v_{n-1} هو أب v_n.

(ب) العقد v_0 ... , v_{n-1} هي أسلاف للعقدة v_n .

(ج) v_n هو ابن للعقدة v_{n-1} .

(د) إذا كانت العقدة x هي سلف للعقدة y فإن العقدة yهي حفيد للعقدة x.

(هـ) إذا كانت العقد x و y أبناء للعقدة z فهما أشقاء .

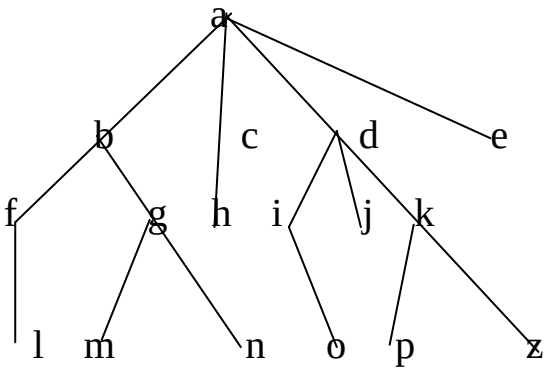
(و) إذا لم يكن للعقدة x ابن فهي عقدة نهائية (أو ورقة).

(ز) إذا كانت x ليست عقدة نهائية فهي عقدة داخلية أو فرع .

(ح) الرسم الجزئي من T الذي يشتمل على x كجذر مع كل من أبنائها وأحفادها يسمى شجرة فرعية من T جزرها x .

مثال :

في الرسم التالي



نجد أن :

a هي الجذر .

b و c و d و e هم أبناء a .

c هو والد h .

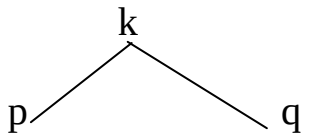
أحفاد b هم f ، g ، l ، m و n .

b و d هم أشقاء .

عقد النهاية أو الأوراق هي e ، h ، j ، l ، m ، n ، o، p و q .

العقد الداخلية أو الفروع هي b ، c ، d ، f ، g ، i و k .

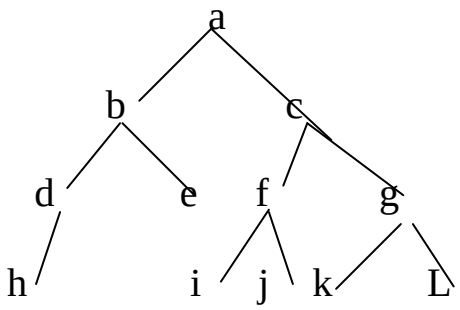
الشجرة الفرعية التي جذرها هو k هي :



1.2 الأشجار الثنائية (Binary Tree)

الشجرة الثنائية هي شجرة ذات جذر تكون لكل عقدة فيها إما ابن يسار، أو ابن يمين، ابنان على اليمين واليسار، أو ليس لديها ابن (أي ورقة). الشجرة الثنائية الكاملة هي الشجرة التي لكل عقدة فيها ابنان على اليمين واليسار، أو ليس لديها ابن (ورقة).

مثال(2.2.4): الرسم التالي هو رسم لشجرة ثنائية



نظرية(2.2.4): إذا كانت T شجرة ثنائية كاملة لها i عقدة داخلية فإن T سيكون لها i + 1 عقدة نهائية ومجموع العقد الكلي هو 2i + 1 .

الإثبات:

إن عقد T تشتمل على نوعين من العقد هما العقد الأبناء (لبعض الآباء) وعقد ليست أبناء (لأي أب).

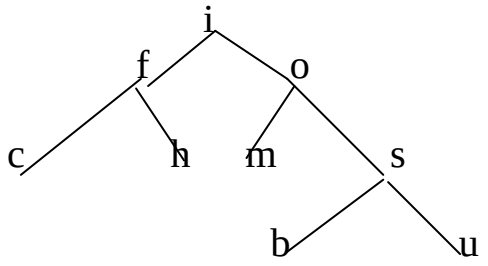
هنالك عقدة واحدة فقط ليس لها أب هي الجزر . وبما أن هنالك i عقدة داخلية فإن لكل منها 2 من الأبناء وبالتالي فإن المجموع الكلي للعقد الأبناء هو 2i. إذن فإن المجموع الكلي للعقد هو 2i + 1 منها i عقدة داخلية و i + 1 عقدة نهائية (أوراق).

أن الأشجار الثنائية مفيدة في تمثيل العلاقات بين مجموعة من البيانات. إن الهيكلية المستخدمة لهذا الغرض تسمى شجرة البحث الثنائية (Binary Tree).

2.2 شجرة البحث الثنائية (Binary Search Tree)

إن شجرة البحث الثنائية هي الشجرة الثنائية T التي يتم فيها تخصيص بيان لكل عقدة، يتم ترتيب البيانات بحيث يكون لكل عقدة v في T البيان على يسار (يمين) الشجرة الفرعية للعقدة v أقل من (أو أكبر من) البيان المخصص للعقدة v.

مثال(3.2.4): الرسم التالي يوضح شجرة بحث ثنائية حيث نجد أن البيان المعطى لكل عقدة هنا هو قيمة الحرف المعبر عن اسم العقدة، وسنجد أن قيمة هذا البيان على يسار أي عقدة أقل من قيمة البيان المخصص للعقدة v.



1.2.2 خوارزمية البحث في شجرة بحث ثنائية

الخوارزمية التالية تبين كيف تتم عملية البحث عن بيان مخزن في إحدى عقد شجرة بحث ثنائية.

تستخدم الخوارزمية الرموز التالية :-

LEFT(v) لترمز للابن اليسار للعقدة v.

RIGHT(v) لترمز للابن اليمين للعقدة v.

LEFT = (λ) إذا لم يكن للعقدة v ابن يسار.

RIGHT =(λ) إذا لم يكن للعقدة v ابن يمين.

VALUE (v) لترمز لقيمة البيان المخزون في العقدة v .

إذا أردنا البحث عن البيان x في شجرة بحث ثنائية فإن الخوارزمية ترجع العقدة p التي تحتوي على x إذا كان x مخزوناً في إحدى عقد الشجرة وإلا ترجع λ .

1- ضع p = ROOT .

2- إذا كانت P = λ توقف وارجع λ { البيان غير موجود } وإلا إذا كانت

VALUE (p) = x

توقف وارجع p { البيان موجود في العقدة p }

3- إذا كان(p)VALUE اصغر من x ضع P := RIGHT(p)

وعد للخطوة (2)

وإلا ضع

P:= LEFT(p)

وعد للخطوة (2).

تدريب (3)

ارسم كل من الأشجار التي لها الصفات التالية أو بين لماذا لا يمكن رسمها:

أ- 6 حدود ، 8 عقد

ب- لا تحتوي على دائرة ،4 حدود ، 6عقد .

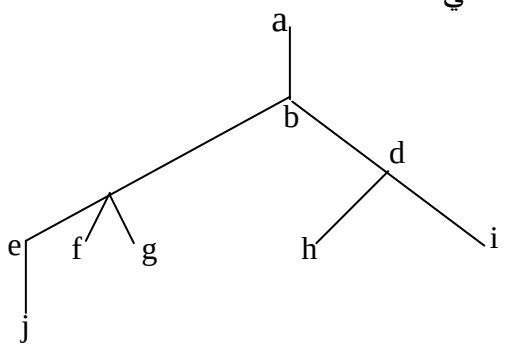
ت- شجرة 5 عقد لها الدرجات 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 4

ث- شجرة لها 4 عقد داخلية و6 عقد نهائية (أوراق)

ج- شجرة ثنائية كاملة ارتفاعها 3 ولها 9 عقد نهائية (أوراق)

تدريب (4)

في الرسم التالي



أوجد:

أب العقدتين c و d - أسلاف c وأسلاف j - أحفاد d و c .

أشقاء f - العقد الداخلية (الفروع) - عقد النهاية (الأوراق) .

أسئلة تقويم ذاتي(3)

1/أرسم كل الأشجار الثنائية الكاملة التي لها ثلاثة عقد .

2/تعرف الغابة (Forest) بأنها رسم بسيط لا يحتوي على دوائر؟

إذا كانت الغابة F تشتمل على m شجرة وبها n عقدة فما هو عدد الحدود في F؟

3. الأشجار الممتدة(Spanning Trees)

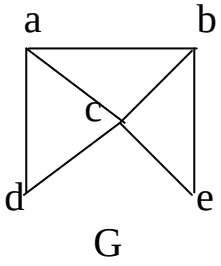
عزيزي الدارس، في هذا الجزء سنناقش كيفية إيجاد الرسم الجزئي T من الرسم G بحيث تكون T شجرة تشتمل على كافة العقد الموجودة في الرسم G . في مثل هذه الحالة تسمى T ممتدة على الرسم G إن الطرق التي تستخدمها في إيجاد الشجرة الممتدة على الرسم G يمكن تطبيقها على مسائل أخرى أيضاً .

تعريف(1.3.4)

الشجرة T هي شجرة ممتدة على الرسم G إذا كانت T رسم جزئي من G يشتمل على كافة عقد الرسم G .

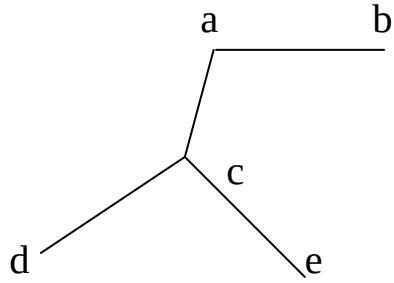
مثال(1.3.4)

ن إحدى الأشجار الممتدة على G في الرسم التالي

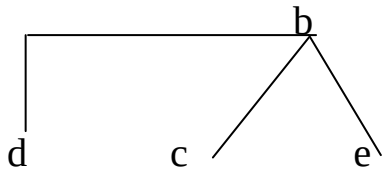


G

هي الشجرة T التالية :



في هذا المثال يتضح أن الرسم G يمكن أن يشتمل على العديد من الأشجار الممتدة، كمثال لذلك فإن الرسم G أعلاه يمكن أن تكون له الشجرة الممتدة T التالية :



(T)

نظرية(1.3.4): الرسم G له شجرة ممتدة T إذا وفقط إذا كانت G رسماً مترابطاً .

الإثبات:

افترض أن G رسم له الشجرة الممتدة T وأن a و b هما عقدتان في الرسم G .

بما أن T شجرة ممتدة للرسم G فإن العقدتين a و b موجودتان أيضاً في T (من تعريف الشجرة الممتدة) وبالتالي فإن هنالك مسار p بين العقدتين a و b في الشجرة T.

إذن هنالك المسار p أيضاً بين العقدتين في الرسم G وهذا يعني أن G رسم مترابط .

لإثبات العكس سنفترض أن G رسم مترابط وعلينا إثبات أن G سيكون لها شجرة ممتدة T.

أولاً : إذا كانت G لا تحتوي على دائرة فمن النظرية (1.2.4) فإن G شجرة نفسها وبالتالي فإن G هي T .

ثانياً : اذا كانت G تحتوي على دائرة فإننا سنقوم بإزالة احد حدود الدائرة وسيظل الرسم G رسماً مترابطاً. إذا أصبح الرسم بعد إزالة الحد رسماً لا يحتوي على دائرة نتوقف.

أما إذا ظل الرسم G يحتوي على دائرة فنزيل حداً آخر من حدود الدائرة وهكذا حتى نحصل على رسم G لا يحتوي على دائرة. عندها سيكون الرسم G هو الرسم T الذي لا يحتوي على دائرة. ومن النظرية (1.2.4) فإن T شجرة. وبما أن T ستكون محتوية على كافة عقد الرسم G فإن T شجرة ممتدة.

1.3 خوارزميات إيجاد الشجرة الممتدة T على الرسم G

سنبين فيما يلي خوارزميتين يمكن استخدامهما لإيجاد الشجرة الممتدة T على الرسم G.

1.1.3 خوارزمية بحث العرض أولاً للشجرة الممتدة

(Breadth- First Search for a Spanning Tree)

افترض أن G رسم مترابط له العقد المرتبة

$v_1, v_2, \ldots, v_n$

خوارزمية بحث العرض أولا مبنية على فكرة إيجاد الشجرة الممتدة T بمستوياتها المختلفة بدأً من الجذر ثم إيجاد كافة العقد على المستوى الثاني ....وهكذا.

الخوارزمية هي :

1- ضع $S = (v_1)$ ودع T تشتمل على العقدة v_1 ،سمي v_1 الجذر.

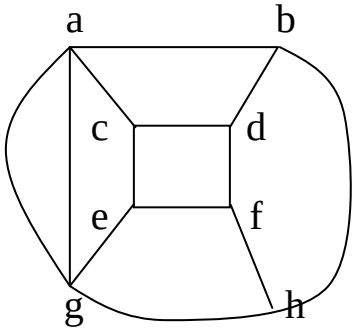
2- لكل عقدة في x في المجموعة S، قم بإضافة الحدود (x , y) للرسم T على الترتيب بشرط أن لا يترتب على إضافة الحد (x , y) دائرة في T.

إذا لم تكن هنالك حدود يمكن إضافتها نتوقف.(T هي شجرة ممتدة)

3- قم بإبدال S بأبناء S (في T) مرتين وفقاً للترتيب الأصلي للعقد في G. وعد للخطوة (2).

مثال (1.3.4):المثال التالي يوضح كيفية استخدام خوارزمية بحث العرض أولاً في إيجاد الشجرة الممتدة T للرسم G .

أوجد الشجرة الممتدة T للرسم G التالي:



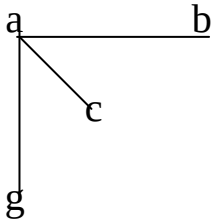
الرسم G

الحل: يجب علينا اختيار ترتيب ما للعقد المكونة للرسم G ليكن a, b, c, d, e, f, g, h, ثم نطبق الخوارزمية:

أولاً: علينا اختيار العقدة الأولى في الترتيب a كجذر للشجرة الممتدة T . وجعل المجموعة S تحتوي على العقدة a .

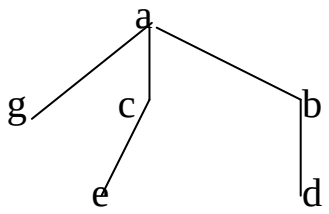
إذن S = (a) .

ثانياً: علينا إضافة كافة الحدود (a , y) للشجرة T. بحيث لا يترتب على إضافة أي حد دائرة . إضافة الحدود تتم على الترتيب y = b , c , … , h بتطبيق هذه الخطوة سنحصل على الرسم T التالي:



ثالثاً: سنجعل S هي مجموعة الأبناء مرتبين وفقاً للترتيب الأولى للعقد، ستصبح S = (b , c , g) ونعود للخطوة الثانية.

بتطبيق الخطوة الثانية مرة أخرى سنحصل على الشجرة التالية:

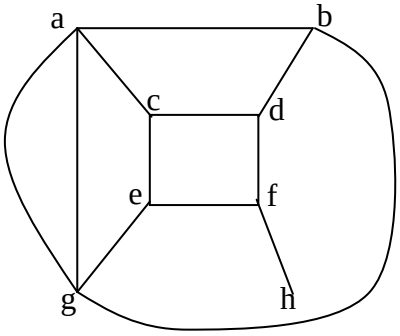


(T)

ونقوم بإبدال S لتصبح S = (d , e) ثم نعود للخطوة الثانية مرة أخرى. عندها لن نجد أي حدود يمكن ان تضاف للشجرة T . وتكون T بالتالي هي الشجرة الممتدة للرسم G .

تدريب (5)

إذا كان الرسم G هو الرسم التالي :



1/ مستخدماً خوارزمية بحث العمق أولاً وترتيب العقد a, b, c, d, e, f, g, h, أوجد الشجرة الممتدة T للرسم G.

2/ مستخدماً خوارزمية بحث العمق أولاً وترتيب العقد a, b, c, d, e, f, g, h, أوجد الشجرة الممتدة T للرسم G.

2.1.3 خوارزمية بحث العمق أولاً للشجرة الممتدة

(**Depth-First Search for a spanning Tree**)

إن خوارزمية بحث العمق أولاً مبنية على فكرة إيجاد الشجرة الممتدة T بمستوياتها المختلفة بداءاً من الجذر ثم إيجاد كافة العقد الأحفاد للإبن الأول ثم العودة لإيجاد أحفاد الابن الثاني .... وهكذا .

إذا افترضنا أن G هو رسم مترابط له العقد المرتبة $v_1 , v_2 , ... , v_n$

فإن الخوارزمية هي:

1- ضع $S =(v_1)$ واجعل T هي الرسم الذي يحتوي على العقدة v_1 وسمي v_1 الجذر.

2- اختر الحد (v_1 , v_k) حيث K أقل قيمة ممكنة (أي v_k هو الحد الأقل رتبة وقم بإضافته للرسم T بحيث لا يترتب على الإضافة نشوء دائرة .ثم ضع $S = v_k$ وعد لبداية الخطوة (2).

إذا لم يكن هنالك حد يمكن إضافته، اذهب للخطوة (3).

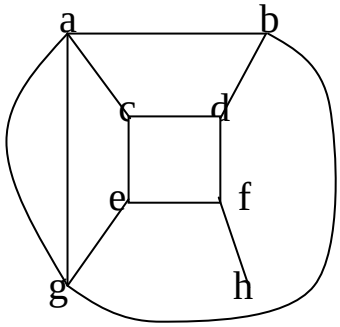
3- إذا كانت $S = v_1$ توقف، T هي الشجرة الممتدة .

4- دع x تكون هي العقدة الابن للعقدة S(في T).

ضع $S = x$ وارجع للخطوة (2).

مثال(2.3.4): المثال التالي يوضح كيفية تطبيق خوارزمية بحث العمق أولاً لإيجاد الشجرة الممتدة T للرسم G .

أوجد الشجرة الممتدة للرسم G التالي :



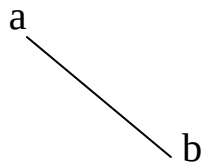
الحل: سنقوم باختيار ترتيب للعقد المكونة للرسم G وليكن

a, c, d, e, f, g, h

ثم نطبق الخوارزمية على النحو التالي :

1- سنضع S = a وتكون T هي الجذر a

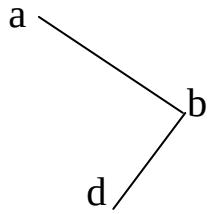
2- سنقوم بإضافة الحد (a , x_k) حيث k اقل قيمة ممكنة، في هذه الحالة فإن v_2=b هي الحد ذو الرتبة الأقل، إذن نقوم بإضافة الحد (a,b) للشجرة T لتصبح T على النحو التالي:



ثم نضع s=b ونعود لبداية الخطوة (2).

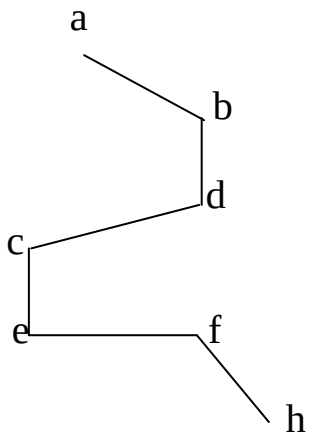
في المرة الثانية سنقوم بإضافة الحد (b,d).

وتصبح T هي:



ثم نضع S = d ونعود لبداية الخطوة (2)

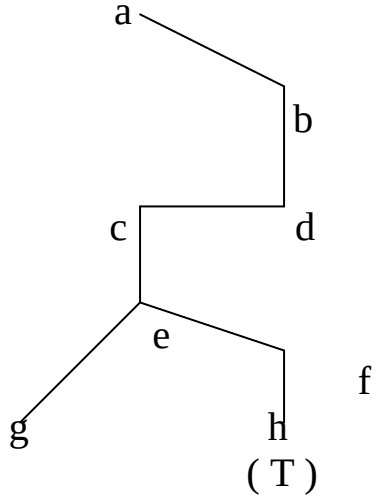
ان تكرار هذه العملية سيترتب عليها إضافة الحدود: (f , h) , (e , f), (c , e) , (d , c) على التوالي لتصبح T هي:



عندها لن نجد حداً يمكن إضافته على صورة (h , x) لهذا سننتقل للخطوة (3) وعندها ستكون قيمة S = h .

3- بما أن S = a ليس صحيحاً سنذهب للخطوة (4) .

4- هنا سنجعل S هي أب العقدة h أي S = f ثم نعود للخطوة (2) لمحاولة إضافة حد (أو حدود) للشجرة T على صورة (f , x) ولكن مرةً أخرى لن نجد حداً من هذا النوع ، لنعود للخطوة (4) مرةً أخرى ونجعل S هي أب للعقدة f أي S = e ونعود للخطوة (2) في هذه المرة سننجح في إضافة الحد (e , g). وبعدها لن نجد أي حد يضاف. وفي نهاية تكرار هذه العملية سنجعل S = a وعندها سيتحقق الشرط الموجود في الخطوة (3) لتتوقف العملية وتكون عندها T هي:



(T)

الخلاصة

عزيزي الدارس ، لقد عرضت لك في هذه الوحدة الرابعة من مقرر "الرياضيات المتقطعة2" الموضوعات التالية:

✹الشجرة الحرة هي رسم بسيط غير موجه له خاصية وجود مسار مفرد بين كل زوج من العقد. إذا تم تحديد إحدى عقد الشجرة لتكون جذراً للشجرة فإن الشجرة تسمى شجرة ذات جزر (root tree).

✹الفكرة في ترميز هوفمان مبنية على أن يتم استخدام سلاسل ثنائية قصيرة لتمثيل الحروف الأكثر استخداماً واستخدام سلاسل ثنائية طويلة لتمثيل الحروف الأقل استخداماً.

✹إذا كانت T هي رسم بسيط به n عقدة فان العبارات التالية متكافئة :

(أ)T شجرة

(ب)T رسم مترابط ولا يحتوي على دوائر

(ج) T رسم مترابط به (n-1) حد.

(د) T رسم لا يحتوي على دوائر وبه (n-1) حد.

✹ الشجرة الثنائية هي شجرة ذات جذر يكون لكل عقدة فيها إما ابن يسار، أو ابن يمين، أو ابنان على اليمين واليسار، أو ليس لديها ابن (أي ورقة). الشجرة الثنائية الكاملة هي الشجرة التي لكل عقدة فيها ابنين على اليمين واليسار أو ليس لديها ابن (ورقة).

✹ شجرة البحث الثنائية هي الشجرة الثنائية T التي يتم فيها تخصيص بيان لكل عقدة يتم ترتيب البيانات بحيث يكون لكل عقدة v في T البيان على يسار (يمين) الشجرة الفرعية للعقدة v أقل من (أو اكبر من) البيان المخصص للعقدة v.

✹ الشجرة T هي شجرة ممتدة على الرسم G إذا كانت T رسماً جزئياً من G يشتمل على كافة عقد الرسم G .

✹خوارزمية بحث العرض أولاً مبنية على فكرة إيجاد الشجرة الممتدة T بمستوياتها المختلفة بدءاً من الجذر ثم إيجاد كافة العقد على المستوى الثاني ... وهكذا.

✹خوارزمية بحث العمق أولاً مبنية على فكرة إيجاد الشجرة الممتدة T بمستوياتها المختلفة بدأً من الجذر ثم إيجاد كافة العقد الأحفاد للابن الأول ثم العودة لإيجاد أحفاد الابن الثاني ... وهكذا .

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

فرغت – عزيزي الدارس – من دراسة "الأشجار" في الوحدة الرابعة، وسوف نتعرف بإذن الله تعالى في الوحدة الخامسة من هذا المقرر على " نماذج الشبكة وشبكات بتري "وفيه نتناول نماذج الشبكة ،و تعريف لشبكة النقل ، والتدفق في الشبكة. وفي خوارزمية التدفق الأقصى سنتعرف على خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على الشبكة،وتتناول الوحدة شبكات بتري وهي نماذج رسومية يمكن استخدامها لنمذجة ودراسة المعالجة المتزامنة .

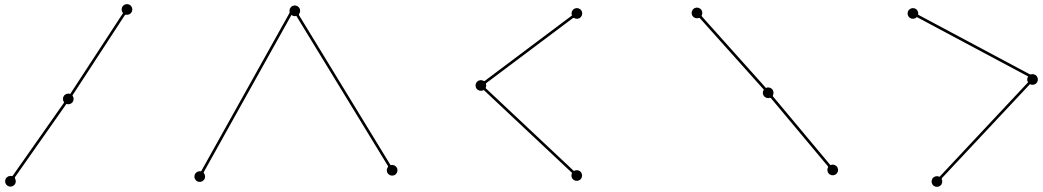
أجوبة أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي(1)

ارتفاع الشجرة في الرسم (4.1.2) هو 3

أسئلة التقويم الذاتي(3)

/1



2/ عدد الحدود هو **m – n**.

أجوبة التدريبات

تدريب (1)

السؤال (1)

أ- PEN

ب- LAP

ج- DEAL

السؤال (2)

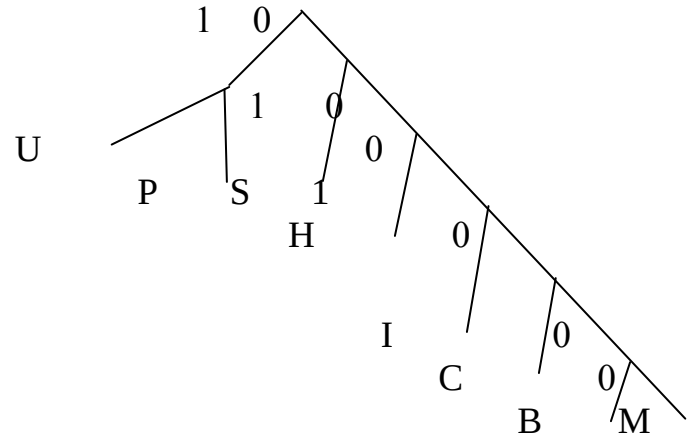
أ- 0111100010

ب- 010000001111

ج- 0111000100111100010

تدريب (2)

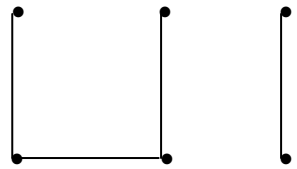
تصميم شجرة هوفمان هو:



تدريب (3)

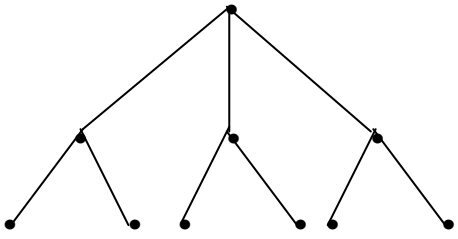
(أ)

(ب)



(ت) ليس هنالك رسم في هذا النوع لان مجموع الدرجات هو 10 وبالتالي يجب ان تكون هنالك 5 حدود وهذا يناقض النظرية(1.2.4).

(ث)

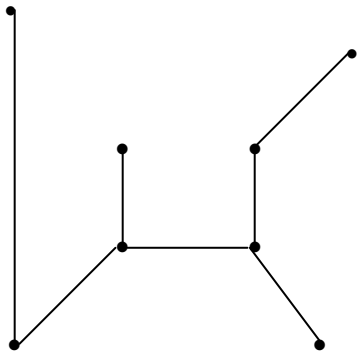


تدريب (4)

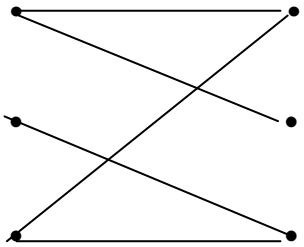
- ب العقدتان c و d هي العقدة b.
- أسلاف c هي b و a وأسلاف j هم e، c، b وa .
- أحفاد d هم h و i وأحفاد c هم g، f، e وj.
- أشقاء f هم e وg.
- العقدة الداخلية هي b,a ، c,d ، وe.
- عقد النهاية هي f، g، h، i وj.

تدريب (5)

حل المسألة(1) الشجرة الممتدة للرسم G هي



حل المسألة(2) الشجرة الممتدة للرسم G هي



مسرد المصطلحات

❁ **الشجرة الحرة** Free Tree

الشجرة الحرة هي رسم بسيط غير موجه له خاصية وجود مسار مفرد بين كل زوج من العقد.

❁ **الأشجار الثنائية** Binary Tree

الشجرة الثنائية هي شجرة ذات جذر تكون لكل عقدة فيها إما ابن يسار، أو ابن يمين، أوابنان على اليمين واليسار أو ليس لديها ابن (أي ورقة).

❁ **شجرة البحث الثنائية** Binary Search Tree

شجرة البحث الثنائية هي الشجرة الثنائية T التي يتم فيها تخصيص بيان لكل عقدة. يتم ترتيب البيانات بحيث يكون لكل عقدة v في T البيان على يسار (يمين) الشجرة الفرعية للعقدة v أقل من (أو أكبر من) البيان المخصص للعقدة v.

❁ **الشجرة الممتدة** Spanning Tree

هي شجرة تشتمل على كافة العقد الموجودة في الرسم G .

الوحدة الخامسة
نماذج الشبكة وشبكات بتري

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	137
تمهيد	137
أهداف الوحدة	138
1. نماذج الشبكة	**139**
1.1 التدفق	**140**
2. خوارزمية التدفق الأقصى	**149**
1.2 خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على شبكة	**153**
3. شبكات بتري	**162**
الخلاصة	169
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	171
إجابات التدريبات	172
مسرد المصطلحات	174

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة الخامسة من مقرر " الرياضيات المتقطعة2"، وموضوعها " نماذج الشبكة وشبكات بتري "القسم الأول من الوحدة يتناول نماذج الشبكة ، وفيه تعريف لشبكة النقل ، والتدفق في الشبكة.

القسم الثاني من الوحدة يبحث في خوارزمية التدفق الأقصى، حيث سنتعرف على خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على الشبكة.

القسم الثالث من الوحدة يتناول شبكات بتري وهي نماذج رسومية يمكن استخدامها لنمذجة ودراسة المعالجة المتزامنة .

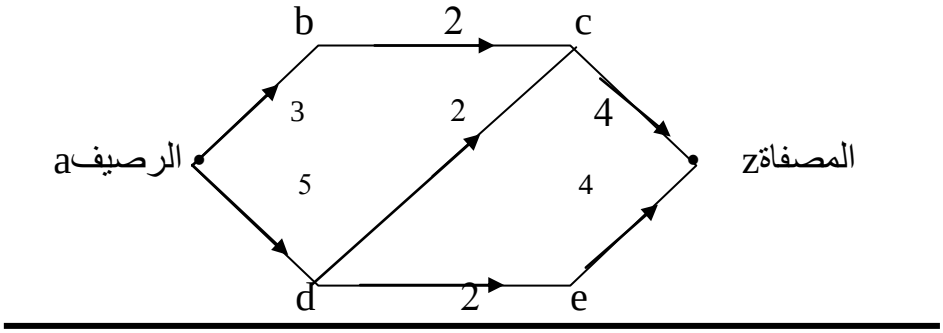
أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تعرف** شبكة النقل.
- **تنمذج** بعض الأنظمة كشبكة نقل.
- **تذكر** خطوات خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على شبكة.
- **تستخدم** خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى لإيجاد التدفق الأقصى لشبكة.
- **تعطي** أمثلة لشبكة بتري لها تعليم آمن ولكنه ليس حياً.
- **تحل** مسائل لشبكة بتري لها تعليم مقيد ولكنه ليس آمناً.

1. نماذج الشبكة Network Model

عزيزي الدارس، الشكل(1.1.5) يمثل شبكة أنابيب نفط، حيث يتم تحميل النفط من الرصيف a ويتم ضخه عبر الشبكة إلى المصفاة z. العقد e , d , c , b تمثل محطات ضخ وسطية، الحدود (edges) الموجة تمثل خطوط أنابيب فرعية وتبين اتجاه تدفق النفط. القيم أو الأوزان المعطاة للحدود تبين سعة أو قدرة خطوط الأنابيب الفرعية.



الشكل(1.1.5)
الرسم G

إن مثل هذا الرسم يسمى شبكة نقل (Transport Network). إذن فإن شبكات النقل بشكل عام يمكن التعبير عنها كرسم موجهة بأوزان.

عزيزي الدارس ،،،

إن المسألة التي سنناقشها في هذا البند من الوحدة هي إيجاد طريقة لجعل التدفق أقصى ما يمكن من الرصيف (المصدر) إلى المصفاة (المصب). وكيف يمكن حساب قيمة هذا التدفق الأقصى.

1.1.5 تعريف: إن شبكة النقل أو الشبكة (Network) هي رسم بسيط، موجه وموزون (مقيّم) G يتصف بالآتي:

– به عقدة واحدة فقط تسمى المصدر (Source) ليس لها حدود داخلة (incoming edges).

– به عقدة واحدة فقط تسمى المصب (sink) ليس لها حدود خارجة (outgoing edges).

– به الوزن او القيمة C_{ij} للحد الموجّه (i , j) والتي تسمى سعة (أو قدرة) عبارة عن عدد غير سالب.

– الرسم غير الموجة الناتج عن إزالة الاتجاهات الموجودة على الحدود هو رسم مترابط.

مثال(1.1.5) : الرسم G في الشكل (1.1.5) أعلاه هو شبكة نقل. المصدر هو العقدة a والمصب هو العقدة z. سعة أو قدرة الحد (a , b) ويرمز لها بالرمز C_{bc} هي 3 وسعة الحد (b , c) هي $C_{bc}=2$. وهكذا لكل الحدود سعة غير سالبة. وإذا أزلنا الاتجاه من كل الحدود فإن الناتج هو رسم مترابط.

1.1 التدفق (Flow)

عزيزي الدارس،

إن التدفق في الشبكة هو عملية يترتب عليها تخصيص وزن (قيمة) كل حد موجه في الشبكة بحيث لا يتعدى ذلك الوزن سعة ذلك الحد.

إن هذا التعريف للتدفق يفترض بالضرورة أن يكون التدفق على العقدة v (التي ليست المصدر أو المصب) مساوياً للتدفق الخارج من v. التعريف التالي يعرف التدفق رياضياً.

تعريف (3.1.5)

دع G تكون شبكة نقل و C_{ij} ترمز لقدرة الحد الموجه (i , j). التدفق F في الرسم G سيخصص لكل حد موجه (i , j) عدد غير سالب F_{ij} بحيث:

(أ) $F_{ij} <= C_{ij}$

(ب) لكل عقدة j في G والتي لا تمثل المصدر او المصب،

$$\sum_i F_{ij} = \sum_i F_{ji}$$

حيث تحسب عملية الجمع الأولى لكل الحدود الموجة في الرسم G التي تأخذ الشكل (i , j) حيث i متغير و j ثابت، وتحسب عملية الجمع الثانية لكل الحدود الموجة في الرسم G التي تأخذ الشكل (j , i)حيث i متغير و j ثابت. يسمى F_{ij} التدفق في الحد (i ,

j)، وفي كل عقدة j يسمى حاصل الجمع $\sum_i F_{ij}$ بالتدفق الداخل للعقدة j ويسمى حاصل الجمع $\sum_i F_{ji}$ بالتدفق الخارج من العقدة j.

مثال(2.1.5) : إذا كانت شبكة النقل هي الرسم G في الشكل (1.1.5) فإن التخصيص :

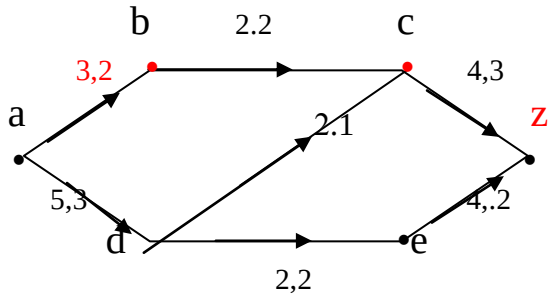
$$F_{ab} = 2 \ , \ F_{bc} = 2 \ , \ F_{cz} = 3$$
$$F_{ad} = 3 \ , \ F_{dc} = 1 \ , \ F_{de} = 2 \ , F_{ez} = 2$$

يعرف تدفقاً للشبكة G. كمثال فإن التدفق الداخل للعقدة d هو $F_{ad} = 3$

وهو مساوٍ للتدفق الخارج من العقدة d وهو

$$F_{dc} + F_{de} = 1 + 2 = 3$$

الرسم التالي في الشكل (2.1.5) يوضح الرسم G بإستخدام التدفق المعرف أعلاه وقد تم تمييز كل حد بالرمز x , y حيث x سعة الحد و y هي التدفق على الحد.



الشكل (2.1.5)

نلاحظ من الرسم ان التدفق الخارج من المصدر a هو

$$F_{ab} + F_{ad}$$

وهو مساوٍ للتدفق الداخل للمصب z وهو

$$F_{cz} + F_{ez}$$

وكل منهما قيمته هي 5.

النظرية التالية تبين أن التدفق الخارج من المصدر يكون دائماً مساوياً للتدفق الداخل للمصب.

نظرية(1.1.5): إذا كان F هو تدفق في شبكة فإن التدفق الخارج من المصدر يكون مساوياً للتدفق الداخل للمصب، أي أن

$$\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$

الإثبات :

إذا كانت V هي مجموع العقد في الشبكة فإن

$$\sum_{j\in v} (\sum_{i\in v} F_{ij}) = \sum_{j\in v} (\sum_{i\in v} F_{ji})$$

وذلك لأن كلاً من حاصل الجمعين على طرفي المعادلة هو

$$\sum_{e\in E} F_e$$

حيث E هي مجموع الحدود في الشبكة

أي أن كلاً من حاصل الجمعين هو مجموع التدفقات الموجودة على كامل حدود الشبكة

حيث يمثل : $\sum_{J\in v} (\sum_{i\in v} F_{ij})$ مجموع التدفقات الداخلة لكل عقد الشبكة وهو مساوٍ من تعريف

الشبكة لمجموع التدفقات الخارجة لكل عقد الشبكة $\sum_{j\in v} (\sum_{i\in v} F_{ji})$

إذن :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j\in v} (\sum_{i\in v} F_{ij} - \sum_{i\in v} F_{ji}) \\ &= (\sum_{i\in v} F_{iz} - \sum_{i\in v} F_{zi}) + (\sum_{i\in v} F_{ia} - \sum_{iv} F_{ai}) \\ &\quad + \sum_{j\in v} (\sum_{i\in v} F_{ij} - \sum_{i\in v} F_{ji}) \\ &\quad j \neq a , z \\ &= \sum_{i\in v} F_{iz} - \sum_{i\in v} F_{ai} \end{aligned}$$

وذلك لأن $\sum_{i\in v} F_{zi}$ هي مجموع التدفقات الخارجة من المصب وهي تساوي 0 و $\sum_{i\in v} F_{ia}$ مجموع التدفقات الداخلة للمصدر وهي تساوي 0 وأيضاً $(\sum_{i\in v} F_{ij} - \sum_{i\in v} F_{ji})$ يساوي صفر من التعريف(3.1.5) إذا كانت j ليست هي المصدر او المصب .

إذن $\sum_{i\in v} F_{iz} = \sum_{i\in v} F_{ai}$

عزيزي الدارس ،

على ضوء النظرية اعلاه يمكن أن نقدم التعريف التالي:

تعريف (4.1.5):

إذا كانت F هي تدفق في الشبكة G فإن

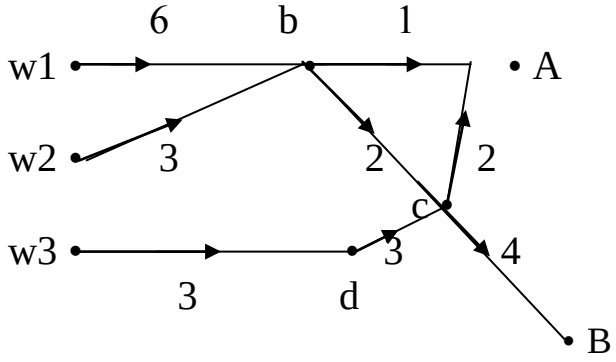
$$\sum_{i} F_{ai} = \sum_{i} F_{iz}$$

تسمى قيمة التدفق F .

مثال (3.1.5) : إن قيمة التدفق F في المثال (2.1.5) أعلاه هي 5.

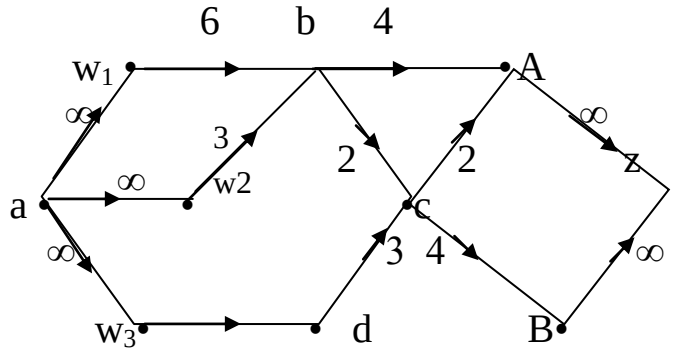
مثال (4.1.5) : الرسم G أدناه يمثل شبكة لضخ المياه للمدينتين A و B، تضخ المياه من ثلاثة آبار هي w_1 و w_2 و w_3. سعة الأنظمة الوسطية موضحة على حدود الرسم. العقد b , c و d تمثل محطات ضخ وسطية .

كيف نمّذج هذا النظام كشبكة نقل ؟



الحل :

إن الرسم G أعلاه هو رسم يشابه شبكة النقل ولكنه ليس شبكة نقل وذلك لوجود العديد من المصادر والمصبات. يمكننا إنشاء شبكة نقل مكافئة للرسم G وذلك بضم المصادر الثلاثة في مصدر اكبر وضم المصبين في مصب اكبر كما يوضح ذلك الرسم التالي:-



الرمز ∞ يعبر عن سعة لا نهائية

مثال (5.1.5):

من الممكن الذهاب من المدينة A إلى المدينة C مباشرة او عن طريق الذهاب للمدينة B أولاً. في الفترة المسائية من الساعة 6:00 إلى الساعة 7:00 تستغرق الرحلة من A إلى C الزمن الآتي:

A ⟵ B 15 دقيقة

B ⟵ C 30 دقيقة

A ⟵ C 30 دقيقة

السعة القصوى للثلاثة مسارات على النحو التالي:

A ⟵ B 3000 مركبة

B ⟵ C 2000 مركبة

A ⟵ C 4000 مركبة

مثّل تدفق الحركة من A الى C في الفترة من 6:00 – 7:00 مساءً كشبكة؟ .

الحل :

عزيزي الدارس ،

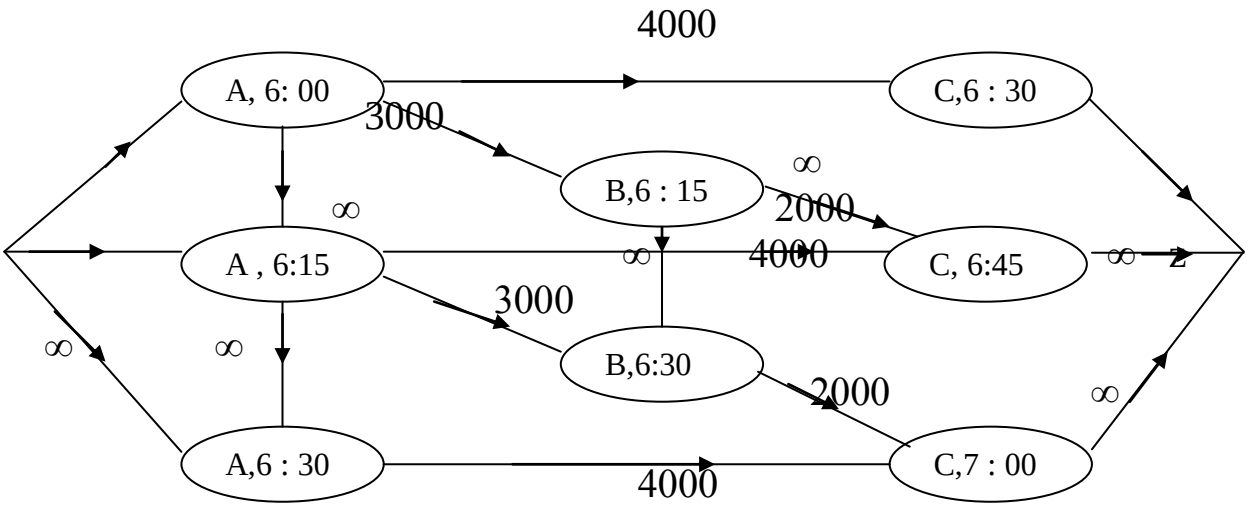
سنقوم بتمثيل المدن الثلاثة في زمن محدد كعقد في الرسم، الحدود تربط ما بين المدينة x في الزمن t_1 مع المدينة y في الزمن t_2 إذا كان من الممكن أن ننتقل من المدينة x في الزمن t_1 ونصل إلى المدينة y في الزمن t_2. وتمثل سعة الحد سعة المسار.

ولأننا سنمثل العقد كمدن في أزمان محددة فإن المدينة A سنمثلها بثلاثة عقد هي A, 7:00 , A, 6:15 , A ,6:00 وذلك لأن المطلوب هو تمثيل الحركة في الفترة من 6:00 إلى 7:00 مساءً . وأن أقصر زمن للانتقال من A الى C يستغرق 30 دقيقة. (أي إن أي مركبة تتحرك من A بعد الساعة 6:30 لن تصل الى C قبل الساعة 7:00). ان تمثيل المدينة A بثلاثة عقد سيترتب عليه تمثيل المدينة B بعقدتين و المدينة C بثلاثة عقد .

ولكي تكون الشبكة شبكة نقل فإننا سنستخدم عقدتين a و z الأولى كمصدر اكبر والثانية كمصب أكبر. الحدود التي تربط المصدر الأعلى بالمدينة A (المصدر الأولى) ستكون لها سعة لا نهائية، وكذلك الحدود التي تربط المصب الأكبر بالمدينة C (المصب الأولى) ستكون لها سعة لا نهائية.

الحدود التي تربط ما بين العقد المعبرة عن المدينة A في أزمان مختلفة وتلك التي تربط ما بين العقد المعبرة عن المدينة B في أزمان مختلفة تكون سعتها لا نهائية وهي تعبر عن أي عدد من المركبات يمكن أن ينتظر في المدينة A أو B .

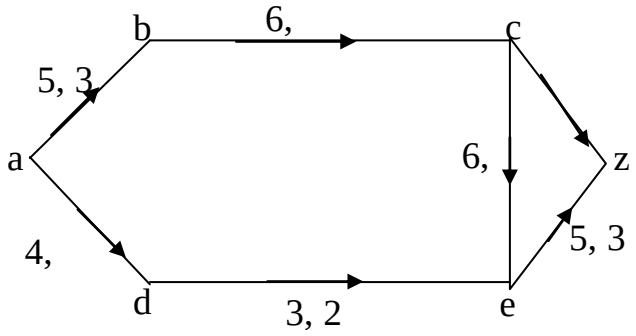
الرسم التالي يوضح تمثيل تدفق الحركة كشبكة نقل:


4000
A, 6: 00
C,6 : 30
3000
B,6 : 15
∞
2000
∞
A , 6:15
∞
4000
C, 6:45
∞
3000
∞
∞
B,6:30
2000
∞
A,6 : 30
C,7 : 00
4000

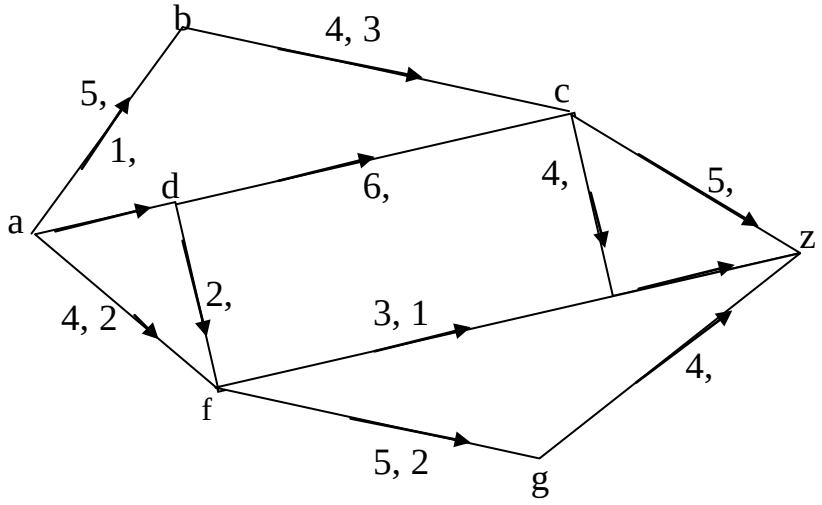
تدريب (1)

في الرسوم التالية أملأ التدفقات الناقصة على الحدود لتكون النتيجة وجود تدفق على الشبكة ثم أوجد قيمة التدفق .

أ/

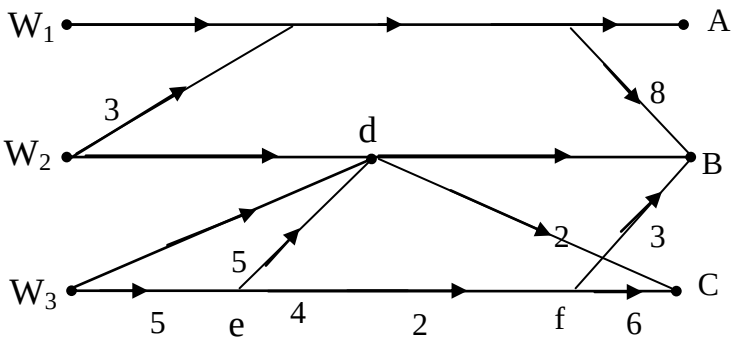


ب/



تدريب (2)

نمذج النظام التالي كشبكة نقل مفترضاً أن الآبار w_1 , w_2 , w_3 يمكنها أن تضخ كحد أقصى 2 ، 4 ، 7 وحدات على التوالي .



2. خوارزمية التدفق الأقصى

عزيزي الدارس ،،،

إذا كانت G هي شبكة نقل فإن التدفق الأقصى في G هو التدفق ذو القيمة العظمى. بشكل عام تكون هنالك العديد من التدفقات لها نفس القيمة العظمى. في هذا من الفصل سنعطي خوارزمية لإيجاد التدفق الأقصى.

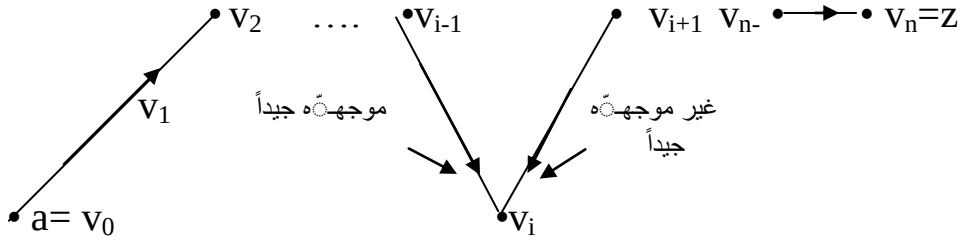
إن الفكرة الأساسية للخوارزمية بسيطة، اذ يجب علينا أن نبدأ بأي تدفق أولى ثم نزيد من قيمة التدفق ثم نكرر العملية حتى تصبح زيادة قيمة التدفق غير ممكنة. ويكون آخر تدفق هو التدفق الأقصى.

يمكننا أن نعتبر التدفق الأولى هو التدفق الذي يكون فيه التدفق على كل حد في الرسم صفراً، ولزيادة قيمة التدفق علينا البحث عن مسار من المصدر إلى المصب وزيادة التدفق على ذلك المسار.

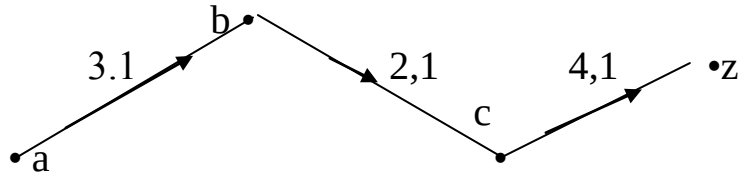
إذا رمزنا للمسار من a الى z في الرسم G بوصفه رسماً غير موجه بالرمز

$$p = (v_0 , v_1 , \dots , v_n) , v_0 = a, v_n = z$$

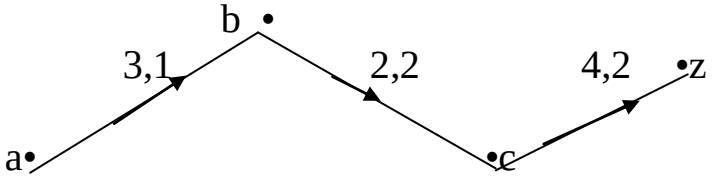
إذا تم توجيه الحد e في p من العقدة v_{i-1} إلى العقدة v_i فإننا نقول إن e موجّه بشكل صحيح بالنسبة للمسار p غير ذلك نقول إن e غير موجه بشكل بالنسبة للمسار p . انظر الرسم التالي :



إذا أمكننا العثور على مسار p من المصدر إلى المصب فيه كل الحدود موجهة بشكل صحيح والتدفق على كل حد أقل من سعة الحد فيصبح من الممكن زيادة قيمة ذلك التدفق. كمثال إذا كان لدينا المسار من a إلى z الموضح على الرسم التالي:

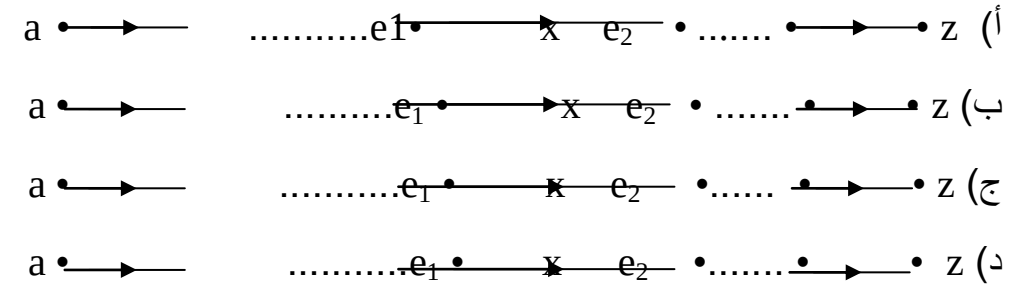


ففيه كل الحدود موجهة بشكل صحيح وقيمة في هذا المسار يمكن زيادتها بواحد كما في الرسم التالي :



إن عملية زيادة قيمة التدفق لا تتطلب بالضرورة أن تكون كل حدود المسار موجهة بشكل صحيح، فمن الممكن زيادة قيمة التدفق على المسار حتى وإن احتوى على بعض الحدود الموجهة بشكل غير صحيح .

الرسم التالي يوضح الاحتمالات الأربعة الممكنة لتوجيه الحدود عند العقدة x في المسار p ما بين المصدر a والمصب z.



في الحالة (أ) نجد أن الحدين موجهان بشكل صحيح، وفي هذه الحالة إذا زدنا التدفق على كل حد بالقيمة Δ فإن التدفق الداخل للعقدة x سيظل مساوياً للتدفق الخارج منها.

في الحالة (ب) إذا قمنا بزيادة التدفق على الحد e_2 بالقيمة Δ فيجب علينا إنقاص التدفق على الحد e_1 بالقيمة Δ حتى يظل التدفق الداخل للعقدة x مساوياً للتدفق الخارج منها

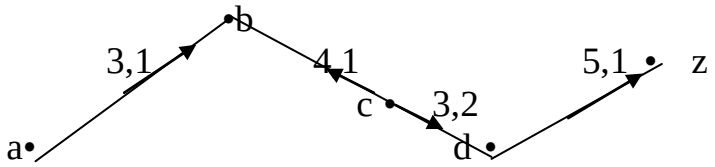
في الحالة (c) الوضع مماثل للحالة (b) سوى ان الزيادة ستكون على الحد e_1 والنقصان على الحد e_2 .

في الحالة (d) علينا إنقاص التدفق على الحدين بالقيمة Δ.

للتعامل مع هذه الحالات المختلفة علينا التأكد من أن التدفق على الحدود الموجهة بشكل صحيح أقل من سعة تلك الحدود وأن التدفق على الحدود الموجهة بشكل غير صحيح مقدار غير سالب.

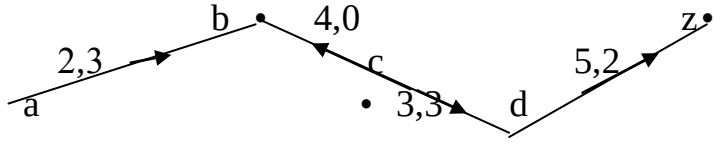
مثال(1.2.5): في هذا المثال سنبين كيف يمكننا زيادة قيمة التدفق على المسار الذي يحتوي على حدود موجهة بشكل غير صحيح .

فإذا كان لدينا المسار التالي :



فإن الحدود (a , b) ، (c , d) ، (d , z) موجهة بشكل صحيح بينما الحد (c , b) موجّة بشكل غير صحيح.

يمكننا إنقاص التدفق على الحد غير الموجهة بشكل صحيح بواحد وزيادة التدفق بواحد على الحدود الموجهة بشكل صحيح لنحصل على التدفق التالي على المسار .



إن قيمة التدفق الجديد $\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$ = قيمته هي 2 وهي أعلى من قيمة التدفق الأول بواحد .

النظرية التالية تلخص النتائج المستمدة من المثال السابق.

نظرية (1.2.5): إذا كان P مسار من a إلى z في الشبكة G يتصف بالآتي

أ) لكل حد (i,j) موجّة بشكل صحيح في P

$$F_{ij} < C_{ij}$$

ب) لكل حد (i,j) موجّة بشكل غير صحيح في P

$$F_{ij} > 0$$

وكانت $\Delta = \min X$

حيث X تحتوي على الأعداد $C_{ij} - F_{ij}$ للحدود (i , j) الموجهة بشكل صحيح في P وعلى F_{ij} للحدود (i,j) الموجهة بشكل غير صحيح في P فإذا عرفنا

$$F_{ij}^{*} = \begin{cases} F_{ij} & \text{إذا كان الحد (i,j) ليس في P} \\ F_{ij} + \Delta & \text{إذا كان الحد (i,j) موجهة بشكل صحيح في P} \\ F_{ij} - \Delta & \text{إذا كان الحد (i,j) موجهة بشكل غير صحيح في P} \end{cases}$$

فإن *F هو تدفق قيمته أكبر من قيمة التدفق F بالمقدار Δ.

الآن اعتمادا على النظرية أعلاه يمكننا صياغة خوارزمية لإيجاد التدفق الأقصى لشبكة.

إن الخطوط العامة لهذه الخوارزمية هي :

- ابدأ بأي تدفق (كمثال التدفق الذي يكون فيه التدفق على كل حد هو 0)
- ابحث عن مسار يحقق شروط المسار الواردة في النظرية .

إذا لم يكن هنالك مسار محققاً للشروط توقف فالتدفق الموجود حالياً هو التدفق الأقصى.

- إذا كان المسار المحقق للشروط موجوداً زد التدفق بالمقدار Δ كما معرف في النظرية وعد للخطوة 2 .

الصيغة الرياضية للخوارزمية نوردها فيما يلي :

1.2 خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على شبكة

عزيزي الدارس،

إذا افترضنا ان G شبكة لها المصدر a والمصب z والسعة C وان السعة على كل حد هي قيمة غير سالبة وان عقد الشبكة مرتبة على النحو التالي $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ فإن خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على الشبكة G هي :

أ- اجعل$F_{ij} = 0$ لكل الحدود (i,j) في الشبكة G .

ب- ميز العقدة a بالرمز (∞) .

ج- إذا كان المصب z مميز انتقل للخطوة (6) .

د- اختر عقدة لم يتم اختبارها مسبقاً والمميزة بالرمز v_i حيث i هو أصغر فهرس. إذا لم تكن مثل هذه العقدة موجودة. توقف فالتدفق الحالي هو التدفق الأقصى. أما إذا كانت مثل هذه العقدة موجودة فاجعل $v = v_i$.

هـ- اجعل (∞،Δ) هو مميز للعقدة v ثم اختبر كل الحدود على صورة (v , w) و(v و w) [على الترتيب التالي (v,v_0) ، (v_0,v) ، (v,v_1) ، (v_1,v) ،.....] حيث w عقدة غير مميزة مسبقاً .

إذا عثرنا على الحد (v,w) وكانت $F_{vw} < C_{vw}$ فميز العقدة w بالمميز (C_{vw} , v, min {Δ– F_{vw}})

أما إذا كانت $F_{vw} = C_{vw}$ فميز العقدة w بالمميز (v, min {Δ,F_{wv}})

وإذا كانت $F_{wv} = 0$ فلا تميز العقدة w وعد للخطوة 3.

و- اجعل (γ,Δ) مميز للعقدة z واجعل $w_0 = z$ و $w_1 = \gamma$. اذا كان مميز العقدة w_i هو(Δ , γ) فاجعل $w_{i+1} = \gamma$ وكرر العملية حتى تصبح $w_k = a$. الآن المسار

$$P = a\ w_k , w_{k-1} , \ldots . w_1 , w_0 = z$$

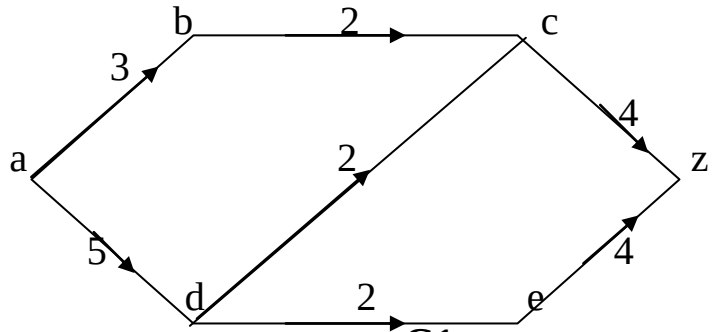
هو مسار من a الى z غير أو بدل التدفق على P على النحو التالي:

إذا كان الحد e على المسار p موجة بشكل صحيح ذد التدفق على e بالمقدار Δ، أما إذا كان e موجة بشكل غير صحيح فأنقص التدفق على e بالمقدار Δ .

أمسح كل المميزات الموجودة على العقد وارجع للخطوة (2).

المثالان التاليان يوضحان كيفية استخدام الخوارزمية أعلاه في إيجاد التدفق الأقصى على الشبكة .

مثال(2.2.5) استخدم خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى لإيجاد التدفق الأقصى للشبكة التالية :

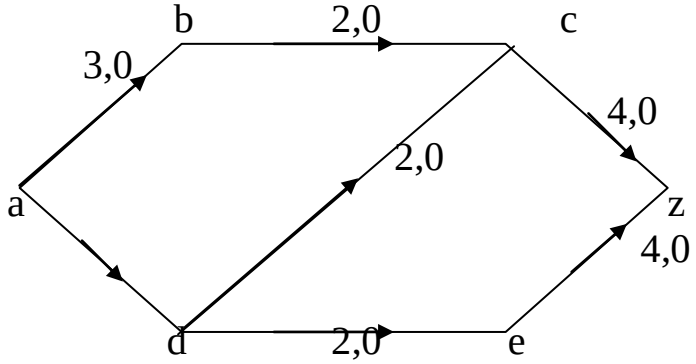


G1

الحل:

أولاً سنقوم بترتيب العقد على النحو التالي a , b , c ,d , e, z.

✓ التدفق الأولى هو 0 على كل الحدود. كما يوضح ذلك الرسم التالي :



G2

سنميز المصدر a بالرمز (∞ ,ـ)

✓ المصب z غير مميز.

✓ سنجد أن العقدة a هي العقدة الوحيدة المميزة حتى الآن والتي لم يتم اختبارها بعد، لذا سنجعل v=a.

✓ سنقوم باختبار العقد (a,b) و (a,d)

بالنسبة للحد (a,b) سنجد ان:

$$F_{ab} = 0 < C_{ab} = 3$$

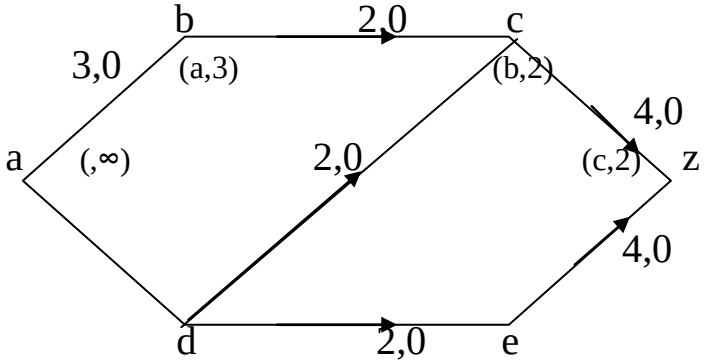
سنميز العقدة b بالمميز

$$(a, \min\{\infty ,3-0\}) = (a,3)$$

وبالمثل سنميز العقدة b بالمميز (a,5) ثم نعود للخطوة (3) وبما أن المصب غير مميز سنمر للخطوة (4) وعندها نجد ان اصغر عقدة مميزة ولم يتم اختبارها بعد هي b. في الخطوة (5) سنختبر الحد (b,c) وسنميزه بالرمز (b,2) لأن {3,2-0} min يساوي 2.

ثم نعود للخطوة (3) وبما ان المصب غير مميز سنمر للخطوة (4) وعندها نجد ان اصغر عقدة مميزة ولم يتم اختبارها بعد هي C.

في الخطوة (5) سنختبر العقدة (c,z) ونميز العقدة z بالرمز (c,2). الان يصبح الرسم على النحو التالي:



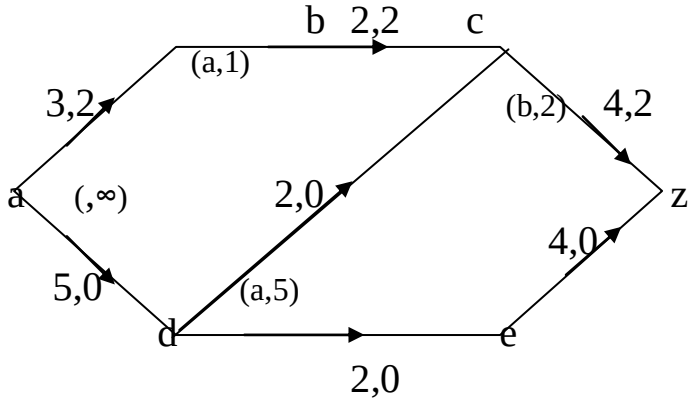
G3

الآن عند العودة للخطوة (3) سنجد ان z مميز لذا سننتقل للخطوة (6).

في الخطوة (6) سنجد ان المسار p هو

$$P = a , b , c , z$$

ولأن كل الحدود في المسار موجهة بشكل صحيح فإننا سنزيد التدفق على كل حد بالمقدار $\Delta = 2$ (ثم حساب قيمة Δ من مميز العقدة z وهو (2 , c)) والآن يصبح الرسم على النحو التالي :



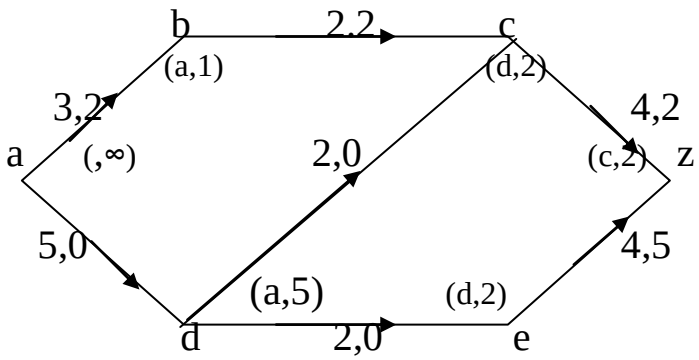
G4

الآن سنزيل كافة المميزات الموجودة على العقد ونعود للخطوة (2). في الخطوة (2) سنميز العقدة (a) بالرمز(∞ِ) وفي الخطوة (4) سنجد أن العقدة الوحيدة المميزة هي a وفي الخطوة (5) سنقوم بإختبار الحدود (a,b) و(a,d) وسنميز العقدة b بالرمز (a,1) والعقدة d بالرمز (a,5) ونعود للخطوة (3).

سنمر من الخطوة (3) للخطوة (4) وسنجد أن أصغر عقدة مميزة لم تختبر بعد بعد هي b. في الخطوة (5) سنخبر الحد (b,c) ولأن $F_{bc} = C_{bc}$ فإننا لن نميز العقدة C ونعود للخطوة (3) وسنمر منها للخطوة (4).

في الخطوة (4) سنجد أن أصغر عقدة مميزة لم تختبر بعد هي d وفي الخطوة (5) سنختبر الحدين (d,c) و (d,e) وسنميز العقدة c بالرمز (d,2) والعقدة e بالرمز(d,2) ثم نعود للخطوة (3) وبما أن المصب غير مميز سنمر للخطوة (4) وعندها نجد أن أصغر عقدة مميزة ولم يتم اختبارها بعد هي c .

في الخطوة (5) سنختبر العقدة (c,z) ونميز العقدة z بالرمز (c,2) الان يصبح الرسم على النحو التالي :



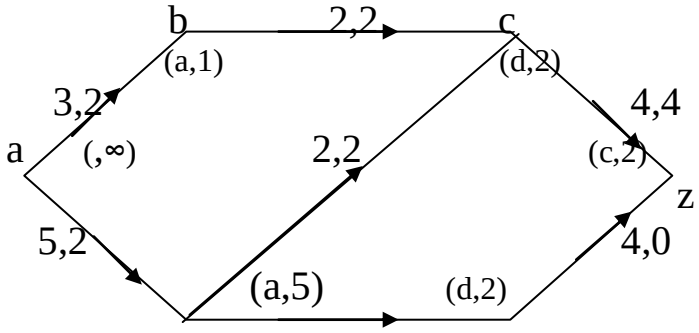
G5

الآن عند العودة للخطوة (3) سنجد أن z مميزاً لذا سننتقل للخطوة (6).

في الخطوة (6) سنجد ان المسار هو

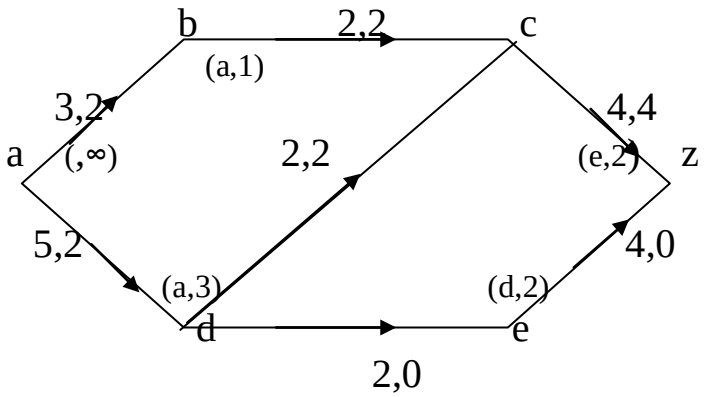
$$P = a , d , c , z$$

ولأن كل الحدود في المسار موجهة بشكل صحيح فإننا سنزيد التدفق على كل حد في المسار بالمقدار $\Delta = 2$ لنحصل على التدفق التالي :



G6

الآن سنزيل كافة المميزات الموجودة على العقد ونعود للخطوة (2) إذا كررنا تنفيذ الخوارزمية كما فعلنا أعلاه فعند الخطوة (5) وبعد تمييز المصب z سنحصل على الرسم التالي :

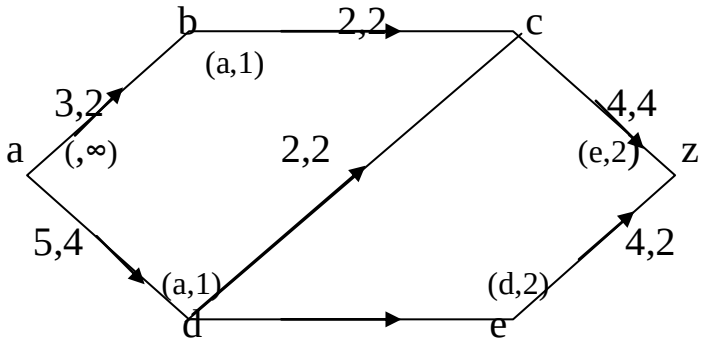


G7

وعند الخطوة (6) نحصل على المسار p

P = a , d , e , z

وبعد زيادة التدفق بالقيمة $\Delta = 2$ سنحصل على الرسم التالي :

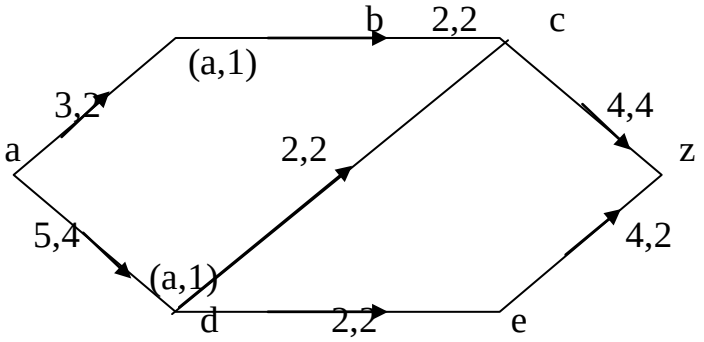


2,2

G8

الآن سنزيل كافة المميزات الموجودة ونعود للخطوة (2).

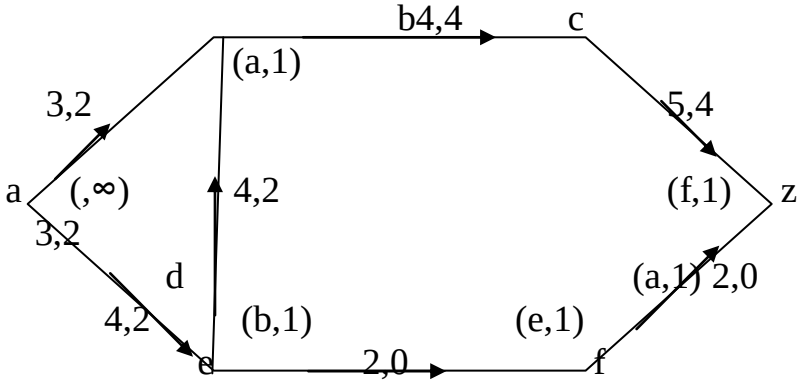
إن تكرار تنفيذ الخوارزمية للمرة الرابعة سيؤدي لتوقفها عند الخطوة (4) لأنه عند حصولنا على الرسم التالي :



G9

سنجد أن كافة العقد المميزة قد تم اختبارها إذن فإن التدفق في الرسم G8 هو التدفق الأقصى

مثال (3.2.5) معطى التدفق في الشبكة G1 أدناه، استخدم خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى لإيجاد التدفق الأقصى على الشبكة .



G1

الحل : في الخطوة (1) من تطبيق الخوارزمية سنجعل التدفق المعطى على G1 هو التدفق الأولى.

سنمر عبر الخطوة (2) و (3) للخطوة (4).

في الخطوة (4) سنجد أن اصغر عقدة مميزة ولم تختبر بعد هي a في الخطوة (5) سنختبر الحدود (a,b) و(a,d) وسنميز كل من العقدتين b و d بالرمز (a,1) ونعود للخطوة (3) ونمر ثانية للخطوة (4).

في الخطوة (4) سنجد أن أصغر عقدة مميزة ولم تختبر بعد هي b في الخطوة (5) سنختبر (b,c) و(e,b) وسنجد ان العقدة c لا يمكن تمييزها لأن $F_{bc}=C_{bc}$.سنميز العقدة e بالرمز (b,1) لأن $\min \{1,F_{eb} = 2\}$ يساوي 1 ثم نعود للخطوة (3) .

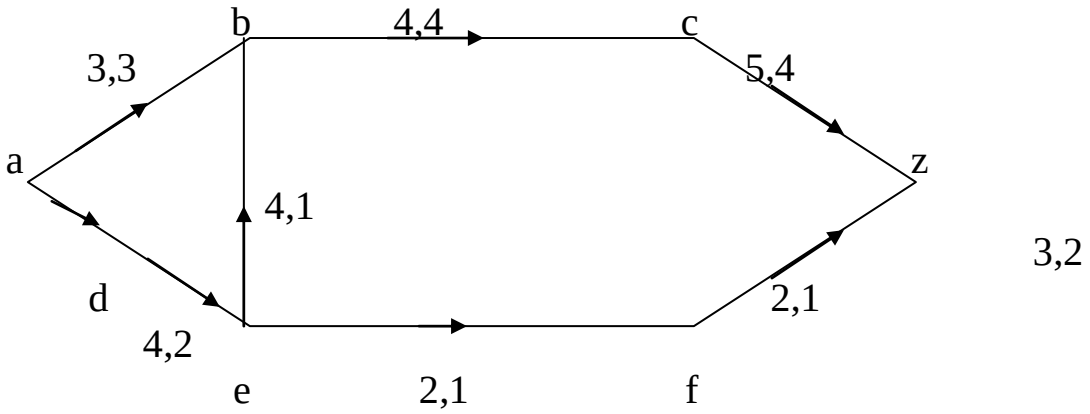
سنستمر في تطبيق الخطوات (4) و(5) حتى نميز المصب z كما هو الرسم G1.

في الخطوة (6) سنحصل على المسار

P= a , b , e , f , z

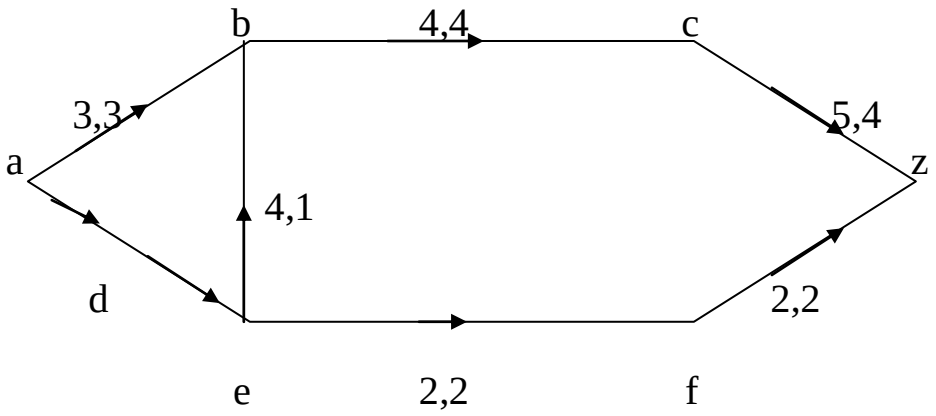
الحدود (a,b) , (e,f) و (f,z) على المسار p موجهة بشكل صحيح لهذا سنزيد التدفق عليها بالمقدار $\Delta=1$. ولأن الحد (e,b) موجّة بشكل غير صحيح سننقص التدفق على الحد بالمقدار $\Delta=1$.

سنحصل على الرسم G2 التالي:



G2

تطبيق الخوارزمية للمرة التالية سيعطينا التدفق الأقصى المبين في الرسم G3 التالي :

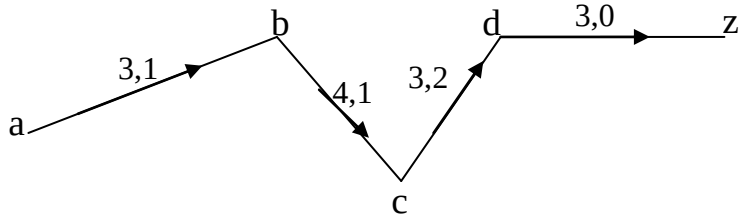


G3

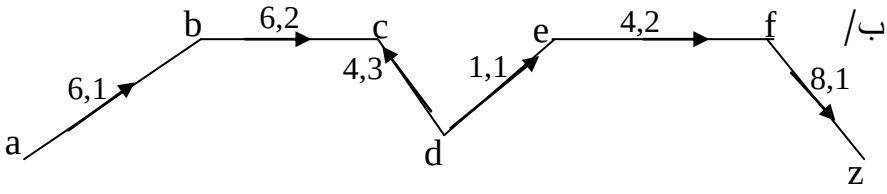
تدريب (3)

معطى المسارات التالية من a لى z في شبكة. أوجد الزيادة القصوى في التدفق التي يمكن الحصول عليها بتغيير التدفق على حدود المسار.

أ/



ب/



3. شبكات بتري(Petri Nets)

عزيزي الدارس ،

إن برامج الحاسوب تنفذ عادة من أعلى إلى أسفل، كمثال إذا احتوى برنامج على الجمل التالية :

```
A = 1
B = 2
C = 3
A = A+4;
B = A+C;
C = B+C;
```

فإن الجمل تنفذ من أعلى إلى أسفل، اذ تنفذ الجملة A = 1 أولاً ثم يليها تنفيذ الجملة B = 2 ثم C = 3 وهكذا .

منطقياً لا يوجد ما يمنع من أن تنفذ الجمل الثلاثة الأولى بشكل متزامن، أي في آن واحد لعدم اعتماد أي جملة منها على جملة أخرى .

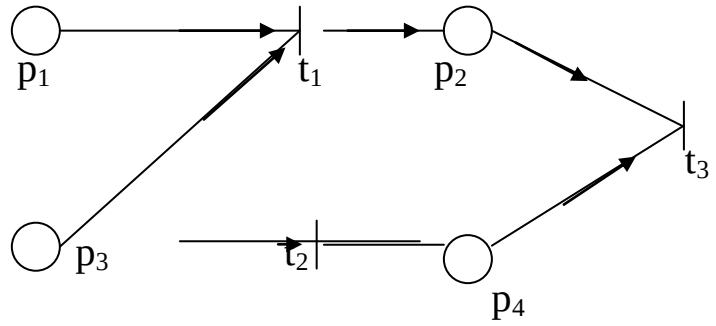
إن المعالجة المتزامنة للبرامج (Concurrent Processing) هي أمر مهم من اجل زيادة سرعة وفاعلية تنفيذ البرامج .

إن شبكة بتري هي نماذج رسومية يمكن استخدامها لنمذجة ودراسة المعالجة المتزامنة .

تعريف(1.3.5) : إن شبكة بتري هي رسم موجهة G= (V,E) حيث تتكون مجموعة العقد V من مجموعتين جزئيتين هما T , P بحيث تكون V= PUT و P∩T.

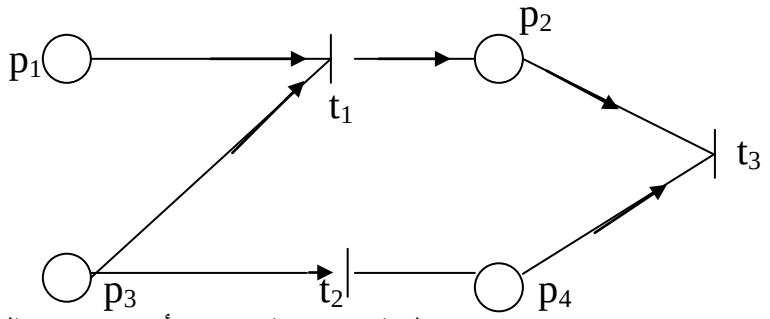
كل حد e في E يكون متعارضاً على عقدة في P وعقدة في T. تسمى مجموعة العقد P بالأماكن (Places) ومجموعة العقد بالمعاملات (Transactions) .

مثال(1.3.5): الرسم التالي هو مثال لشبكة بتري حيث تم رسم عقد الأماكن كدوائر"O" وعقد المعاملات كخطوط رأسية "|".



تعريف (2.3.5): إن معلمّة (Marking) شبكة بتري هو تخصيص عدد صحيح غير سالب لكل مكان في المجموعة P. إذا تم في معلمة ما تخصيص العدد n للمكان P فإننا نقول أن هنالك n علامة على P. يتم تمثيل العلامات كنقاط سوداء في المكان .

مثال(3.3.5):الرسم التالي هو لشبكة بتري معلمة

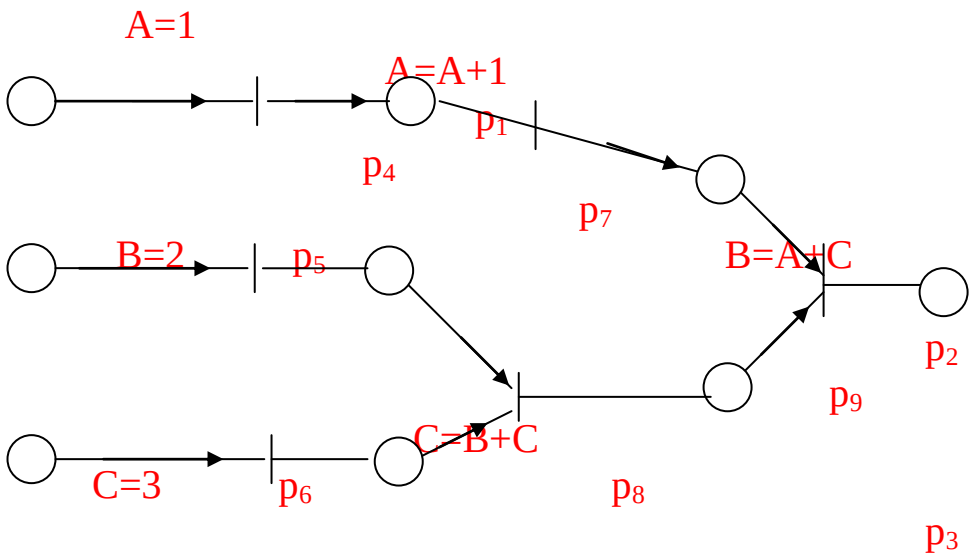


عند استخدام شبكة بتري كنموذج يعبر عن معالجة متزامنة فإن الأماكن P تمثل الشروط(Conditions) والمعاملات T تمثل الأحداث (Event) ووجود علامة واحدة على الأقل على مكان تعبر عن تحقق ذلك الشرط.

مثال(4.3.5) : الرسم G يمثل نمذجة لبرنامج الحاسوب التالي

A = 1
B = 2
C = 3
A = A+1;
B = B+C;
C = B+C;

حيث تمثل المعاملات T الجمل وتمثل الأماكن P الشروط اللازمة لتنفيذ الجملة :



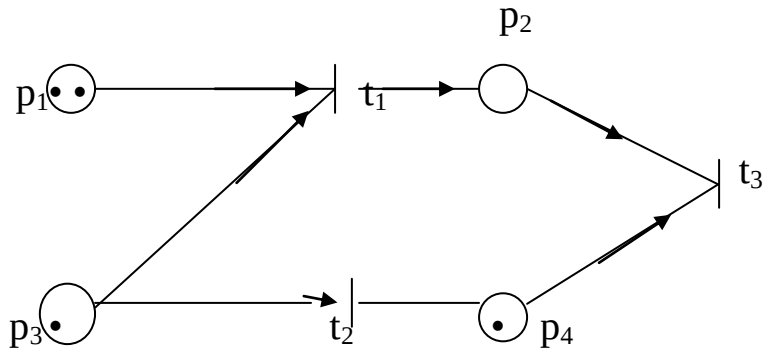
G

تعريف(3.3.5): إذا كان هنالك حد في شبكة بتري موجهّة من المكان p إلى المعاملة t فإننا نقول إن p مكان إدخال للمعاملة t وإذا كان الحد موجهّه من المعاملة t الى المكان p فنقول إن p مكان إخراج للمعاملة t .

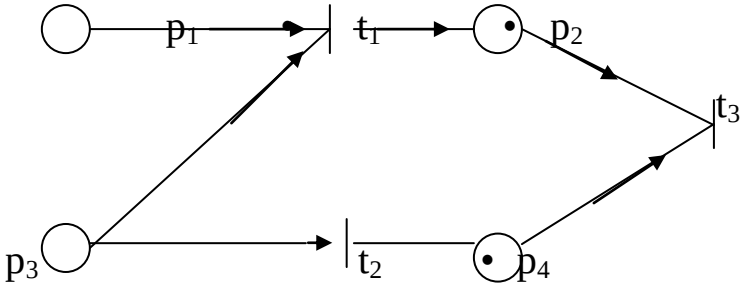
إذا كانت كل أماكن الإدخال للمعاملة t لها على الأقل علامة واحدة فإننا نقول ان المعاملة t منشطة (enabled).

إن المعاملات المنشطة يمكن أن تتم لها عملية إطلاق (Firing). تترتب على عملية الإطلاق إزالة علامة واحدة من كل أماكن الإدخال للمعاملة وإضافة علامة لكل أماكن الإخراج للمعاملة.

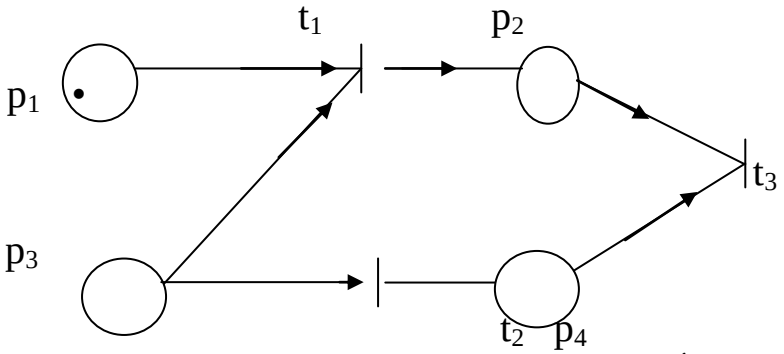
مثال(5.3.5) : في شبكة بتري التالية :



- الأماكن p_1 و p_3 هي أماكن إدخال للمعاملة t_1 .
- المعاملات t_1 و t_2 معاملات منشطة ولكن المعاملة t_3 غير منشطة .
- إذا قمنا بإطلاق المعاملة t_1 سنحصل على شبكة بتري التالية .



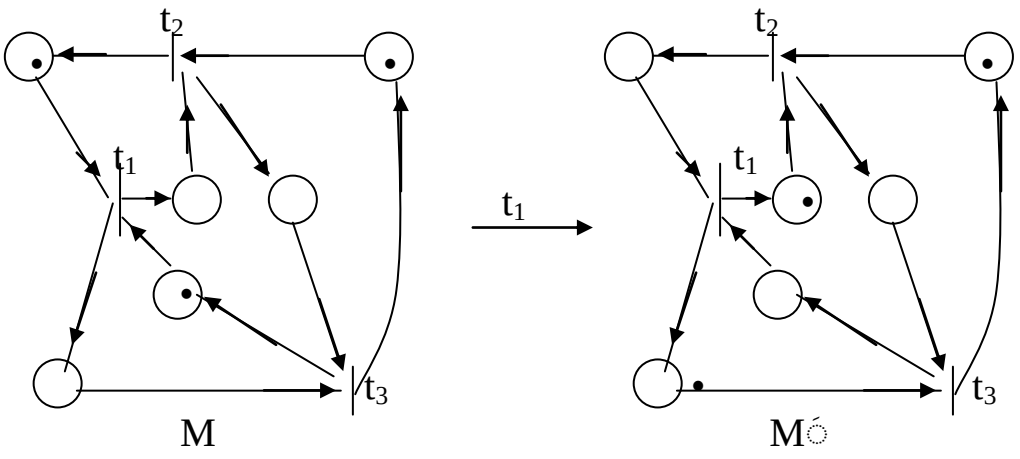
الآن تكون المعاملة t_3 منشطة وإذا قمنا بإطلاقها سنحصل على الشبكة التالية

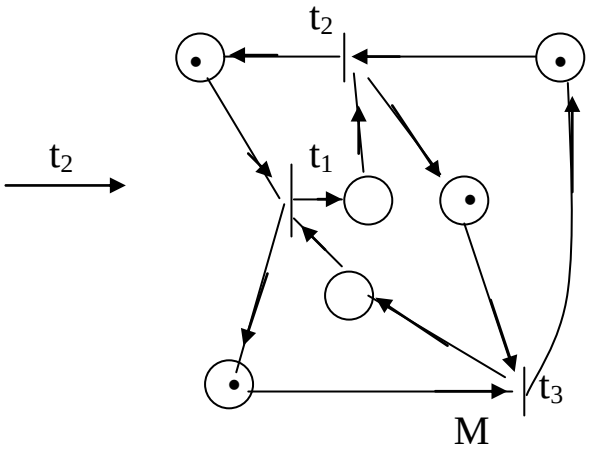


وهي شبكة ليست بها أي معاملة منشطة .

تعريف(4.3.5): إذا كان لدينا شبكة بتري معلمة فإننا نرمز لذلك التعليم بالرمز M. وإذا نتج تعليم جديد M′ كنتيجة لإطلاق مجموعة من المعاملات فإننا نقول إن M′ يمكن الوصول إليه من M.

مثال(6.3.5): الرسوم التالية توضح أن التعليم M″ يمكن الوصول إليه من التعليم M بإطلاق t_1 أولاً ثم t_2 .





إن عملية إطلاق المعاملة في النمذجة هو محاكاة لحدوث حدث محدد. والحدث لا يقع إلا إذا تحققت الشروط اللازمة لذلك، لهذا فعلى مستوى النمذجة لا تتم عملية الإطلاق لمعاملة إلا إذا كانت منشطة، أي أن الشروط اللازمة لإطلاق المعاملة مكتملة .

تعريف(5.3.5): التعليم (Marking) M على شبكة بتري هو تعليم حي إذا كان(وبغض النظر عن ترتيب الإطلاق) من الممكن إطلاق أي معاملة معطاة عبر إطلاق معاملات أخرى .

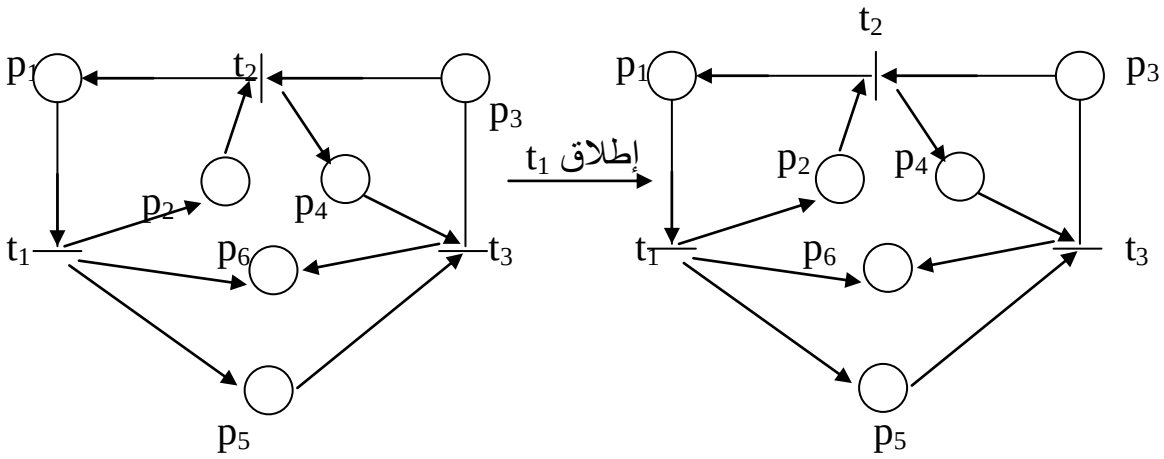
بناءً على هذا التعريف إذا كان التعليم M على شبكة بتري هو تعليم حي فبغض النظر عن ترتيب إطلاق المعاملات فإن الشبكة لن تعاني مما يعرف بالانغلاق (Deadlock). يقال إن شبكة بتري منغلقة إذا لم يكن من الممكن إطلاق أي معاملة.

مثال(7.3.5) : إن التعليم M المعطى في المثال(6.3.5) أعلاه هو تعليم حي. لأن المعاملة الوحيدة التي يمكن إطلاقها هي t_1 والتي أنتجت التعليم M' وكذلك فإن المعاملة الوحيدة التي يمكن إطلاقها في M' هي t_2 والتي أنتجت التعليم M'' . التعليم M'' يمكن ان يتم فيه إطلاق المعاملة t_3 والتي إذا تم إطلاقها تنتج التعليم الأولي M .
وبالتالي فإن أي ترتيب لإطلاق المعاملات t_3 , t_2 , t_1 سينتج احد التعليماتM , M' او M''. لهذا فإن التعليم M هو تعليم حي.

مثال(8.3.5) : التعليم الموجود على شبكة بتري في المثال(4.3.5) تعليم غير حي، لأنه بعد إطلاق المعاملة A=1 فسيكون من المستحيل إعادة إطلاقها مرة أخرى، أي لا يمكن بعد تنفيذ أي سلسلة من الإطلاق الوصول للتعليم الأولى .

تعريف(6.3.5): نقول ان التعليم M على شبكة بتري هو تعليم مقيد (Bounded)، إذا كان هنالك عدد صحيح موجب n يمثل الحد الأقصى للعلامات التي يمكن ان يأخذها أي مكان في الشبكة بغض النظر عن ترتيب الإطلاق .
وإذا كان التعليم M مقيد وكانت n=1 فإننا نقول ان التعليم M هو تعليم آمن (Safe)
M'', M',M

مثال(9.3.5) : إن التعليمات M , M' و M'' المعطاة في المثال (6.3.5) أعلاه هي تعليمات آمنة. بينما التعليم التالي تعليم غير آمن .



تدريب (4)

نمذج كل من البرامج التالية كشبكة بتري معلمة تمثل الوضع قبل تنفيذ البرنامج

أ/

```
A = 1
B = 2
C = A+B
C = C+1
```

ب/

```
A = 1
S = 0
10  S = S+A
A = A+1
GoTo  10
```

الخلاصة

عزيزي الدارس، لقد عرضت لك في هذه الوحدة الخامسة من مقرر "الرياضيات المتقطعة2" الموضوعات الأساسية التالية في دراسة نماذج الشبكة وشبكات بتري:

1) شبكة النقل أو الشبكة (Network) هي رسم بسيط، موجه وموزون (مقيّم) G يتصف بالآتي:

– به عقدة واحدة فقط تسمى المصدر (Source) ليس لها حدود داخلة (incoming edges).

– به عقدة واحدة فقط تسمى المصب (sink) ليس لها حدود خارجة (outgoing edges).

– به الوزن او القيمة C_{ij} للحد الموجّة (i , j) والتي تسمى سعة (أو قدرة) عبارة عن عدد غير سالب.

– الرسم غير الموجّة الناتج عن إزالة الاتجاهات الموجودة على الحدود هو رسم مترابط.

2) التدفق في الشبكة هو عملية يترتب عليها تخصيص وزن (قيمة) كل حد موجّه في الشبكة بحيث لا يتعدى ذلك الوزن سعة ذلك الحد.

إن هذا التعريف للتدفق يفترض بالضرورة أن يكون التدفق على العقدة v (التي ليست المصدر او المصب) مساوياً للتدفق الخارج من v. التعريف التالي يعرف التدفق رياضياً.

3) إذا كانت G هي شبكة نقل فإن التدفق الأقصى في G هو التدفق ذو القيمة العظمى. بشكل عام تكون هنالك العديد من التدفقات لها نفس القيمة العظمى.

إن الفكرة الأساسية للخوارزمية بسيطة، إذ يجب علينا أن نبدأ بأي تدفق أولى ثم نزيد من قيمة التدفق ثم نكرر العملية حتى تصبح زيادة قيمة التدفق غير ممكنة. ويكون آخر تدفق هو التدفق الأقصى.

4) خوارزمية إيجاد التدفق الأقصى على الشبكة G هي :

أ– اجعل$F_{ij} = 0$ لكل الحدود (i,j) في الشبكة G .

ب– ميز العقدة a بالرمز (∞) .

ج– إذا كان المصب z مميزاً انتقل للخطوة (6) .

د- اختر عقدة لم يتم اختبارها مسبقاً والمميزة بالرمز vi، حيث i هو أصغر فهرس. إذا لم تكن مثل هذه العقدة موجودة. توقف فالتدفق الحالي هو التدفق الأقصى. أما إذا كانت مثل هذه العقدة موجودة فاجعل v = vi .

هـ- اجعل (∞،Δ) هو مميز للعقدة v ثم اختبر كل الحدود على صورة (v , w و(v وw) [على الترتيب التالي (v,v0) ، (v0,v) ، (v,v1) ، (v1,v) ،.....] حيث w عقدة غير مميزة مسبقاً .

إذا عثرنا على الحد (v,w) وكانت Fvw < Cvw فميز العقدة w بالمميز (Cvw – , v, min {ΔFvw})

أما إذا كانت Fvw = Cvw فميز العقدة w بالمميز (v, min {Δ,Fwv})

وإذا كانت Fwv = 0 فلا تميز العقدة w وعد للخطوة 3.

و- اجعل (γ,Δ) مميزاً للعقدة z واجعل w0 = z و w1 = γ . اذا كان مميز العقدة wi هو (Δَ , γَ) فأجعل γ = wi+1 وكرر العملية حتى تصبح wk = a. الآن المسار P = a wk , wk-1 , ….. w1 , w0 = z

هو مسار من a الى z غير أو بدل التدفق على P على النحو التالي:

إذا كان الحد e على المسار p موجّة بشكل صحيح زد التدفق على e بالمقدار Δ، أما إذا كان e موجّة بشكل غير صحيح فأنقص التدفق على e بالمقدار Δ .

امسح كل المميزات الموجودة على العقد وارجع للخطوة (2).

5) شبكة بتري هي رسم موجهة G= (V,E) حيث تتكون مجموعة العقد V من مجموعتين جزئيتين هما P , T بحيث تكون V= PUT و P∩T.

كل حد e في E يكون متعارضاً على عقدة في P وعقدة في T. تسمى مجموعة العقد P بالأماكن (Places) ومجموعة العقد بالمعاملات (Transactions) .

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، في الوحدة التالية سندرس ما يسمى بالدوائر الموحدة (Combinatorial Circuits)، وهي دوائر لا ذاكرة لها. أي أن المخرج من الدائرة يعتمد كلياً على المدخلات الحالية وليس على مدخلات سابقة أو على حالة النظام. وسوف نتعرف على الجبر البوولي B هو نظام يشتمل على المجموعة S التي تحتوي على العناصر 1 و0 وعلى المؤثرات الثنائية + و∗ والتي تعمل على S والمؤثر الأحادي الذي يعمل على S.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

حل المسألة (1–أ):

(b,c) هي 6.3

(a,d) هي 4,2

(c,e) هي 6,1

(c,z) هي 5,2

قيمة التدفق هي 5

حل المسألة (1–ب):

(a.b) هي 5,3

(a,d) هي 1,1

(d,c) هي 6,0

(d,f) هي 2,1

(c,e) هي 4,1

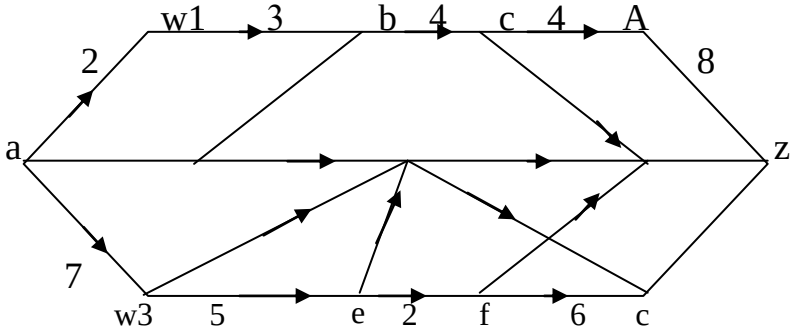
(g,z) هي 4,2

(c,z) هي 5,2

قيمة التدفق هي 6

تدريب (2)

نموذج النظام في المسالة كشبكة نقل هي:



تدريب (3)

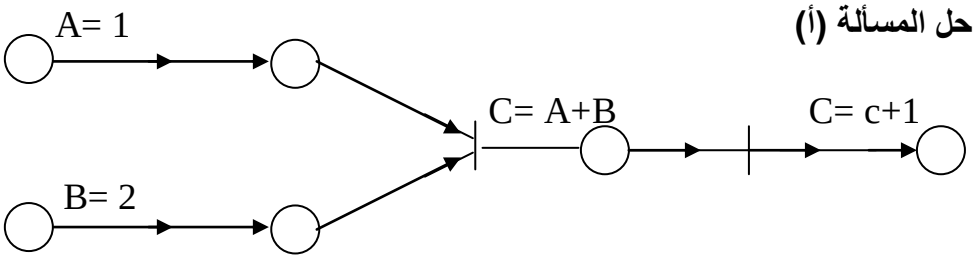
حل المسألة (1-أ):

الزيادة القصوى في التدفق هي 1.

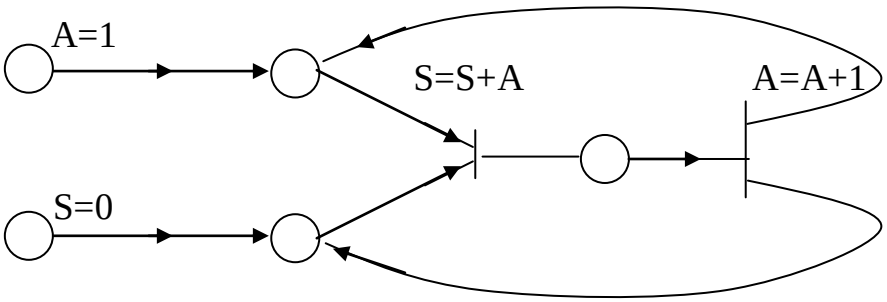
حل المسألة (1-ب) الزيادة القصوى في التدفق هي 1.

تدريب (4)

حل المسألة (أ)



حل المسألة (ب)



مسرد المصطلحات

❁ شبكة النقل أو الشبكة (Network)

هي رسم بسيط، موجه وموزون (مقيّم) G يتصف بالآتي:

– به عقدة واحدة فقط تسمى المصدر (Source) ليس لها حدود داخلة (incoming edges).

– به عقدة واحدة فقط تسمى المصب (sink) ليس لها حدود خارجة (outgoing edges).

– به الوزن أو القيمة Cij للحد الموجّه (i , j) والتي تسمى سعة (أو قدرة) عبارة عن عدد غير سالب.

– الرسم غير الموجّه الناتج عن إزالة الاتجاهات الموجودة على الحدود هو رسم مترابط.

❁ التدفق (Flow)

التدفق في الشبكة هو عملية يترتب عليها تخصيص وزن (قيمة) كل حد موجّه في الشبكة بحيث لا يتعدى ذلك الوزن سعة ذلك الحد.

❁ خوارزمية التدفق الأقصى

إذا كانت G هي شبكة نقل فإن التدفق الأقصى في G هو التدفق ذو القيمة العظمى.

❁ شبكة بتري Petri Nets

هي رسم موجهة G= (V,E)، حيث تتكون مجموعة العقد V من مجموعتين جزئيتين هما T , P بحيث تكون V= PUT و P∩T.

كل حد e في E يكون متعارضاً على عقدة في P وعقدة في T. تسمى مجموعة العقد P بالأماكن (Places) ومجموعة العقد بالمعاملات (Transactions) .

❁ معلمّة (Marking) شبكة بتري

هو تخصيص عدد صحيح غير سالب لكل مكان في المجموعة P. إذا تم في معلمة ما تخصيص العدد n للمكان P فإننا نقول أن هنالك n علامة على P. يتم تمثيل العلامات كنقاط سوداء في المكان .

الوحدة السادسة
الجبر البولي والدوائر الموحدة
Boolean Algebras and Combinational Circuits

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	178
تمهيد	178
أهداف الوحدة	179
1.الدوائر المجمعة	180
1.1 البوابات **OR , AND** و **NOT.**	181
2.1 تعريف الرسم الموجّه التحتي لدائرة	182
3.1 الدائرة المجمعة	183
4.1 ربط الدوائر المجمعة	185
5.1 سلوك الدائرة المجمعة	186
6.1 التمثيل الرمزي للدائرة المجمعة	187
7.1 التعبير البوولي	188
2. صفات الدوائر المجمعة	189
1.2 تساوي التعابير البوولية	191
2.2 الدوائر المجمعّة المتكافئة	191
3. الجبر البوولي	192
1.3 الجبر البوولي	192
4. **الدوال البوولية**	198
1.4 الدالة البوولية	199
5. **تطبيقات**	202
1.5 البوابة	202
2.5 التصميم الجيد للدائرة المجمعّة	205

3.5 دائرة نصف الجامع	209
4.5 الجامع الكامل	209
الخلاصة	**212**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**214**
إجابات التدريبات	**214**
مسرد المصطلحات	**217**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة السادسة من مقرر " الرياضيات المتقطعة2" وموضوعها " الجبر البولي والدوائر المجمعة" تبدأ الوحدة وفي قسمها الأول بالدوائر المجمعة، وفيها تجد تعريف البوابات NOT,OR,AND . ويتناول القسم أيضاً تعريف الرسم التحتي لدائرة، ثم تعريف الدائرة المجمعة. وستتعرف في هذا القسم على كيف تربط الدوائر المجمعة، وستتعرف على سلوك الدائرة المجمعة. ويتناول القسم كذلك التمثيل الرمزي للدائرة المجمعة، والتعبير البوولي.

القسم الثاني من الوحدة يتناول صفات الدوائر المجمعة، ويتناول القسم كذلك تساوي التعابير البوولية ، ويعرف القسم الدوائر المجمعةالمتكافئة .

القسم الثالث من الوحدة يبحث في الجبر البوولي ، يبدأ القسم بتعريف الجبر البوولي حيث يقدم القسم المسلمات الواجب تحقيقها لنطلق على الفئة غير الخالية B جبراً بولياناً.

القسم الرابع من الوحدة يبحث في الدوال البوولية وهي دوال تساعد في إنشاء الدوائر المجمعة، وفي القسم تجد تعريفاً للدوال البوولية ، يتناول القسم الدوال البوولية التي يعبر عنها بالجدول المنطقي ، وكذلك تجد في القسم تمثيل الدالة بالشكل العادي المتقطع للدالة.

القسم الخامس من الوحدة (تطبيقات) نبين فيه كيفية استخدام بوابات أخرى لتصميم الدائرة المجمعة، يبدأ القسم بتعريف البوابة، ثم يتناول تعريف مجموعة البوابات الكاملة وظيفياً ، ويتطرق القسم للتصميم الجيد للدائرة المجمعة، وتجد في القسم تعريف دائرة نصف الجامع ، وكذلك الجامع الكامل.

تجد في متن الوحدة العديد من التدريبات والأمثلة وأسئلة التقويم الذاتي، نأمل أن تؤدي دراستك لهذه الوحدة إلى إثراء فهمك وتعرفك للمفاهيم الأساسية في الجبر البولي والدوائر المجمعة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تعرف** الدوائر المجمعة.
- **تعرف** البوابات.
- **تحول** التعابير البوولية إلى دوائر مجمعة.
- **ترسم** الدوائر المجمعةالمقابلة للتعابير البوولية.
- **ترسم** الرسم الموجه التحتي للدوائر.
- **تحدد** الدوائر المتكافئة من بين عدد من الدوائر المجمعة.
- **تستخدم** قوانين الجبر البوولي لإيجاد الشكل العادي المتقطع لعدد من الدوال.
- **تصمم** دائرة مجمعة باستخدام البواباتOR, AND و NOT من الدالة البوولية.
- **تصمم** جامعاً كاملاً باستخدام عدد من البوابات.
- **تصمم** دائرة نصف جامع باستخدام البوابات.

توطئة

عزيزي الدارس،

إن أنظمة الحاسوب الرقمية مبنية على النظام العددي الثنائي، وهو النظام الذي يستخدم فقط الرقمين 1 و0. وهذا يعني أن كافة أنواع البيانات والبرامج التي يتعامل معها الحاسوب يتم تحويلها وتخزينها كسلاسل من الأرقام الثنائية أو البتات 1 و 0.

لقد تم استخدام العديد من الأجهزة عبر السنوات من اجل تخزين البتات في الحواسيب الرقمية، تم استخدام الدوائر الإلكترونية كوسيط يسمح لهذه الأجهزة بالاتصال يبعضها البعض، حيث يتم نقل رقم ثنائي (بت) في أحد أجزاء الدائرة إلى جزء آخر كجهد كهربي(Voltage). وبالتالي فإن مستويين من الجهد الكهربي مطلوبين لنقل الرقمين الثنائيين 1 و 0. أحدهما عالٍ لنقل البت1 والآخر منخفض لنقل البت 0.

1.الدوائر المجمعة(Combinatorial Circuits)

عزيزي الدارس ،

في هذا الوحدة سندرس ما يسمى بالدوائر المجمعّة(Combinatorial Circuits) وهي دوائر لا ذاكرة لها، أي أن المخرج من الدائرة يعتمد كلياً على المدخلات الحالية وليس على مدخلات سابقة او على حالة النظام. تنشأ الدوائر المجمعة من أجهزة تسمى بوابات (Gates) لها القدرة على تحويل مستويات الجهد الكهربائي(البتات).

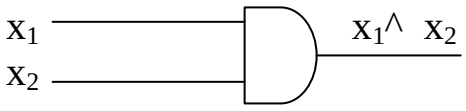
1.1 البوابات **AND , OR** و **NOT**.

إذا كانت x_1 و x_2 هي بتات:

تعرّف البوابة AND بأنها تستقبل x_1 و x_2 كمدخلات وتنتج مخرجاً يرمز له بالرمز x_1 ^ x_2 حيث :

$$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x_1 = 1 \text{ و } x_2 = 1 \\ 0 & \text{لغير ذلك} \end{cases}$$

وترسم البوابة AND كما في الشكل (1.6.أ)

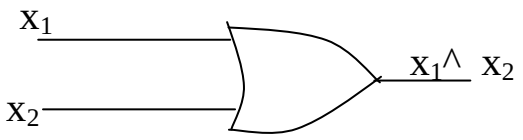


شكل(1.6.أ)

تعرّف البوابة OR بأنها تستقبل x_1 و x_2 كمدخلات وتنتج مخرجاً يرمز له بالرمز $x_1 \vee x_2$ ، حيث :

$$x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x_1 = 1 \text{ أو } x_2 = 1 \\ 0 & \text{لغير ذلك} \end{cases}$$

وترسم البوابة OR كما في الشكل (1.6.ب)

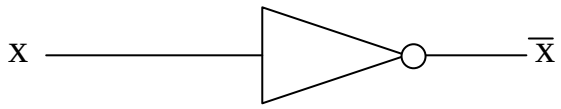


الشكل (1.6.ب)

تعرّف البوابة NOT بأنها تستقبل المدخل x ، حيث x بت وتنتج مخرجاً يرمز له بالرمز $\overline{x}$ ، حيث

$$\overline{x} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x=0 \\ 0 & \text{إذا كانت } x=1 \end{cases}$$

وترسم البوابة NOT كما في الشكل (1.6.ج)

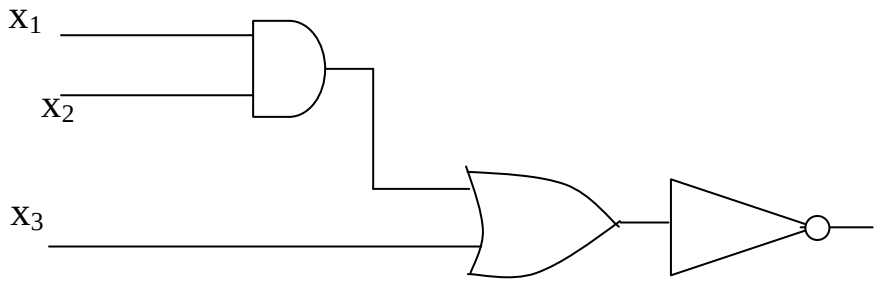


الشكل (1.6.ج)

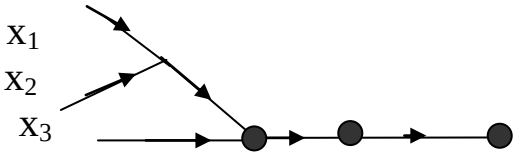
2.1 تعريف الرسم الموجّه التحتي لدائرة (Underlying Diagram of a Circuit)

عزيزي الدارس، إن الرسم الموجّه التحتي لدائرة هو الرسم الموجّه الذي يتم الحصول عليه من دائرة مجمّعة. تشتمل مجموعة العقد في هذا الرسم على: المدخلات، المخرجات، والبوابات في الدائرة. وتشمل مجموعة الحدود العلاقات بين هذه العقد، ويكون الحد e موجهاً من العقدة v إلى العقدة w إذا كان العنصران الممثلان بالعقدتين v و w مرتبطين بشكل مباشر حيث v هي مدخل لبوابة و w هي بوابة او v هي بوابة و w هي مخرج بوابة.

كمثال فإن الشكل (2.1.6) يبين دائرة والرسم الموجّه التحتي لها :



الدائرة



الرسم التحتي

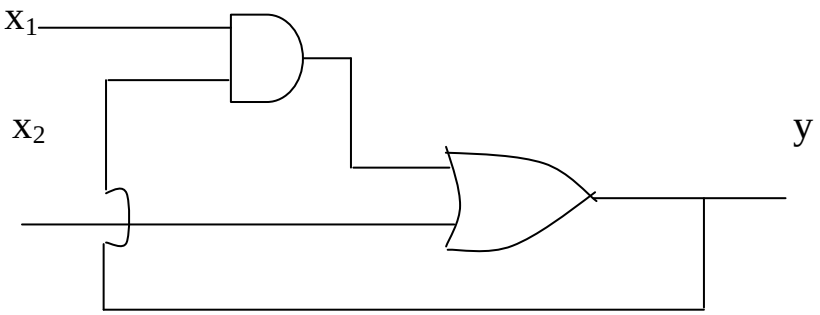
الشكل(2.1.6)

بناءً على تعريف البوابات وتعريف الرسم الموجّه التحتي للدائرة نقدم الآن تعريفاً رسمياً للدائرة المجمعة.

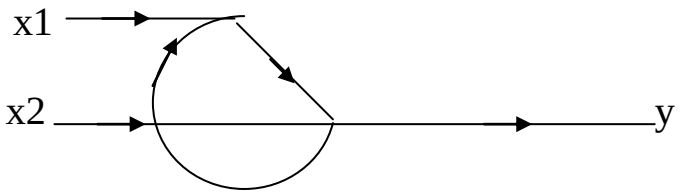
3.1 الدائرة المجمعة(Combinational Circuit)

الدائرة التي تنشأ باستخدام البوابات ويكون الرسم الموجه التحتي لها لا يشتمل على دائرة موجّه، الدائرة الموجّه تشتمل على الحدود $(v_0,v_1)(v_1,v_2)\ldots(v_{n-1},v_n)$، حيث $(v_0=n_n)$ تسمى دائرة مجمّعة.

مثال(1.1.6): الدائرة في الشكل (2.1.6) هي دائرة مجمّعة لعدم إشتمال الرسم الموجّه التحتي لها على دائرة بينما نجد إن الدائرة من النوع الموجود في الشكل (3.1.6) تسمى دائرة تتابعيه (Sequential Circuit).



الدائرة



الرسم الموجهة التحتي للدائرة

الشكل(3.1.6)

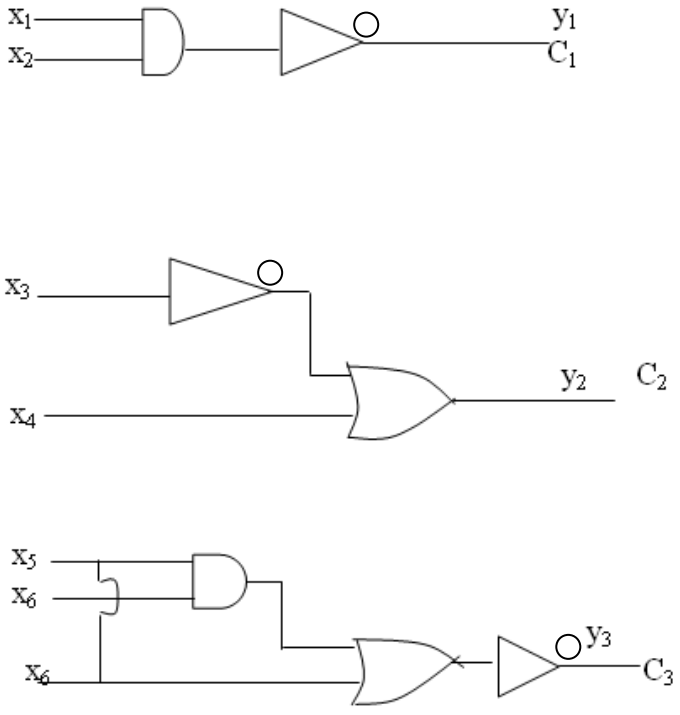
4.1 ربط الدوائر المجمعّة

يمكن ربط العديد من الدوائر المجمعّة مع بعضها البعض من أجل إنشاء دائرة مجمّعة جديدة باتباع القواعد التالية:

- ✓ يجب أن لا يتم ربط مخرج دائرة مع مخرج دائرة أخرى.
- ✓ يجب أن لا ينشأ عن طريق الربط نشوء دائرة موجّه.

تدريب (1)

ضم الدوائر المجمعةالتالية C_1 ،C_2 ، C_3 لإنتاج الدائرة المجمعةC.



5.1 سلوك الدائرة المجمعة

المعني بسلوك الدائرة المجمّعة هو معرفة أثر المدخلات على المخرج من الدائرة. يمكن تمثيل سلوك الدائرةالمجمعّةبما يسمى بجدول المنطق (Logic Table) وهو عبارة عن جدول منطق (Truth Table) يحوي كافة الاحتمالات الممكنة للمدخلات للدائرة والمخرجات المقابلة لها.

مثال(3.1.6): جداول المنطق للدوائر الرئيسية الثلاثة NOT, OR, AND على النحو التالي:

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x_1	x_2	$X_1 V x_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

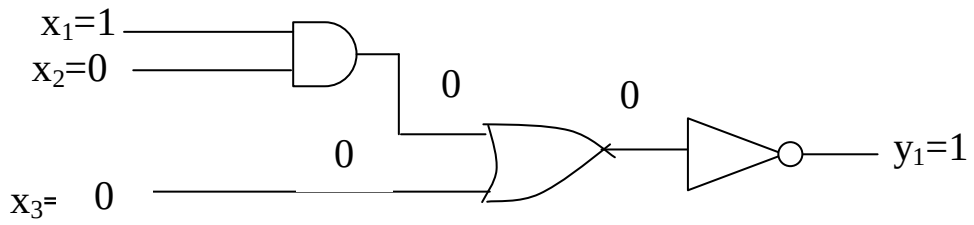
x	X’
1	0
0	1

وجدول المنطق للدائرة في الشكل (2.1.6) هو:

x_1	x_2	X_3	y_1
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

نلاحظ أن كافة الاحتمالات الممكنة لقيم المدخلات x_1, x_2, x_3 قد تم رصدها في الجدول. يمكننا حساب المخرج المقابل لمجموعة مدخلات بمتابعة الدائرة من بدايتها.

كمثال إذا أخذنا مجموعة المدخلات x_3, x_2, x_1 في السطر الرابع $(x_1=1, x_2=0, x_3=0)$. فيمكننا حساب المخرج بتعويض هذه القيم المدخلة على الدائرة،انظر الشكل (5.1.6) التالي:



الشكل (6.1.7)

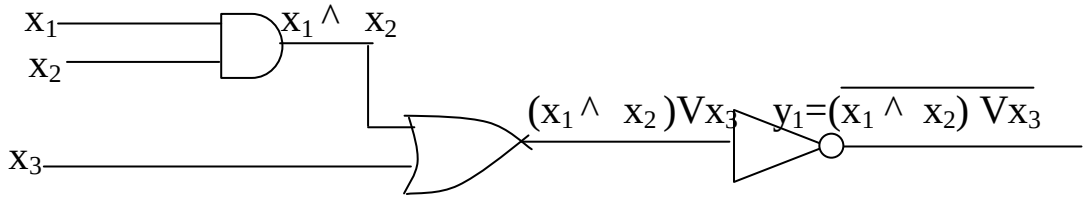
6.1 التمثيل الرمزي للدائرة المجمعّة

إذا كانت الدائرة المجمعّة لها مخرج واحد فيمكن تمثيلها كتعبير منطقي يستخدم الرموز ^،V،-. كمثال فإن التعبير المنطقي للدائرة في الشكل (2.1.6) هو:

$$y_1= \overline{(x_1 \wedge x_2) \vee x_3}$$

انظر للشكل (6.1.6) لمعرفة كيفية الحصول على التعبير أعلاه .

إن مثل هذا التعبير يسمى تعبير بوولي (Boolean Expression).



الشكل(6.1.6)

7.1 التعبير البوولي

التعبير البوولي على الرموز $x_1 \ldots, x_2, x_n$ يعرف بالتواتر (Recursively) على النحو التالي $0, 1, x_1, \ldots x_n$ هي تعابير بوولية إذا كان x_1 و x_2 هي تعابير بوولية فإن:

(أ) (x_1) (ب) $\overline{x}_1$ (ج) $x_1 V x_2$ (د) $x_1 \wedge x_2$ هي تعابير بوولية

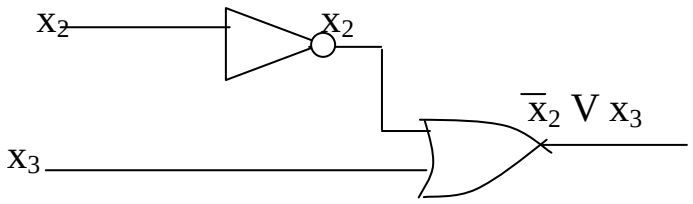
مثال(4.1.6): أوجد الدائرة المجمعةالمقابلة للتعبير البوولي

$$[x_1 \wedge (\overline{x}_2 V x_3)] V x_2$$

ثم اكتب جدول المنطق للدائرة.

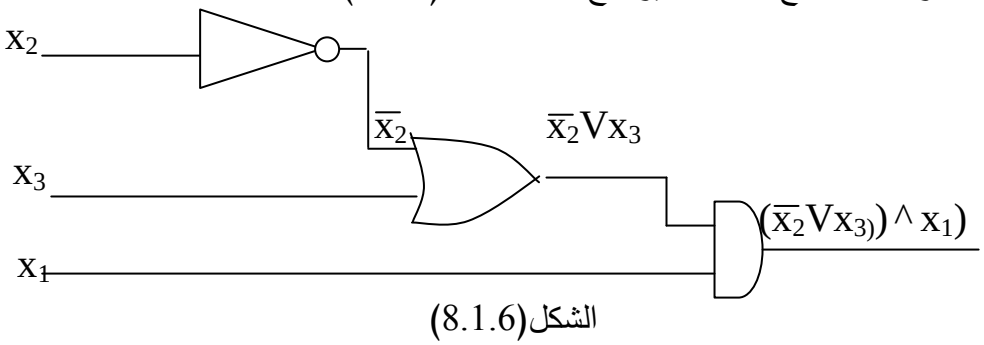
الحل :

سنبدأ بالتعبير $\overline{x}_2 V x_3$ في القوس الداخلي هذا التعبير يقابل الدائرة في الشكل (7.1.6) مخرج هذه الدائرة هو مدخل للبوابة AND مع x_1.

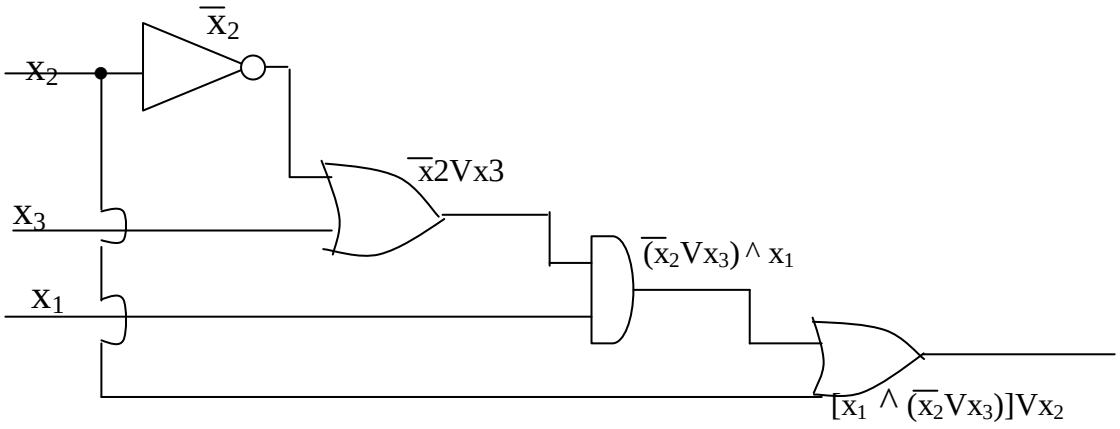


الشكل(7.1.6)

ناتج هذا المدخل هو الدائرة في الشكل (8.1.6) أخيراً فإن مخرج هذه الدائرة هو مدخل للبوابة OR مع x_2، كما يوضح ذلك الشكل (9.1.6)



الشكل(8.1.6)



الشكل(9.1.6)

2. صفات الدوائر المجمعة

عزيزي الدارس، لقد قمنا في البند السابق من هذا الفصل بتعريف المؤثران الثنائيان ^ و V والمؤثر الأحادي- على مجموعة الأعداد الصحيحة $Z_2=\{0,1\}$. ورأينا أن هذه المؤثرات يمكن تجسيدها في الدوائرالمجمعّة كبوابات. في هذا البند سنبين بعض الصفات المرتبطة بالمجموعة Z_2. والمؤثرات ^ ،Vو-.

نظرية (1.2.6): إذا كانت ^،V و- معرفة كما جاء في التعريف **(1,1,6)** فستنطبق عليها القوانين التالية :

أ/ قانون التجميع **(Associative Laws)**:

(1 $(a \text{ V } b)\text{V } c= a \text{ V}(b \text{ V } c)$

(2 $(a \wedge b) \wedge c= a\wedge(b \wedge c)$

لكل $a, b, c \in Z_2$

ب/ قانون التبديل **(Commutative Laws)**:

(1 $a \text{ V } b= b \text{ V } a$

(2 $a\wedge b= b\wedge a$

لكل $a, b \in Z_2$

ج/ قانون التوزيع **(Distributive Laws)**:

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (1

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (2

لكل $a, b, c \in Z_2$

د/ قانون التطابق **(Identity Laws)**:-

$a \vee 0 = a$ (1

$a \wedge 1 = a$ (2

لكل $a \in Z_2$

هـ/ قانون التكامل **(Complement Law)**:

$a \vee \bar{a} = 1$ (1

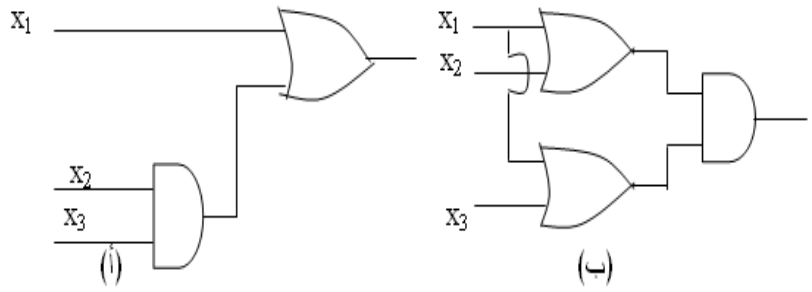
$a \wedge \bar{a} = 0$ (2

لكل $a \in Z_2$

هذه القوانين الجبرية للمؤثرات $\wedge$,$\vee$و- يمكن استخدامها من اجل اختصار الدوائرالمجمعّة أو إثبات بعض خواصها.

تدريب (2)

باستخدام النظرية (1.2.6). بيّن أن الدوائر المجمعّة في الشكل التالي لها مخرجات متطابقة عندما تكون المدخلات متطابقة.



1.2 تساوي التعابير البوولية

إذا كانت كل من:

$x_1= X_1(x_1,\ldots,x_n)$ و $x_2= X_2(x_1,\ldots,x_n)$

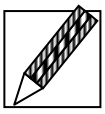
هي تعابير بوولية. فإننا نقول أن X_1 تساوي X_2 ونكتب $X_1=X_2$ إذا كان

$$X_1(a_1,\ldots,a_n)= X_2(a_1, \ldots., a_n)$$

لكل $a_i \in z_2$.

أي أن التعابير البوولية تتساوى إذا كانت لها نفس القيمة لكل القيم التي يمكن أن تخصص للحروف المكونة للتعبير.

تدريب (3)

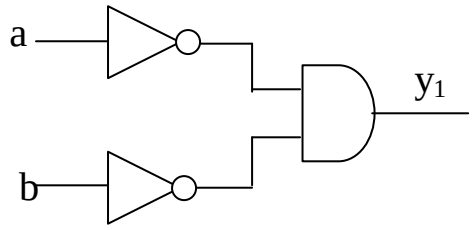


أثبت أن $\overline{(x \vee y)}= \overline{x} \wedge \overline{y}$

2.2 الدوائرالمجمعّة المتكافئة

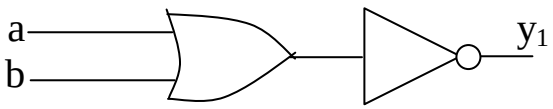
نقول إن الدائرتين c_1 و c_2 دوائر متكافئة (Equivalent) إذا كان لكل منها المدخلات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ومخرج مفرد (واحد). وأن الدائرتين تنتجان نفس المخرج عندما تكون لهما نفس المدخلات.

مثال(3.2.6): الدائرتان(أ) و(ب) في الشكلين (2.2.6) و (3.2.6) هما دائرتان متكافئتان كما موضح ذلك باستخدام جداول المنطق:



a	b	y_1
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الشكل(3.2.6)



a	B	y_1
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الشكل (2.2.6)

من التعريف والمثال أعلاه نصل إلى حقيقة أن الدائرتين المجمعتين c_1 و c_2 هي دوائر متكافئة إذا كانت التعابير البوولية المقابلة لهما هي تعابير بوولية متساوية.

3. الجبر البوولي (Boolean Algebras)

عزيزي الدارس، إن القوانين الواردة في النظرية (1.2.6) تنطبق على العديد من النظم. إن أي نظام يحقق تلك القوانين يسمى جبراً بوولياً.

1.3 الجبر البوولي

6.3.1: تعريف

الجبر البوولي B هو نظام يشتمل على المجموعة S التي تحتوي على العناصر 1 و0 وعلى المؤثرات الثنائية + و ∗ والتي تعمل على S والمؤثر الأحادي. الذي يعمل على S ويحقق الخواص التالية:

(أ) قانون التجميع **(Associative Laws)**

(1 $(x + y)+ z= x +(y + z)$

(2 $(x * y) *y = x * (y * z)$

لكل $x,y,z \epsilon S$

(ب) قانون التبديل **(Commutative Laws)**

$x + y= y+ x \quad x * y= y *x \qquad -1$

لكل $x,y \epsilon S$

(ج) قانون التوزيع **(Distributive Laws)**

$x * (y+z)= (x * y) + (x * z) \qquad -1$

$x + (y*z)= (x + y) * (x + z) \qquad -2$

لكل $x,y,z \epsilon S$

(د) قانون التطابق **(Identity Laws)**

(1 $. x * 1= x$

(2 $x + 0 =x$

لكل $x \epsilon S$

(هـ) قانون التكامل **(Complement Laws)**

(1 $x * \acute{x} = 0$

(2 $x + \acute{x} = 1$

لكل $x \epsilon S$

إذا كانت B هي جبر بوولي نكتب

$$B= (s, +, ., 0^* 1)$$

وعادةٍ ما نختصر a*b لتكتب ab كما إننا سنفترض دائماً أن* يقيّم قبل + وبالتالي فإننا نكتب xy + z بدلاً من استخدام الأقواس z + (xy).

مثال(1.3.6): من النظرية (1.2.6) سنجد أن

$(z_2, V, \wedge, ^{-}, 0,1)$ حيث $z_2= \{0,1\}$ هي جبر بوولي. حيث نجد أن المؤثرات $V, \wedge, ^{-}$ تقابل المؤثرات + ، * ، وَ على التوالي.

مثال(2.3.6): إذا كانت u هي المجموعة الشاملة و$S= p(u)$ هي المجموعة الأسية للمجموعة الشاملة u وعرفنا المؤثرات التالية:

$$X * Y= X \cup Y$$
$$X . Y= X \cap Y$$
$$X^{ó} = \overline{X}$$

على S. فإن $(S, U, \cap, ^{-}, \phi, u)$ هي جبر بوولي. المجموعة الخالية ϕ تؤدي دور 0 والمجموعة الشاملة u تؤدي دور 1. وبالتالي إذا جعلنا z, y, x تكون مجموعات جزئية من S فإن كافة القوانين الواردة في التعريف(1.3.6) تنطبق عليها.

نظرية(2.3.6): في الجبر البوولي B، العنصرَ x في التعريف6.3.1 (هـ) هو عنصر مفرد. تحديداً إذا كانت $x + y= 1$ و $xy= 0$ فإن $x^{ó} =y$.

الإثبات:

نحن نريد إثبات أنَ $x = y$ إذا كانت

$$x + y = 1 \quad \text{و} \quad xy = 0$$

سيكون الإثبات على النحو التالي :

من التعريف 1.3.6 (د) نجد أن $y = y1$

و من التعريف 1.3.6 (هـ) $y = (x + x^{ó})$

من التعريف 1.3.6 (ج) $y = y\,x + y\,x^{ó}$

من التعريف 1.3.6 (ب) $y = x\,y + yx'$

معطى أن $xy = 0$ $y = 0 + y\,x'$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= x\,x' + yx'$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= x'\,x + x'\,y$

من التعريف 1.3.6 (ج) $= x'\,(x+y)$

معطى أن $x + y = 1$ $= x'\,1$

من التعريف 1.3.6 (د) $= x'$

تعريف(2.3.6): في الجبر البوولي يسمى العنصر x' بالعنصر المكمل للعنصر x.

نظرية(3.3.6): إذا كانت $B = (s, +, .', 0, 1)$ هي جبر بوولي فإن القوانين التالية تتحقق في B.

(أ) قانون التوحد **(Idempotent Laws)**

$$x + x = x\,,\ x\,x = x\,, \quad \forall\, x \in S$$

(ب) قانون الحدّ **(Bound Laws)**

$$x + 1 = 1\,,\ x0 = 0 \quad \forall\, x \in S$$

(ج) قانون الامتصاص **(Absorption Laws)**

$$x + x\,y = x \quad x(x + y) = x \quad \forall\ x,y \in S$$

(د) قانون الاشتمال **(Involution Laws)**

$$(x')' = x \quad \forall\ x \in S$$

(هـ) قانون 0 و 1 **(0 and 1 Laws)**

$$0' = 1\,, \qquad 1' = 0$$

(و) قانون دي مورجان **(De Morgan's Laws)**:-

$$(x + y)'' = x'' y''\,,\ (xy)' = x'' + y'' \qquad x,y \in s$$

الإثبات:

سنثبت الجزء الأول من (أ) و(ب) والجزء الأول من (ج) و(هـ) ونترك البقية كتمرين.

أ/ المراد إثبـات أن:

$$x + x = x$$

الإثبات:

من التعريف 1.3.6 (د) $x = x + 0$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= x + (x\, x^{-})$

من التعريف 1.3.6 (ج) $=(x+x)\,(x+x^{-})$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= (x + x)1$

من التعريف 1.3.6 (د) $= x + x$

ب/ المراد إثبات ان $\mathbf{x + 1 = 1}$ و $\mathbf{x0 = 0}$

من التعريف 1.3.6 (د) $x + 1 = (x+1)$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= (x + 1)\,(x+x^{-})$

من التعريف 1.3.6 (ج) $= x + 1x^{-}$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= x + x^{-}1$

من التعريف 1.3.6 (د) $= x + x^{-}$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= 1$

من التعريف 1.3.6 (د) $x0 = x0 + 0$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= x0 + xx^{-}$

من التعريف 1.3.6 (ج) $= x(0 + x^{-})$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= x(x^{-} +0)$

من التعريف 1.3.6 (د) $= xx^{-}$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= 0$

c/ المراد إثبات أن $\mathbf{x + xy = x}$

الإثبات:

من التعريف 1.3.6 (د) $x+xy = x1 + xy$

من التعريف 1.3.6 (ج) $= x(1 + y)$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= x(y + 1)$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= x1$

من التعريف 1.3.6 (د) $= x$

(f) المراد إثبات أن $\mathbf{x\acute{y} = (x + \acute{y})}$

الإثبات: إذا أثبتنا أن $(x+y)(x\acute{y}) = 0$ و $(x+y)+ x\acute{}\acute{} y\acute{}\acute{} = 1$

فمن النظرية (6.3.4) ستكون = $x\acute{} y\acute{} = (x+y)\acute{}\acute{}$

الآن نجد أن :-

من التعريف 1.3.6 (ب) $(x+y)(x\acute{} y\acute{}) = (x\acute{} y\acute{}\acute{})(x+y)$

من التعريف 1.3.6 (ج) $= (x\acute{} y\acute{})x+(x\acute{} y\acute{}\acute{}) y$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= x (x\acute{} y\acute{})+ (x\acute{} y\acute{}) y$

" " 1.3.6 (أ) $= (x x\acute{}) y\acute{}\acute{} + x (y\acute{} y)$

" " 1.3.6 (هـ) $= 0 y\acute{} + x\acute{} 0$

" " 1.3.6 (ب) $= y\acute{} 0+ x\acute{} 0$

من النظرية 1.3.6 (ب) $= 0 + 0$

من التعريف 1.3.6 (ب) $= 0$

لإثبات الجزء الثاني نجد :-

من التعريف 1.3.6 (ج) $(x + y) + x'y' = [(x+y)+x'] [(x+y)+y\acute{}]$

من التعريف 1.3.6 (ب) $=[(y+x) + x'] [(x+y)+y']$

من التعريف 1.3.6 (أ) $= [y + (x+x')] [x+(y+y')]$

من التعريف 1.3.6 (هـ) $= [y+1] [x+1]$

من النظرية 1.3.6 (ب) $= 1 . 1$

من التعريف1.3.6 (د) 1 =

إذن بالنظرية (2.3.6) نجد أن $\bar{x}\,\bar{y} = \overline{(x+y)}$

4. الدوال البوولية

عزيزي الدارس، إن الدوال البوولية تساعدنا في إنشاء الدوائر المجمعة، فعادة ما يراد منا تصميم دائرة مجمعة تؤدي عملاً محدداً ويتم تحديد ذلك العمل بالجدول المنطقي للدائرة، وبالتالي إذا أمكن لنا أن نعبر عن جدول المنطق للدائرة كدالة بوولية فإن هذا سيجعل تصميم الدائرة أمراً سهلاً هو فقط تحويل التعبير البوولي للدالة لدائرة مجمعة باستخدام البوابات.

تعريف(1.4.6): إن المؤثر exclusive OR هو مؤثر ثنائي يكتب $x \oplus y$ وجدول المنطق له هو:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

إن جدول المنطق الذي له مخرج واحد يعرف على أنه دالة. نطاق هذه الدالة هو مجموعة المدخلات ومدى الدالة هو مجموعة المخرجات.

بناءً على هذا التعريف فإن المؤثر exclusive OR هو دالة، نطاقها هو المجموعة:

$$\{(1,1), (1,0), (0,), (0,0)\}$$

ومداها هو :

$$Z_2 = \{0,1\}$$

الآن إذا أمكننا إيجاد صيغة للتعبير عن الدالة على صورة:

$$x_1 \oplus x_2 = X\,(x_1, x_2)$$

حيث X هو تعبير بوولي سنكون قد نجحنا في التعبير عن المؤثر $\oplus$كدالة بوولية في x_1,x_2 وهذا سيجعلنا قادرين على إنشاء دائرة موحدة تعبر عن $+\cdot$ فيما يلي تعريف رسمي للدالة البوولية.

1.4 الدالة البوولية

اجعل $Z^n_2 = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i \in Z_2\}$

واجعل $X(x_1,\ldots,x_2)$ تكون تعبيراً بوولياً. الدالة $f: Z_2^n \longrightarrow Z_2$ التي لها الشكل

$$f(a_1,\ldots,a_n) = X(a_1,\ldots,a_n)$$

تسمى دالة بوولية.

مثال(1.4.6): الدالة $f: Z_2^3 \longrightarrow Z_2$ والمعرفة على النحو التالي :

$$f(a_1,a_2,a_3) = a_1 \wedge (a_2 \vee a_3)$$

هي دالة بوولية. المدخلات والمخرجات لهذه الدالة يبينها جدول المنطق التالي:

a_1	a_2	a_3	$f(a_1,a_2,a_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

مثال(2.4.6): أوجد الدالة البوولية التي يعبر عنها الجدول المنطقي التالي:

a_1	a_2	a_3	$f(a_1,a_2,a_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

الحل: لإيجاد الدالة البوولية المكافئة للجدول المنطقي أعلاه، سنتبع الخطوات التالية:

أولاً : سننظر في المدخلات التي تعطي مخرجاً يساوي 1.

الصف الأول من الجدول يبين أن:

$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$ تنتج مخرجاً يساوي 1

الصف الرابع من الجدول يبين أن:

$a_1 \wedge \overline{a_2} \wedge \overline{a_3}$ تنتج مخرجاً يساوي 1

الصف السادس من الجدول يبين أن:

$\overline{a_1} \wedge a_2 \wedge \overline{a_3}$ تنتج مخرجاً يساوي 1

ثانياً: سنقوم بضم التعابير البوولية باستخدام المؤثر OR للحصول على التعبير البوولي.

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) \vee (a_1 \wedge \overline{a_2} \wedge \overline{a_3}) \vee (\overline{a_1} \wedge a_2 \wedge \overline{a_3})$$

إن استخدام المؤثر OR في عملية الضم هو للتأكيد على ان مخرج الدالة هو 1 فقط إذا تحققت واحدة من الثلاثة حالات

إذن $f(a_1, a_2, a_3)= (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) \vee (a_1 \wedge \overline{a_2} \wedge \overline{a_3}) \vee (\overline{a_1} \wedge a_2 \wedge \overline{a_3})$

من المثال أعلاه نجد أن إنشاء الدالة البوولية على المدخلات $x_1,x_2,\ldots,x_n$ يتطلب أولاً إيجاد التعابير البوولية على صيغة $y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \ldots\ldots \wedge y_n$ حيث y_i هي $\overline{x_i}$ أو x_i. تسمى مثل هذه التعابير تعابير صغيرة (minterms).

ثم يتبع ذلك ضم هذه التعابير بواسطة المؤثر OR (V) لتكون الصيغة العامة للدالة هي:

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = m_1 V m_2 V m_3 \ldots V m_k$$

حيث $m_i = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$

إن تمثيل الدالة بهذه الصورة كمجموعة تعابيرصغيرة (minterms) مضمومة بالمؤثر V تسمى الشكل العادي المتقطع للدالة (Disjunction normal form). يمكن أيضاً أن يتم التعبير عن الدالة على النحو التالي $f(x_1,x_2,\ldots x_n) = m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \ldots \wedge m_k$ حيث $m_i = y_1 V y_2 V .. V y_n$ يسمى هذا الشكل للدالة بالشكل العادي المتحد (Conjunctive Normal Form).

تدريب (4)

صمم الدائرة المجمعةالتي تحسب المؤثر $\otimes$ للم دخلين x_1 و x_2 (أي $x_1 \otimes x_2$)

5 . تطبيقات (Applications)

عزيزي الدارس، لقد بينا في الجزء السابق كيفية تصميم دائرة مجمعة بإستخدام البوابات OR, AND و NOT من الدالة البوولية

$f: Z^n_2 \longrightarrow Z_2$ حيث $Z_2 = \{0,1\}$

في هذا الجزء سنبين كيفية استخدام بوابات أخرى لتصميم الدائرة المجمعة، كما سنناقش كيفية التصميم الجيد للدائرة.

سنبدأ هذا الجزء بتقديم تعريف رسمي للبوابة .

1.5 البوابة (Gate)

1.1.6 تعريف البوابة (Gate)

البوابة هي دالة من Z^n_2 الى Z_2 أي

$g = f: Z^n_2 \longrightarrow Z_2$

مثال (1.5.6): البوابة AND هي الدالة ^ المعرفة من

$Z_2^2 \longrightarrow Z_2$ كما في التعريف (1.1.6)

$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 & x_1 = x_2 = 1 \text{ إذا كانت} \\ 0 & \text{لغير ذلك} \end{cases}$

والبوابة NOT هي الدالة – من Z_2 الى Z_2 كما في التعريف 1.1.6

$x = \bar{} = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ إذا كانت} \\ 0 & x = 1 \text{ إذا كانت} \end{cases}$

2.1.5 مجموعة البوابات الكاملة وظيفياً

إن مجموعة البوابات $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ تسمى كاملة وظيفياً (Functionally Complete)، إذا كان لأي عدد صحيح موجب n ولأي دالة f من Z_2^n الى Z_2 من الممكن إنشاء دائرة مجمعة لحساب f باستخدام البوابات $g_1, g_2, \ldots, g_k$.

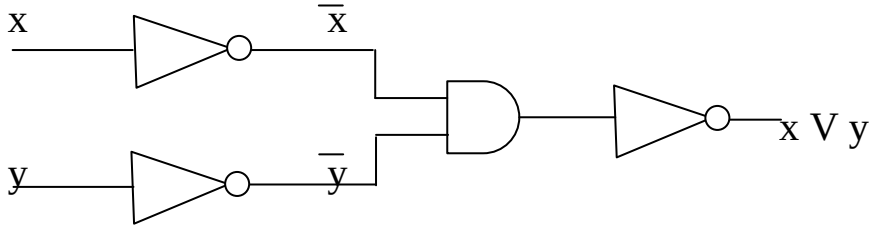
مثال(2.5.6): المثال (4.4.4) والنتائج المستنبطة منه بينت أن مجموعة البوابات {AND, OR, NOT} هي مجموعة كاملة وظيفياً.
نظرية(1.5.6).

إن مجموعات البوابات التالية كاملة وظيفياً
{OR, NOT} , {AND, NOT}
الإثبات:
سنثبت أن {AND, NOT} كاملة وظيفياً ونترك إثبات {OR, NOT} كتمرين.

إذا أمكننا إثبات أن الدالة OR يمكن التعبير عندها بدلالة AND, NOT فإن هذا يثبت أن {AND, NOT} مجموعة كاملة وظيفياً.

نجد من قانون الالتفاف(Involution)أن $x \vee y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ ومن قانون دي مورغان نجد أن $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = x\, y$

إذن يمكن إبدال البوابة OR بالبوابة AND وثلاثة بوابات NOT. الدائرة المجمعة المقابلة للبوابة OR يبينها الشكل (1.5.6).



الشكل (1.5.6)

إذن فإن المجموعة {AND, NOT} هي مجموعة كاملة وظيفياً.

على الرغم من أن أي من البوابات NOT, OR, AND لوحدها لا تشكل مجموعة كاملة وظيفياً إلا انه من الممكن أن نعرف بوابة جديدة تشكل لوحدها مجموعة كاملة وظيفياً.

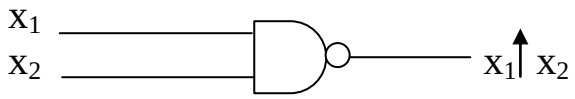
3.1.5 البوابة NAND

البوابة NAND تستقبل كمدخلات x_1 و x_2 (حيث x_1 و x_2 بتات) وتنتج مخرجاً نرمز له بالرمز $x_1 \uparrow x_2$ حيث:

إذا كانت $x_1 = x_2 = 1$ $\quad x_1 \uparrow x_2 = 0$

لغير ذلك $\quad 1$

الشكل(2.5.6) يبين البوابة NAND



الشكل (2.5.6)

إن معظم الدوائر المستخدمة حالياً في الحواسيب مبنية باستخدام بوابات NAND.

نظرية(2.5.6) : المجموعة { NAND } هي مجموعة كاملة وظيفياً.

الإثبات: نلاحظ أولاً أن :

$$x \uparrow y = \overline{xy}$$

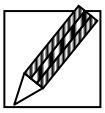
وبالتالي فإن:

$$\overline{x} = \overline{xx} = x \uparrow x$$

$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{x} \uparrow \overline{y} = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$$

إذن كل من البوابات NOT و OR يمكن التعبير عنهما بدلالة البوابة NAND ولأن المجموعة {OR, NOT} كاملة وظيفياً إذن { NAND } كاملة وظيفياً.

تدريب (5)



صمم دوائر مجمعة باستخدام البوابة NAND تحسب الدوال

$f(x) = x \quad , \quad f(x,y) = x \vee y$

2.5 التصميم الجيد للدائرة المجمعة

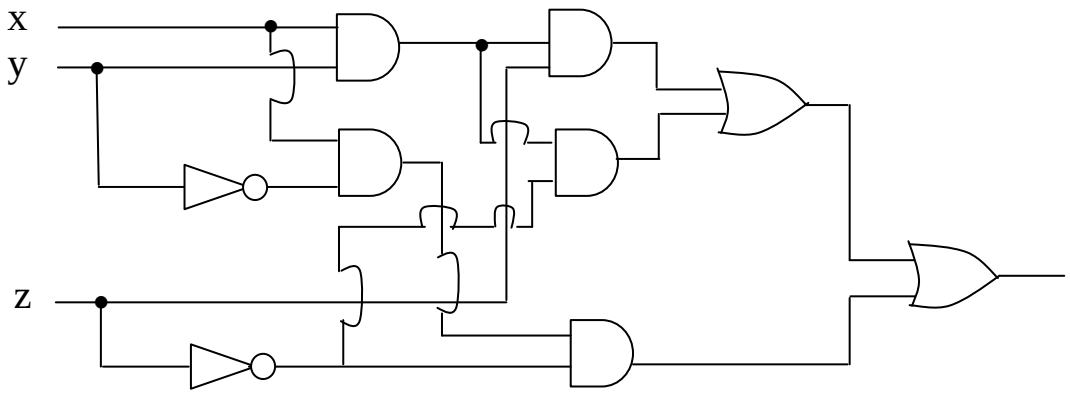
إذا نظرنا لمسألة تصميم دائرة مجمعة باستخدام البوابات NOT, OR, AND لتجسيد الدالة f التي لها الجدول المنطقي التالي:

x	y	z	f(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

سنجد أن للدالة الشكل المتقطع التالي :

$$f(x, y, x)= xyz \ V \ xy\overline{z} V \ x \ \overline{y} \ \overline{z}$$

والذي تقابله الدائرة المجمعة المبينة في الشكل (4.5.6)



الشكل (4.5.6)

سنجد أن الشكل (4.5.6) يستخدم 9 بوابات السؤال الآن هو: هل يمكن التعبير عن الدالة f كدائرة مجمعة تستخدم عدد بوابات أقل؟ أي هل هنالك دائرة مكافئة أبسط للدائرة في الشكل (4.5.6).

الإجابة نعم.. لإيجاد هذه الدائرة المبسطة علينا استخدام قوانين الجبر البوولي الواردة في التعريف 1.3.6 والنظرية 2.3.6 لتبسيط الشكل العادي المتقطع للدالة.
من القوانين المفيدة في تبسيط التعابير البوولية القانون

$$Ea \vee E\bar{a} = E \qquad (1.5.6)$$

و

$$E = E \vee Ea \qquad (2.5.6)$$

حيث E تعبير بوولي
القانون الأول ناتج من:

$$Ea \vee E\bar{a} = E(a \vee a) = E1 = E$$

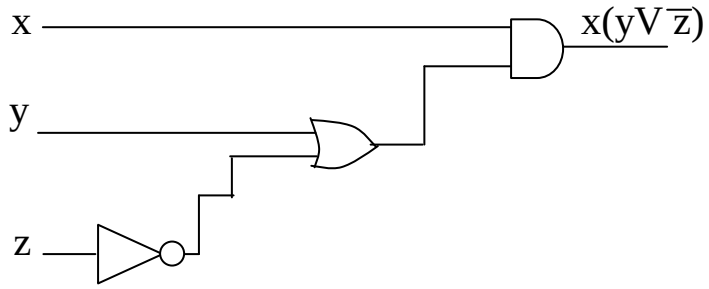
والقانون الثاني ناتج من:

$$E \vee Ea = E(1 \vee a) = E1 = E$$

باستخدام هذين القانونين يمكننا الآن تبسيط وإختصار التعبير البوولي للدالة

$$f(x, y, x) = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$$
$$= xy(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z}$$
$$= xy1 \vee x\bar{y}\bar{z}$$
$$= xy \vee x\bar{y}\bar{z} \qquad \text{من القانون } 1.5.6$$
$$= xy \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \qquad \text{من القانون } 2.2.6$$
$$= xy \vee x\bar{z} \qquad \text{من القانون } 1.5.6$$
$$= x(y \vee \bar{z})$$

الدائرة المجمعةالمقابلة للتعبير $x(y\underline{V}z)$ يبينها الشكل (5.5.6)



الشكل (5.5.6)

مثال(4.5.6)

الشكل (1.4.6) يبين الدائرة المجمعةالمعبرة عن المؤثر $\otimes$ تستخدم خمسة بوابات. إذا أردنا تبسيط الدائرة بحيث تستخدم عدداً أقل من البوابات فإننا نجد أن الدالة البوولية المقابلة للمؤثر هـ $\otimes$

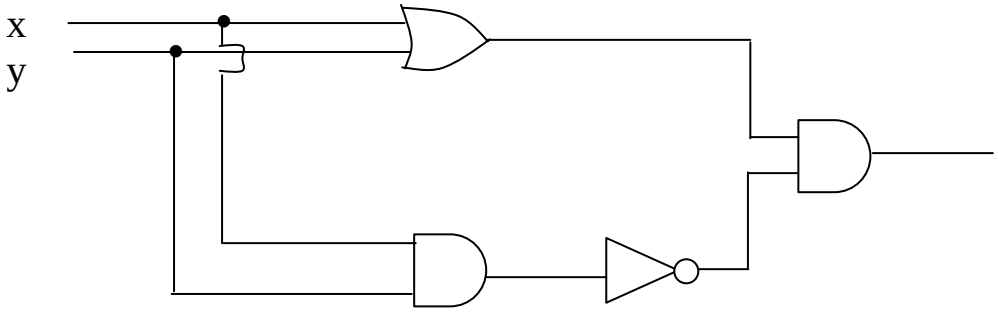
$$x\overline{y}\ \nabla\ \overline{x}y$$

لا يمكن تبسيطها بواسطة القانونين (1.5.6) و(2.5.6) أعلاه لهذا علينا أن نقوم بتجريب قوانين الجبر البوولي الأخرى حتى نحصل على تعبير أبسط.

احد الحلول المبسطة هو أن نعبر عن الدالة البوولية على النحو التالي

$xyVxy= (xVy)\ xy$.

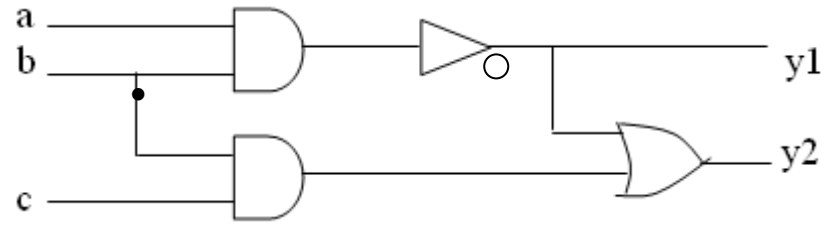
والتي يتطلب تجسيد التعبير البوولي فيها $\overline{xy}(xVy)$ كدائرة أربعة بوابات فقط يبينها الشكل (6.5.6)



الشكل (6.5.6)

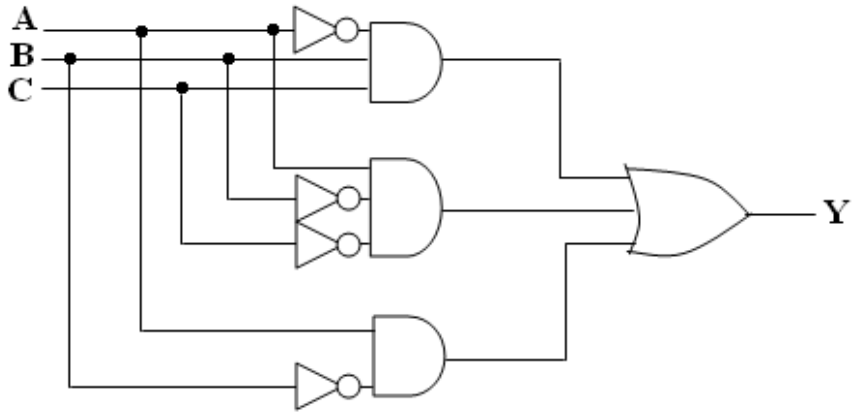
تدريب (6)

اكتب التعابير البوولية المعبرة عن مخرجات الدائرة المجمعة في الشكل التالي:



تدريب (7)

عبر عن المخرج Y كتعبير بولياني حيث A,B,C هي مدخلات الدائرة المنطقية في الشكل التالي.



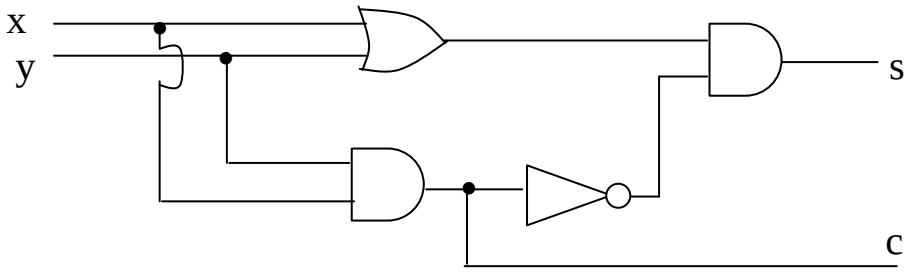
3.5 دائرة نصف الجامع (Half-Adder Circuit)

دائرة نصف الجامع تستقبل البتات x و y كمدخل وتنتج مخرج هو حاصل الجمع الثنائي للبتات x و y، ولأن حاصل الجمع مكون من 2بت فإن المخرج يعبر عنه بمخرجين s و c حيث s هو بت الجمع و c هي بت الحمل ويكون حاصل الجمع هو cs.

جدول المنطق لدائرة نصف الجامع هي:

x	y	c	s
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

نلاحظ أن c= xy وأن s=⊕ y + وبالتالي فإن الشكل (8.5.6) يعبر عن دائرة نصف الجامع



الشكل (8.5.6)

4.5 الجامع الكامل (Full Adder)

دائرة الجامع الكامل تستقبل كمدخل ثلاثة بتات x, y, z وتخرج حاصل الجمع الثنائي cs للبتات x, y, z حاصل الجمع cs مكون من 2–بت.

جدول المنطق للجامع الكامل هو :

x	y	z	c	s
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

من جدول المنطق نجد ان:

$$S= x \oplus y \oplus z$$

وبالتالي فيمكننا استخدام دائرتين $\oplus$ لحساب قيمة s.

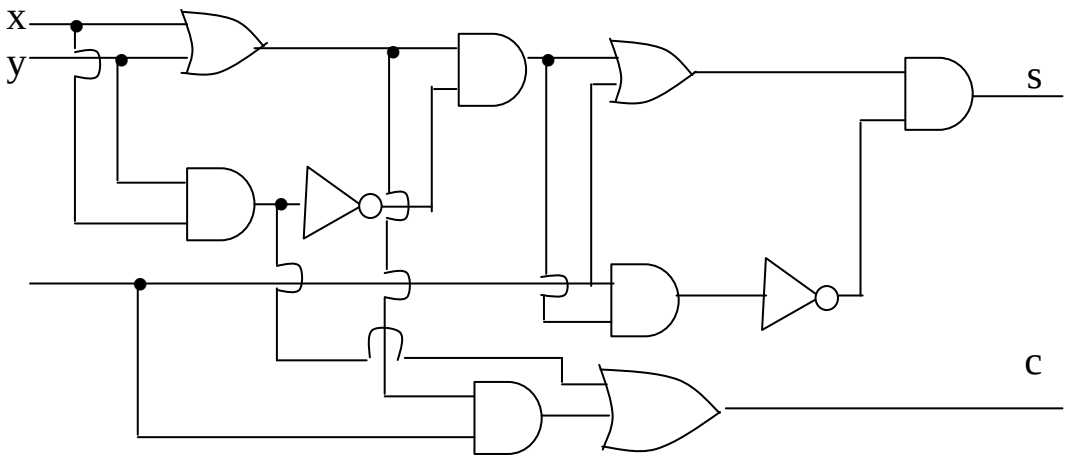
ونجد أن

$$C= xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz$$

يمكننا إستخدام القانونين (1.5.6)و (2.5.6) لتبسيط C على النحو التالي:

$$xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz = xy \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz$$
$$= xy \vee xyz \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz$$
$$= xy \vee xz \vee \overline{x}yz$$
$$= xy \vee xz \vee xyz \vee \overline{x}yz$$
$$= xy \vee xz \vee yz$$
$$= xy \vee z(x \vee y)$$

الشكل (9.5.6) يبين الدائرة المجمعةللجامع الكامل



الشكل (9.5.6)

الخلاصة

- الدوائر المجمعة(Combinatorial Circuits)

هي دوائر لا ذاكرة لها، أي أن المخرج من الدائرة يعتمد كلياً على المدخلات الحالية وليس على مدخلات سابقة أو على حالة النظام.

- تعريف البوابات AND , OR و NOT إذا كانت x_1 و x_2 هي بتات:

تعرّف البوابة AND بأنها تستقبل x_1 و x_2 كمدخلات وتنتج مخرجاً يرمز له بالرمز $x_1 \wedge x_2$.

تعرّف البوابة OR بأنها تستقبل x_1 و x_2 كمدخلات وتنتج مخرجاً يرمز له بالرمز $x_1 \vee x_2$.

تعرّف البوابة NOT بأنها تستقبل المدخل x حيث x بت وتنتج مخرجاً يرمز له بالرمز $\overline{x}$.

- الرسم الموجّه التحتي لدائرة هو الرسم الموجّه الذي يتم الحصول عليه من دائرة مجمّعة. تشتمل مجموعة العقد في هذا الرسم على: المدخلات، المخرجات، والبوابات في الدائرة.

- يمكن ربط العديد من الدوائرالمجمعّة مع بعضها البعض من أجل إنشاء دائرة مجمّعة جديدة باتباع القواعد التالية:

- ✓ يجب أن لا يتم ربط مخرج دائرة مع مخرج دائرة أخرى.
- ✓ يجب أن لا ينشأ عن طريق الربط نشوء دائرة موجّهة.

- سلوك الدائرةالمجمعّة هو معرفة أثر المدخلات على المخرج من الدائرة، يمكن تمثيل سلوك الدائرة المجمعّة بما يسمى بجدول المنطق (Logic Table)، وهو عبارة عن جدول صدق (Truth Table) يحوي كافة الاحتمالات الممكنة للمدخلات للدائرة والمخرجات المقابلة لها.

- إذا كانت الدائرة المجمعّة لها مخرج واحد فيمكن تمثيلها كتعبير منطقي باستخدام الرموز $\wedge, \vee, -$.

– نقول إن الدائرتين c_1 و c_2 دوائر متكافئة (Equivalent) إذا كان لكل منها المدخلات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ومخرج مفرد (واحد)، وأن الدائرتين تنتجان نفس المخرج عندما تكون لهما نفس المدخلات.

– الجبر البوولي B هو نظام يشتمل على المجموعة S التي تحتوي على العناصر 1 و0 وعلى المؤثرات الثنائية + و∗ والتي تعمل على S والمؤثر الأحادي الذي يعمل على S.

– إذا أمكن لنا أن نعبر عن جدول المنطق للدائرة كدالة بوولية فإن هذا سيجعل تصميم الدائرة أمراً سهلاً هو فقط تحويل التعبير البوولي للدالة لدائرة مجمعة باستخدام البوابات.

– إن مجموعة البوابات $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ تسمى كاملة وظيفياً (Functionally Complete)، إذا كان لأي عدد صحيح موجب n ولأي دالة f من Z_2^n إلى Z_2 من الممكن إنشاء دائرة موحدة لحساب f باستخدام البوابات $g_1, g_2, \ldots, g_k$.

– دائرة نصف الجامع تستقبل البتات x و y كمدخل وتنتج مخرجاً هو حاصل الجمع الثنائي للبتات x و y، ولأن حاصل الجمع مكون من 2 بت فإن المخرج يعبر عنه بمخرجين s و c حيث s هو بت الجمع و c هي بت الحمل ويكون حاصل الجمع هو cs.

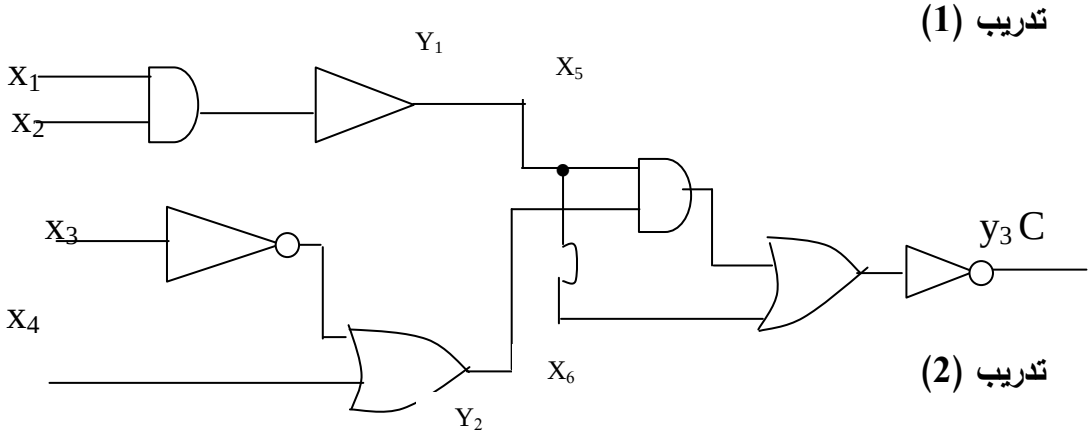
– دائرة الجامع الكامل تستقبل كمدخل ثلاثة بتات x, y, z وتخرج حاصل الجمع الثنائي cs للبتات x, y, z حاصل الجمع cs مكون من 2–بت.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

انتهيت عزيزي الدارس، من دراسة الوحدة السادسة والتي عاجلت " الجبر البولي والدوائر المجمعة" وسوف نتعرف بإذن الله تعالى في الوحدة السابعة من هذا المقرر على موضوع " الآلات محدودة الحالات "،والتي نتناول فيها الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات،وسوف نتعرف كذلك على التخطيط الانتقالي. وتبحث الوحدة التالية في آلات تذكر أو تمييز الأنماط حيث سندرس بعض الأمثلة لآلات محدودة الحالات يتم تصميمها بحيث تكون لديها القدرة على تذكر أنماط مدخلات معينة.

إجابات التدريبات

تدريب (1)



تدريب (2)

التعابير البوولية المقابلة للدائرتين هي:

1- للدائرة (أ) $x_1 V(x_2 \wedge x_3)$

2- للدائرة (ب) $(x_1 V x_2) \wedge (x_1 V x_3)$

من النظرية (1.2.6) نجد أن:

$$aV(b \wedge c) = (aVb) \wedge (aVc)$$

لكل $a,b,c \in Z_2$

وهذا يعني ان:

$$x_1 V (x_2 \wedge x_3) = (x_1 V x_2) \wedge (x_1 V x_3)$$

إذن فإن الدائرتين متطابقتين وبالتالي سيكون لها نفس المخرج لنفس المدخل.

تدريب (3)

بناءً على التعريف (1.2.6) ستكون المعادلة أعلاه صحيحة إذا كانت المعادلة صحيحة لكل القيم التي يمكن أن تأخذها x و y في z_2.

لهذا فإننا سنقوم بإنشاء جدول منطقي للقيم x و y ونرصد قيم طرفي المعادلة.

x	y	$\overline{x V y}$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

من الجدول المنطقي نجد $(\overline{x \, V \, y}) = \overline{x} \wedge \overline{y}$

تدريب (4)

جدول المنطق للمؤثر $\oplus$ هو

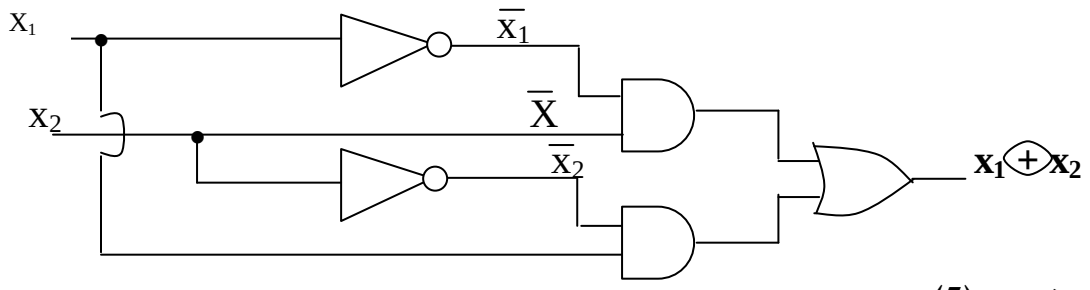
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ومنه نجد أن الشكل العادي المتقطع للدالة هو:-

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \overline{x}_2) V (\overline{x}_1 \wedge x_2)$$

الدائرة المجمعةالمقابلة للتعبير:

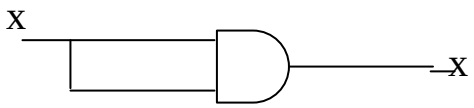
$f(x_1,x_2) = (x_1 \wedge \overline{x}_2) V (x_1 \wedge \overline{x}_2)$ يوضحها الشكل



تدريب (5)

$$\overline{x} = \overline{x}\,\overline{x} = x \uparrow x$$

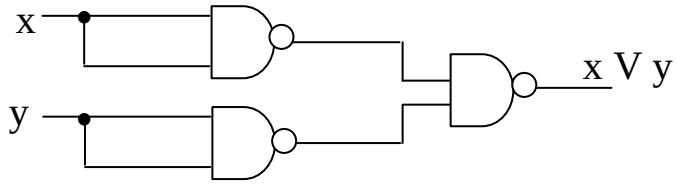
إذن الدائرة هي



الشكل (أ)

$$xVy = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{x} \uparrow \overline{y} = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$$

إذن الدائرة هي



الشكل (ب)

تدريب (6)

المخرج الأول هو $y_1 = a\overline{b}$

المخرج الثاني هو $y_2 = bc \; V \; a\overline{b}$

تدريب (7)

مخرج أول بوابة "و" هو $A\,B\,C$ ومخرج ثاني بوابة "و" هو $\overline{A}\,\overline{B}\,C$ ومخرج آخر بوابة "و" هو $A\,B$ ، ولهذا فإن

$$Y = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}$$

مسرد المصطلحات

❀ الدوائر المجمعة (Combinatorial Circuits)

هي دوائر لا ذاكرة لها، أي أن المخرج من الدائرة يعتمد كلياً على المدخلات الحالية وليس على مدخلات سابقة أو على حالة النظام.

❀ تعريف الرسم الموجّه التحتي لدائرة(Underlying Diagram of a Circuit)

هو الرسم الموجّه الذي يتم الحصول عليه من دائرة مجمّعة. تشتمل مجموعة العقد في هذا الرسم المدخلات على: المخرجات، والبوابات في الدائرة.

❀ سلوك الدائرةالمجمعّة

هو معرفة أثر المدخلات على المخرج من الدائرة يمكن تمثيل سلوك الدائرةالمجمعّةبما يسمى بجدول المنطق.

❀ جدول المنطق (Logic Table)

وهو عبارة عن جدول صدق (Truth Table) يحوي كافة الاحتمالات الممكنة للمدخلات للدائرة والمخرجات المقابلة لها.

❀ الدوائر المجمعة المتكافئة

نقول إن الدائرتين C_2 وC_1 دوائر متكافئة(Equivalent) إذا كان لكل منها المدخلات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ومخرج مفرد (واحد). وأن الدائرتين تنتجان نفس المخرج عندما تكون لهما نفس المدخلات.

❀ الجبر البوولي (Boolean Algebras)

الجبر البوولي B نظام يشمل على المجموعة S التي تحتوي على العناصر 1 و0 وعلى المؤثرات الثنائية + والمؤثر الاحادي والتي تعمل على S .

❀ البوابة (Gate)

البوابة هي دالة من Z^n_2 إلى Z_2 أي $g= f: Z^n_2 \longrightarrow Z_2$

❀ دائرة نصف الجامع (Half-Adder Circuit)

دائرة نصف الجامع تستقبل البتات x و y كمدخل وتنتج مخرجاً هو حاصل الجمع الثنائي للبتات x و y، ولأن حاصل الجمع مكون من 2بت فإن المخرج يعبر عنه بمخرجين s و c حيث s هو بت الجمع و c هي بت الحمل ويكون حاصل الجمع هو cs.

❀ الجامع الكامل(Full-Adder)

دائرة الجامع الكامل تستقبل كمدخل ثلاثة بتات x, y, z وتخرج حاصل الجمع الثنائي cs للبتات x, y, z حاصل الجمع cs مكون من 2–بت.

الوحدة السابعة
الآلات محدودة الحالات
Finite-State Machines

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	**221**
تمهيد	**221**
أهداف الوحدة	**222**
1. الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات	223
1.1 الآلة محدودة الحالات	225
2.1 التخطيط الانتقالي	227
2. آلات تذكر/ تمييز الأنماط	**230**
الخلاصة	**234**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**235**
إجابات التدريبات	**236**
مسرد المصطلحات	**242**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة السابعة من مقرر " الرياضيات المتقطعة2"، وموضوعها " الآلات محدودة الحالات ".

القسم الأول من الوحدة يتناول الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات وذلك عن طريق عرض مثال يشرح الفكرة الأساسية ، وبناء على هذا المثال نعرف الآلة محدودة الحالات ، ينتقل القسم بعد ذلك إلى تعريف التخطيط الانتقالي.

القسم الثاني والأخير من الوحدة يبحث في آلات تذكر / تمييز الأنماط حيث سندرس بعض الأمثلة لآلات محدودة الحالات يتم تصميمها بحيث تكون لديها القدرة على تذكر أنماط مدخلات معينة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تعرف** الآلة محدودة الحالات.
- **توضح** الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات عن طريق المثال.
- **ترسم** التخطيط الانتقالي لبعض الآلات محدودة الحالات.
- **توجد** المخرج المقابل لعدد من سلاسل المدخلات لآلة محدودة الحالات معطاة.
- **تصمم** مجموعة من الآلات محدودة الحالات التي لها الصفات المعطاة.

توطئة

عزيزي الدارس، في الوحدة السادسة ناقشنا الدوائر الموحدة والتي يكون فيها مخرج الدائرة معتمداً كلياً على المدخلات، لذا فإن هذه الدائرة لا ذاكرة لها .

في هذه الوحدة سنناقش الدوائر التي يكون فيها مخرج الدائرة لا يعتمد فقط على المدخلات وإنما أيضاً على حالة النظام (الدائرة) في وقت الإدخال. إن حالة النظام (الدائرة) تعني الوضع الحالي للدائرة و الناتج عن المعالجات السابقة التي تمت داخل الدائرة.

إن مثل هذه الدوائر هي دوائر لها ذاكرة لأنها تعرف الحالة التي تكون عليها، وبالتالي فإن نفس المدخلات باختلاف حالة الدائرة تجعل الدائرة تنتج مخرجات مختلفة .

مثل هذه الدوائر تسمى الدوائر المتتابعة (Sequential Circuits) وهي دوائر ذات أهمية عالية في تصميم الحواسيب .

إن الشكل المجرد للدوائر المتتابعة تسمى الآلات محدودة الحالات (Finite-State Machines) نتيجة لمحدودية عدد الحالات التي تنتقل بينها الدائرة. هنالك نوع خاص من الآلة محدودة الحالات تصمم بحيث تتعامل مع لغة معينة يسمى هذا النوع الخاص بالأتومتا محدودة الحالات.

سنناقش في هذه الوحدة الآلات محدودة الحالات وفي الوحدة التالية، الأتومتا محدودة الحالات واللغات.

1. الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات

سنوضح الفكرة الأساسية للآلة محدودة الحالات عن طريق المثال التالي:

مثال(1.1.7): إذا افترضنا أن لدينا آلة بسيطة تؤدي عمليتي الجمع و الضرب على الأعداد في المجموعة {2,1}، وتسمح للمستخدم بتحديد الأعداد المراد إجراء العملية عليها ثم تحديد العملية ثم تظهر ناتج العملية الحسابية، وأردنا أن نقوم بالعملية 2+1. الجدول (1.1.7) يبين لنا ترتيب الأحداث (العمليات) التي تتم داخل هذه الآلة:

الزمن	t_1	T_2	t_3	t_4
الحالة	(1) s_1	(4)s_2 [1]	(7)s_3 [1,2]	10(s_1)
الإدخال	(2)1	(5)2	(8)+	
الإخراج	لا شئ(3)	لا شئ (6)	(9)3	

الجدول(7.1.1)

يبين الجدول ما يحدث في كل من الأوقات t_4,t_3,t_2,t_1 .

الجدول يبين أن هنالك رصد لعشرة(10) عمليات من (1) إلى(10) هي:

①عند الزمن t_1 فإن الآلة في الحالة s_1 وهي الحالة التي تكون فيها الآلة في انتظار بدء إجراء العملية الحسابية .

②تم إدخال العدد الأول 1 خلال الفترة الزمنيةt_1 .

③لا يوجد مخرج من الآلة خلال الفترة الزمنيةt_1

④بمجرد إدخال العدد الأول فإن الفترة الزمنية t_1 تنتهي وتبدأ الفترة الزمنية t_2. في هذه الفترة فإن حالة الآلة تتحول من s_1 إلى s_2. s_2 هي الحالة التي تكون فيها الآلة قد حفظت العدد الأول.

⑤خلال الفترة t_2 يتم إدخال العدد الثاني 2.

⑥عند لحظة الإدخال للعدد الثاني لا يوجد إخراج من الآلة .

⑦بانتهاء عملية إدخال العدد الثاني 2 ندخل في الفترة الزمنية الثالثة t_3 والتي تتحول حالة الآلة من الحالة s_2 التي كانت فيها الآلة تحفظ عدداً واحداً إلى الحالة s_3 والتي تكون فيها الآلة تحفظ عددين [1,2].

⑧خلال الفترة s_3 يتم تحديد العملية المراد إجراؤها(t).

⑨خلال نفس الفترة تطبع الآلة ناتج العملية الحسابية (3).

⑩بطباعة ناتج العملية الحسابية تنتهي الفترة الزمنية الثالثة t_3 وتبدأ الفترة الزمنية الرابعة t_4 ، وعندها تعود الآلة لوضعها الأول s_1.

نلاحظ أن هذه الآلة لها عدد محدود من الحالات هي:

s_1 وهي الحالة الأولية التي تكون فيها الآلة جاهزة للاستخدام .

s_2 وهي الحالة التي تكون فيها الآلة على علم ببعض المعلومات المطلوبة لأداء عملها.

s_3 وهي الحالة التي تكتمل فيها المعلومات المطلوبة وتؤدي فيها الآلة عملها .

كما أن هنالك عدد محدود من المدخلات {1,2} والعمليات + ، × يقابلها عدد محدود من المخرجات.

نلاحظ بوضوح تام أن الآلة تنتقل من حالة إلى حالة كنتيجة لإدخال مدخلات جديدة، وأن المخرج لا يكون في كل الحالات وإنما في حالة محددة، إذن فإن المخرج من هذه الآلة يعتمد على الحالة التي تكون فيها الآلة (الحالة s_2) وعلى المدخلات في الفترة الزمنية التي تكون فيها الآلة في الحالة s_2 .

عزيزي الدارس، بناءً على هذا المثال يمكننا الآن أن نعرف الآلة محدودة الحالات:

1.1 الآلة محدودة الحالات (Finite-State Machine)

الآلة محدودة الحالات M تشتمل على ستة أشياء هي:

(أ) مجموعة محدودة من المدخلات الأبجدية للآلة نرمز لها بالرمز I.

(ب) مجموعة محدودة من المخرجات الأبجدية للآلة نرمز لها بالرمز O.

(ج)مجموعة محدودة الحالات نرمز لها بالرمز S.

(د)دالة الحالة التالية $f: SXI \rightarrow S$

(هـ) دالة الإخراج $g: SXI \rightarrow O$

(و) حالة ابتدائية (أولية) للآلة S^*

وتكتب $M= (I, O, S, f, g, S^*)$

مثال(2.1.7):

إذا كانت $I= \{a,b\}$, $O= \{0,1\}$ و $S= \{s_0,s_1\}$ وعرفت الدوال $f= S\times I\longrightarrow S$ و $g= S \times I\longrightarrow O$ وفقاً للقواعد الموجودة في الجدول الانتقالي (Transition Table) في(2.1.7)

	f		g	
S \ I	a	b	a	b
s_0	s_0	s_1	0	1
s_1	s_1	s_1	1	0

الجدول (2.1.7)

فإن $M= (I, O, S, f, g, S_0)$

هي آلة محدودة الحالات.

الجدول (2.1.7) يفسر على النحو التالي:

$f(s_0,a)= s_0 \quad g(s_0,a)= 0$
$f(s_0,b)= s_1 \quad g(s_0,b)= 1$
$f(s_1,a)= s_1 \quad g(s_1,a)= 1$
$f(s_1,b)= s_1 \quad g(s_1,b)= 0$

إن دالتي الحالة التالية f ودالة الإخراج g يمكن أن يعرف أيضاً بواسطة ما يسمى بالتخطيط الانتقالي (Transition Diagram) بدلاً عن الجدول الانتقالي (Transition Table) .

في المثال التالي سنبين كيف يتم إنشاء التخطيط الانتقالي لآلة محدودة الحالات.

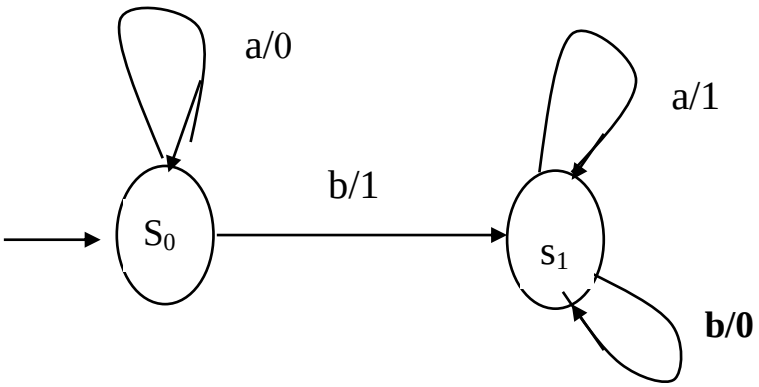
مثال(3.1.7): ارسم التخطيط الانتقالي للآلة محدودة الحالات في المثال (2.1.7).

إن التخطيط الانتقالي هو رسم موجّه (Diagraph)، تكون فيه العقد هي الحالات (states) ونميز الحالة الأولية للآلة *S بسهم (انظر الشكل 1.1.7). إذا كنا في الحالة S وكان إدخال المدخل i يترتب عليه إخراج O والانتقال للحالةَ S، سنقوم برسم حد موجّه من العقدة S إلى العقدة ٥S ونميز الحد بالمميز i/o.

كمثال إذا كنا في الحالة s_0 وقمنا بإدخال المدخل a، فإن الجدول (2.1.7) يخبرنا بأن المخرج سيكون0 وأن الآلة ستظل في الحالة s_0، ونميزه بالمميز a/0. (انظر الشكل (1.1.7.

في الجانب الآخر، إذا كنا في الحالة s_0 وقمنا بإدخال المدخل b فإن المخرج سيكون 1 وسننتقل للحالة s_1، لهذا سنرسم حداً موجهاً بين s_0 و s_1 ونميزه بالمميز b/1.

بأخذ كافة الاحتمالات للمدخلات عند الحالات المختلفة للآلة سنحصل على التخطيط الانتقالي الموضح في الشكل (1.1.7) :



الشكل **(1.1.7)**

2.1 التخطيط الانتقالي (Transition Diagram)

إذا كانت M= (I, O, S, f, g, s*)

هي آلة محدودة الحالات فإن التخطيط الانتقالي للآلة M هو الرسم الموجّه (Digraph) G الذي تكون فيه العقد هي عناصر S. تميز العقدة المعبرة عن الحالة الأولية للآلة s* بسهم ويكون الحد الموجّه (s،ś) موجوداً في الرسم G إذا كان هنالك مدخل i بحيثَ s =f(s,i). وفي هذه الحالة إذا كانت O =g(s,i) فإن الحد الموجة (s،sَ) يميز بالمميز i/0.

تعريف(3.1.7): إذا كانت $M= (I, O, S, f, g, s^*)$ هي آلة محدودة الحالات فإننا نعرف السلسلة المدخلة (Input String) للآلة M كسلسلة في المجموعة I، ويرمز لها بالرمز $\propto$ وتكتب

$$\propto = i_1, i_2, \ldots., i_n$$

$$j= 1,2,\ldots,n \text{ و } i_j \epsilon I \text{ حيث}$$

تقابل كل سلسلة مدخلة للآلة M، سلسلة مخرجة (Output String) يرمز لها بالرمز γ وتكتب:

$$\gamma = O_1, O_2, .., O_n$$

$$K= 1,2,\ldots,n \text{ و } o_k \epsilon O \text{ حيث}$$

فقط إذا كانت هنالك الحالات $s_0, s_1, \ldots,s_n \epsilon S$ بحيث تكون $s_0= s^*$

$$S_j= f(s_{j-1}, i_j) , \ j= 1,2,..,n \text{ و}$$

$$O_j= g(s_{j-1} , i_j) , \ j= 1,2,..,n \text{ و}$$

أي أن إحدى الحالات في المجموعة S هي حالة أولية للآلة وأن أي حالة $s_j \epsilon S$ يمكن الانتقال إليها من الحالة السابقة لها s_{j-1} وان هنالك مخرجاً o_j عند كل حالة s_{j-1}.

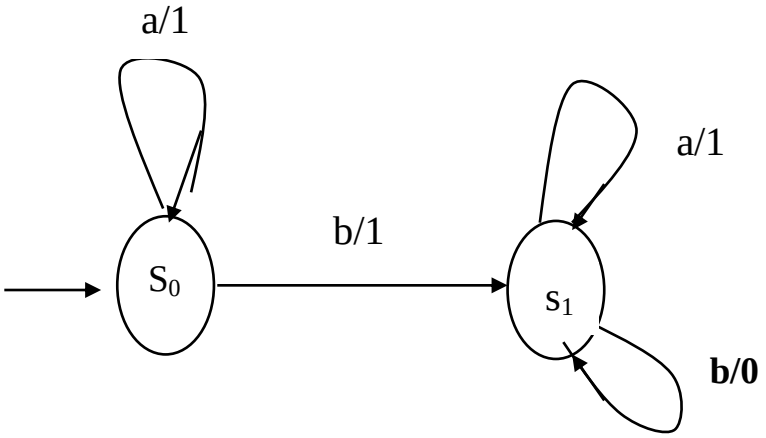
مثال(4.1.7): أوجد السلسة المخرجة γ المقابلة للسلسلة المدخلة

$$\alpha = \text{aababba}$$

للآلة محدودة الحالات M في المثال (2.1.7)

الحل:

التخطيط الانتقالي للآلة M في المثال (2.1.7) هو



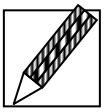
لمعرفة السلسلة المخرجة سنبدأ بإدخال حروف السلسلة المدخلة بدءاً من الحالة الأولية s_0 ونرصد حركة الانتقال من حالة لحالة والمخرج عند كل عملية إدخال لحرف لنحصل في النهاية على السلسلة المخرجة .

إذن عند الحالة s_0

- المدخل الأول a سينتج المخرج 0 وسنبقى في الحالة s_0.
- المدخل الثاني a سينتج المخرج 0 وسنبقى في الحالة s_0.
- المدخل الثالث b سينتج المخرج 1 وسننتقل للحالة s_1.
- المدخل الرابع a سينتج المخرج 1 وسنبقى في الحالة s_1.
- المدخل الخامس b سينتج المخرج 0 وسنبقى في الحالة s_1.
- المدخل السادس b سينتج المخرج 0 وسنبقى في الحالة s_1.
- المدخل السابع والأخير هو a سينتج المخرج 1 وسنبقى في الحالة s_1.

إذن السلسلة المخرجة هي $\propto$ = 0011001

تدريب (1)



افترض أننا نود تصميم آلة تقوم بجمع عددين ثنائيين، كمثال =a 01011 و b= 00101 .وضح كيف نصمم هذه الآلة؟

2. آلات تذكر/ تمييز الأنماط

(Pattern Recognition Machine)

عزيزي الدارس،

سندرس هنا أمثلة لآلات محدودة الحالات يتم تصميمها بحيث تكون لديها القدرة على تذكر أنماط مدخلات معينة.

في الأمثلة التالية سنصف حالة الآلة إما بأنها حالة متوقعة "expected" أو بأنها حالة غير متوقعة "unexpected" حتى يكون فهم الأمثلة أسهل .

مثال(1.2.7): إفترض أننا نريد تصميم آلة تذكر أنماط يكون فيها $I= O= \{0,1\}$ ويمكنها تذكر أو تميز النمط 11 في سلسلة المدخل. كمثال لذلك اذا كانت سلسلة المدخل هي :

$$x=1011101010111$$

فإن سلسلة المخرج يجب ان تكون هي :

$$y= 0001100000011$$

أي أن الآلة تخرج 1 فقط عندما يكون آخر مدخلين متتابعين لها هو 11 وتخرج 0 لغير ذلك.

لتصميم هذه الآلة، فإن الآلة يحب أن تحتوي على الأقل على حالتين، الحالة الأولى عندما يكون المدخل السابق هو0، وهي حالة عدم توقع لتمييز النمط بعد الإدخال التالي، والحالة الثانية عندما يكون المدخل السابق هو 1 وهي حالة توقع لتمييز النمط بعد المدخل التالي.

بالإضافة لهاتين الحالتين على الآلة أن تعمل وفقاً للقواعد التالية:

1- إذا كانت الآلة في حالة عدم التوقع وكان المدخل التالي هو:

- 0 : يكون المخرج هو 0 وتبقى الآلة في نفس الحالة.
- 1 : يكون المخرج هو 0 وتنتقل الآلة لحالة التوقع .

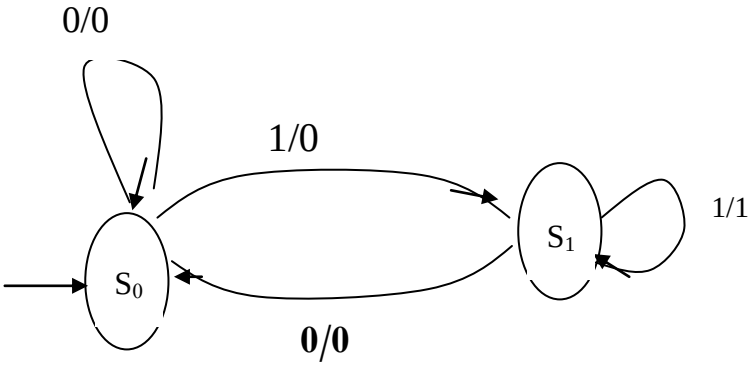
2- إذا كانت الآلة في حالة التوقع وكان المدخل التالي هو :

- 0 : يكون المخرج هو 0 وتعود الآلة لحالة عدم التوقع .
- 1 : يكون المخرج هو 1وتبقى الآلة في حالة عدم التوقع .

بناءً على القواعد أعلاه تكون لهذه الآلة الجدول الانتقالي (1.2.7) والتخطيط الانتقالي(1.2.7) والحالة الأولية هي حالة عدم التوقع.

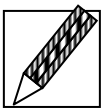
	f		g	
S \ I	0	1	0	1
s_0 (عدم التوقع)	s_0	s_1	0	0
s_1 (التوقـع)	s_0	s_1	0	1

جدول(1.2.7)



شكل (1.2.7)

تدريب (2)



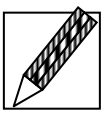
افترض أننا نود تصميم آلة تكون لها القدرة على تذكر أو تميز السلسلة 111 إذا كانت {0,1} =O =I. كمثال إذا كانت

x= 1011011110111

فيجب أن يكون المخرج هو

y= 0000000110001

تدريب (3)



صمم كلاً من الآلات محدودة الحالات التي لها الصفات المعطاة، مفترضاً أن المدخل دائماً هو سلسلة أرقام ثنائية(بتات).

(أ) يكون المخرج 1 إذا كان عدد البتات 1 في السلسلة المدخلة زوجي ويكون المخرج 0 لغير ذلك .

(ب) يكون المخرج 1 إذا كان عدد البتات 1 في السلسلة المدخلة اثنين أو أكثر، ويكون المخرج 0 لغير ذلك .

(ج) يكون المخرج 1 متى ما ميزت الآلة البتات 101 في السلسلة المدخلة ويكون المخرج 0 لغير ذلك .

أسئلة تقويم ذاتي(1)

ارسم التخطيط الانتقالي لكل من الآلات محدودة الحالات التالية :

(أ) $I= \{a,b\}, O= \{0,1\}, S= \{s_0,s_1\}$

	f		g	
S \ I	a	b	a	b
s_0	s_1	s_1	1	1
s_1	s_0	s_1	0	1

(ب) $I= \{a,b\}, O= \{0,1\}, S= \{s_0,s_1\}$

	f		g	
S \ I	a	b	a	b
s_0	s_1	s_1	0	1
s_1	s_2	s_1	1	1
s_2	s_0	s_0	0	0

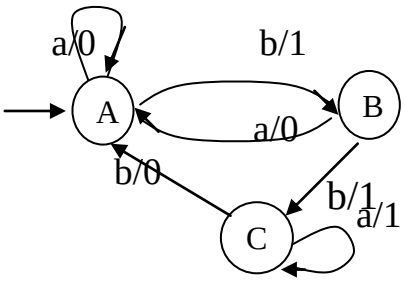
(ج) $I= \{a,b\}, O= \{0,1,2\}, S= \{s_0,s_1,s_2,s_3\}$

	f			g		
S \ I	a	b	c	a	b	c
s_0	s_1	s_0	s_2	1	1	2
s_1	s_0	s_2	s_2	2	0	0
s_2	s_3	s_3	s_0	1	0	1
s_3	s_1	s_1	s_0	2	0	2

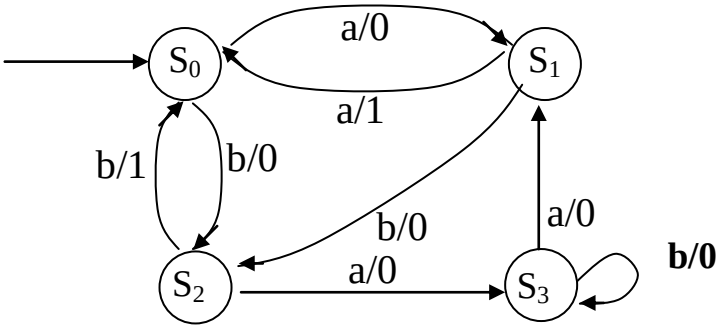
أسئلة تقويم ذاتي(2)

أوجد المجموعات S, O, I والحالة الأولية ومن ثم الجدول الانتقالي الذي يعرف دالة الحالة التالية f ودالة الإخراج g لكل من الآلات محدودة الحالات التالية :

أ/



ب/



الخلاصة

عزيزي الدارس ، لقد عرضت لك في هذه الوحدة السابعة من مقرر "الرياضيات المتقطعة2 " الموضوعات الأساسية التالية:

✸ ناقشنا في هذه الوحدة الدوائر التي يكون فيها مخرج الدائرة لا يعتمد فقط على المدخلات وإنما أيضاً على حالة النظام (الدائرة) في وقت الإدخال . إن حالة النظام (الدائرة) تعني الوضع الحالي للدائرة و الناتج عن المعالجات السابقة التي تمت داخل الدائرة.

إن مثل هذه الدوائر هي دوائر لها ذاكرة لأنها تعرف الحالة التي تكون عليها وبالتالي فإن نفس المدخلات باختلاف حالة الدائرة تجعل الدائرة تنتج مخرجات مختلفة .

مثل هذه الدوائر تسمى الدوائر المتتابعة (Sequential Circuits)، وهي دوائر ذات أهمية عالية في تصميم الحواسيب .

✸ التخطيط الانتقالي إذا كانت $M= (I, O, S, f, g, s^*)$ هي آلة محدودة الحالات فإن التخطيط الانتقالي للآلة M هو الرسم الموجّه (Digraph) G الذي تكون فيه العقد هي عناصر S. تميز العقدة المعبرة عن الحالة الأولية للآلة s^* بسهم ويكون الحد الموجّه $(s، s')$ موجوداً في الرسم G إذا كان هنالك مدخل i بحيث $f(s,i)= s'$. وفي هذه الحالة إذا كانت $g(s,i)= O$ فإن الحد الموجه $(s، s')$ يميز بالمميز i/0.

✸درسنا أمثلة لآلات محدودة الحالات تم تصميمها بحيث تكون لديها القدرة على تذكر أنماط مدخلات معينة.

وفي هذه الأمثلة قمنا بوصف حالة الآلة إما بأنها حالة توقع "expected" أو بأنها حالة عدم توقع "unexpected".

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

انتهيت عزيزي الدارس، من دراسة الوحدة السابعة والتي عاجلت " الآلات محدودة الحالات" ينتقل بك المقرر إلى الوحدة الثامنة (الأخيرة) التي سنتابع فيها موضوع " الأوتوماتا محدودة الحالات واللغات"والتي سوف نتعرف فيها على الأوتوماتا محدودة الحالات مبني على أن بعض الحالات هي حالات قبول. وسوف نقوم بتصميم أوتوماتا محدودة الحالات تقبل السلاسل، وسوف نتعرف كذلك على اللغة الرسمية ، والنحو ، وشكل باكوس ناير، سوف نتعرف أيضاً على أصناف النحو :نحو حساس السياق ، نحو حر السياق ، ونحو منتظم ، وسوف نحدد العلاقة بين النحو المنتظم والاوتوماتا محدودة الحالات ، وسنقوم بتحويل الاوتوماتا إلى نحو منتظم ، ونقوم كذلك بتحويل النحو المنتظم إلى أوتوماتا.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

عملية الجمع تتم على النحو التالي :

a		0	1	0	1 1
+b	+	0	0	1	0 1
c		1	0	0	0 0

إذا كتبنا $a= a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ و $b= b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5$

فيمكننا أن نعبر عن الرقمين الثنائيين المراد جمعهما من a و b على النحو التالي:

$$x_j= (a_j,b_j) \quad \text{حيث} \quad j= 1, 2, 3, 4, 5$$

وبالتالي فإن سلسلة المدخلات ستكون هي:

$X_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ وسلسلة المخرجات المقابلة هي $c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5$.

عند إجرائنا لعملية الجمع فإننا ننظر إذا كان هنالك تحميل (carry) من عملية الجمع السابقة. إذا كان هنالك تحميل فإننا نجمع الحمل إلى حاصل جمع الرقمين الثنائيين، وإذا لم يكن هنالك حمل فإننا نجمع الرقمين الثنائيين فقط.

إذن قبل إجراء أي عملية جمع لزوج الأرقام الثنائية للمدخل فإن هنالك حالتين:

- ☼ حالة عدم وجود حمل s_0 .
- ☼ وحالة وجود حمل s_1.

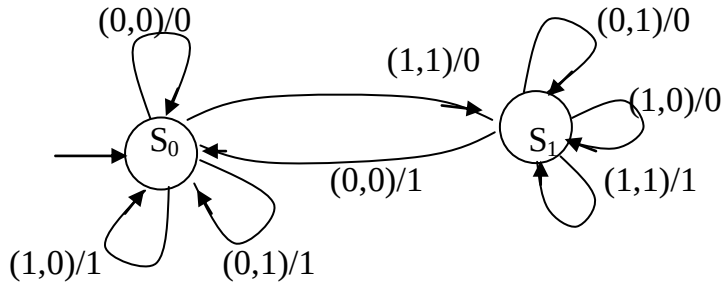
الآن يمكننا ان نقول إن الآلة M التي تعبر عن عملية جمع العددين الثنائيين a و b تعرف على النحو التالي:

$$I= \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$O= \{0,1\}$$
$$S= \{ s_0, s_1\}$$

وأن الدالتين $f: S \times I \longrightarrow O$ و $g: S\times I \longmapsto S$ نعرفهما وفقاً للجدول الانتقالي التالي:

	G				F			
I / S	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
s_0	0	1	1	0	s_0	s_0	s_0	s_1
s_1	1	0	0	1	s_0	s_1	s_1	s_1

واضح أن الحالة s_0 هي الحالة الابتدائية (الأولية). يمكن أن نعبر عن الجدول أعلاه بالتخطيط الانتقالي في الشكل التالي:



تدريب (2)

لكي تميز الآلة السلسلة 111 فيجب أن تكون للآلة ثلاث حالات على الأقل، حالة تعبر عن عدم التوقع وهي الحالة التي يكون فيها آخر مدخل هو 0 وحالة تعبر عن توقع بعيد وهي الحالة التي يكون آخر مدخلين هما 01. أو ان المدخل الأول هو 1. وحالة توقع وهي الحالة التي يكون فيها آخر مدخلين هما11.واضح ان حالة عدم التوقع هي الحالة الاولية. بالإضافة لهذه الحالات الثلاثة على الآلة أن تعمل وفقاً للقواعد التالية :

1- إذا كانت الآلة في حالة عدم التوقع وكان المدخل التالي هو:

- 0، يكون المخرج هو 0 وتبقى الآلة في نفس الحالة.
- 1، يكون المخرج هو0 وتنتقل الآلة لحالة عدم التوقع البعيد.

2- إذا كانت الآلة في حالة التوقع البعيد وكان المدخل التالي هو:

- 0، يكون المخرج هو 0 وتنتقل الآلة لحالة عدم التوقع.

- 1، يكون المخرج هو0 وتنتقل الآلة لحالة التوقع .

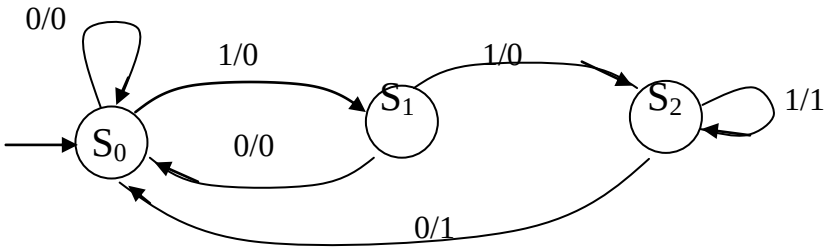
3- إذا كانت الآلة في حالة التوقع وكان المدخل التالي هو:

- 0، يكون المخرج هو 0 وتنتقل الآلة لحالة عدم التوقع.
- 1، يكون المخرج هو1 وتبقى الآلة في نفس الحالة.

بناءً على القواعد أعلاه، تكون لهذه الآلة الجدول الانتقالي والتخطيط الانتقالي

	f		g	
S \ I	0	1	0	1
s_0 (عدم التوقع)	s_0	s_1	0	0
s_1 (التوقع البعيد)	s_0	s_1	0	0
s_2(التوقع)	s_0	s_2	0	1

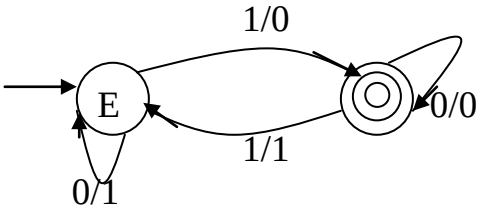
وسيكون لها التخطيط الانتقالي التالي:



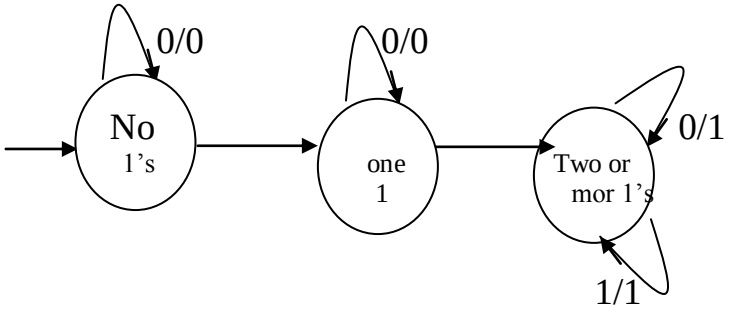
تدريب (3)

المسألة(أ)

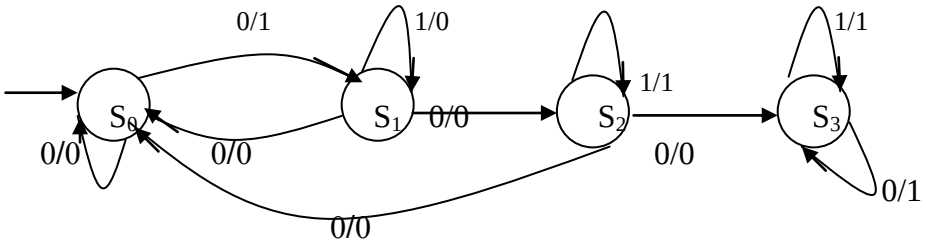
التصميم هو:



المسألة(ب)
التصميم هو



المسألة(ج)
التصميم هو

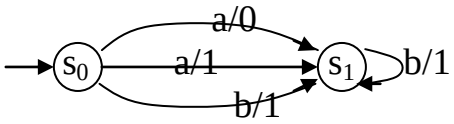


إجابات أسئلة التقويم الذاتي

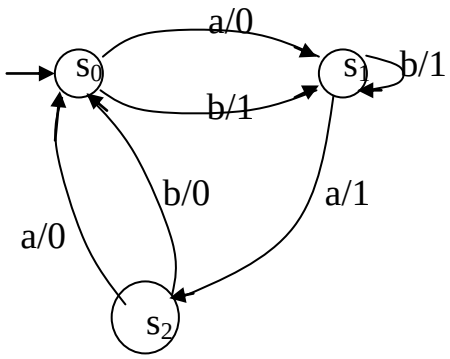
أسئلة تقويم ذاتي(1)

الحلول:

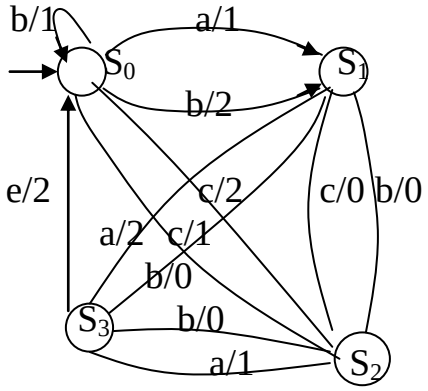
المسألة (أ)



المسألة(ب)



المسألة(ج)



أسئلة تقويم ذاتي(2)

المسألة(أ)

الحالة الأولية I= {a,b}, O= {O,1}, S+{A,B,C}

S \ I	f		g	
	a	b	a	b
A	A	B	0	1
B	A	C	0	1
C	C	A	1	0

المسألة(ب)

الحالة الأولية I= {a,b}, O= {0,1}, S={s_0, s_1, s_2, s_3}

S \ I	f		g	
	a	b	a	b
s_0	s_1	s_2	0	0
s_1	s_0	s_2	1	0
s_2	s_3	s_0	0	1
s_3	s_1	s_3	0	0

مسرد المصطلحات

❁ **الدوائر المتتابعة (Sequential Circuits)**

هي دوائر لها ذاكرة لأنها تعرف الحالة التي تكون عليها وبالتالي فإن نفس المدخلات باختلاف حالة الدائرة تجعل الدائرة تنتج مخرجات مختلفة وهي دوائر ذات أهمية عالية في تصميم الحواسيب .

❁ **التخطيط الانتقالي (Transition Diagram)**

إذا كانت $M= (I, O, S, f, g, s^*)$ هي آلة محدودة الحالات فإن التخطيط الانتقالي للآلة M هو الرسم الموجّه (Digraph) G الذي تكون فيه العقد هي عناصر S.

❁ **السلسلة المدخلة (Input String)**

إذا كانت $M= (I, O, S, f, g, s^*)$ هي آلة محدودة الحالات فإننا نعرف السلسلة المدخلة (Input String) للآلة M كسلسلة في المجموعة I، ويرمز لها بالرمز $\propto$ وتكتب:

$$\propto = i_1, i_2, \ldots, i_n$$

حيث $i_j \epsilon I$ و $j= 1,2,\ldots,n$

الوحدة الثامنة
الاوتوماتا محدودة الحالات واللغات
Finite State Automata and Language

محتويات الوحدة

المحتوى	رقم الصفحة
المقدمة	**245**
تمهيد	**245**
أهداف الوحدة	**246**
1 . الأوتوماتا محدودة الحالات	247
2. قبول السلاسل المدخلة	252
3. اللغات والنحو	258
1.3 اللغة الرسمية	258
2.3 النحو	259
4. أنواع النحو	263
1.4 النحو المتكافئ	268
5. العلاقة بين النحو المنتظم والأوتوماتا محدودة الحالات	269
1.5 تحويل الأوتوماتا إلى نحو منتظم	269
2.5 تحويل النحو المنتظم إلى اوتوماتا	272
الخلاصة	277
إجابات التدريبات	279
مسرد المصطلحات	282

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

نرحب بك إلى الوحدة الثامنة والأخيرة من مقرر " الرياضيات المتقطعة2" وموضوعها " الأوتوماتا محدودة الحالات واللغات".

تبدأ الوحدة وفي قسمها الأول بتعريف الاوتوماتا محدودة الحالات، كذلك ستتعرف على تعريف آخر جديد للأوتوماتا محدودة الحالات مبني على أن بعض الحالات هي حالات قبول.

في القسم الثاني تتناول الوحدة قبول السلاسل المدخلة، وهنا سنقوم بتصميم أوتوماتا محدودة الحالات تقبل السلاسل.

القسم الثالث من الوحدة يبحث في اللغات والنحو وفيها تعريف اللغة الرسمية ، والنحو ، وشكل باكوس ناير.

القسم الرابع من الوحدة عنوانه أنواع النحو، حيث ستتعرف على أصناف النحو :نحو حساس السياق ، ونحو حر السياق ، ونحو منتظم .

القسم الخامس من الوحدة يحدد العلاقة بين النحو المنتظم والأوتوماتا محدودة الحالات ، وفي هذا القسم سنقوم بتحويل الأوتوماتا إلى نحو منتظم ، ونقوم كذلك بتحويل النحو المنتظم إلى أوتوماتا.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **ترسم** مخططاً انتقالياً للأتوماتا محدودة الحالات .
- **تصمم** اتوماتا محدودة الحالات تقبل السلاسل المكونة من مجموعة عناصر .
- **ترسم** مخططاً انتقالياً للأتوماتا من جدول انتقالي .
- **تصف** شكل باكوس ناير .
- **تعدد** أنواع النحو .
- **تذكر** أمثلة لنحو حساس السياق ، وحر السياق، ومنتظم السياق .
- **تعطي** أمثلة لنحو على شكل باكوس ناير .
- **تشرح** بالمثال تحويل أتوماتا محدودة الحالات إلى نحو منتظم .
- **تشرح** بالمثال تحول نحو منتظم إلى أتوماتا .

1 . الأوتوماتا محدودة الحالات

عزيزي الدارس ،

الاوتومات محدودة الحالات هي نوع خاص من الآلات محدودة الحالات، وهي ذات علاقة باللغات كما سنرى في القسم (2).

تعريف الأوتوماتا محدودة الحالات

الأتوماتا محدودة الحالات هي الآلة محدودة الحالات

$A= (I, O, S, f, g, s^*)$

التي يكون فيها $O= \{0,1\}$

وتحدد الحالة الماثلة المخرج النهائي لسلسلة المدخلات.

إن الحالات التي تحدد أن المخرج النهائي لسلسلة المدخلات هو 1 تسمى بحالات القبول (Accepting States) .

مثال(1.1.8):

ارسم المخطط الانتقالي للآلة محدودة الحالات A المعرفة في الجدول الانتقالي (1.1.8) الحالة الأولية للآلة هي S_0. ثم بين أن A هي أتوماتا، ثم حدد حالات القبول.

	f		g	
S \ I	a	b	a	b
s_0	s_1	s_0	1	0
s_1	s_2	s_0	1	0
s_2	s_2	s_0	1	0

الجدول (1.1.8)

الحل :

المخطط الانتقالي يبينه الشكل (1.1.8).

إذا كنا في الحالة s_0 سنجد أن المخرج الأخير سيكون دائماً هو 0، كمثال إذا كانت السلسلة المدخلة تنتهي بالمدخل b مثل b ، bab ، bbaab ، aabaab فإننا سنكون دائماً عند نهاية الإدخال في الحالة s_0 وسيكون آخر مخرج دائماً هو 0.

إن هذا يعني أن وجودنا في الحالة s_0 (وبغض النظر عن شكل وطول السلسلة المدخلة) يعني أن آخر مخرج من السلسلة المدخلة هو 0 أي أن الحالة s_0 تحدد أن المخرج الأخير هو 0.

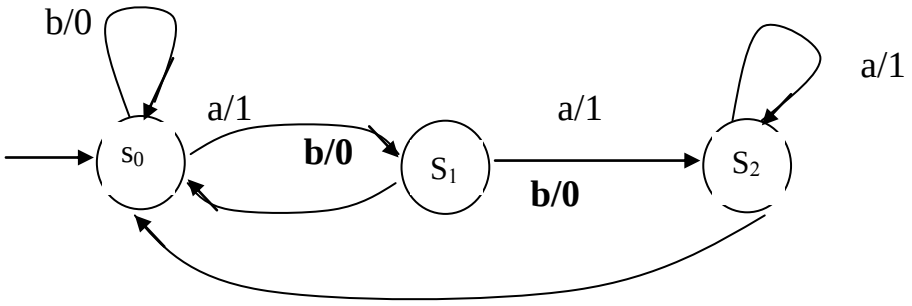
في المقابل إذا كنا في الحالة s_1 أو s_2 سنجد أن المخرج الأخير من السلسلة المدخلة سيكون دائماً هو 1، كمثال إذا كانت السلسلة المدخلة تنتهي بالمدخل ba مثل baaba ، abaaba ، aababa ، ... فإننا سنكون دائماً عند نهاية الإدخال في الحالة s_1 وسيكون آخر مخرج هو 1.

وإذا كانت السلسلة المدخلة تنتهي بالمدخل aa مثل aa ، abbbaa ، babbaa. فإننا سنكون دائماً عند نهاية الإدخال في الحالة s_2 وسيكون آخر مخرج هو 1.

إن هذا يعني أن كلاً من الحالتين s_1 و s_2 تحدد أن المخرج الأخير لأي سلسلة إدخال ينتهي إدخالها في إحدى الحالتين هو 1.

مما تقدم نجد أن المخرج الأخير تحدده الحالة التي تنتهي عندها عملية إدخال السلسلة المدخلة.

إذن فإن A هي اوتوماتا محدودة الحالات وان الحالات s_1 و s_2 هي حالات القبول.

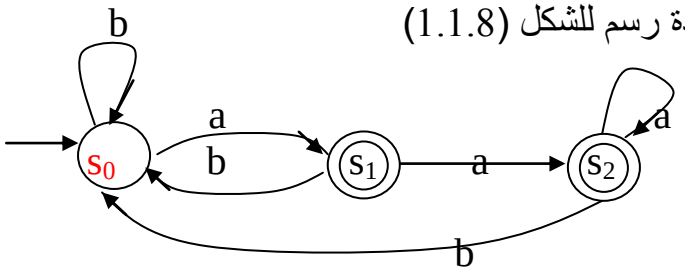


الشكل (1.1.8)

إن الشكل (1.1.8) يبين أن الآلة محدودة الحالات تكون أوتوماتا إذا كانت مجموعة المخرجات هي {0,1} وأن لكل حالة s_i i= 0,1,2,.. ، تكون الحدود الداخلة لها نفس المخرج.

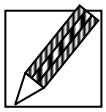
إن المخطط الانتقالي للأوتوماتا محدودة الحالات يمكن أن يرسم بتمييز حالات القبول بدائرتين متداخلتين مع إغفال الإشارة لرموز المخرج.

الشكل (2.1.8) هو إعادة رسم للشكل (1.1.8)

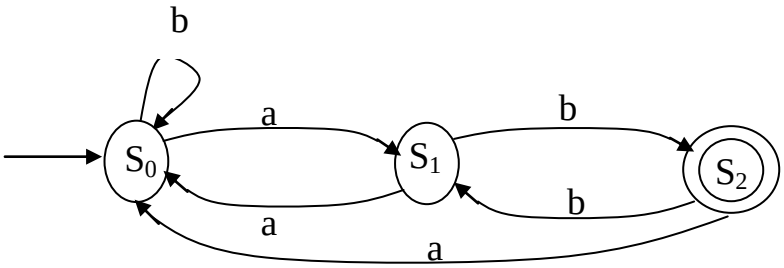


الشكل(2.1.8)

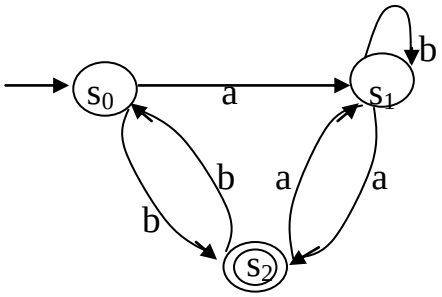
تدريب (1)



اعد رسم المخطط التدفقي التالي كمخطط تدفقي لآله محدودة الحالة.



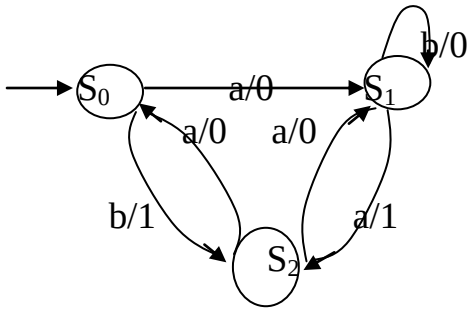
مثال(3.1.8): ارسم المخطط الانتقالي للأوتوماتا محدودة الحالات في الشكل (3.1.8) كمخطط انتقالي لآلة محدودة الحالات؟



الشكل (3.1.8)

الحل:

بما أن حالة القبول هي s_2 ،فإن هذا يعني أن المخرج في كل الحدودة الداخلة لها هو 1، بينما يكون المخرج لحالات عدم القبول s_1 و s_0 هو 0. وبالتالي سنحصل على الشكل (4.1.8) كمخطط انتقالي للآلة محدودة الحالات بعد إزالة رمز القبول .



الشكل (4.1.8)

<u>تعريف جديد للأوتوماتا محدودة الحالات</u>

يمكننا أن نقدم تعريفاً جديداً للأوتوماتا محدودة الحالات مبني على أن بعض الحالات هي حالات قبول . فإذا رمزنا لمجموعة حالات القبول بالرمز Acc، حيث $ACC \subseteq S$.

يمكننا أن نعرف الأوتوماتا محدودة الحالات على أنها تشتمل على:

❶مجموعة محددة من رموز الإدخال I.

❷مجموعة محددة من الحالات S.

❸دالة الانتقال للحالة التالية f حيث $f : IXS \to S$.

❹مجموعة جزئية من حالات القبول Acc حيث $ACC \subseteq S$

❺الحالة الأولية S^* حيث $S^* \epsilon S$.

أي أن:

A= (I, S, f, Acc, s*)

مثال(4.1.8):-

إن المخطط الانتقالي للأوتوماتا محدودة الحالات (A= (I, S, f, Acc, S* حيث

I= {a,b}

S= {s_0, s_1, s_2}

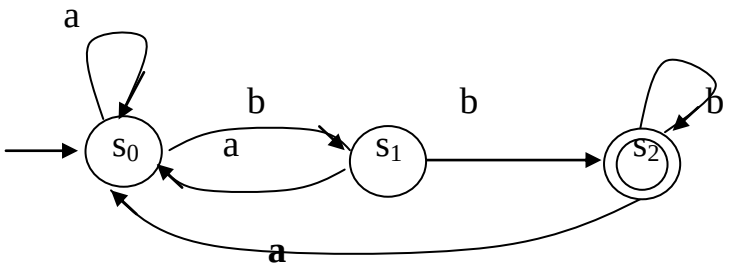
Acc= {s_2}

S*= s_0

ودالة الانتقال للحالة التالية f معرفة على النحو التالي :

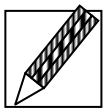
	f	
S / I	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	S_0	s_2
s_2	s_0	s_2

هو المخطط المبين في الشكل (5.1.8):



الشكل (5.1.8)

تدريب (2)



ارسم المخطط الانتقالي للأوتوماتا التي لها كل من الجدول الانتقالي التالي:

(أ) $I= \{a,b\},\ S= \{s_0, s_1, s_2\}\ Acc = \{S_0\}$

	F	
S \ I	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_2	s_0
s_2	s_0	s_2

(ب) $I= \{a,b,c\},\ S= \{s_0, s_1, s_2, s_3\},\ Acc= \{s_1, s_2\}$

	F		
S \ I	a	b	C
s_0	s_1	s_0	s_2
s_1	s_0	s_3	s_0
s_2	s_3	s_2	s_0
s_3	s_1	s_0	s_1

2. قبول السلاسل المدخلة (Accepting Input Strings)

عزيزي الدارس، إذا تم إدخال سلسلة من رموز المجموعة I لأوتوماتا محدودة الحالات فإن عملية الإدخال لآخر حرف في السلسلة ستنتهي في إحدى حالات الأوتوماتا.

إذا كانت الحالة التي انتهى عندها الإدخال هي حالة قبول فإننا نقول أن السلسلة قد قبلت، وإلا فإننا نقول إن السلسلة لم تقبل.

إذن فإن وضع الحالة الأخيرة هو الذي يحدد ما إذا كانت السلسلة المدخلة مقبولة بواسطة الاوتوماتا أم لا.

التعريف التالي يقدم تعريفاً رسمياً للسلاسل المقبولة.

تعريف(1.2.8): افترض أن A=(I, S, f, Acc, s*) هي أوتوماتا محدودة الحالات وأن $\propto = x_1 \ldots x_n$ هي سلسلة مدخلات من I. إذا كانت هنالك حالات تحقق الآتي:

أ- $s_0 = s^*$.

ب- $s_i = f(s_{i-1}, x_i)$ حيث $i= 1,2,\ldots,n$.

ج- $s_n \epsilon Acc$.

فإننا نقول ان $\propto$ مقبولة للأوتوماتا A.

نرمز لمجموعة السلاسل المقبولة للأوتوماتا A بالرمز Ac(A) ونقول أن A تقبل Ac(A) .

إذا كانت $\propto = x_1,\ldots,x_n$ هي سلسلة مدخلات من I، وكانت الحالات $(s_0,\ldots,s_n)$ تحقق (أ) و(ب) أعلاه، فإننا نسمي المسار الموجه $(s_0,\ldots,s_n)$، المسار الممثل للسلسلة $\propto$ في A.

من (ج) في التعريف أعلاه، يتضح أن المسار P الممثل للسلسلة $\propto$ سيكون مقبولاً بواسطة A إذا وفقط إذا كان المسار P ينتهي عند حالة قبول (Accepting State).

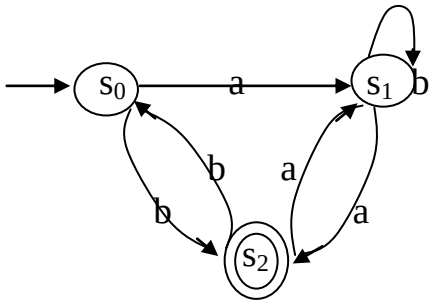
مثال(2.2.8):

هل السلسلة $\propto$= abbabba

سلسلة مقبولة بواسطة الاوتوماتا الموجودة في الشكل (3.1.8)؟

الحل:

الأوتوماتا في الشكل (3.1.8) هي :



الشكل (3.1.8)

بمتابعة إدخال حروف السلسلة X بدءاً من الحالة الأولية s_0 سنجد أن إدخال آخر حرف سينتهي عند الحالة s_1 و s_1 ليس حالة قبول، إذن السلسلة غير مقبولة بواسطة الأوتوماتا.

مثال(3.2.8): صمم أوتوماتا محدودة الحالات تقبل السلاسل المكونة من المجموعة I={a,b} والتي لا تحتوي على الحروف a.

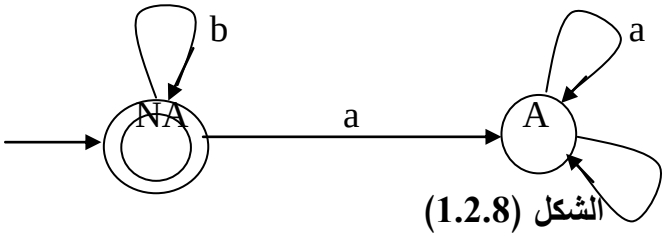
الحل:

إن فكرة التصميم ستبنى على وجود حالتين هما:

A: عند هذه الحالة تكون الاوتوماتا قد ميزت الحرف a (أي أن a موجود في السلسلة المدخلة).

NA: عند هذه الحالة تكون الاوتوماتا لم تميز بعد الحرف a(أي ان السلسلة لا تحتوي على الحرف a).

إن الحالة الأولية هي NA وتمثل في نفس الوقت حالة القبول الوحيدة. الشكل (1.2.8) يبين تصميم هذه الاوتوماتا.



الشكل (1.2.8)

مثال(4.2.8): صمم الأوتوماتا محدودة الحالات التي تقبل فقط السلاسل المكونة من المجموعة I= {a, b} والتي تحتوي على عدد فردي من الحرف a؟

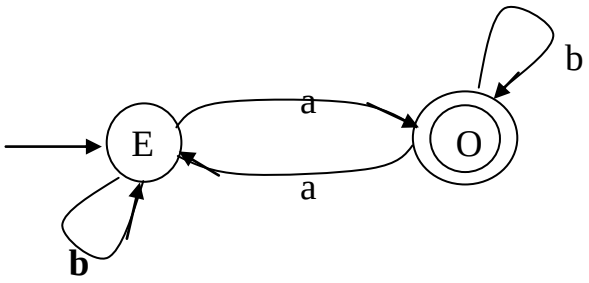
الحل:

إن تصميم الاوتوماتا يحتاج للحالتين

E: عند هذه الحالة يكون عدد الأحرف a التي تم تمييزها في السلسلة عدد زوجي.

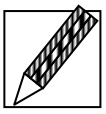
O: عند هذه الحالة يكون عدد الأحرف a التي تم تمييزها في السلسلة عدداً فردياً.

إن الحالة الأولية للأوتوماتا هي E. وحالة القبول هي O. الشكل (2.2.8) يوضح تصميم هذه الأوتوماتا



الشكل (2.2.8)

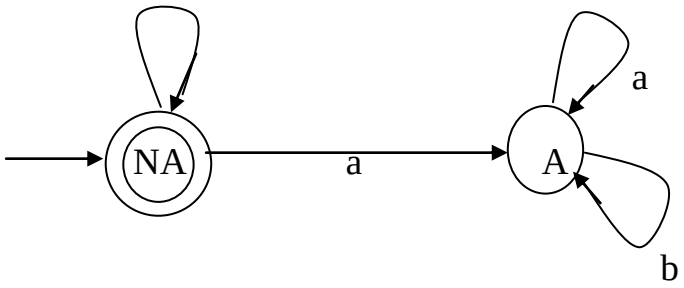
تدريب (3)



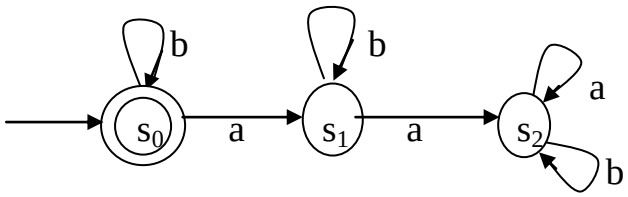
بين أن الأوتوماتا في الشكل (5.1.8) لا تقبل سوى السلاسل ∑ التي تنتهي بالحرفين bb.

تعريف(2.2.8):

نقول إن الأوتوماتا A تكافئ الأوتوماتاَ A إذا كانتا تقبلان نفس السلاسل، أي إذا كانت(Ac(A) = Ac(Aَ كمثال، فإن الأوتوماتا في الشكل (1.2.8) تكافئ الأوتوماتا في الشكل (3.2.8) .



الشكل (1.2.8)



الشكل (3.2.8)

تدريب (4)

ارسم المخطط الانتقالي للأوتوماتا التي تقبل كلاً من السلاسل المعطاة والمعرفة فوق {a,b} =I.

(أ) السلاسل التي يكون بها عدد الحرف a زوجياً.

(ب) السلاسل التي يكون بها الحرف a موجوداً مرتين على الأقل.

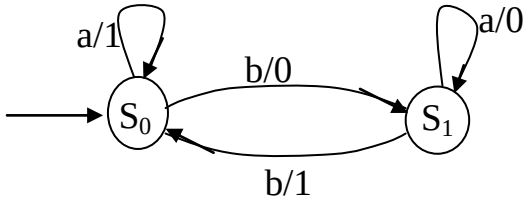
(ج) السلاسل التي يكون بها الحرف b موجوداً مرة واحدة على الأقل.

(د) السلاسل التي تبدأ بالحروف baa.

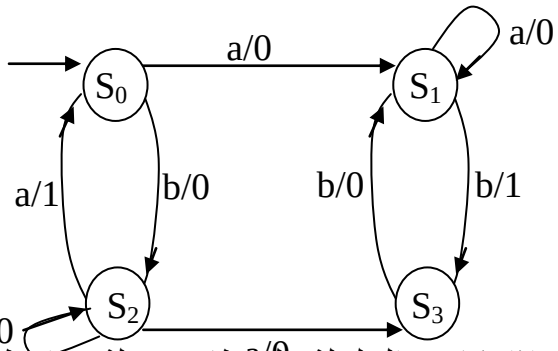
أسئلة تقويم ذاتي(1)

1/ بين أن كلاً من الآلات محدودة الحالة التالية هي أوتوماتا، ثم أعد رسم المخطط الانتقالي كمخطط انتقالي لأوتوماتا.

أ/



ب/



2/بين ما إذا كانت السلسلة المعطاة مقبولة بواسطة الأوتوماتا المقابلة لها:

(أ) abbaa، الأوتوماتـا في الشكل (2.1.8).
(ب) abbaa، الأوتوماتـا في الشكل (3.1.8).

3. اللغات والنحو(Languages and Grammars)

عزيزي الدارس، تعرف اللغات الطبيعية بأنها مجموعة من الأحرف والكلمات وطرق نظم الكلمات وتستخدم وتفهم بواسطة مجتمع محدد. بينما نجد أن اللغات الرسمية (Formal Language) هي لغات اصطناعية أنشئت لتحاكي اللغة الطبيعية وتستخدم للاتصال بين الحواسيب.

بينما نجد أن النحو الذي يحكم ويضبط اللغات الطبيعية معقد ومن الصعب وصفه بالكامل، نجد أن النحو الذي يحكم اللغة الرسمية من الممكن تحديده بالكامل.

نبدأ هذا البند بتعريف اللغة الرسمية.

1.3 اللغة الرسمية (Formal Languages)

افترض أن A هي مجموعة العناصر . إن اللغة الرسمية L فوق A هي مجموعة جزئية من *A، حيث *A هي مجموعة كل السلاسل المنشأة فوق A.

كمثال إذا كانت A= {a,b,c} فإن المجموعة التي تشتمل على كافة السلاسل التي يمكن إنشاؤها فوق A (a, aa, ba, bbab, aabba,… الخ) هي المجموعة *A، إن أي لغة L نعرفها فوق A ستكون هي مجموعة من السلاسل وستكون هذه المجموعة مجموعة جزئية من *A ، أي ان L ≤ *A.

مثال(1.3.8): دع A={a,b}، إن المجموعة L التي تشتمل على كافة السلاسل فوق A والتي تحتوي على عدد فردي من الحرف a هي لغة فوق A.

نجد ان L هي مجموعة السلاسل التي تقبلها الاوتوماتا في الشكل (2.2.8).

إن احد الطرق التي يمكن ان نستخدمها في تعريف اللغة هي أن نحدد مجموعة القواعد التي يفترض أن تلتزم بها اللغة. ولكن ما هي القواعد ؟ سنقوم فيما يلي بتقديم تعريف للقواعد ثم نبين كيف نستخدم القواعد، في إنشاء أو تعريف اللغات.

2.3 النحو (Grammer)

إن النحو G يشتمل على:

(أ) المجموعة المحدودة N من الرموز غير الطرفية (Nonterminal).

(ب) المجموعة المحدودة T من الرموز الطرفية (Terminal)، حيث $N \cap T = \emptyset$.

(ج) المجموعة الجزئية المحدودة P، حيث

$$[(N \cup T)^* - T^*] \subseteq p \times (N \cup T)^*$$

تسمى P مجموعة قواعد الإنتاج (Production Rules)

(د) الرمز الابتدائي σ^*، حيث $\sigma^* \in n$.

ونكتب $G = (N, T, P, \sigma^*)$

قاعدة الإنتاج $(A,B) \in P$ عادة تكتب $A \longrightarrow B$.

من التعريف ج، نجد انه في قاعدة الإنتاج $A \longrightarrow B$ أن $A \in (N \cup T)^* - T^*$

وان $B \in (N \cup T)^*$.

وهذا يعني أن A يجب أن تشتمل على الأقل على رمز واحد غير الطرفي، (nonterminal)، بينما يمكن أن تشتمل B على أي تركيبة من الرموز الطرفية او غير الطرفية.

مثال(2.3.8): إذا كانت

$N= \{ \sigma^*,s\}$

$T= \{a,b\}$

$$p = \{\sigma^* \to b\sigma^*, \sigma^* \to aS, aS \to bS, S \to b\}$$

فإن $G= (N, T, P, a^*)$ هو نحو.

الآن إذا كان G هو نحو للغة فيمكننا إنشاء اللغة L(G) من النحو G باستخدام قواعد الإنتاج P لاشتقاق السلاسل المكونة للغة L(G).

تعريف(2.3.8): إفترض أن

$$G= (N, T, P, \sigma^*)$$

هو نحو

إذا كانت β هي قاعدة إنتاج وكانت $xxy \in (NUT)^*$ فإننا نقول إن $x\ \beta\ y$ يمكن اشتقاقها مباشرة من $x\ y$ ونكتب $x\ y \Longrightarrow x\ \beta\ y$.

واذا كانت $xi \in (NUT)^*$، حيث $i= 1,\ldots,n$، و كانت $xi+1$ يمكن اشتقاقها مباشرة من i ، حيث $i= 1,\ldots,n-1$، فإننا نقول ان n مشتقة من 1 ونكتب $\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_n$

تسمى السلسلة

$$\alpha 1 \Longrightarrow \alpha 2 \Longrightarrow \ldots\ldots \Longrightarrow \alpha\ n$$

إشتقاق αn من $\alpha 1$ إصطلاحاً فإن أي عنصر في المجموعة $(NUT)^*$ مشتق من نفسه.

إن اللغة المولّدة من النحو G، وتكتب L(G)، تشتمل على كافة السلاسل المنشأة فوق T والمشتقة من الرمز الابتدائي σ^*.

مثال(3.3.8): إذا كان النحو G معرّفاً على النحو التالي:

$N= \{\sigma^*,s\}$

$$T= \{a,b\}$$
$$P= \{\sigma^* \rightarrow ba^*,\ \sigma^* \rightarrow aS,\ S \rightarrow bS,\ S \rightarrow b\}$$

فإن السلسلة abSbb هي سلسلة مشتقة مباشرة من السلسلة aSbb وتكتب

$$aSbb \rightarrow abSbb$$

وذلك نتيجة لإستخدام قاعدة الإنتاج $S \rightarrow bS$

كما إن السلسلة bbab هي سلسلة مشتقة من σ^* وتكتب $\sigma^* \Rightarrow bbab$ مشتقاق

تم بإستخدام قواعد الإنتاج على النحو التالي:

$$\sigma^* \rightarrow b\,\sigma^* \rightarrow bb\,\sigma^* \rightarrow bbaS \rightarrow bbab$$

إن السلاسل التي يمكن إشتقاقها من σ^* هي:

$$\sigma^* \Rightarrow b\sigma^*$$
$$\Rightarrow bb\,\sigma^*$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow b^n\,\sigma^* \qquad n \geq 0$$
$$\Rightarrow b^a s$$
$$\Rightarrow b^n abS$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow b^n ab^{m-1} S$$
$$\Rightarrow b^n\, ab^m \quad n \geq 0\ ,\ m \geq 1.$$

إذن فإن اللغة L(G) المنشأة وفقاً للنحو G أعلاه ستحتوي على كافة السلاسل فوق $\{a,b\}$ التي تشتمل على الحرف a مرةً واحدة وتنتهي بحرف b.

3.3 شكل باكوس ناير

إن قواعد الإنتاج الموجودة كجزء من النحو G يمكن كتابتها دون إستخدام الأسهم بشكل يسمى شكل باكوس ناير Backus- Naur Form(BNF) .

في شكل باكوس ناير تبدأ الرموز غير الطرفية بالرمز " < " وتنتهي بالرمز " > ". وقاعدة الإنتاج $S \rightarrow T$ تكتب S::= T. قواعد الإنتاج التي سيكون لها الشكل $S::= T_1, S::=T_2, \ldots S::= T_n$ يمكن ضمها وكتابتها $S::= T_1 \mid T_2 \mid \ldots \mid T_n$

حيث يقرأ الرمز " | " " أو" .

مثال(4.3.8):

العدد الصحيح (Integer) يعرف بأنه سلسلة تشتمل على علامة الإشارة (+ أو −) متبوعة بسلسلة من الأرقام (0−9). النحو التالي يوّلد كافة الأعداد الصحيحة. حيث تعني digit "رقم"، integer "عدد صحيح"، signed "مسبوق بإشارة" و unsigned تعني غير مسبوق بإشارةً.

<digit>0 |1| 2| 3 |4| 5| 6| 7|8|9

<integer>::=<singed integer>|< unsigned integer>
<signed integer>::= + <unsigned integer>| -<unsigned integer>
<unsigned integer>::= <digit> | <digit><unsigned integer>

الرمز الابتدائي *σ هو <integer>

بناءً على النحو أعلاه يمكننا الآن كمثال إشتقاق العدد الصحيح 905− على النحو التالي :

<integer⇒ <signed integer>
⇒ −<unsigned integer>
⇒ −<digit> <unsigned integer>
⇒
⇒ −9 <digit> <unsigned integer
⇒ − 90 <digit>
− 905

إن تعريف النحو أعلاه قد تم على شكل باكوس ناير، إذا أردنا أن نعيد كتابته كما جاء في التعريف (2.3.8) فإن النحو يشتمل على:

①المجموعة المحدودة من الرموز اللاطرفية N، حيث

N= {<digit>,<integer>,<signed integer>,<unsigned integer>}

②المجموعة المحدودة من الرموز الطرفية T، حيث

T= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,+, -}

③قواعد الإنتاج

<digit>⟶ 0,…….,<digit> ⟶ 9

<integer>⟶ <singed integer>

<integer>⟶ < unsigned integer>

<signed integer>⟶+<unsigned integer>

<signed integer>⟶- <unsigned integer>

< unsigned integer>⟶<digit>

< unsigned integer>⟶<digit>< unsigned integer>

④الرمز الابتدائي <integer>

4. أنواع النحو (Grammar Types)

عزيزي الدارس، يصنف النحو بناء على نوع قواعد الإنتاج التي يحتويها، فيما يلي نقدم تعريفاً يصنف أنواع النحو المختلفة.

تعريف(1.4.8): افترض أن G هو نحو وأن λ ترمز للسلسلة الخالية:

(أ) إذا كانت كل من قواعد الإنتاج في G تأخذ الشكل التالي:

$$\propto A \beta \longrightarrow \propto \delta \beta$$

حيث

$$\propto, \beta \in (N \cup T)^*, A \in N ;$$

$$\delta \in (N \cup T)^* - \{\lambda\} \quad \text{و}$$

فإن النحو G يسمى نحواً حساس السياق (Context-Sensitive Grammar)

(ب) إذا كانت كل قواعد الإنتاج في G تأخذ الشكل التالي:

$$A \longrightarrow \delta$$

حيث $A \in N$ و $\delta \in (N \cup T)^* - \{\lambda\}$

فإن النحو G يسمى نحو حرّ السياق (Context Grammar)

(ج) إذا كانت كل قواعد الإنتاج في G تأخذ الشكل التالي:

$$A \longrightarrow \alpha$$

أو

$$A \longrightarrow \alpha B$$

حيث $A,B \in N$ و $\alpha \in T - \{\lambda\}$

فإن النحو G يسمى نحو منتظم (Regular Grammar).

إن فهم الاختلاف بين الأنواع الثلاثة أعلاه، يتطلب منا أولاً توضيح الرموز المستخدمة في التعريف.

إن المجموعة N هي المجموعة المحدودة للرموز اللاطرفية، أي مجموعة الرموز التي لا يسمح النحو أن تبدأ بها أو تنتهي بها السلسلة.

المجموعة $(N \cup T)^*$ هي المجموعة التي تشتمل على كافة السلاسل التي يمكن أن تنشأ باستخدام مجموعة الرموز اللاطرفية N ومجموعة الرموز الطرفية T.

المجموعة $(NUT)^* - \{\lambda\}$ تعني أن السلسلة التي تنتمي لهذه المجموعة لا يمكن أن تكون سلسلة فارغة (أي سلسلة ليس بها أي حرف).

الآن إذا عدنا لتعريف أنواع النحو الثلاثة، نجد في (أ) أن أي قاعدة من قواعد إنتاج النحو حساس السياق تسمح لنا بإبدال احد الرموز اللاطرفية $A \in N$ بأي رمز أو سلسلة δ تنتمي إلى المجموعة $(N \cup T)^* - \{\lambda\}$ بشرط أن يكون الرمز A محصوراً بين (في سياق) رمزين (أو سلسلتين) هما α و β كلاهما ينتمي إلى $(N \cup T)^*$. أو أن يكون الرمز A مسبوقاً فقط بالرمز α أو متبوعاً فقط بالرمز β أو حرًّ لان أي من α و β يمكن أن يكون السلسلة الخالية λ .

في التعريف (ب) نجد ان قواعد الإنتاج في النحو حرّ السياق تسمح لنا بإبدال الرمز اللاطرفي $A \in N$ بأي رمز أو سلسلة δ تنتمي إلى المجموعة $(N \cup T)^* - \{\lambda\}$ دون أي شرط.

في التعريف (ج) نجد أن قواعد الإنتاج في النحو المنتظم تستخدم قواعد إبدال بسيط حيث يمكن إبدال رمز غير طرفي إما برمز طرفي A أو برمز طرفي متبوعاً برمز لا طرفي B A حيث $\propto$ و $A,B \in N$ $\propto \in T-\{\lambda\}$.

نلاحظ بوضوح ان النحو المنتظم هو حالة خاصة من النحو حر السياق، حيث تم فيه تقييد عملية إبدال الرمز اللاطرفي ولم يترك مفتوحاً لأي سلسلة تنتمي إلى المجموعة $(N \cup T)^* - \{\lambda\}$ كما في النحو حر السياق. بالمثل نجد أن النحو حر السياق هو حالة خاصة من النحو حساس السياق الذي تكون فيه كل من $\propto$ و β هي السلسلة الخالية λ أي الحالة التي يكون فيها الرمز اللاطرفي A ليس محصوراً بين رمزين أو سلسلتين.

مثال(1.4.8): إن النحو G المعرف على النحو التالي

$$N= \{a^*, A,B,C,D,E\}$$
$$T= \{a,b,c\}$$

وقواعد الانتاج

$$a^* \longrightarrow aAB,\ a^* \longrightarrow aB,\ A \longrightarrow aAc$$
$$A \longrightarrow ac,\ B \longrightarrow D^C,\ D \longrightarrow b,\ CD \longrightarrow CE$$
$$CE \longrightarrow DE,\ DE \longrightarrow DC,\ Cc \longrightarrow Dcc$$

وله الرمز الابتدائي σ^*

هو نحو حساس السياق. فإذا نظرنا الى قواعد الانتاج فسنجد إنها جميعاً على شكل

$$\propto A\ \beta \longrightarrow \propto \delta\ \beta$$

كمثال: في القاعدة:-

$\sigma^* \longrightarrow aAB$ نجد ان $\propto = B = \lambda$ و $\delta = aAB$

$A \longrightarrow aAc$ نجد ان $\beta = \lambda$ و $\propto$ $\delta = aAc$

$D \longrightarrow b;$ نجد ان $\beta = \lambda$ و $\propto$ $\delta = b$

$CD \longrightarrow CE$ نجد ان $\propto = C$ و $\beta = \lambda$ و $\delta = E$

$Cc \longrightarrow Dcc$ نجد ان $\lambda =$ و $\beta = c$ و $\delta = Dc$

بناءً على النحو أعلاه نجد كمثال ان السلسلة $a^3b^3c^3$ في $L(G)$. لأن السلسلة يمكن اشتقاقها على النحو التالي :

$$\begin{aligned}
\sigma^* &\Longrightarrow a\ AB \\
&\Longrightarrow aaACB \\
&\Longrightarrow a\ aaccDC \\
&\Longrightarrow aaaDccc \\
&\Longrightarrow aaaDCDcc \\
&\Longrightarrow aaaDDCcc \\
&\Longrightarrow aaaDDDccc \\
&\Longrightarrow aaabbbccc \\
&= a^3 b^3 c^3
\end{aligned}$$

يمكن إثبات ان $L(G)= \{a^n b^n c^n \mid n= 1,2\ldots\}$

تعريف(2.4.8):

إن اللغة $L(G)$ ترث صفات النحو G، لهذا فإن اللغة L هي لغة حساسة السياق، لغة حرة السياق او لغة منتظمة إذا كان النحو G هو نحو حساس السياق، حر السياق او منتظم على التوالي وكانت $L= L(G)$.

مثال(3.4.8):

النحو G المعرف كما يلي :

$$T= \{a,b\},\ N= \{\sigma^*\}$$

وقواعد الإنتاج :

$$\sigma^* \longrightarrow a\ \sigma^*\ b,\ \sigma^* \longrightarrow ab$$

والرمز الابتدائي σ^* هو نحو حر السياق .

وذلك لأنه لا توجد قاعدة إنتاج فيها الرمز اللاطرفي (σ^*) محصوراً بين رمزين او طرفين حتى يكون النحو حساسا السياق، كما إن إبدال الرمز اللاطرفي a^* لم يتم مع رمز طرفي واحد فقط او رمز طرفي واحد فقط متبوعاً برمز لا طرفي واحد فقط حتى يكون

النحو منتظم. وإنما تم إبدال الرمز اللاطرفي *a بسلسلة الرموز الطرفية واللاطرفية تنتمي الى λ - *(N U T) وهي ab و a σ* b.

إن الإشتقاق الممكن من σ* هو:

$$\sigma^* \Longrightarrow a\,\sigma^*\,b$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\Longrightarrow a^{n-1}\,\sigma^*\,b^{n-1}$$
$$\Longrightarrow a^{n-1}ab\,b^{n-1} = a^n b^n$$

إذن فإن اللغة L(G) المنشأة وفقاً للنحو G تشتمل على كافة السلاسل فوق {a,b} التي لها الشكل

$$a^n\,b^n, \text{ حيث } n = 1, 2, \ldots.$$

إن اللغة L(G) هي لغة حرة السياق لأنها بنيت على قواعد حرة السياق .

يتضح من التعريف (2.4.8) ومن المثالين (1.4.8) و(3.4.8) ان اللغات حرة السياق هي مجموعة جزئية من اللغات حساسة السياق وان اللغات المنتظمة هي مجموعة جزئية من اللغات حرة السياق.

مثال(4.4.8): إن النحو G المعرف في المثال (3.3.8) هو نحو منتظم وبالتالي فإن اللغة

$$L(G)= \{b^n\,a\,b^m \mid n=0, 1,\ldots; m= 1, 2\ldots\}$$

المولدة من النحو G هي لغة منتظمة .

مثال(5.4.8):

إن النحو في المثال (4.3.8) هو نحو حر السياق وليس نحو منتظم ولكننا إذا أعدنا تعريف قواعد الإنتاج كما يلي:

<digit>::= 0 | 1 |2 | 3 | 4 |5 | 6 |7 | 8 | 9

<integer>::=<signed integer> | <unsigned integer >

< signed integer >::=+< unsigned integer > | - < unsigned integer >

< unsigned integer >::=<digit> | 0< unsigned integer > | 1 < unsigned integer >.. | 9< unsigned integer >

فإن النحو الجديد هو نحو منتظم.

إن اللغة المولّدة من النحو القديم والجديد هي لغة واحدة على الرغم من أنها وّلدت من نحوين مختلفين.

تدريب (5)

حدّد ما إذا كان النحو المعطى في كل من (أ)-(ج) هو نحو حساس السياق، حرّ السياق أم هو نحو منتظم :

(أ) $T= \{a,b\}, N= \{a^*,A\}$

- قواعد الإنتاج

$\sigma^* \longrightarrow b\,\sigma^*$ $\sigma^* \longrightarrow aA,A \longrightarrow a\,\sigma^*$

$A \longrightarrow b\,A$, $A \longrightarrow a\,\sigma^* \longrightarrow b$;

- الرمز الابتدائي σ^*

(ب) $T= \{a,b\}, N= \{a^*,A,B\}$

- قواعد الإنتاج

$\sigma^* \longrightarrow A\,\sigma^*$, $A\,AB \longrightarrow Aa \longrightarrow ABa$

$A \longrightarrow aa,Bb \longrightarrow A\,B \longrightarrow AAB$, $B \longrightarrow b$

- الرمز الابتدائي σ^*

(ج) <S>::= b<s> | a<A> | a

<A>::= a<S> | b<B>

<B>::= b<A> | a<S> b

- الرمز الابتدائي <S>

1.4 النحو المتكافئ

إن النحو G يكافئ النحوَ G إذا كانت(G َ)L =(G)L.

من الأمثلة السابقة فإن النحو في المثال (4.3.8) يكافئ النحو في المثال (5.4.8).

5. العلاقة بين النحو المنتظم والأوتوماتا محدودة الحالات

عزيزي الدارس، في هذا البند سنبين أن النحو المنتظم والأوتوماتا محدودة الحالات كلاهما هو موّصف ومحدد للغة منتظمة .

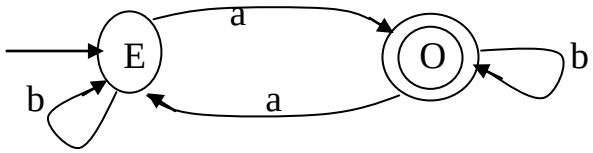
إن هذا يعني أن الأوتوماتا محدودة الحالات هي تجسيد أو تمثيل لنحو منتظم.

1.5 تحويل الأوتوماتا إلى نحو منتظم

المثال التالي يوضح كيف يمكننا تحويل اوتوماتا محدودة الحالات إلى نحو منتظم .

مثال(1.5.8)

اكتب النحو المنتظم الذي تجسده الاوتوماتا محدودة الحالات التالية":



الحل:

لتحويل الأوتوماتا إلى نحو منتظم سنتبع الخطوات التالية :

①جعل رموز الإخراج تمثل مجموعة الرموز الطرفية T.

②جعل رموز الحالات تمثل مجموعة الرموز اللاطرفية N.

③جعل الحالة الابتدائية في الأوتوماتا تمثل الرمز الابتدائي .

④الحدود الموجه تمثل مجموعة قواعد الإنتاج P، فإذا كان هنالك حد يميز بالرمز x من الحد s إلى الحدَ s فإن القاعدة تكتبَ S ← xS وإذا كان هنالك حد يميز بالرمز x من الحالة s إلى حالة قبولَ s فيجب إضافة قاعدة الإنتاج s ← x.

بتطبيق هذه الخطوات على الاوتوماتا أعلاه نجد أن

$$N= \{E,0\}$$
$$T= \{a,b\}$$

وقواعد الإنتاج هي

$$P=\{E \longrightarrow bE,\ E \longrightarrow aO,\ O \longrightarrow aE,\ O \longrightarrow bo\}$$

ولأن هنالك حدين موجهين لحالة القبول O سنضيف القاعدين{ $E \longrightarrow a$ و $O \longrightarrow b$ }

الحالة الابتدائية هي E

الآن فإن $G= (N,T,P,E)$ هو النحو المنتظم الذي تجسده الاوتوماتا محدودة الحالات.

نظرية(1.5.8): دع A تكون اوتوماتا محدودة الحالة معطاة كمخطط إنتقالي. دع σ^* تكون هي الحالة الابتدائية. دع T تكون هي مجموعة رموز الإخراج و N هي مجموعة الحالات.

عرّف قاعدة الإنتاج

$$S \longrightarrow XS'$$

إذا كان هنالك حد مميز بالرمز x من الحالة S إلى الحالة S' حيث $S, S' \in N$

وعرف قاعدة الإنتاج

$$S \longrightarrow x$$

إذا كان هنالك حد مميز بالرمز x من الحالة S إلى حالة قبول. دع G يكون هو النحو المنتظم

$$G= (N,T,P, \sigma^*)$$

حيث p هي مجموعة قواعد الإنتاج.

فإن مجموعة السلاسل المقبولة من قبل الاوتوماتا A تساوي اللغة L(G).

الإثبات: إفترض ان السلسلة $x_1,\ldots,x_n$ هي سلسلة مقبولة من قبل A. إن هذا يعني ان هنالك مسار $(a^*, s_1,\ldots,s_n)$ من الحالة الابتدائية وحتى حالة القبول s_n، وان الحدود بينهما مميزة بالرموز $x_n,..x_2,x_1$ على التوالي.

إن هذا يعني أن A تحتوي على قواعد الإنتاج.

$$\sigma^* \longrightarrow x_1 S_1$$
$$S_1 \longrightarrow x_2 S_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$S_{i-1} \longrightarrow x_i S_i$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$S_{n-1} \longrightarrow x_n$$

وبالتالي فإن الاشتقاق

$$\sigma^* \Longrightarrow x_1 S_1$$
$$\Longrightarrow x_1 x_2 S_2$$
$$\vdots$$
$$\Longrightarrow \quad x_1 \ldots x_{n-1}\, S_{n-1}:$$
$$\Longrightarrow \quad x_1 \ldots x_n$$

بين أن السلسلة $x_1,\ldots x_n \in L(G)$.

إذا إفترضنا العكس، أي أن السلسلة $x_1,\ldots x_n \in L(G)$، فإن هذا يعني أن هنالك إشتقاق على شكل الاشتقاق أعلاه وبالتالي إذا كان σ^* هو الحالة الابتدائية في المخطط الانتقالي للأوتوماتا A وأخذنا ننتقل عبر المسار $(\sigma^*, s_1, s_2, \ldots, s_n)$ فإننا نستطيع أن نولد السلسلة $x_1 x_2, \ldots x_n$.

إن آخر قاعدة الإنتاج تم استخدامها في الاشتقاق هي $S_{n-1} \longrightarrow x_n$. إذن فإن آخر حالة تصل اليها السلسلة هي حالة قبول. وبالتالي فإن هذا يعني أن السلسلة $x_1 x_2 \ldots x_n$ هي سلسلة مقبولة من A.

2.5 تحويل النحو المنتظم إلى اوتوماتا

عزيزي الدارس، فيما يلي، سننظر في معكوس ما قمنا به في المثال(1.5.8) وما نصت عليه النظرية (1.5.8)، أي إذا كان النحو المنتظم G معطى فكيف ننشئ أوتوماتا محدودة الحالة. بحيث تكون اللغة L(G) هي السلاسل التي تقبل بواسطة A.

قد يبدو للوهلة الأولى أن كل ما يجب علينا القيام به هو عكس الخطوات التي اتبعناها في الإجراء الذي حددته النظرية (1.5.8) ولكن في الواقع فإن الأمر أكثر تعقيداً كما سنرى في المثال التالي:

مثال(2.5.8): لتحويل النحو التالي لمخطط إنتقالي للأوتوماتا محدودة الحالات

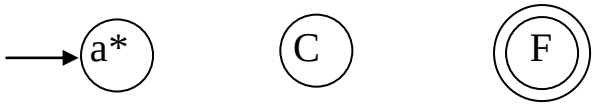
$$T= \{a,b\} , N=\{ \sigma^*,c\}$$

قواعد الإنتاج

$$\sigma^* \longrightarrow b\,\sigma^*,\ \sigma^* \longrightarrow aC,\ C \longrightarrow bC,\ C \longrightarrow b$$

والرمز الابتدائي σ^*

فإننا نمثل كل رمز غير طرفي في المجموعة N كعقدة (أي حالة) في المخطط الانتقالي، وسنجعل الحالة الابتدائية هي a^* ثم نقوم بإضافة العقدة F لتكون حالة قبول (انظر الشكل (1.5.8))(أ).



(1.5.8)(أ).

لتحديد الحدود في المخطط الانتقالي فإننا الآن نقوم بعكس الإجراء الذي حددته النظرية (1.5.8)، أي إذا كانت هنالك قاعدة إنتاج على صورة

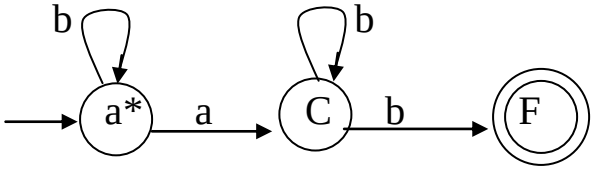
$$S \longrightarrow xs$$

فإننا سنقوم برسم حداً موجّهاً من الحالة S الى الحالةَ S ونميزه بالرمز x. وإذا كان هنالك قاعدة إنتاج على صورة

$$S \longrightarrow x$$

فإننا نرسم حد موجّه من S الى حالة القبول F.

إذا طبقنا هذا على المثال فسنحصل على المخطط الانتقالي (1.5.8)ب.



الشكل(1.5.8)ب

ولكن الان إذا نظرنا لشكل الشكل(1.5.8)ب، سنجد للأسف أنه ليس اوتوماتا محدودة الحالة. فهنالك العديد من النواقص في الرسم التي تجعله لا يعبر عن اوتوماتا، فالعقدة C ليس لها حد خارج مميز بالرمز a والعقدة F ليس لها أي حد خارج، بالإضافة لذلك فإن العقدة C لها حدان خارجان مميزان برمز واحد هو b، لكل هذا فإن الشكل (1.5.8)ب هو ليس اوتوماتا محدودة الحالة.

إن المخطط الانتقالي في الشكل (1.5.8)ب يعرف نوعاً من أنواع الاوتوماتا يسمى الأوتوماتا محدودة الحالة غير القسرية (Nondeterministic) .

إن استخدام مصطلح "غير القسرية" جاء نتيجة لأن هذا النوع من أنواع الاوتوماتا يحتوي على عقد بها أكثر من حد خارج ولها جميعاً نفس الرمز المميز، وبالتالي إذا تم إدخال الرمز المميز لهذه الحدود عند تلك العقد فإننا سنكون في حالة اختيارية (أي لا قسرية) لتحديد الحالة التالية. كمثال فإن العقدة C في الشكل (1.5.8)ب تمثل الحالة التي نتحدث عنها. فعند العقدة C هنالك اكثر من حد خارج"حدين" وكلاهما له نفس الرمز المميز b. وبالتالي إذا تم إدخال b عند العقدة C فسيكون لنا الخيار في تحديد العقدة التالية فإما ان نبقى في C نفسها او ننتقل للعقدة F.

التعريف التالي يعرف الاوتوماتا محدودة الحالات اللاقسرية.

تعريف(1.5.8):

إن الأوتوماتا محدودة الحالات غير القسرية A تشتمل على :

(أ) المجموعة المحدودة I من رموز المدخلات.

(ب) المجموعة المحدودة S من الحالات.

(ج) دالة الحالة التالية f حيث $f: SXI \longrightarrow P(S)$.

(د) المجموعة المحدودة لحالات القبول Acc حيث $Acc \epsilon S$.

(هـ) الحالة الاولية *a، حيث $\sigma^* \epsilon S$

ونكتب $A= (I,S,f,Acc, \sigma^*)$

يتضح من التعريف أعلاه إن الاختلاف الوحيد بين الاوتوماتا محدودة الحالة والاوتوماتا محدودة الحالة اللاقسرية هو في تعريف دالة الحالة التالية f. ففي الاوتوماتا محدودة الحالة فإن الدالة f تنقلنا من حالة إلى حالة واحدة أخرى محددة، بينما نجد أن f في الاوتوماتا محدودة الحالة غير القسرية تنقلنا من حالة إلى مجموعة حالات.

مثال(3.5.8): للاتوماتا محدودة الحالات اللاقسرية في الشكل (1.5.8)ب نجد

$$I = \{a,b\}$$
$$S = \sigma^*, C, F$$
$$Acc = \{ F \}$$

وان الحالة الأولية هي σ^* ودالة الحالة التالية f معرفة على النحو التالي:

S \ I	a	b
σ^*	{C}	{σ^*}
C	ø	{C,F}
F	Ø	ø

يمكن رسم المخطط الانتقالي للأتوماتا محدودة الحالات غير القسرية بشكل مماثل للاتوماتا محدودة الحالات، حيث يتم رسم حد من الحالة S لكل الحالات الموجودة في المجموعة f(S,x) ويتم تمييز كل حد x.

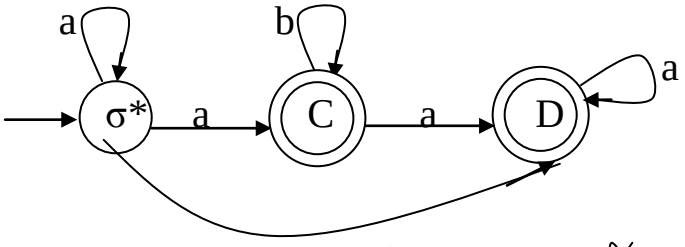
مثال (4.5.8): إن المخطط الانتقالي للأتوماتا محدودة الحالات غير القسرية المعرفة على النحو التالي

$$I= \{a,b\}$$
$$S = \{ \sigma^*, C, D\}$$
$$Acc = \{C, D\}$$

الحالة الاولية σ^* ودالة الحالة التالية هي

S \ I	a	b
σ^*	$\{ \sigma^*, C\}$	$\{D\}$
C	Ø	$\{C\}$
D	$\{C,D\}$	Ø

يوضحها الشكل التالي(2.5.8)



إن السلسلة غير الخالية $\propto$ تكون مقبولة من قبل اوتوماتا محدودة الحالات لا قسرية A إذا كان هنالك مسار يمثل $\propto$ في المخطط الانتقالي للاتوماتا A يبدأ من الحالة الأولية وينتهي في حالة مقبولة. فيما يلي نورد تعريفاً رسمياً لقبول السلاسل بواسطة الاتوماتا غير القسرية .

تعريف(2.5.8)

دع $A= (I, S, f, Acc, \sigma^*)$ تكون اوتوماتا لا قسرية ودع $\propto = x_1, x_2,\ldots x_n$ تكون سلسلة في I

إذا كانت هنالك الحالات $S_0, S_1, \ldots S_n$ التي تحقق

(أ) $S_0 = \sigma^*$

(ب) $1=1,2,\ldots\ldots n, s_i \in f(s_{i-1} X)$

(ج) $S_n \in Acc$.

فإننا نقول إن $\propto$ مقبولة من إذا رمزنا لمجموعة السلاسل المقبولة من A بالرمز $Ac(A)$` فإننا نقول ان A تقبل $Ac(A)$

إذا كانت A وَ $\bar{A}$ هما أوتوماتا غير القسرية وكانت $Ac(A) = Ac(\bar{A})$ فإننا نقول ان A وَ $\bar{A}$ متكافئتان.

إذا كانت $\alpha = x_1, x_2, \ldots x_n$ هي سلسلة فوق I وكان هنالك الحالات $S_0, S_1, \ldots S_n$ والتي تحقق (أ) و (ب) في التعريف أعلاه فإننا نقول ان المسار ($S_0, S_1, \ldots S_n$) يمثل السلسلة $\propto$ في A.

مثال(5.5.8):

إن السلسلة α = bbabb

هي سلسلة مقبولة بواسطة الأتوماتا غير القسرية في الشكل (1.5.8) ب . وذلك لأن المسار ($\sigma^*, \sigma^*, \sigma^*, C, C, F$) والذي ينتهي في حالة قبول يمثل α.

مثال(6.5.8):

إن السلسلة α = aabaabbb

هي سلسلة مقبولة بواسطة الأتوماتا غير القسري في الشكل (2.5.8)، يمكن للقارئ الحصول على مسار يمثل السلسلة $\propto$ وينتهي في حالة قبول.

الخلاصة

عزيزي الدارس ، لقد عرضت لك في هذه الوحدة الثامنة من مقرر "الرياضيات المتقطعة2 " الموضوعات الأساسية التالية:

❍الأتوماتا محدودة الحالات هي الآلة محدودة الحالات (A= (I, O, S, f, g, s* التي يكون فيها O= {0,1}

وتحدد الحالة الماثلة المخرج النهائي لسلسلة المدخلات.

إن الحالات التي تحدد أن المخرج النهائي لسلسلة المدخلات هو 1 تسمى بحالات القبول (Accepting States) .

❍يمكننا أن نقدم تعريفاً جديداً للأوتوماتا محدودة الحالات مبني على أن بعض الحالات هي حالات قبول . فإذا رمزنا لمجموعة حالات القبول بالرمز Acc، حيث $Acc \subseteq S$ يمكننا أن نعرف الأوتوماتا محدودة الحالات على أنها تشتمل على:

❶مجموعة محددة من رموز الإدخال I.

❷" " " الحالات S.

❸دالة الانتقال للحالة التالية f حيث f: IXS⟶S

❹مجموعة جزئية من حالات القبول Acc حيث $Acc \subseteq S$

❺الحالة الأولية σ* حيث σ*ϵ S.

أي أن:

A= (I, S, f, Acc, σ*)

❍إذا تم إدخال سلسلة من رموز المجموعة I لأوتوماتا محدودة الحالات فإن عملية الإدخال لآخر حرف في السلسلة ستنتهي في إحدى حالات الأوتوماتا. إذا كانت الحالة التي انتهى عندها الإدخال هي حالة قبول فإننا نقول أن السلسلة قد قبلت، وإلا فإننا نقول ان السلسلة لم تقبل.

❍اللغة الرسمية:افترض أن A هي مجموعة العناصر . إن اللغة الرسمية L فوق A هي مجموعة جزئية من *A، حيث *A هي مجموعة كل السلاسل المنشأة فوق A.

❍النحو (Grammar):إن النحو G يشتمل على:

(أ) المجموعة المحدودة N من الرموز غير الطرفية (Nonterminal).

(ب) المجموعة المحدودة T من الرموز الطرفية (Terminal)، حيث $N \cap T = \emptyset$.

(ج) المجموعة الجزئية المحدودة P، حيث

$$P \subset [(N \cup T)^* - T^*] \times (NUT)^*$$

تسمى P مجموعة قواعد الإنتاج (Production Rules)

(د) الرمز الابتدائي σ^*، حيث $\sigma^* \in n$.

ونكتب $G = (N, T, P, \sigma^*)$

قاعدة الإنتاج $(A,B) \in P$ عادة تكتب $A \longrightarrow B$.

❍ إن قواعد الإنتاج الموجودة كجزء من النحو G يمكن كتابتها دون استخدام الأسهم بشكل يسمى شكل باكوس ناير (BNF)Backus- Naur Form .

في شكل باكوس ناير تبدأ الرموز اللاطرفية بالرمز " < " وتنتهي بالرمز " > ".

❍أنواع النحو

(أ) إذا كانت كل من قواعد الإنتاج في G تأخذ الشكل التالي: $\alpha A \beta \longrightarrow \alpha \delta \beta$

حيث ; $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*, A \in N$

$$\delta \in (N \cup T)^* - \{\lambda\} \quad \text{و}$$

فإن النحو G يسمى نحواً حساس السياق (Context-Sensitive Grammar)

(ب) إذا كانت كل قواعد الإنتاج في G تأخذ الشكل التالي:$A \longrightarrow \delta$

حيث $A \in N$ و $\delta \in (N \cup T)^* - \{\lambda\}$

فإن النحو G يسمى نحواً حرّ السياق (Context Grammar)

(ج) إذا كانت كل قواعد الإنتاج في G تأخذ الشكل التالي: $A \longrightarrow \alpha$

$$A \longrightarrow \alpha B \quad \text{أو}$$

حيث $A,B \in N$ و $\alpha \in T - \{\lambda\}$

فإن النحو G يسمى نحواً منتظماً (Regular Grammar).

❍ لتحويل الاوتوماتا إلى نحو منتظم سنتبع الخطوات التالية :

①جعل رموز الإخراج تمثل مجموعة الرموز الطرفية T.

②جعل رموز الحالات تمثل مجموعة الرموز الطرفية N.

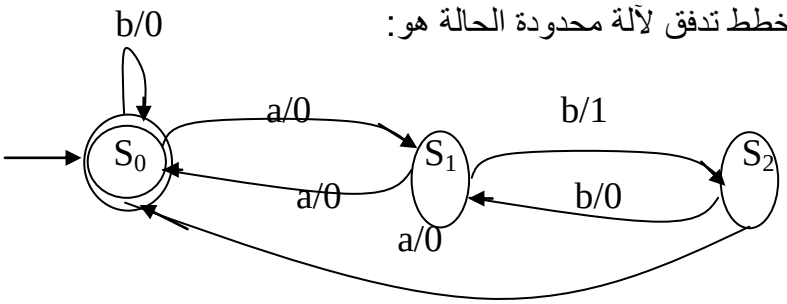
③جعل الحالة الابتدائية في الاوتوماتا تمثل الرمز الابتدائي .

④الحدود الموجّهة تمثل مجموعة قواعد الإنتاج P، فإذا كان هنالك حد يميز بالرمز x من الحد s إلى الحدَ s فإن القاعدة تكتبَ S ←S وإذا كان هنالك حد يميز بالرمز x من الحالة s إلى حالة قبولَ s فيجب إضافة قاعدة الإنتاج x ⟵ s.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

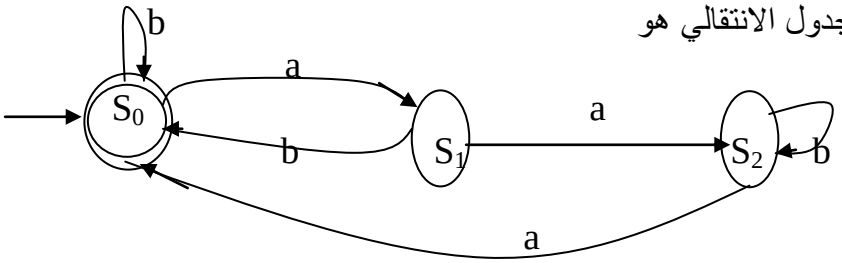
الرسم المعاد كمخطط تدفق لآلة محدودة الحالة هو:



تدريب (2)

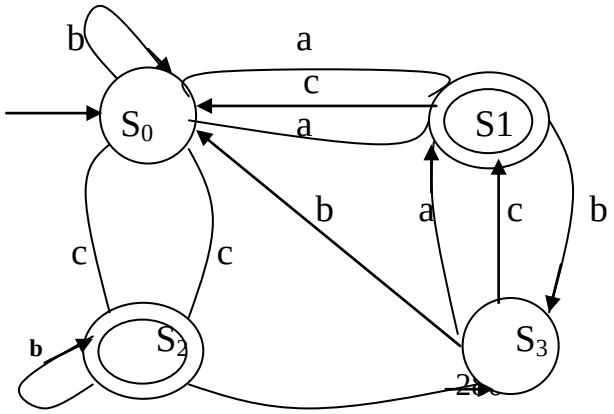
حل المسألة (أ)

المخطط التدفق للجدول الانتقالي هو



حل المسألة (ب)

المخطط التدفقي للجدول الانتقالي هو



a

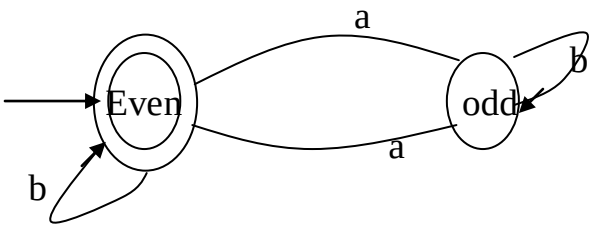
تدريب (3)

إذا كانت السلسلة التي تنتهي بالحرف bb تم إدخالها بغض النظر ان الحالة التي كنا فيها قبل إدخال bb فإننا سننتهي عند الحالة S_2. وبما ان S_2 هي حالة قبول فإن هي سلسلة مقبولة.

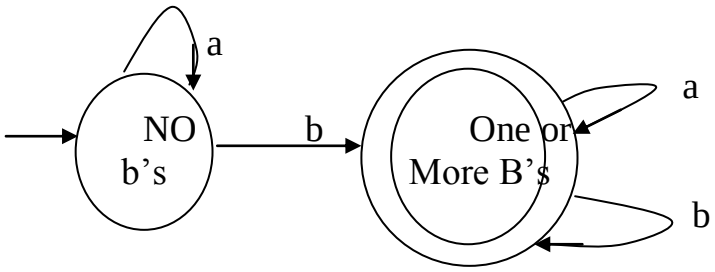
عندما نكون في الحالة S_2 فإن آخر حرف في هو b وهذا يعني انه على الأقل هنالك حرف واحد في السلسلة سابق للحرف b. اذا كان اخر حرفين في السلسلة هما ab وكنا في الحالة σ_0 قبل الحرف a فباختبار كافة الاحتمالات سنجد انه لا يمكننا الانتهاء عند S_2. لهذا فإن اخر حرفين في السلسلة يجب ان يكونا bb.

تدريب (4)

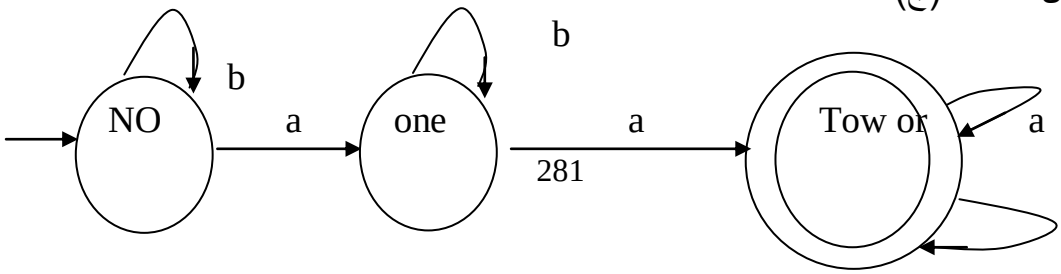
حل المسألة (أ)



حل المسألة (ب)



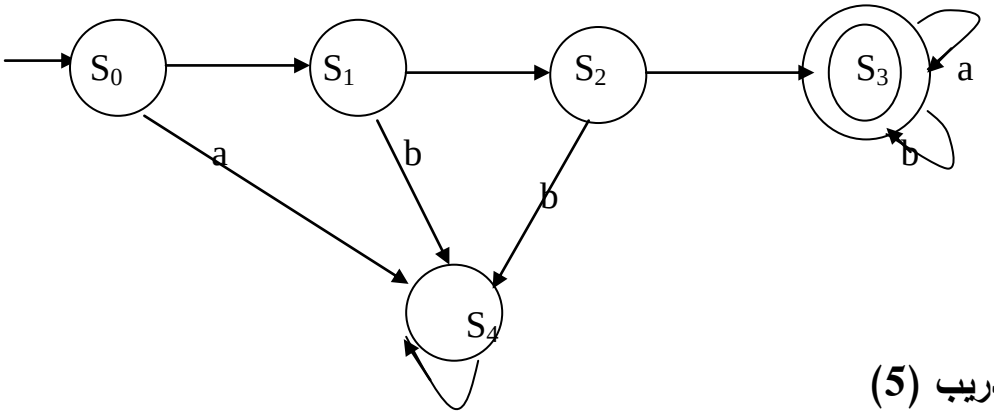
حل المسألة (ج)



a’s a More a’s

b

حل المسألة (د)



تدريب (5)

حل المسألة (أ)

النحو في هذه المسألة هو نحو منتظم، حر السياق وحساس السياق.

حل المسألة(ب)

النحو في هذه المسألة هو نحو حساس السياق.

حل المسألة (ج)

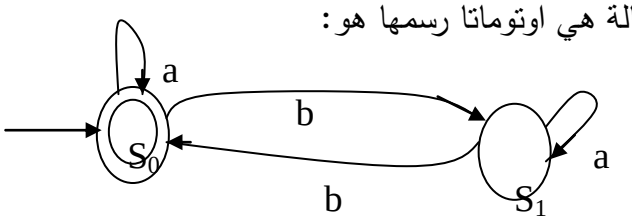
النحو هو نحو منتظم، حر السياق وحساس السياق

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة تقويم ذاتي (1)

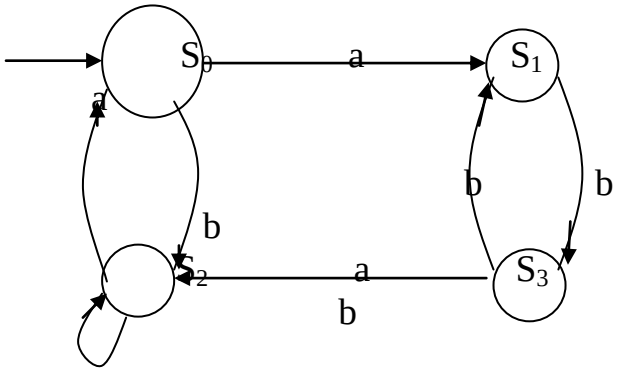
حل المسألة(1- أ)

كل الحدود الداخلة الى S0 مخرجها 1، وكل الحدود الداخلة إلى S1 مخرجها 0 ، وبالتالي فإن الآلة محدودة الحالة هي اوتوماتا رسمها هو:



حل المسألة(1- ب):

كل الحدود الداخلة إلى S^0 والى S^3 مخرجها 1 وكل الحدود الداخلة إلى S^1 و S^2 مخرجها 0 وبالتالي فإن الآلة محدودة الحالة هي اتوماتا رسمها هو:



حل المسألة (2-أ)

الإجابة هي نعم

حل المسألة (2-ب)

الإجابة هي نعم

مسرد المصطلحات

❁ **الأتوماتا محدودة الحالات Finite State Automata**

الاتوماتا محدودة الحالات هي الآلة محدودة الحالات (A= (I, O, S, f, g, s* التي يكون فيها {O= {0,1 وتحدد الحالة الماثلة المخرج النهائي لسلسلة المدخلات.

❁ **اللغات الطبيعية**

مجموعة من الأحرف والكلمات وطرق نظم الكلمات وتستخدم وتفهم بواسطة مجتمع محدد.

❁ **اللغات الرسمية (Formal Language)**

هي لغات اصطناعية أنشئت لتحاكي اللغة الطبيعية وتستخدم للاتصال بين الحواسيب.

❁ **شكل باكوس ناير Backus- Naur Form(BNF)**

هي كتابة قواعد الإنتاج الموجودة كجزء من النحو G برموز دون إستخدام الأسهم وتبدأ الرموز اللاطرفية بالرمز " > " وتنتهي بالرمز " < ".

المراجع

1- Lin C. L. “Elements of Discrete Mathematics”, McGraw Hill, Computer Science Series, 1977.

2- Richard J. B. “Discrete Mathematics”, Revised Edition London, Maxwell McMillen International Edition, 1984.

3- Seymour lipschutz and Marc Lipson, “Schaum’s Outline of Discrete Mathematics”, 3rd Ed.

4- Kenneth H. Rosen, “Student’s Solution Guide to accompany Discrete Mathematics and its Applications”, Jerrold Grossman Sixth Edition.