حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:
ان النعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي :-

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 .....(1)$$

حيث ان المعاملات $a_1, a_2, ..., a_n$ ثوابت

لكي نجد الحل الغام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ينبغي ان نعتمد طريقة التخفيض الى الرتبة الاولى و المبينة سابقا و لأعطاء طريقة عامة لحل مثل هذا النوع من المعادلات نتناول اولا معادلة متجانسة من الرتبة الثانية و من ثم نقوم بتعميم الحل الى الرتبة n .

أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بصورتها العامة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 .....(2)$$

حيث ان a_1, a_2 ثوابت

لحل هذة المعادلة بطريقة التخفيض الى الرتبة الاولى نكتب هذة المعادلة بدلالة المؤثر D

$$\left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y = (D - m_1)(D - m_2) y = 0$$

ثم نفرض أن $u = (D - m_2) y$ ونعوض بالمعادلة الاخيرة , نحصل على

$$(D - m_1) u = 0$$
$$u' - m_1 u = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى عامل تكاملها هو $e^{-m_1 x}$ ويكون حلها هو

$$u e^{-m_1 x} = a$$
$$u = a e^{m_1 x}$$

وبالتعويض عن u نحصل على

$$(D - m_2) y = a e^{m_1 x}$$
$$y' - m_2 y = a e^{m_1 x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى عامل تكاملها هو $e^{-m_2 x}$ ويكون حلها

$$y e^{-m_2 x} = \int a e^{m_1 x} . e^{-m_2 x} dx$$
$$y e^{-m_2 x} = \int a e^{(m_1 - m_2) x} dx .....(3)$$

يمكن ان يكون جذور المعادلة بثلاث حالات:-

الحالة الاولى: يكون جذرا المعادلة مختلفين حقيقين , أي أن $m_1 \neq m_2$, لذلك سوف يكون حل المعادلة (3) بالشكل الاتي

$$ye^{-m_2x} = \frac{a}{(m_1 - m_2)} e^{(m_1 - m_2)x} + c_2$$
$$y = e^{m_2x} \frac{a}{(m_1 - m_2)} e^{(m_1 - m_2)x} + c_2 e^{m_2x}$$
$$y = \frac{a}{(m_1 - m_2)} e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$$
$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$$

بحيث أن c_1, c_2 ثوابت أختيارية و أن $\frac{a}{m_1 - m_2} = c_1$

الحالة الثانية: يكون جذرا المعادلة متساويان حقيقيان, أي أن $m_1 = m_2 = m$ وتصبح المعادلة (3) بالشكل الاتي

$$ye^{-mx} = \int ae^{(m_1 - m_2)x} dx$$
$$ye^{-mx} = \int ae^{(m-m)x} dx$$
$$ye^{-mx} = \int a dx$$
$$y = e^{mx} \int a dx$$
$$y = e^{mx}(ax + c_2)$$
$$y = (c_1 x + c_2)e^{mx}$$

الحالة الثالثة : يكون جذرا المعادلة عددين عقديين أي أذا كان $m_1 = a + ib, m_2 = a - ib$, أن الحل في الحالة الاولى (عدم تساوي الجذور) يكون

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$$

نعوض الجذور العقدية في المعادلة الاخيرة ينتج

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}$$
$$y = c_1 e^{ax}.e^{ibx} + c_2 e^{ax}.e^{-ibx}$$
$$y = e^{ax}(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx})$$

وحسب قانون أويلر

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$$
$$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

تصبح المعادلة بالشكل الاتي

$$y = e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\sin bx\right]$$
$$y = e^{ax}\left[A\cos bx + B\sin bx\right]$$

حيث $A = c_1 + c_2, B = i(c_1 - c_2)$