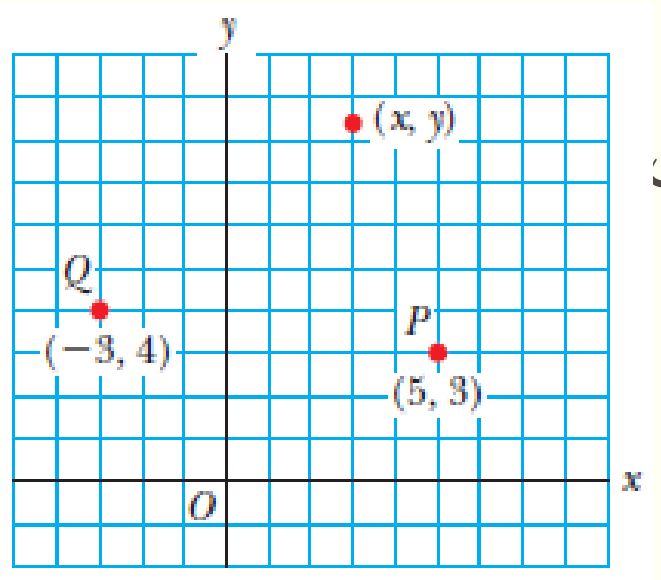
المتجهات
VECTORS



أ. وفاء ابراهيم احمد

نظم الاحداثيات Coordinate Systems

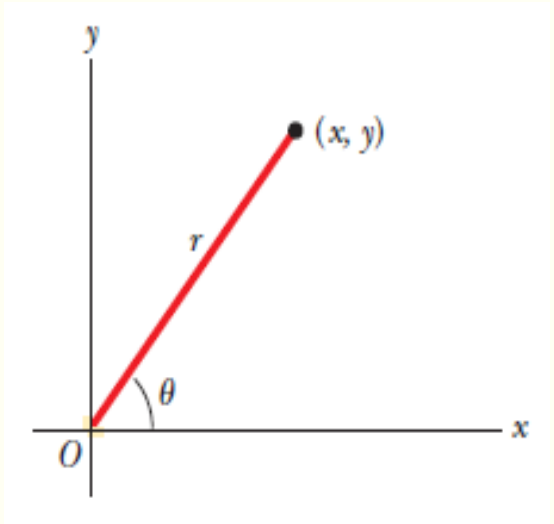
تتضمن العديد من جوانب الفيزياء وصفا لموقع ما في الفضاء. مثلا في حركة الجسم في بعد واحد لوصف حركته يتطلب فقط معرفة موضع الجسم في اوقات مختلفة, اما في حالة الحركة في بعدين يتم انجاز هذا الوصف باستخدام نظام الاحداثيات الديكارتية, حيث تتقاطع المحاور المتعامدة عند نقطة تعرف على انها الاصل, كما في الشكل التالي:

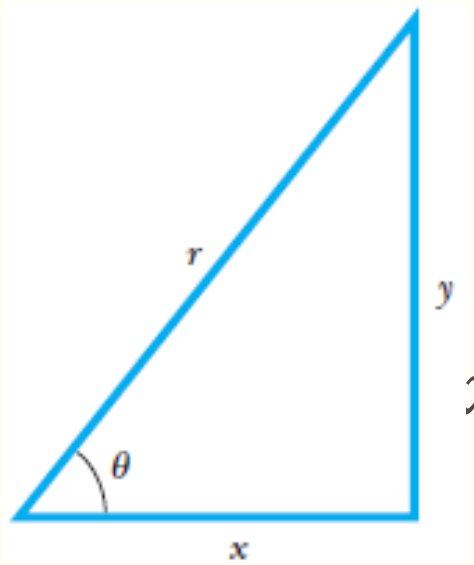


في بعض الاحيان يكون من الملائم اكثر تمثيل نقطة ما في مستوى عن طريق الاحداثيات القطبية (r , θ) كما في الشكل في الصفحة التالية:

نظم الاحداثيات Coordinate Systems

في هذا النظام r هي المسافة من الاصل الى النقطة التي لها الاحداثيات الديكارتية (x , y) و θ هي الزاوية بين محور ثابت والخط المرسوم من الاصل الى النقطة (x , y).





من هذا الشكل نجد ان:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

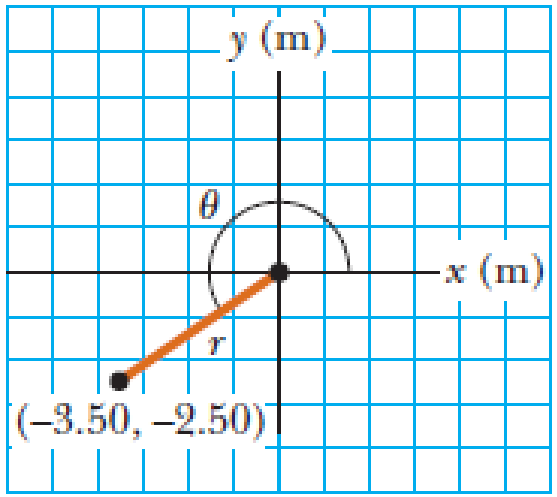
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نظم الاحداثيات Coordinate Systems

هذه العلاقات صالحة فقط في حالة المحور الثابت هو محور x الموجب والزاوية θ اتجاهها من المحور الثابت وفي اتجاه عكس عقارب الساعة.

مثال

الاحداثيات الديكارتية لنقطة ما على المستوى الديكارتي هي (-2.5 , -3.5) كما في الشكل التالي. اوجد الاحداثيات القطبية لهذه النقطة. الحل:



$$r = \sqrt{(-3.5)^2+(-2.5)^2} = 4.3m$$

$$\tan\theta = \frac{-2.5}{-3.5} = 0.714$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.714 = 216°$$

بما ان النقطة تقع في الربع الثاث لذلك الزاوية 216° وليست 36°

الكميات المتجهه والقياسية Vector and Scalar Quantities

ما هو الفرق بين الكميات المتجهه والكميات القياسية. فمثلا لمعرفة درجة الحرارة الخارجية بنجاح نحتاج فقط لمعرفة العدد والوحدة مثلا 40°C اذن درجة الحرارة هي كمية قياسية.

ومن هنا يمكن تعريف الكمية القياسية بصورة كاملة بمعرفة قيمتها ووحدة القياس المناسبة وليس لها اتجاه.

وامثلة اخرى لكميات قياسية مثل الحجم, الكتلة, السرعة (نقصد هنا السرعة التي تعتمد على المسافة الكلية), والزمن.

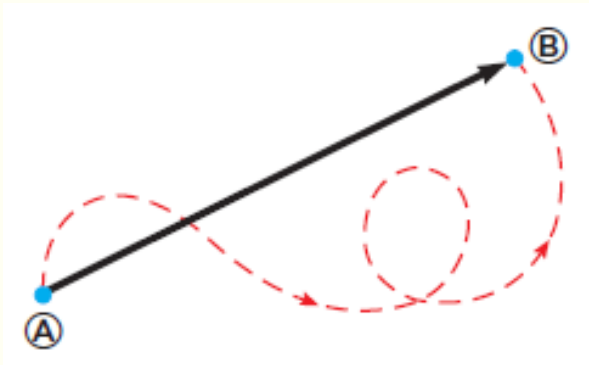
اذا كنت تستعد لقيادة طائرة صغيرة بنجاح تحتاج لمعرفة سرعة الرياح بالاضافة الى اتجاهها على حد سواء, لان الاتجاه مهم لاتمام الوصف.

الكميات المتجهه والقياسية Vector and Scalar Quantities

لذلك السرعة (نقصد هنا متجه السرعة اي السرعة التي تعتمد على الازاحة) كمية متجه.

من هنا يمكن تعريف الكمية المتجه بصورة كاملة بمعرفة قيمتها ووحدة القياس المناسبة بالاضافة الى الاتجاه. امثلة اخرى للكميات المتجهه الازاحة والتسارع.

مثلا افترض ان جسم ما يتحرك من النقطة A الى النقطة B كما في الشكل التالي:



الازاحة تمثل بالخط الواصل بين النقطتين A و B والسهم الخارج من نقطة البداية A الى نقطة النهاية B يوضح اتجاه الازاحة ام طول السهم الواصل بين النقطتين A و B يمثل مقدار الازاحة.

الكميات المتجهه والقياسية Vector and Scalar Quantities

اما اذا تحرك الجسم بخط اخر كما يظهر في الشكل بالخط المتقطع فالازاحة تبقى هي مقدار طول السهم الواصل بين النقطتين A و B, اذن الازاحة لا تعتمد على طول المسار المقطوع وانما على طول السهم الواصل بين النقطتين A و B.

يرمز للمتجه بالرمز $(\vec{A})$ وقيمة او مقدار المتجه بالرمز $|\vec{A}|$ او A و قيمة المتجه دائما موجبة.

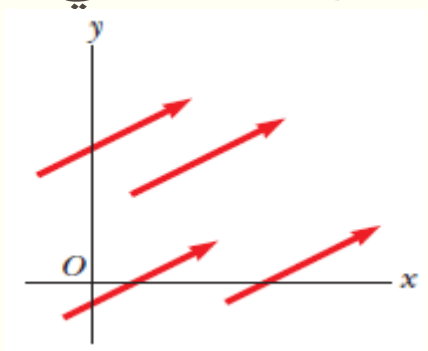
بعض خواص المتجهات Some Properties of Vectors

أ) تساوي المتجهات:

يتساوى متجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا كان لديهما نفس المقدار ويشيران في نفس الاتجاه.
بمعنى ان $\vec{A} = \vec{B}$ اذا كان:

1. $A = B$

2. $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يشيران على نفس الاتجاه على طول خطوط متوازية كما في الشكل التالي.

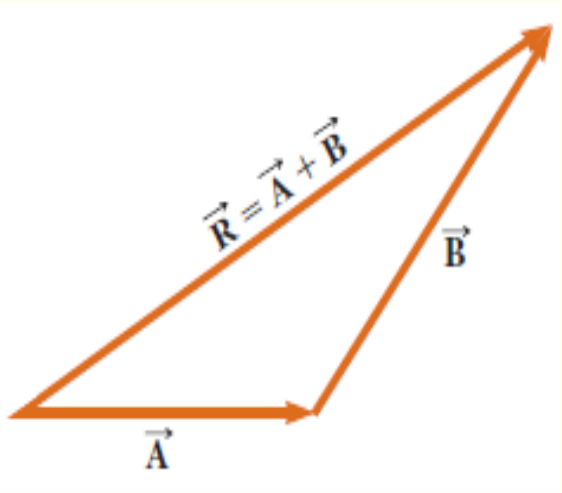


كل هذه المتجهات متساوية على الرغم من ان نقاط البداية لها مختلفة.

بعض خواص المتجهات Some Properties of Vectors

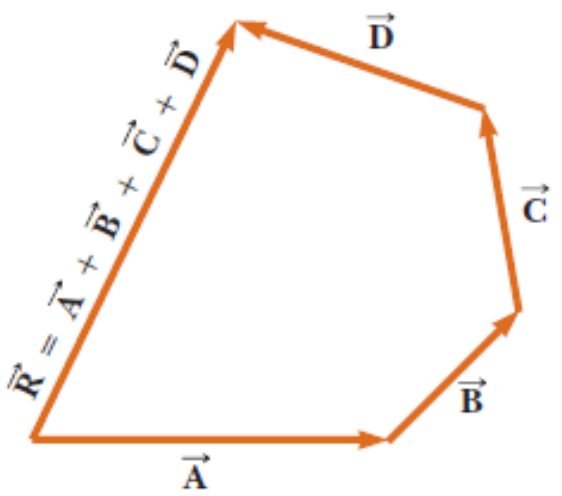
هذه الخاصية تمكنا من تحريك المتجه الى موضع موازي لموضعه من دون ما يؤثر ذلك على المتجه.

ب) اضافة او جمع المتجهات:



لجمع المتجه $\vec{B}$ الى المتجه $\vec{A}$ بيانيا اول نرسم المتجه $\vec{A}$ طوله يساوي قيمة المتجه ثم نرسم المتجه $\vec{B}$ بنفس القياسات بحيث يكون زيله من راس المتجه $\vec{A}$ كما في الشكل. محصلة $\vec{R}$ تساوي $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ وهو متجه مرسوم من زيل المتجه $\vec{A}$ وينتهي براس المتجه $\vec{B}$. واذا كان هنالك اكثر من متجه يتم جمعهم بنفس الطريقة, انظر الشكل في الصفحة التالية:

بعض خواص المتجهات Some Properties of Vectors

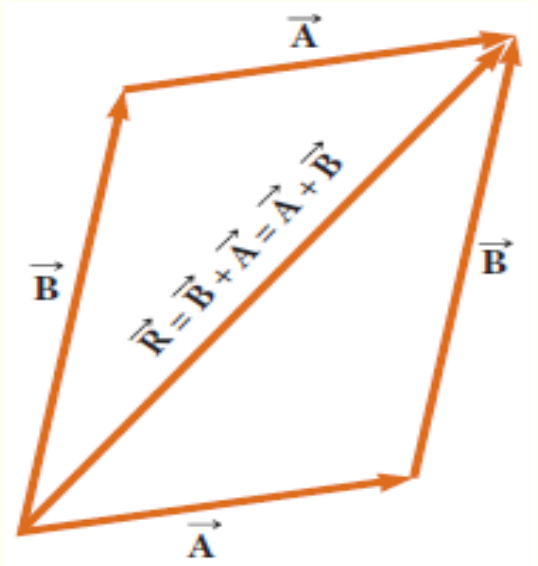


من هنا يمكن تعريف محصلة المتجهات $\vec{R}$ بانها المتجه المرسوم من زيل اول متجه الى راس اخر متجه.

في حالة جمع المتجهات عملية الجمع لا تعتمد على ترتيب المتجهات لذلك واحدة من خواص جمع المتجهات هي الخاصية الابدالية: اي ان

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

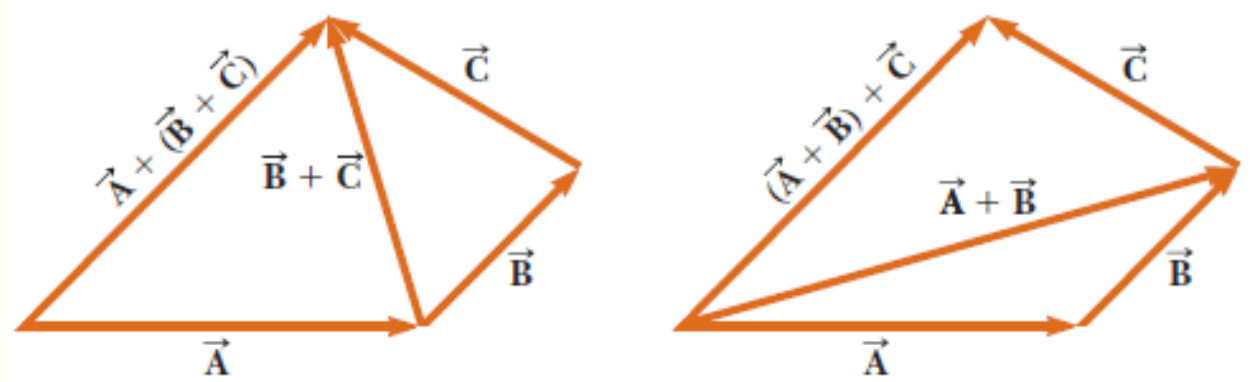
وهذا الشكل يوضح ذلك



بعض خواص المتجهات Some Properties of Vectors

وايضا من خواض الجمع الخاضية التجمعية: اي ان:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



اذا تم جمع متجهان او اكثر, يجب ان تكون كل هذه المتجهات لديها نفس الوحدات ونفس الكمية الفيزيائية, فمثلا لا يمكن جمع متجه سرعة الى متجه ازاحة. وايضا لا يمكن جمع كيلومتر الى متر. هذه القاعدة تعتمد ايضا على الكميات القياسية.

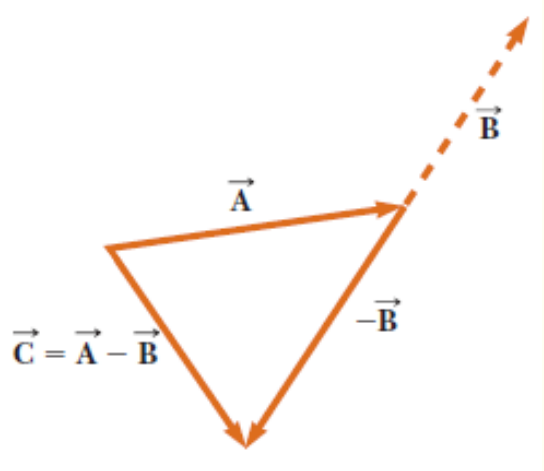
بعض خواص المتجهات Some Properties of Vectors

ج) سالب المتجه:

سالب المتجه $\vec{A}$ هو المتجه الذي اذا تم اضافته الى المتجه $\vec{A}$ تكون المحصلة صفر.

اي ان: $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$

المتجهان $\vec{A}$ و $-\vec{A}$ لديهما نفس القيمة ولكن اتجاههما عكس بعضهما البعض.



د) طرح المتجهات:

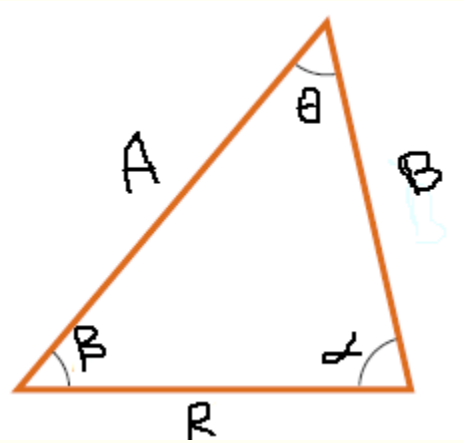
طرح المتجهات يمكن اعتباره عملية اضافة سالب المتجه. مثلا

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

هذا الشكل يوضح ذلك:

بعض خواص المتجهات Some Properties of Vectors

اذا كان هنالك متجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يصنعان مثلث مع محصلتهما كما في الشكل:



من قانون المثلثات فان قيمة محصلة المتجه $\vec{R}$ تحسب بواسطة:

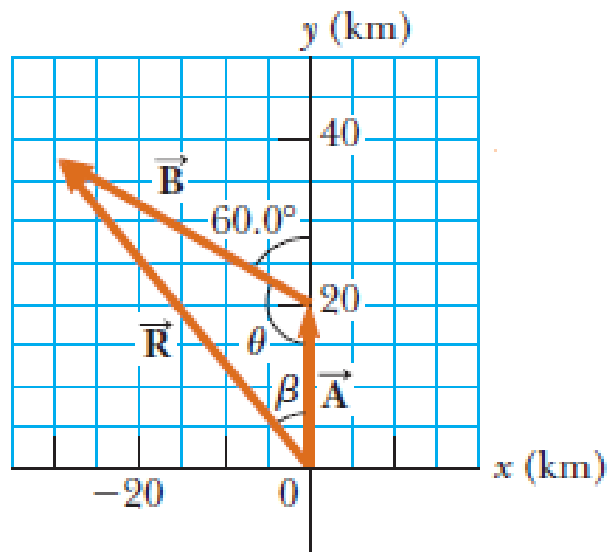
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

يمكن حساب الزاوية بواسطة العلاقة الاتية:

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\theta}$$

مثال

سيارة قطعت مسافة 20 Km شمالا ثم 35 Km بزاوية 60° بالاتجاه الشمالي الغربي كما في الشكل. اوجد قيمة و اتجاه محصلة الازاحة لهذه السيارة.



تحسب قيمة المحصلة من العلاقة:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$\theta = 180° - 60° = 120°$$

$$R = \sqrt{(20)^2 + (35)^2 - 2 \times 20 \times 35 \cos 120°}$$

$$\mathrm{R} = 48.2\mathrm{Km}$$

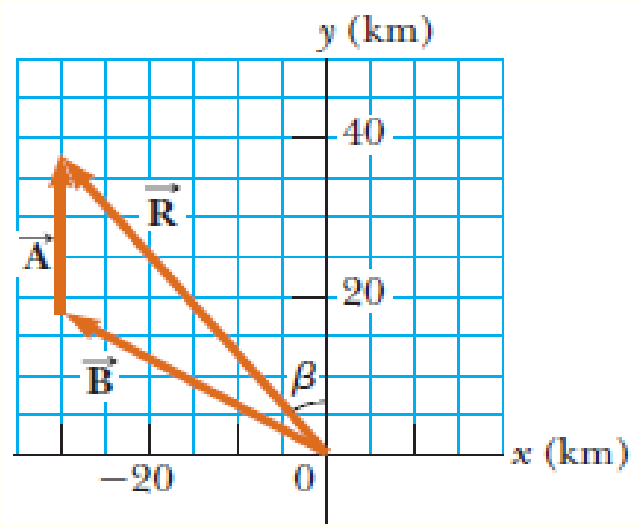
$$\frac{B}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\theta}$$

مثال

$$\sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35}{48.2}\sin 120° = 0.63$$
$$\beta = \sin^{-1} 0.63 = 39°$$

فهذا يعني ان ازاحة المحصلة للسيارة 48.2Km بزاوية 39° في الاتجاه الشمالي الغربي.

افترض ان الرحلة كانت بالعكس اي ان 35Km بزاوية 60° في الاتجاه الشمالي الغربي اولا ثم 20Km شمالا كما في الشكل. هل قيمة واتجاه ازاحة المحصلة للسيارة يحدث بها اي تغيير.



مكونات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

طريقة الرسم البياني لاضافة المتجهات لا ينصح باستخدامها في حالة الدقة العالية او المسائل في ثلاث ابعاد.

لذلك هنالك طريقة اخرى وهي طريقة جمع المكونات التي تستفيد من اسقاطات المتجهات على طول المحاور الاحداثية. وتسمى هذه الطريقة بمكونات المتجهات. اي ان اي متجه يمكن وصفه بصورة كاملة من خلال مكوناته فقط.

افترض المتجه $\vec{A}$ يقع على المستوى xy يصنع زاوية θ مع محور x الموجب كما في الشكل التالي. هذا المتجه هو مجموع متجهات هما $\vec{A}_x$ وهو متجه موازي لمحور x و المتجه $\vec{A}_y$ وهو متجه موازي لمحور y. اذن: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.
ويرمز لمكونات $\vec{A}$ ب A_x و A_y وهذه المكونات يمكن ان تكون موجبة او سالبة.

مكونات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

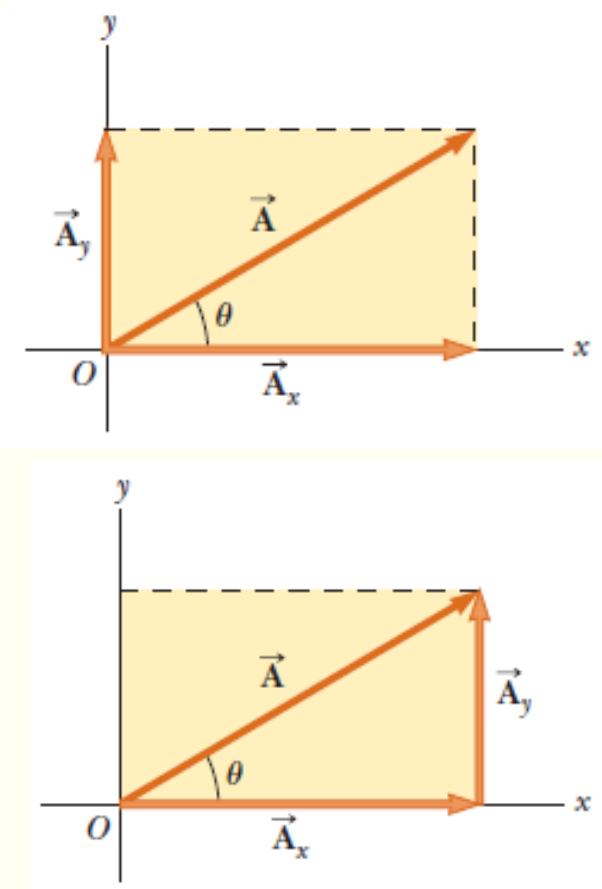
من الشكل وتعريف الجيب والجتا نجد ان:

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$

من هنا يمكن حساب قيمة واتجاه المتجه $\vec{A}$ من:

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

اشارات A_x و A_y تعتمد على موقع الزاوية θ اي ان الزاوية تقع في اي ربع من الارباع.



مكونات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

متجهات الوحدة

الكميات المتجهه دائما ما يتم التعبير عنها في صورة متجهات الوحدة.

متجه الوحدة: هو متجه لا بعدي لديه قيمة تساوي الواحد. متجهات الوحدة دائما تستخدم لوصف اتجاه معين وليس لها اي معنى فيزيائي.

يتم استخدام i , j , k لتمثيل متجهات الوحدة على المحاور الموجبة x , y , z, بالترتيب.

قيمة كل متجه من متجهات الوحدة يساوي الواحد, اي ان:

$$|i| = |j| = |k| = 1$$

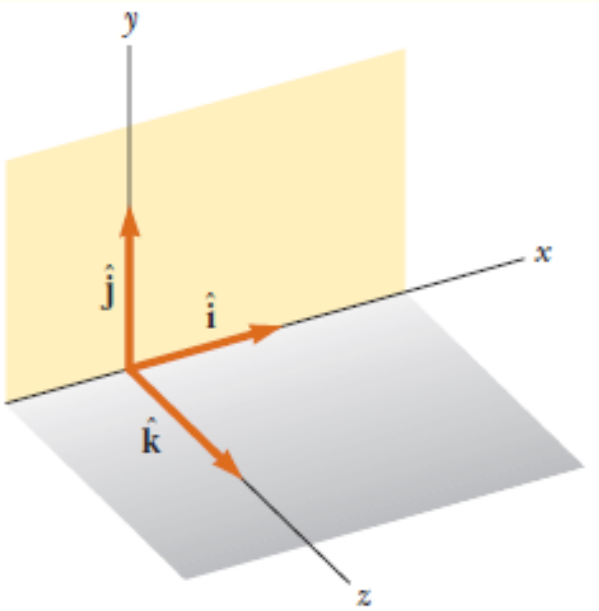
Components of a Vector and Unit Vectors مكونات المتجه ومتجهات الوحدة

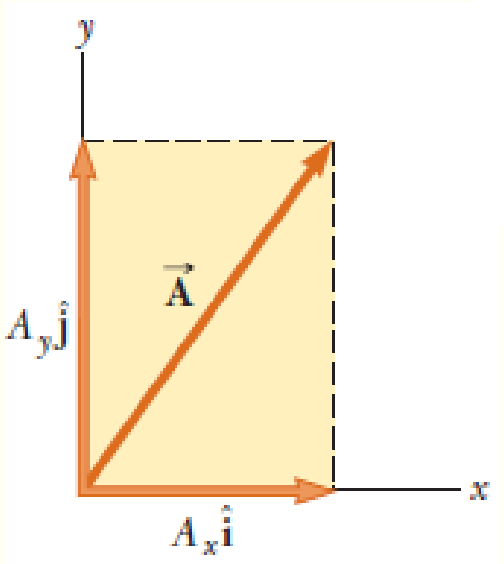
افترض المتجه $\vec{A}$ يقع على المستوى xy كما في الشكل: فان حاصل ضرب المكون A_x في متجه الوحدة i هو متجه المكون $\vec{A}_x$. وكذلك $\vec{A}_y$ اي ان:

$$\vec{A}_x = A_x i$$
$$\vec{A}_y = A_y j$$

فان $\vec{A}$ يساوي:

$$\vec{A} = A_x i + A_y j$$





Components of a Vector مكونات المتجه ومتجهات الوحدة and Unit Vectors

كيف يتم استخدام المكونات لجمع المتجهات:

لاضافة المتجه $\vec{B}$ الى المتجه $\vec{A}$ نجد ان:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{A} = A_x i + A_y j \quad , \vec{B} = B_x i + B_y j$$

$$\vec{R} = \left(A_x i + A_y j\right) + \left(B_x i + B_y j\right)$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x) i + \left(A_y + B_y\right) j$$

$$\vec{R} = R_x i + R_y j$$

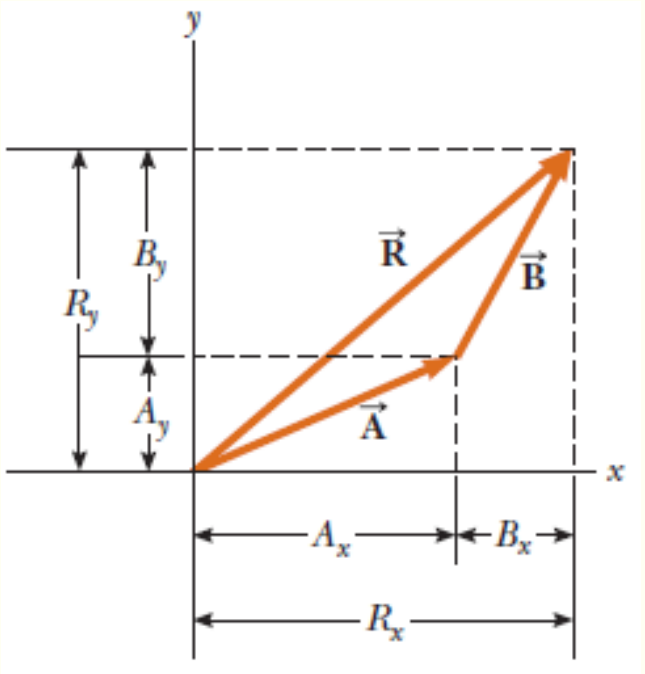
Components of a Vector مكونات المتجه ومتجهات الوحدة and Unit Vectors

فان قيمة المتجه $\vec{R}$ وزاويته θ

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$$

$$R = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$



مكونات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

بصورة عامة اذا كان:

$$\vec{A} = A_x i + A_y \mathrm{j} + A_z \mathrm{k},$$
$$\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$$

فان:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)i + \left(A_y + B_y\right)j + (A_z + B_z)k$$
$$\vec{R} = R_x i + R_y j + R_z k$$

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2} \quad , \quad \cos\theta_x = \frac{R_x}{R}$$

θ_x هي الزاوية التي تصنعها المحصلة R مع محور x.

مثال

اوجد حاصل جمع المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا كان

$$\vec{A} = (2i + 2j)m \quad , \quad \vec{B} = (2i - 4j)m$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)i + (A_y + B_y)j$$

$$\vec{R} = (2 + 2)i + (2 - 4)j = 4i - 2j$$

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2} = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2}$$

$$R = \sqrt{20} = 4.5m$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2}{4} = -0.5$$

مثال

$$\tan^{-1} -0.5 = -27°$$

لكن $-27°$ هي الزاوية من محور x الموجب مع اتجاه عقارب الساعة ولكن نحن قلنا سابقا ان الزاوية θ هي الزاوية من محور x الموجب مع عكس اتجاه عقارب الساعة اي ان:

$$\theta = 360° - 27° = 333°$$