**الاجسام الساقطة مع مقاومة الهواء:**

أفرض جسم يسقط بكتلة $n$ الذي يكون متأثرا بالجاذبية $g$ و مقاومة هواء تكون متناسبة مع سرعة الجسم . أفرض بأن الكتلة و الجاذبية تكون ثابتة و سوف يكون الاتجاة الاسفل هو الاتجاة الموجب

**قانون نيوتن الثاني للحركة:**

معدل القوة المؤثرة على جسم تساوي معدل زمن التغير لزخم ذلك الجسم مع ثبوت الكتلة

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

حيث $F$ معدل القوة على جسم , $v$ سرعة الجسم و كلاهما في زمن $t$

**هناك قوتان تؤثران على الجسم :-**
1- القوة و فقا للجاذبية المعطاه بواسطة الوزن $w$ للجسم والتي تساوي $mg$
2-القوة وفقا لمقاومة الهواء المعطاة بواسطة $-kv$ , $k \geq 0$ هو ثابت التناسب الاشارة السالبة تكون بسبب هذة القوة تعاكس السرعة اي أن تأثيرها يكون بالاتجاة العلوي معدل القوة $F$ على الجسم يكون $F = mg - kv$ بتعويض هذة النتيجة في معادلة $F = m\frac{dv}{dt}$ نحصل على

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وهي معادلة لحركة الجسم.

أذا مقاومة الهواء تكون مهمولة أو غير موجودة لذلك $k = 0$ و معادلة (1) تبسط الى $\frac{dv}{dt} = g$ و عندما $k > 0$ تكون السرعة هي $v_1 = \frac{mg}{k}$

**ملاحظة**: سببين لاينطبق بهما القوانيين
1- اذا كانت السرعة لا تتناسب مع مقاومة الهواء
2- الاتجاة العلوي هو الموجب

**مثال**: جسم كتلته $5g$ يسقط من ارتفاع 100 قدم بسرعة (0) بفرض عدم وجود مقاومة الهواء جد
1- معادلة سرعة الجسم عند اي وقت $t$
2- معادلة لموقع الجسم عند اي وقت $t$
3- الزمن المطلوب حتى يصل

الحل:1- بما ان مقاومة الهواء غير موجودة ( معدومة)

$$\frac{dv}{dt} = g$$

نحل هذة المعادلة بواسطة فصل المتغيرات

$$dv = gdt$$

$$v = gt + c$$

وعند البداية تكون سرعة الجسم تساوي صفر و الوقت صفر اي ( $t = 0, v = 0$ )

$$0 = g(0) + \mathrm{c}$$

$$\mathrm{c} = 0$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{gt}$$

عندما نفرض $g = 32\ {ft}/{\sec^2}$ تصبح المعادلة

$$v = 32t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2- لنفرض ان الازاحة أو المسافة هي $x$ و أن السرعة هي مشتقة المسافة

$$\frac{dx}{dt} = v$$

لذلك سوف تصبح المعادلة (1) هي

$$\frac{dx}{dt} = 32t$$

$$x = 16t^2 + c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

عند بداية السقوط للجسم تكون $x = 0, t = 0$

$$0 = 16(0) + c_1$$

$$c_1 = 0$$

نعوض في (2) ينتج

$$x = 16t^2$$

3- نحن نحتاج الزمن عندما $x = 100$ من معادلة (3)

$$100 = 16t^2$$

$$t^2 = \frac{100}{16}$$

$$t = \sqrt{\frac{100}{16}}$$

$$t = 2.5 \sec.$$

**مثال**: جسم يزن $64b$ يسقط من أرتفاع $1000\,ft$ بسرعة أبتدائية $10\ ft/\sec$ . أفرض بأن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسم. أذا السرعة المحدودة تكون $128\ ft/\sec$ أوجد

1- معادلة لسرعة الجسم بأي زمن $t$

2- معادلة لموقع الجسم بأي وقت $t$

الحل: 1- عندما يكون وزن الجسم $w=64b$ و عندما تكون $w=mg$ سوف يكون $mg=64$ و منها يكون $m=2$ و عندما $v_1=128\ ft/\sec$ وحسب المعادلة

$$v_1=\frac{mg}{k}$$

$$128=\frac{64}{k}$$

$$k=\frac{1}{2}$$

نعوض في المعادلة

$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{4}v=32$$

وهذة معادلة خطية نحلها ينتج

$$v=ce^{-\frac{t}{4}}+128.....(1)$$

عندما يكون $t=0$ سوف يكون $v=10$ نعوض في معادلة (1) ينتج

$$10=ce^{0}+128$$

$$c=-118$$

أذن السرعة عند أي وقت سوف تكون

$$v=-118e^{-\frac{t}{4}}+128.....(2)$$

2- عندما تكون السرعة مشتقة المسافة ( الازاحة) $v=\frac{dx}{dt}$ معادلة (2) يمكن كتابتها بالشكل الاتي

$$\frac{dx}{dt}=-118e^{-\frac{t}{4}}+128$$

هذة معادلة تفاضلية يمكن حلها بواسطة فصل المتغيرات ينتج

$$x=472e^{-\frac{t}{4}}+128t+c_1.....(3)$$

عندما $t=0$ سوف تكون $x=0$ نعوض في (3) ينتج

$$0=472e^{0}+128(0)+c_1$$

$$c_1=-472$$

نعوض في معادلة (3) ينتج

$$x=472e^{-\frac{t}{4}}+128t-472$$

وهي معادلة لموقع الجسم عند اي وقت $t$