المعادلات التفا

تأليف

د. محمود عبد المحسن

د. حسام ربايعة

جامعة السودان المفتوحة

Open University of Sudan

جامعة السودان المفتوحة

برنامج التربية

رمز 270

جامعة السودان المفتوحة

المعادلات التفاضلية.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان المفتوحة

برنامج التربية

المعادلات التفاضلية

رمز المقرر ورقمه: ريض 270

فريق إعداد المادة العلمية ومراجعتها:

د. محمود عبد المحسن، د. مهند جمال شهوان،

د. حسام ربايعة، د. غفار الجبوري.

التحكيم العلمي:

د. محسن حسن عبد الله هاشم

التصميم التعليمي: خالد حسنين

منشورات جامعة السودان المفتوحة، الطبعة الأولى 2005

جميع الحقوق المحفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج أىّ جزء

من هذا الكتاب، وبأى وجه من الوجوه، إلاّ بعد الموافقة المكتوبة من الجامعةرقم الإيداع:

مقدمة المقرر

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذا المقرر الذي يتعلق بالمعادلات التفاضليّة، وهو مقرر موجه لتخصص الرياضيات في برنامج التربية، ووضعناه ليفصل المفاهيم الأساسية في مادة التفاضل والتكامل، ويشرح ما هي المعادلة التفاضلية والتي تشمل مشتقات أو تفاضلات، والهدف من كل ذلك تقديم طرق حل أنواع معينة وأساسية من المعادلات التفاضلية لكي تكون مقدمة لبقيّة المقررات في السنوات اللاحقة.

إن التطبيقات على المعادلات التفاضلية تكاد تشمل مناحي الحياة كافة، فلا يكاد علم من العلوم الصناعية أو الزراعية أو الحياتية إلا ويعتمد في مفاهيمه النظرية على المعادلات التفاضلية، وستلحظ من خلال التطبيقات التي سنوردها في هذا المقرر جانبا من أهمية هذا العلم وفائدته ودوره في حياتنا المعاصرة.

سنتناول في هذا المقرر المكون من أربع وحدات دراسية المعادلات الخطية من الرتبة الأولى وتطبيقات عليها، ثم ننطلق إلى المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الثانية وتتطبيقات عليها، وسيتخلل الوحدات مجموعة كبيرة من المفاهيم الفرعية المتعلقة بالعناوين الرئيسة لهذا المقرر.

سعينا أن نوضح كل فكرة من الأفكار الواردة في هذا المقرر عبر مثال محلول، لذا ستحظى عزيزي الدرس، بكمية كبيرة من الأمثلة المحلولة، وما يساندها من تدريبات وأسئلة تقويم ذاتي، وكل ذلك لنعينك على استيعاب ما ورد في هذا المقرر.

إن دراستك لهذا المقرر والمشاركة في حل الأمثلة الواردة والتدريبات وأسئلة التقويم الذاتي، فضلا عن متابعة أية وسائط مساندة، وحضور اللقاءات الأكاديمية مع مشرفك، ستضمن لك بكل تأكيد فهما عميقا للمفاهيم الواردة فيه، والبناء عليه مستقبلا لفهم بقية المقررات التي تعتمد عليه.

عزيزي الدارس،،

عند هذه المرحلة من مقدمة المقرر دعنا نلخص لك الأهداف العامّة من هذا المقرر، والتي نأمل أن تتمكن من تحقيقها بعد دراسته، وقد أوردناها في الجدول التالي:

الأهداف العامة للمقرر



عزيزي الدارس،،،

بعد فراغك من دراسة هذا المقرر ينبغي أن تكون قادراً على:

1) **معرفة** المفاهيم الأساسية في المعادلات التفاضلية بعيداً عن البراهين الرياضية.
2) **تصنيف** المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمعادلات التفاضلية وتطبيقاتها.
3) **معرفة** طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
4) **تطبق** على حل المعادلات بطريقة فصل المتغيرات وطريقة المعامل المكامل.
5) **شرح** حل المعادلات التفاضلية المتجانسة والمعادلات المضبوطة.
6) **شرح** طرق حل المعادلات التفاضلية الخطيّة المتجانسة من الرتبة الثانية.
7) **فهم** طرق إيجاد حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية.

لا شك أن الأهداف السابقة عميقة وتحتاج إلى بذل جهد منك بالتعاون مع مشرفك الأكاديمي لتحقيقها. وقد ارتأينا أن نقسم المقرر إلى أربع وحدات دراسية، تساهم معا في تحقيق الأهداف العامة السابقة جميعها. وفي الجدول المبين في الصفحة التالية أسماء تلك الوحدات وأرقام الصفحات التي تجدها بها.

وفي ختام هذه المقدمة نسأل الله لك التوفيق والسداد، وأن يكون في عونك دائما لاكتساب مزيد من العلوم النافعة لك ولأمتك، إنه سميع قريب مجيب الدعاء.

محتويات المقرر

الوحدة	الصفحة
1. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى	1
2. تطبيقات على المعادلات من الرتبة الأولى	95
3. المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الثانية	159
4. تطبيقات على المعادلات الخطيّة	205

الوحدة الأولى

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**5**
تمهيد	5
أهداف الوحدة	6
1. مفهوم المعادلة التفاضلية العادية	**7**
2. تعريف المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n	**10**
3. حل المعادلة التفاضلية	**12**
4. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى القابلة للفصل	**15**
5. المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى	**23**
1.5 شرط المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى	23
2.5 الدالة المتجانسة من الرتبة n	25
6. حل المعادلة التفاضلية المتجانسة	**27**
7. المعادلات التفاضلية المضبوطة	**35**
1.7 تعريف المعادلة التفاضلية المضبوطة	35
2.7 حل المعادلة التفاضلية المضبوطة	38
8. العوامل المكاملة	**45**
1.8 تقديم	45
2.8 قواعد إيجاد العامل المكامل للمعادلة التفاضلية	46
9. المعادلات التفاضلية الخطية والعوامل المكاملة	**54**
1.9 حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى	54
2.9 حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الأولى	56
10. معادلة بيرنولي	**61**
1.10 عريف معادلة بيرنولي	61
2.10 حل معادلة بيرنولي	61

الموضوع	الصفحة
الخلاصة	68
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	69
إجابات التدريبات	70
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	89
مسرد المصطلحات	93
المراجع العربية والأجنبية	94

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

أهلاً بك إلى هذه الوحدة الأولى من مقرر 270 المعادلات التفاضلية، وهذه الوحدة تتناول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

إن المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى من أهم المعادلات في العلوم التطبيقية كالهندسة، والفيزياء، والكيمياء، والفلك وغيرها.

في هذه الوحدة ستتعرف مفهوم المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، وسنتعرف كيفية حل هذا النوع من المعادلات وعلى نوعية هذه المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة والعوامل المكاملة، وبالنهاية سنتعرف معادلة بيرنولي وكيفية حلها.

تشكل هذه الوحدة أساسا متينا لفهم بقية وحدات هذا المقرر، لذا ننصحك بدراسة القواعد جيدا، وحل الأمثلة مرات ومرات، والانتقال إلى التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي بعد ذلك. فإن وجدت نفسك بعد ذلك عاجزا عن فهم بعض ما ورد في هذه الوحدة فلا بأس بالاستعانة بمشرفك الأكاديمي عبر لقاءاتك المباشرة معه، أو الاتصال به هاتفيا للإستفسار عما أشكل عليك، ولا تتجاوز هذه الوحدة إلى التي تليها إلا وقد استوعبت ما ورد فيها من مفاهيم.

يجدر بك عزيزي الدارس كذلك أن تهتم بهذه الوحدة وتدرسها بالتسلسل الذي وضعت به، فلا تنتقل إلى جزء إلا بعد أن تفهم الجزء السابق له فهماً جيداً.

أهلاً بك مرة أخرى إلى هذه الوحدة الأساسية في هذا المقرر، نأمل أن تفيد منها، وأن تساهم معنا في نقدها وتقييمها من أجل تطويرها مستقبلا.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

يتوقع منك بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1) **تعرّف** المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

2) **تميّز** المعادلات التفاضلية العادية عن غير العادية.

3) **تعرّف** المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n.

4) **تحل** المعادلة التفاضلية – طريقة إثبات الحلول.

5) **تحل** المعادلة التفاضلية – طريقة فصل المتغيرات.

6) **تحل** المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى.

7) **تحل** المعادلة التفاضلية المضبوطة.

8) **تعرّف** العوامل المكاملة وكيفية استخدامها.

9) **تشرح** العلاقة بين المعادلات التفاضلية المتجانسة والعوامل المكاملة.

10) **تعرّف** معادلة بيرنولي وتشرح كيفية حلها.

1. مفهوم المعادلة التفاضلية العادية

عزيزي الدارس،،

المعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تحتوي في أحد طرفيها أو كليهما على إشارة المشتقات (تفاضل (... $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$,) حيث $\frac{dy}{dx}$ تعني المشتقة الأولى للمتغير y بالنسبة للمتغير المستقل x ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$ تعني المشتقة الثانية للمتغير y بالنسبة للمتغير المستقل x وهكذا، ونكتب $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$ احيانا بالصورة:

$$y' \frac{dy}{dx} \ , \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

وبشكل عام $\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$ تعني المشتقة النونية للمتغير y النسبة للمتغير المستقل x .

أما كلمة عادية في تسمية المعادلة التفاضلية فهي تعني أن المعادلة تحتوي على مشتقات عادية فقط (أي أن الدالة y لا تعتمد إلا على متغير واحد مستقل مثل x) ورتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة للاشتقاق (للتفاضل) تظهر في المعادلة.

وإليك الأمثلة التالية التي توضح هذا التعريف.

◄◄ مثال (1)

المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} = x^2$

هي معادلة تفاضلية لأنها تحتوي إشارة المشتقات، وعادية لأن المتغير في اشتقاقه يعتمد فقط على المتغير x، ورتبة المعادلة من الرتبة الثانية لأن أعلى درجة في الاشتقاق هي الدرجة الثانية، إذن المعادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية.

◄◄ مثال (2)

المعادلة $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + 4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + y^3 = 5x$

هي معادلة تفاضلية عادية لأنها تحتوي على مشتقات، والمتغير y في اشتقاقه يعتمد على المتغير x، والمعادلة من الرتبة الثالثة لأن أعلى درجة في الاشتقاق هي من الدرجة الثالثة، إذن هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة.

◄◄ مثال (3)

المعادلة $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{4\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

المعادلة تفاضلية لكنها ليست عادية لأن الدالة y تعتمد على أكثر من متغير وهما x و z. هذا النوع من المعادلة تسمى معادلة تفاضلية جزئية، ولن تكون ضمن اهتمامنا في هذا المقرر.

◄◄ مثال (4)

المعادلة $(xy'')^2 + \left(y^{(4)} \sin x\right)'' = \sqrt{x}$

معادلة تفاضلية عادية لأنها تحتوي على مشتقات دالة y تعتمد على متغير واحد فقط، ورتبة هذه المعادلة من الرتبة السادسة لأن الحد $\left(y^{(4)} \sin x\right)''$ يعطي $y^{(6)} = \frac{d^6y}{dx^6}$ بعد إجراء عملية الاشتقاق (التفاضل).

التدريب (1)

بين أي من المعادلات التفاضلية التالية عادية ثم أوجد رتبتها إن أمكن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial w^2} = 5 \qquad (2)$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2x^2 = 5x \qquad (3)$$

$$\left(xy^{(3)}\right)'' + xy'' = e^x \qquad (4)$$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. ماذا نعني برتبة المعادلة التفاضلية العادية؟

2. بين لماذا المعادلات التالية ليست تفاضلية؟

(أ) $(\cos x)y^2 + 2y = 3x^2 + 5$

(ب) $e^x - 2x + 3y^2 = 0$

2. تعريف المعادلة التفاضلية الخطيّة من الرتبة (n)

عزيزي الدارس،،

لعل السؤال الذي يطرح نفسه الآن: ماذا نعني بالمعادلة الخطيّة إذا كانت المعادلة معادلة تفاضلية عادية؟

ويمكننا أن نوضح ذلك بالتعريف التالي:

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n : هي المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n والتي تكتب على الصورة التالية:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.....a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_o(x)y=g(x)$$

حيث أن $a_n(x),a_{n-1}(x),.....,a_1(x),a_0(x),g(x)$

هي دوال محدودة مسبقاً وتعتمد فقط على المتغير المستقل x.

أما المعادلات التي لا يمكن كتابتها على هذه الصورة فلا تسمى معادلات تفاضلية خطية وإليك الأمثلة التالية التي توضح هذا التعريف.

◄◄ مثال (1)

المعادلة التفاضلية $y''-6xy'=e^{2x}+1$

هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية (أعلى درجة في الاشتقاق) الدالة y والمتغير المستقل x ، وكتبت المعادلة حسب صفة تعريف المعادلة التفاضلية الخطية حيث:

$$b_2(x)=1,\quad b_1(x)=-6x,\quad b_0(x)=0,\quad g(x)=e^x+1$$

◄◄ مثال (2)

المعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3}-5x\frac{dy}{dx}=e^x+1$

هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة (أعلى درجة في الاشتقاق) الدالة y والمتغير x, وكتبت المعادلة حسب صيغة تعريف المعادلة التفاضلية الخطية حيث:

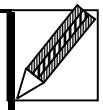
$$b_3(x)=1,\quad b_2(x)=0,\quad b_1(x)=-5x,\quad ,b_0(x)=0,\quad g(x)=e^x+1$$

◄◄ مثال (3)

المعادلة التفاضلية $y-6x(y')^3=e^x+3$

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى (أعلى درجة في الاشتقاق) لكن رتبة المعادلة (الأولى) رفعت إلى الأس 3، إذن المعادلة التفاضلية غير خطية، لقد رفع مشتقة الدالة y إلى أس لا يساوي 1 .

التدريب (2)



للمعادلات التفاضلية التالية أوجد رتبتها ثم اختبر صفة الخطية فيها:

$$5x\frac{d^2y}{dx^2}+4\,x^2\frac{dy}{dx}-(\sin x)y=0 \quad (1)$$

$$5\,y''+2\,e^x\,y'-3y=x \quad (2)$$

$$5\frac{dy}{dx}-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^6=x \quad (3)$$

أسئلة التقويم الذاتي (2)



أوجد رتبة المعادلات التفاضلية التالية، وهل هي خطية؟

1. $x^4y^{(4)}+x\,y^{(3)}=e^{2x}$

2. $x\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\frac{dy}{dx}-(\sin x)\sqrt{y}=x^2$

3. حل المعادلة التفاضلية

(Solution of Differential Equation)

تقديم

بعد أن عرفنا المعادلة التفاضلية العادية ورتبتها وكذلك المعادلة التفاضلية الخطية يبقى السؤال التالي قائماً: ما المقصود بحل المعادلة التفاضلية؟

المقصود بحل المعادلة التفاضلية: هو إيجاد الدالة y وكتابتها بدلالة المتغير المستقل x إن أمكن ضمن الفترة التي تكون فيها الدالة y قابلة للاشتقاق (التفاضل).

إثبات وجود الحلول (Proof of Existence of Solution)

المقصود بإثبات وجود الحلول لمعادلة تفاضلية ما: هو بيان أن الدالة y تمثل حلاً لهذه المعادلة.

ويتم ذلك بتعويض y في المعادلة التفاضلية ونرى إن كانت الحلول تحققت أم لا، والأمثلة توضح كيفية إثبات الحلول في المعادلات التفاضلية.

مثال (1)

بين أن $y = e^x$ تمثل حلاً للمعادلة $y' - y = 0$

الحل:

نجد $y' = \frac{dy}{dx} = e^x$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على $e^x - e^x = 0$

إذن $y = e^x$ حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = 0$.

مثال (2)

هل الدالة $y = \cos x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$.

الحل:

نجد $y' = \frac{dy}{dx} = -\sin x$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على

$$-\sin x + \cos x = 0$$

أي أن $\sin x = \cos x$

بشكل عام $y = \cos x$ لا يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ لكن في فترات معينة تعرف عليها الدالة يمكن أن نجد نقاطاً تكون فيها الدالة $y = \cos x$ تحقق المعادلة التفاضلية y' $+ y = 0$.

◄◄ مثال (3)

بين أن $y = e^{2x}$ تمثل حلاً للمعادلة $y'' - 4y = 0$

الحل:

$$y'' = \frac{dy^2}{dx^2} = 4\ e^{2x} \qquad , \qquad y' = \frac{dy}{dx} = 2\ e^{2x}$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$y'' - 4y = 4\ e^{2x} - 4\ e^{2x} = 0$$

إذن $y = e^{2x}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y = 0$

◄◄ مثال (4)

ما هي قيمة (قيم) n التي تجعل الدالة $y = x^n$ حلاً للمعادلة التفاضلية $x^2y'' - 6y = 0$

الحل:

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}, \qquad y' = n\ x^{n-1}$$

$$x^2 n\ (n-1)\ x^{n-2} - 6\ x^n = 0$$

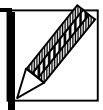
$$n(n-1)\,x^n - 6\,x^n = 0$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0$$

$$n = 3, \quad n = -2$$

التدريب (3)



بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة حلاً للمعادلة التفاضلية أم لا؟

(1) $y = e^{3x}$ $\qquad y''' - 9y' = 0$

(2) $y = 4(x+4)$ $\qquad (y')^2 + xy' - y = 0$

(3) $y = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad y\frac{dy}{dx} + x = 0$

أسئلة التقويم الذاتي (3)



1. بين أن الدالة $y = \frac{1}{x}e^x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

$$xy' + y - y\,In\,(xy) = 0$$

2. ما هي قيمة c التي تجعل الدالة $y = e^{cx}$ حلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 12y = 0$$

4. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى القابلة للفصل

(Separable Equations in first order differential equations)

عزيزي الدارس،،

تكون المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى قابلة للفصل إذا أمكن التعبير عنها على الصيغة:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x)}{B(y)}$$

حيث $A(x)$ دالة للمتغير x فقط، $B(y)$ دالة المتغير y فقط.

ويكون حل المعادلة التفاضلية القابلة للفصل $A(x)dx + B(y)dy = 0$

يعطى بالصورة:

$$\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = C$$

حيث C ثابت اختياري. ويسمى هذا الحل بالحل العام للمعادلة التفاضلية ويلزم من الدارس معرفة طرق التكامل التي مرت معه في السنوات السابقة، والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام طريقة فصل المتغيرات (Seperation of Variables Method).

◄◄ مثال (1)

أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية $x\,dx - y^2\,dy = 0$.

الحل:

المعادلة التفاضلية مفصولة المتغيرات، حل المعادلة يعطى بالشكل:

$$\int x\,dx - \int y^2\,dy = c$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c$$

$$-\frac{y^3}{3} = c - \frac{x^2}{2}$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 3c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^{\ 2}}{2} + c_1} \qquad c_1 = -3c$$

◄◄ مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = e^x \sin^2 y$

الحل:

$$dy = e^x \sin^2 y\, dx$$

نقسم طرفي المعادلة على $\sin^2 y$ فنجد:

$$\frac{1}{\sin^2 y} dy = e^x dx$$

ونعلم أن: $\operatorname{cosec}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}$

وبالتالي $e^x dx = \operatorname{cosec}^2 y\, dy$

$$e^x dx - \operatorname{cosec}^2 y\, dy = 0$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $\int e^x dx - \int \operatorname{cosec}^2 y dy = c$

$$e^x + \cot y = c$$

◄◄ مثال (3)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2+1)}$

الحل:

بفصل المتغيرات

$$\frac{1}{y}dy=\frac{2x}{x^2+1}dx$$

الحل العام

$$\int\frac{1}{y}dy-\int\frac{2x}{x^2+1}dx=c$$

$$\ln|y|-\ln|x^2+1|=c$$

$$\ln\left|\frac{y}{x^2+1}\right|=c$$

$$\frac{y}{x^2+1}=e^c\Rightarrow y=c_1(x^2+1)\ ,\quad e^c=c_1$$

◄◄ مثال (4)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x^2y'-y^2=0$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة:

$$\frac{x^2dy}{dx}-y^2=0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{y^2}dy$$

الحل العام للمعادلة:

$$\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{1}{y^2}=c$$

$$\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{y^{-1}}{-1}=c$$

$$\frac{-1}{x}=\frac{-1}{y}+c$$

◄◄ مثال (5)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx}=-\frac{y+y^5}{2+y^4}$

الحل:

نعيد كتابة المعادلة على الصورة:

$$\frac{1}{x}dx+\frac{2+y^4}{y+y^5}dy=0$$

وحسب الكسور الجزئية نكتب المقدار:

$$\frac{2+\mathrm{y}^4}{\mathrm{y}+\mathrm{y}^5}=\frac{2+\mathrm{y}^4}{\mathrm{y}\left(1+\mathrm{y}^4\right)}=\frac{2}{\mathrm{y}}-\frac{\mathrm{y}^3}{1+\mathrm{y}^4}$$

تصبح المعادلة منفصلة المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}+\left(\frac{2}{\mathrm{y}}-\frac{\mathrm{y}^3}{1+\mathrm{y}^4}\right)\mathrm{dy}=0$$

الحل العام للمعادلة:

$$\int\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}+\int\left(\frac{2}{\mathrm{y}}-\frac{\mathrm{y}^3}{1+\mathrm{y}^4}\right)\mathrm{dy}=\mathrm{c}$$

$$\ln|\mathrm{x}|+2\ln|\mathrm{y}|-\frac{1}{4}\ln\left|1+\mathrm{y}^4\right|=\mathrm{c}$$

☙ ملاحظة:

في بعض الحالات،كما تلاحظ في بعض الامثلة من الصعب أو ليس بالضرورة أن نكتب حل المعادلة التفاضلية (الدالة y بدلالة المتغير المستقل بصورة مباشرة) واليك أمثلة اخرى توضح ذلك

◄◄ مثال (6)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \tan y$

الحل:

المعادلة هي $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\cos y}$

ونستطيع كتابة المعادلة بصيغة فصل المتغيرات على الصورة:

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy - dx = 0$$

الحل العام هو:

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy - \int dx = c$$

$$\ln|\sin y| - x = c$$

◄◄ مثال (7)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \sec y \tan x$

$$\frac{dy}{\sec y} = \tan x \, dx$$

$$\cos y \, dy = \tan x \, dx$$

الحل العام هو:

$$\int \cos y \, dy - \int \tan x \, dx = c$$

$$\sin y + \ln|\cos x| = c$$

ملاحظة:

عند إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية يجب أن يظهر ثابت التكامل الاختياري C في أحد طرفي حل المعادلة، ولإعطاء حل خاص لهذه المعادلة ما علينا إلا إعطاء شرط يحقق المعادلة لإيجاد قيمة الثابت C لنحصل على الحل الخاص للمعادلة التفاضلية والمثال التالي يوضح هذه الملاحظة.

مثال (8)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ ثم أوجد الحل الخاص عند النقطة $(e\ ,\ 1)$.

الحل:

بفصل المتغيرات عن بعضها البعض نحصل على

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$$

الحل العام هو:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{y}dy = c$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = c \Rightarrow \frac{x}{y} = e^{c} \Rightarrow y = e^{-c}x$$

بوجود الثابت C في حل المعادلة يعتبر هذا حلاً عاماً، لإيجاد الحل الخاص نستخدم النقطة (1 وe) المعطاة وذلك بتعويض $x= e,\quad y=1$ في الحل العام لنحصل على:

$$1 = e^{-c}\ e \Rightarrow 1 = e^{1-c}$$

$$\ln|1| = 1 - c \Rightarrow 0 = 1 - c \Rightarrow c = 1$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^{-1} x$

◄◄ مثال (9)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $e^{-x} \frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$ عند النقطة (1 ، 0).

الحل:

بالأسلوب السابق نفسه نفصل المتغيرات:

$$e^{-x} \frac{dy}{dx} = - xy^2 \Rightarrow e^{-x} dy = - xy^2 dx$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{-x}{e^{-x}} dx \Rightarrow y^{-2} dy + xe^x dx = 0$$

الحل العام هو:

$$\int y^{-2} dy + \int x e^x dx = c$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = - x e^x - \int - e^x dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = - x e^x + e^x + c$$

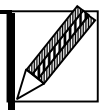
$$y^{-1} = x e^x - e^x - c$$

لإيجاد الثابت c نعوض $x = 0$ ، $y = 1$ في الحل العام لنحصل على:

$$1 = 0 - 1 - c \Rightarrow c = -2$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو $y^{-1} = x e^x - e^x + 2$

التدريب (4)



أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $xdy - y^3dy = 0$

(ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$

(جـ) $(y^2+1)(x+1)\,dy = (3y^2+3y)\,dx$

(د) $y' - e^x \tan y = 0$

أسئلة التقويم الذاتي (4)



أوجد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية عند النقاط المبينة إزاء كل معادلة:

1. $4\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ $\quad (0 \text{ ، } 3)$

2. $(x+1)y' + xy = 0$ $\quad (0 \text{ ، } 4)$

3. $x^2\frac{dy}{dx} - y - 1 = 0$ $\quad (1 \text{ ، } 0)$

5. المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى

(First order Homogenous Differential Equations)

عزيزي الدارس,

في البند السابق عالجنا كيفية حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى القابلة للفصل، في بعض الحالات التي تكون فيها المعادلة التفاضلية على الصورة $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ يلزم معرفة فيما إذا كانت هذه المعادلة التفاضلية متجانسة أم لا من خلال اختيار صفة التجانس في الدالة ، والتعريف التالي يوضح معنى المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى.

1.5 شرط المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى

تكون المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على الصورة $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ معادلة متجانسة إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(tx, ty) = f(x,y) \quad t \in R$$

والأمثلة التالية توضح هذا التعريف.

◄◄ مثال (1)

حدد فيما إذا كانت المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y+x}{x}$ متجانسة أم لا؟

الحل:

نكتب المعادلة على الصيغة $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}$

من التعريف أعلاه واضح أن:

$$f(x,y) = \frac{y+x}{x}$$

ولمعرفة صفة التجانس نثبت أن:

$$f(tx, ty) = f(x,y)$$

$$f(tx, ty) = \frac{ty + tx}{tx} = \frac{t(x + y)}{tx} = \frac{x + y}{x} = f(x, y)$$

إذن المعادلة التفاضلية متجانسة.

◄◄ مثال (2)

هل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$ متجانسة؟

الحل:

المعادلة على الصيغة $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

واضح أن

$$f(x, y) = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

$$f(tx, ty) = \frac{2t^4 y^4 + t^4 x^4}{t^4 xy^3} = \frac{t^4(2y^4 + x^4)}{t^4 xy^3} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

إذن المعادلة التفاضلية متجانسة.

◄◄ مثال (3)

هل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2x + y^2}{xy}$ متجانسة؟

الحل:

واضح أن

$$f(x, y) = \frac{2x + y^2}{xy}$$

باستخدام التعريف:

$$f(tx, ty) = \frac{2tx + t^2 y^2}{t^2 xy} = \frac{2x + ty}{txy} \neq f(x, y)$$

إذن حسب التعريف فإن المعادلة التفاضلية غير متجانسة.

2.5 الدالة المتجانسة من الدرجة n

ببساطة يمكننا القول: تكون دالة المتغيرين g(x,y) متجانسة من الدرجة n إذا تحقق الشرط التالي:

$$g(tx, ty) = t^n \; g(x, y) \qquad t \in R$$

والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام هذا التعريف.

◄◄ مثال (1)

هل الدالة $g(x, y) = xy + y^2$ متجانسة؟

الحل:

بتطبيق التعريف أعلاه نحصل على:

$$g(tx, ty) = (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2 xy + t^2 y^2 = t^2 (xy + y^2) = t^2 g(x,y)$$

إذن الدالة المعطاة متجانسة من الدرجة الثانية (لاحظ قوة t).

◄◄ مثال (2)

هل الدالة $g(x, y) = xy \sin\left(\frac{y}{x}\right)^2$ متجانسة.

الحل:

نطبق التعريف أعلاه لنحصل على:

$$g(tx, ty) = tx + ty \sin\left(\frac{ty}{tx}\right)^2 = t\left[x + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = t\, g(x, y)$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى (لاحظ قوة t).

◄◄ مثال (3)

هل الدالة $g(x,y)=x+xy$ متجانسة؟

الحل:

بتطبيق التعريف أعلاه نجد أن:

$$g(tx,ty)=tx+(tx)(ty)=tx+t^2xy=t(x+txy)$$

إذن الدالة $g(x,y)$ ليست متجانسة.

التدريب (5)



أي المعادلات التفاضلية التالية متجانسة:

(1) $y'=\dfrac{2x\ y}{y^2-x^2}$ (2) $y'=\dfrac{x^2+2y^2}{x\ y}$

(3) $y'=\dfrac{y^2}{x}$ (4) $y'=\dfrac{x^2+y}{x^3}$

أسئلة التقويم الذاتي (5)



هل الدوال التالية متجانسة؟ وإن كانت كذلك فما درجتها؟

1. $g(x,y)=x^3\sin\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)$
2. $g(x,y)=x\sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$
3. $g(x,y)=x\sqrt{x+y}$
4. $g(x,y)=2x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)+3y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

6. حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

(Solution of a Homogeneous Differential Equation)

عزيزي الدارس،

عرفنا في البند السابق كيف نستطيع التمييز بين المعادلة التفاضلية المتجانسة والمعادلة التفاضلية غير المتجانسة، وتحديد درجتها إذا كانت متجانسة، والسؤال الذي نريد أن نجيب عليه وهو الأهم: **كيف يمكن حل المعادلة التفاضلية المتجانسة؟**

وللإجابة عن هذا السؤال إليك النظرية التالية مع برهانها.

نظرية (1)

تكون المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ متجانسة إذا كانت الدالتان $M(x,y),\ N(x,y)$ متجانستين ومن الدرجة نفسها.

<u>البرهان</u>: نعيد كتابة المعادلة التفاضلية بالصورة التالية:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

وحيث أن $M(x,y),\ N(x,y)$ دالتان متجانستان من نفس الدرجة n وحسب تعريف التجانس:

$$f(tx,\ ty) = -\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = -\frac{t^n\ M(x,y)}{t^n\ N(x,y)} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

بما أن $f(tx,\ ty) = f(x,y)$، إذن المعادلة التفاضلية متجانسة.

وإليك المثال التالي الذي يوضح هذه النظرية.

◄◄ مثال

بيّن أن المعادلة التفاضلية في الصيغة $(x+y)dx+(y-x)dy=0$ معادلة متجانسة؟

الحل:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية على الشكل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}=f(x,y)$$

وحسب تعريف التجانس:

$$f(tx,ty)=\frac{xt+ty}{xt-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}=f(x,y)$$

∴ المعادلة التفاضلية متجانسة.

وإليك عزيزي الدارس الخطوات العامة لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة.

الخطوات العامة لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة:

(1) افرض أن $y=vx$ والذي يعطى بالاشتقاق $dy=vdx+xdv$

(2) نستبدل vx بالمتغير y ، و $vdx+xdv$ بالمقدار dy في المعادلة التفاضلية، وهذا يؤدي إلى وضع المعادلة التفاضلية المتجانسة في صيغة معادلة قابلة للفصل حسب الشكل في نظرية (1).

(3) وبما أننا نستطيع وضع المعادلة التفاضلية المتجانسة $y'=f(x,y)$ في الشكل $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ ،

نعوض قيمتي y' ، $\frac{y}{x}$ في هذه المعادلة الأخيرة فنحصل على:

$$v+x\frac{dv}{dx}=g(v)$$ وهي معادلة قابلة للفصل.

(4) نجد حل المعادلة التفاضلية ثم نعيد $v=\frac{y}{x}$.

(5) نكتب الحل العام للمعادلة بصورة مبسطة.

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المعادلة التفاضلية المتجانسة.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{y+x}{x}$

الحل:المعادلة التفاضلية متجانسة لأن $f(x,y)=\frac{y+x}{x}$

$$f(tx,ty)=\frac{ty+tx}{tx}=\frac{t(y+x)}{tx}=\frac{y+x}{x}=f(x,y)$$

نعوض $y = vx$ وبالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

ثم نحصل على معادلة قابلة للفصل:

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx+x}{x}$$

وبتبسيط المعادلة نحصل على الصورة: $x\frac{dv}{dx}-1$ أو $\frac{1}{x}dx-dv=o$

إذن الحل العام

$$\int\frac{1}{x}dx-\int dv=c$$

$$\ln|x|-v=c$$

لكن $y = vx$ أو $v=\frac{y}{x}$

إذن $\ln|x|-\frac{y}{x}=c \Rightarrow \frac{y}{x}=\ln|x|-c_1$

$y=x\ln|x|+xc_1 \quad c_1=-c$

$y=x(\ln|x|+c_1), c_2=\ln c_1$

$y=x(\ln|x\,c_2|),$

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$

الحل:

المعادلة التفاضلية متجانسة ويمكن التأكد من ذلك عن طريق التعريف:

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

حيث

$$f(x,y)=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$$

$$f(tx,ty)=\frac{2(ty)^4+(tx)^4}{(tx)(ty)^3}=\frac{2t^4y^4+t^4x^4}{t^4xy^3}$$

$$=\frac{t^4(2y^4+x^4)}{t^4xy^3}$$

$$=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}=f(x,y)$$

لحل المعادلة نعوض $y=vx$ ونحصل بالاشتقاق على: $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

ونحصل على المعادلة

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2(vx)^4+x^4}{x(xv)^3}$$

وبتبسيط المعادلة وفصل المتغيرات نجد:

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^4+1}{v^3}$$

ومنها

$$\frac{dx}{x}-\frac{v^3}{v^4+1}dv=0$$

$$\ln|x|-\frac{1}{4}\ln\left|v^4+1\right|=c$$

$$\ln|x|-\ln\left(v^4+1\right)^{\frac{1}{4}}=c$$

$$\ln\left|\frac{x}{\left(v^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right|=c$$

$$\frac{x}{\left(v^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}=e^c$$

$$x^4=\left(v^4+1\right)e^{4c} \quad , \quad e^{4c}=c_1$$

$$x^4=c_1\left(v^4+1\right) \quad , \quad v=\frac{y}{x}$$

$$x^4=c_1\left(\frac{y^4}{x^4}+1\right) \quad , \quad v=\frac{y}{x}$$

$$x^8=c_1\left(y^4+x^4\right)$$

◄◄ مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y'=\frac{2xy}{\left(x^2-y^2\right)}$

الحل:

المعادلة التفاضلية متجانسة، نترك لك عزيزي الدارس التأكد من ذلك باستخدام التعريف

$f(tx,ty)=f(x,y)$ حيث $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

نعوض $y = vx$ وبالاشتقاق نحصل على $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

ثم نحصل على المعادلة التفاضلية القابلة للفصل:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x(xv)}{x^2 - (vx)^2}$$

ونبسط المعادلة لنحصل على:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{1-v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{1-v^2} - v = \frac{2v - v - v^3}{1-v^2} == \frac{v+v^3}{1-v^2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-v^2}{v+v^3}dv$$

$$\frac{dx}{x} = (\frac{1+3v^2}{v+v^3} - 4\frac{v^2}{v+v^3})dv$$

$$\frac{dx}{x} = (\frac{1+3v^2}{v+v^3} - 4\frac{v}{1+v^2})dv$$

$$\ln|x| = \ln\left|v+v^3\right| - 2\ln\left|1+v^2\right| + c$$

◄◄ مثال (4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{x^4 + 3x^2y + y^4}{x^3 y}$

الحل:

المعادلة التفاضلية متجانسة، ونترك لك أيضاً عزيزي الدارس اختبار ذلك.

نعوض $y = vx$ ومنها وبالاشتقاق نحصل على $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

وبالتالي نحصل على $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^4 + 3x^2(vx)^2 + (vx)^4}{x^3(vx)}$

وبالتالي نحصل على $x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 2v^2 + v^4}{v}$

وبفصل التغيرات نحصل على:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{v}{(v^2+1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{v}{(v^2+1)^2}dv = c$$

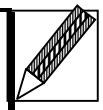
$$\ln|x| + \frac{1}{2(v^2+1)} = c$$

لكن $v = \frac{y}{x}$

$$\ln|x| + \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1} = c$$

$$\ln|x| + \frac{x^2}{y^2+x^2} = c$$

التدريب (6)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y' = \frac{(y - x)}{x} \qquad (1)$$

$$y' = \frac{(2y + x)}{x} \qquad (2)$$

$$y' = \frac{\left(x^2 + 2y^2\right)}{xy} \qquad (3)$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{3x\ y} \qquad (4)$$

أسئلة التقويم الذاتي (6)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$

2. $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x\ y}}$

7. المعادلات التفاضلية المضبوطة
(Exact Differential Equations)

عزيزي الدارس،،

في البند السابق عرفنا كيفية حل المعادلة التفاضلية المتجانسة وفي هذا البند سوف نتعرف على نوع آخر من المعادلات التفاضلية ألا وهو المعادلات التفاضلية المضبوطة وكيفية حل مثل هذا النوع من المعادلات، نبدأ بتعريف تلك المعادلات.

1.7 تعريف المعادلة التفاضلية المضبوطة

تكون المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

معادلة تفاضلية مضبوطة إذا وُجدت دالة مثل $g(x,y)$ تحقق الشرط التالي:

$$dg(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

وإذا كانت المعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى فنقول إنها معادلة تفاضلية مضبوطة إذا كانت الدالتان $M(x,y)$ و $N(x,y)$ متصلتين، وكانت مشتقاتها الأولى الجزئية متصلة أيضاً في منطقة معينة في المستوى (x,y) وتحقق الشرط التالي:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

والأمثلة التالية توضح هذا التعريف.

◄◄ مثال (1)

بيّن أن المعادلة التفاضلية التالية مضبوطة $2xy\ dx + (1+x^2)dy = 0$

الحل:

المعادلة المعطاة هي على الصورة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

حيث:

$M(x, y) = 2xy$ ، $N(x, y) = (1+x^2)$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x$$

وبما أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية مضبوطة.

◄◄ مثال (2)

هل المعادلة التفاضلية التالية مضبوطة؟

$$(x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$$

الحل:

من المعادلة: $M(x,y)=x+\sin y, \quad N(x,y)=(x\cos y-2y)$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\cos y$$

إذا فالمعادلة التفاضلية المعطاة معادلة مضبوطة.

◄◄ مثال (3)

هل المعادلة التفاضلية التالية مضبوطة؟

$$x^2\ dy+y^2\ dx=0$$

الحل:

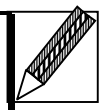
من المعادلة $M(x,y)=y^2, \quad N(x,y)=x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية غير مضبوطة.

التدريب (7)



أي من المعادلات التفاضلية التالية مضبوطة؟

$$(y + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + x)dy = 0 \quad (1)$$

$$ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy = 0 \quad (2)$$

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0 \quad (3)$$

أسئلة التقويم الذاتي (7)



هل المعادلات التفاضلية التالية مضبوطة؟

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

2. $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$

2.7 حـــــل المعادلـــــة التفاضـــــلية المـــــضبوطة

$$\mathbf{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}$$

(Solution of Exact Differential Equation)

قلنا فيما سبق: إذا كانت المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ معادلة مضبوطة فإنه يوجد دالة مثل g (x, y) تحقق الشرط:

$$dg(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

لكن $$dg(x,y)=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial y(x,y)}{\partial y}dy$$

وبالتالي وبالتناظر نجد أن : $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ $\quad N(x,y)=\frac{\partial g(x,y)}{\partial y},$

والمطلوب إيجاد الدالة $g(x, y) = c$ التي تحقق المعادلة التفاضلية المضبوطة.

وإليك الخطوات التي توصلنا إلى إيجاد تلك الدالة:

(1) بما أن $\frac{\partial g}{\partial x}=M$ نجد التكامل للطرفين بالنسبة لـ x. $\quad \int\frac{\partial g}{\partial x}dx=\int M(x,y)dx$

$$g(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث c (y) عبارة عن دالة تعتمد على المتغير y فقط.

(2) لإيجاد c (y) نشتق المعادلة (1) بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d}{dy}c(y)$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y}=N$ وبالتالي نحصل على: $\quad \frac{d}{dy}c(y)=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

والمعادلة السابقة تعطينا c وذلك بإجراء التكامل بالنسبة لـ y

(3) ثم تعوض c في (1) لنحصل على g(x,y) .

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المعادلة التفاضلية المضبوطة.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $2xy\,dx+(1+x^2)dy=0$

الحل:

المعادلة التفاضلية المعطاة معادلة مضبوطة، حيث

$$M(x,y)=2xy,\ N(x,y)=(1+x^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=2x\,y$$

$$\int\frac{\partial g}{\partial x}dx=\int 2xy\,dx+c(y)$$

$$g(x,y)=x^2y+c(y)$$

لإيجاد $c(y)$ نشتق المعادلة السابقة بالنسبة لـ y لنحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d}{dy}c(y)$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y}=N$ بالتعويض نحصل على:

$$\frac{d}{dy}c(y)=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

$$=(1+x^2)-\frac{\partial}{\partial y}\int 2xy\,dx$$

$$\frac{d}{dy}c(y)=(1+x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)$$

$$\frac{d}{dy}c(y)=1+x^2-x^2=1$$

$$c(y) = y + c_1$$

∴ حل المعادلة التفاضلية المضبوطة هو:

$$g(x,y) = x^2 y + y + c_1 = k$$

$$x^2 y + y = k - c_1$$

$$x^2 y + y = c_2$$

$$y(1 + x^2) = c_2$$

$$y = \frac{c_2}{1 + x^2}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$

الحل:

المعادلة التفاضلية المعطاة معادلة مضبوطة ، تأكد من ذلك؟

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = 2x + e^y$$

بتكامل الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على:

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = \int (2x + e^y) dx$$

$$g(x,y) = x^2 + xe^y + c(y)$$

ثم نعود ونشتق بالنسبة لـ y الدالة g(x,y) لنحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = xe^y + \frac{dc}{dy}$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y} = N$ وبالتعويض نجد أن:

$$xe^y = xe^y + \frac{dc}{dy}$$

$$\frac{dc}{dy}=0\Rightarrow c=c_1$$

∴ **الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:**

$$x^2+xe^{\,y}+c_1=k$$

$$x^2+xe^{y}=c_2,\qquad c_2=k-c_1$$

◄◄ مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$(x+\sin y)\,dx+(x\cos y-2y)dy=0$$

الحل:

المعادلة التفاضلية معادلة مضبوطة اختبر ذلك؟

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=x+\sin y$$

$$\int\frac{\partial g}{\partial x}dx=\int(x+\sin y)dx+c(y)$$

$$g(x,y)=\frac{x^2}{2}+x\sin y+c(y)$$

ثم نعود ونشتق بالنسبة لـ y الدالة g(x,y) لنحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x\cos y+\frac{dc(y)}{dy}$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y}=N$ بالتعويض نجد أن:

$$x\cos y-2y=x\cos y+\frac{dc}{dy}$$

$$\frac{dc}{dy}=-2y$$

$$c=-y^2+c_1$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{x^2}{2}+x\sin y-y^2+c_1=k$$

$$\frac{x^2}{2}+x\sin y-y^2=c_2$$

$$c_2=k-c_1$$

◄◄ مثال (4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية: $e^{x^3}\left(3x^2y-x^2\right)dx+e^{x^3}dy=0$

الحل:

المعادلة التفاضلية عادية مضبوطة تأكد من ذلك؟

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=e^{x^3}\left(3x^2y-x^2\right)$$

$$\int\frac{\partial g}{\partial x}dx=\int e^{x^3}\left(3x^2y-x^2\right)dx+c(y)$$

$$g(x,y)=\int\left(3x^2ye^{x^3}-x^2e^{x^3}\right)dx+c(y)$$

$$g(x,y)=ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c(y)$$

باشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على: $\frac{\partial g}{\partial y}=e^{x^3}-\frac{dc}{dy}$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y}=N$ بالتعويض نحصل على: $e^{x^3}=e^{x^3}-\frac{dc}{dy}$

$$\frac{\partial c}{\partial y}=0\Rightarrow c=c_1$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y)=ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c_1=k$$

$$ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}=c_2,c_2=k-c_1$$

◄◄ مثال (5)

ما هي قيمة (قيم) k التي تجعل المعادلة التفاضلية التالية معادلة مضبوطة؟ ثم أوجد حلها.

$$2y\,dx + (y^2 - kx)\,dy = 0$$

الحل:

كما ورد في البند (1.7)، تكون المعادلة التفاضلية مضبوطة إذا تحقق الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

لكن ومن المعادلة المعطاة $M(x,y) = 2y \qquad N(x,y) = y^2 - kx,$ بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -k, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

إذن $-k = 2 \qquad \Leftarrow \qquad k = -2$

المعادلة التفاضلية تصبح على الشكل التالي:

$$2ydx + (y^2 + 2x)dy = o$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = 2y$$

$$\int \frac{\partial g}{\partial x}\,dx = \int 2y\,dx + c(y)$$

$$g(x,y) = 2yx + c(y)$$

باشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على: $\frac{\partial g}{\partial y} = 2x + \frac{dc}{dy}$

لكن: $\frac{\partial g}{\partial y} = N$ وبالتالي: $y^2 + 2x = 2x + \frac{dc}{dy}$

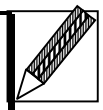
$$\frac{dc}{dy} = y^2 \Rightarrow c = \frac{y^3}{3} + c_1$$

إذن حل المعادلة التفاضلية هو: $2yx + \frac{y^3}{3} + c_1 = k$

$$2yx + \frac{y^3}{3} = k - c_1$$

$$2yx + \frac{y^3}{3} + c_2 = 0, (c_2 = c_1 - c)$$

التدريب (8)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $\left(y^3-3x^2y\right)dx+\left(3xy^2-x^3\right)dy=0$

(2) $\left(1+\ln\left(xy\right)\right)dx+\left(1+\frac{x}{y}\right)dy=0$

(3) $\left(ye^x+e^y\right)dx+\left(e^x+xe^y\right)dy=0$

أسئلة التقويم الذاتي (8)



أوجد قيم (k) التي تجعل المعادلات التفاضلية التالية مضبوطة؟

1. $2y\,dx+\left(y^2-kx\right)dy=0$
2. $\sin y\,dx+\left(x^k\cos y+y^3\right)dy=0$
3. $\left(y^4+2kxy\right)dx+\left(4xy^3+kx^3\right)dy=0$

8. العوامل المكاملة (Integrating Factors)

1.8 تقديم

عزيزي الدارس،،

في البند السابق عرفنا كيف نميز بين المعادلة التفاضلية المضبوطة والمعادلة التفاضلية غير المضبوطة، وكذلك عرفنا كيفية حل المعادلة التفاضلية المضبوطة، ولكن في معظم الحالات تكون المعادلة غير مضبوطة، لذلك تحتاج إلى ما يسمى بالعامل المكامل ليساعدنا في تحويل هذه المعادلة غير المضبوطة إلى معادلة مضبوطة، وحلها بالطرق التي مرت معنا سابقاً.

تعريف العامل المكامل لمعادلة تفاضلية على الصيغة: $\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$

نسمي العامل $w(x,y)$ عاملاً مكاملاً للمعادلة التفاضلية المعطاة إذا تحقق كون المعادلة التفاضلية التالية معادلة مضبوطة $w(x,y)[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0$

وإليك المثال التالي الذي يوضح هذا التعريف.

◄◄ مثال (1)

المعادلة التفاضلية $(2x+2y)dx - xdy = 0$ معادلة غير مضبوطة، ومن السهل التأكد من ذلك، لنعرف كل من N و M : $M(x,y) = 2x + 2y, \quad N(x,y) = -x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

لكن كيف يمكن تحويل هذه المعادلة التفاضلية غير المضبوطة إلى معادلة تفاضلية مضبوطة؟ لو ضربنا المعادلة الأصلية بعامل مثل: $w(x,y) = \frac{1}{x^3}$

فإن المعادلة الأصلية تصبح: $\frac{1}{x^3}[(2x+2y)dx - xdy] = 0$

$$\left(\frac{2x+2y}{x^3}\right)dx - \frac{x}{x^3}dy = 0$$

$$M(x,y) = \frac{2}{x^2} + \frac{2y}{x^3},\ N(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$$

إذن المعادلة التفاضلية بعد ضربها بالعامل $\frac{1}{x^3}$ أصبحت معادلة تفاضلية مضبوطة، يسمى هذا العامل (بالعامل المكامل) أي العامل الذي يجعل المعادلة مضبوطة. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن: كيف يمكن اختيار العامل المكامل؟

في القسم التالي نجيب على هذا السؤال.

2.8 قواعد إيجاد العامل المكامل للمعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

القاعدة (1)

إذا كان $f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في x فقط فإن العامل المكامل هو $w(x,y) = e^{\int f(x)dx}$.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2(1-3y)}$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة $(3x^2y - x^2)dx + 1dy = 0$

حيث $M(x,y) = 3x^2y - x^2$ ، $N(x,y) = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

إذن المعادلة غير مضبوطة، تحتاج إلى إيجاد العامل المكامل:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{3x^2-0}{1}=3x^2=f(x)$$

إذن $f(x)=3x^2$ دالة في المتغير x وبالتالي فإن العامل المكامل

$$w(x,y)=e^{\int f(x)dx}$$

$$w(x,y)=e^{\int 3x^2dx}=e^{x^3}$$

إذن لجعل المعادلة التفاضلية الأصلية مضبوطة نضرب المعادلة بالعامل المكامل e^{x^3}

لنحصل على المعادلة التفاضلية المضبوطة $e^{x^3}(3x^2y-x^2)dx+e^{x^3}dy=0$

كما مر معنا في البند السابق، نجد حل المعادلة بالشكل التالي:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=e^{x^3}(3x^2y-x^2)$$

$$\int\frac{\partial g}{\partial x}dx=\int e^{x^3}(3x^2y-x^2)\,dx+c(y)$$

$$g(x,y)=ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c(y)$$

بالاشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=e^{x^3}-\frac{dc}{dy}$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y}=N$ بالتعويض نحصل على:

$$e^{x^3}=e^{x^3}-\frac{dc}{dy}$$

$$\frac{dc}{dy}=0\Rightarrow c=c_1$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y)= ye^{x^3} -\frac{1}{3}e^{x^3}+c_1 = k$$

$$= y\,e^{x^3} -\frac{1}{3}e^{x^3} = c_2, c_2 = k - c_1$$

القاعدة (2)

إذا كان $\frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}\right)=\mathrm{f}(\mathrm{y})$ دالة في y فقط فإن العامل المكامل هو:

$w(x,y) = e^{\int f(y)\,dy}$.

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $\mathrm{y}^2\mathrm{dx}+\mathrm{xy}\,\mathrm{dy}=0$

الحل:

من المعادلة المعطاة نجد أن: $\mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{xy}, \quad \mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{y}^2$

إذن: $\frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}\right)=\frac{\mathrm{y}-2\mathrm{y}}{\mathrm{y}^2}=-\frac{1}{\mathrm{y}}$

وبما أن: $\mathrm{f}(\mathrm{y})=-\frac{1}{\mathrm{y}}$

في المتغير y فإن العامل المكامل.

$$\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{\mathrm{y}}\mathrm{dy}}=\mathrm{e}^{-\ln \mathrm{y}}=\frac{1}{\mathrm{y}}$$

نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل المكامل $\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ فنحصل على المعادلة التفاضلية المضبوطة: $\mathrm{ydx}+\mathrm{xdy}=0$

نحل المعادلة:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = y$$

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = \int y dx + c(y)$$

$$g(x,y) = xy + c(y)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ y نجد أن:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x + \frac{dc}{dy}$$

لكن: $\frac{\partial g}{\partial y} = N$

$$x = x + \frac{dc}{dy}$$

إذن: $\frac{dc}{dy} = 0 \Rightarrow c = c_1$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$xy + c_1 = k$$
$$xy = k - c_1 = c_2$$

القاعدة (3)

إذا احتـوت المعادلـة التفاضـلية علـى المقـدار $(ydx + xdy)$ فـإن العامـل المكامـل $w(x,y) = \frac{1}{xy}$ يحول $(ydx + xdy)$ إلى الشكل:

$$d(\ln |xy|) = \frac{ydx + xdy}{xy}.$$

مثال (3)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $3x^4 ydx + ydx + xdy = 0$

الحل:

بمـا أن المعادلـة تحتـوي علـى المقـدار $(ydx + xdy)$ فـإن العامـل المكامـل المناسـب هـو $w(x,y) = \frac{1}{xy}$ ، بضرب المعادلة التفاضلية الأصلية بالعامل $\frac{1}{xy}$ نحصل على:

$$3x^3 dx + \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$
$$3x^3 dx + d(\ln(xy)) = 0$$

بتكامل الطرفين نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\int 3x^3 dx + \int d(\ln(xy)) = c$$
$$\frac{3x^4}{4} + \ln(xy) = c$$

القاعدة (4)

إذا احتوت المعادلة التفاضلية على المقدار $(ydx - xdy)$ فإن العامل المكامل $w(x,y) = -\frac{1}{x^2 + y^2}$ يحول $(ydx - xdy)$ إلى الشكل التفاضلي:

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

◄◄ مثال (4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{\left(x^2 + y + y^2\right)}{x}$

الحل:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية بالصورة $(ydx - xdy) + \left(x^2 + y^2\right)dx = 0$

بما أن المعادلة تحتوي على المقدار $(ydx - xdy)$ فإن العامل المكامل المناسب هو:

$$w(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

نضرب المعادلة بهذا العامل لنحصل على:

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} - 1dx = 0$$

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) - 1dx = 0$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\int d\left(arc\tan\frac{y}{x}\right) - \int 1dx = c$$

$$\arctan\frac{y}{x} - x = c$$

القاعدة (5)

إذا احتـوت المعادلــة التفاضــلية علــى المقـدار $(ydy + xdx)$ فـإن العامـل المكامـل $w(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ يحول $(ydy+xdx)$ إلى الشكل:

$$\frac{1}{2}d\left(\ln\ \left(x^2+y^2\right)\right)=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

◄◄ مثال (5)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $xdx+ydy+4y^3\left(x^2+y^2\right)dy=0$

الحل:

المعادلــة المعطــاة تحتــوي علــى المقــدار $(xdx+ydy)$، نختــار العامــل المكامــل $w(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ نضرب المعادلة بهذا العامل فنحصل على:

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+4y^3dy=0$$

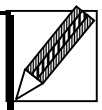
$$\frac{1}{2}d\left(\ln\ \left(x^2+y^2\right)\right)+4y^3\ dy=0$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{1}{2}\int d\left(\ln\ \left(x^2+y^2\right)\right)+\int 4y^3dy=c$$

$$\frac{1}{2}\ln\ \left(x^2+y^2\right)+y^4=c$$

التدريب (9)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية باختيار العامل المكامل المناسب.

$$y' = \frac{1}{2xy} \qquad (1)$$

$$y' = 2xy - x \qquad (2)$$

$$\left(x^3 + xy^2 - y\right)dx + x\,dy = 0 \qquad (3)$$

$$y' = -\frac{y}{\left(y^3 + x^2 y - x\right)} \qquad (4)$$

$$y' = \frac{y}{x-1} \qquad (5)$$

أسئلة التقويم الذاتي (9)



1. بين فيما إذا كان $w(x,y) = xy$ عاملاً مكاملاً للمعادلة التفاضلية $ydx + xdy = 0$ أم لا؟
2. أوجد العامل المكامل للمعادلة التفاضلية $2xdx + \left[\left(x^2+1\right)\left(\cot y - 1\right)\right]dy = 0$ ثم أوجد حلها.
3. أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باختيار العامل المكامل المناسب لها $xy^2 + ydx - xdy = 0$.
4. بين أن $\left(x^2 + y^2\right)^{-n}$ عامل مكامل للمعادلة التفاضلية $xdx + ydy = 0$

9. المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى والعوامل المكاملة

في البنود السابقة عالجنا كيفية حل المعادلة التفاضلية القابلة للفصل، والمعادلة التفاضلية المضبوطة، وعرفنا أيضاً كيفية إيجاد العامل المكامل الذي يجعل المعادلة مضبوطة، وفي هذا البند سوف نعالج حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى على الصيغة.

$$y'+p(x)y = q(x) \quad \ldots\ldots (1)$$

(1) $q(x) = 0$ (معادلة تفاضلية متجانسة).

(2) $q(x) \neq 0$ (معادلة تفاضلية غير متجانسة).

ولحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بشكل عام، نستخدم العامل المكامل:

$$w(x,y) = e^{\int p(x)dx}$$

حيث $p(x)$ دالة قابلة للتكامل.

1.9 حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى $y'+ p(x)\, y= 0$

كما قلنا لحل هذه المعادلة تستخدم العامل المكامل $w(x,y) = e^{\int p(x)dx}$ ثم نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل $w(x,y)$ لنحصل على:

$$e^{\int p(x)dx}\, y'+p(x)e^{\int p(x)dx}\, y = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية مضبوطة وتكافئ المعادلة على الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int p(x)dx}\right) = 0$$

إذن حل المعادلة التفاضلية هو:

$$\left(y\, e^{\int p(x)dx}\right) dx = c$$

والأمثلة التالية توضح هذه الحالة.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'-5y = 0$

الحل:

بالمقارنة مع الصورة $y'+p(x)\,y=0$ نجد أن $p(x) = -5$ وفيه نجد أن:

$$w(x,y) = e^{\int -5\,dx}$$

أو $w(x,y) = e^{-5x}$

إذن نضرب المعادلة بالمقدار $w(x,y)=e^{-5x}$ نحصل على المعادلة:

$$e^{-5x}\ y' - e^{-5x}\ y = 0$$

وهذا يكافئ المعادلة بالشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(y\ e^{-5x}\right)=0$$

الحل العام للمعادلة هو:

$$\frac{d}{dx}\int\left(y\,e^{-5x}\right)dx = c$$

$$y\,e^{-5x} = c$$

$$y = c\ e^{5x}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' + 2xy = 0$

الحل:

من المعادلة $p(x) = 2x$ ، ومنها نجد العامل المكامل $w(x,y)= e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل $w(x,y)$ لنحصل على $e^{x^2}\ y'+2x\,e^{x^2}\ y = 0$

وبالشكل التفاضلي $\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right)= 0$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{d}{dx}\int y\,e^{x^2}\,dx = c$$

$$y\,e^{x^2} = c \Rightarrow y = c\ e^{-x^2}$$

◄◄ مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{d\theta} - x\sin\theta = 0$

الحل:

من المعادلة $p(\theta) = -\sin\theta$ ومنها نجد العامل المكامل $w(\theta,x) = e^{-\int \sin\theta\, d\theta} = e^{\cos\theta}$

نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل $w(\theta,x)$ لنحصل على:

$$e^{\cos\theta}\frac{dx}{d\theta} - x\,e^{\cos\theta}\sin\theta = 0$$

وهكذا يكافئ الشكل التفاضلي : $\frac{d}{d\theta}\left(xe^{\cos\theta}\right) = 0$

حل المعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{d}{d\theta}\int xe^{\cos\theta}\,d\theta = c$$

$$xe^{\cos\theta} = c$$

$$x = ce^{-\cos\theta}$$

2.9 حل المعادلة التفاضلية الخطيةغيرالمتجانسة

$$y' + p(x)y = q(x)$$

كما قلنا في المعادلة التفاضلية المتجانسة، بفرض أن كلاً من الدالتين $q(x), p(x)$ قابلتين للتكامل في المتغير x، نجد العامل المكامل للمعادلة والذي يساوي:

$$w(x,y) = e^{\int p(x)dx}$$

ثم نضرب هذا العامل بالمعادلة التفاضلية لنحصل على:

$$e^{\int p(x)dx}\ y' + p(x)\ e^{\int p(x)dx}\ y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

ثم نكتبها بالشكل التفاضلي:

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\ y\right)dx = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

أو

$$e^{\int P(x)dx}\ y + c_1 = \int e^{\int p(x)dx}\ q(x)\,dx$$

ثم نضع $c=- c_1$ ونجد الحل العام للمعادلة بالصورة

$$y = c\ e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx}\ q(x)dx$$

والأمثلة التالية توضح حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الأولى:

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'-3y = 6$

الحل:

من المعادلة نجد أن $p(x) = -3$ ، إذن العامل المكامل هو $w(x,y) = e^{-\int 3dx}$

ومنها $w(x,y) = e^{-3x}$ ونضرب المعادلة التفاضلية بهذا العامل لنحصل على:

$$e^{-3x}\ y' - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x}$$

وبالشكل التفاضلي تكون: $\frac{d}{dx}\left(y e^{-3x}\right) = 6e^{-3x}$

إذن الحل العام للمعادلة هو:

$$\frac{d}{dx}\int y e^{-3x}\ dx = \int 6\ e^{-3x}\ dx$$

$$y e^{-3x} = -2e^{-3x} + c$$

$$y = c\ e^{3x} - 2$$

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'-2xy = x$

الحل:

من المعادلة $p(x) = -2x$ نحصل على العامل المكامل $w(x,y)$ حيث:

$$w(x,y)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int 2xdx}=e^{-x^2}$$

ثم نضرب المعادلة بالعامل w(x,y) لنحصل على:

$$e^{-x^2}y'-2xe^{-x^2}y=xe^{-x^2}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-x^2}\right)=xe^{-x^2}$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{d}{dx}\int ye^{-x^2}dx=\int xe^{-x^2}dx$$

$$ye^{-x^2}=\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

$$y=c\,e^{x^2}-\frac{1}{2}$$

◄◄ مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx}-2y=x^3\cos 4x$

الحل:

نكتب المعادلة بالصورة القياسية: $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2\cos 4x$

نجد أن: $p(x)=-\frac{2}{x}$

ومنها نجد أن: $w(x,y)=e^{-\int\frac{2}{x}.dx}=\frac{1}{x^2}$

ثم نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل w(x,y) لنحصل على:

$$\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^3}y=\cos 4x$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-2}y\right)=\cos 4x$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$\frac{d}{dx}\int x^{-2}y\,dx=\int \cos 4x\,dx$$

$$x^{-2}\,y=\frac{1}{4}\sin+c$$

$$y=\frac{1}{4}\,x^{2}\,\sin 4x+c\,x^{2}$$

◄◄ مثال (4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx}=y+x^{3}+3x^{2}-2x$$

الحل:

نعيد ترتيب المعادلة على الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^{2}+3x-2$$

نجد أن $p(x)=-\frac{1}{x}$ ومنها نجد العامل المكامل:

$$w(x,y)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

وبضرب المعادلة بهذا العامل تحصل على:

$$\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x^{2}}y=x+3-\frac{2}{x}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{x}\right)=x+3-\frac{2}{x}$$

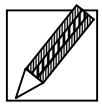
الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{d}{dx}\int\left(y\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x+3-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$y\frac{1}{x}=\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+c_1$$

$$y=\frac{x^3}{2}+3x^2-2x\ln x+c_1x$$

التدريب (10)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y'+100y=0 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}+e^x y=0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0 \quad (3)$$

$$y'+6y=0 \quad (4)$$

أسئلة التقويم الذاتي (10)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5\,e^{\cos x}$
2. $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$
3. $x^3\frac{dy}{dx}+(2-3x^2)y=x^3$
4. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\cos x$

10. معادلة بيرنولي (Bernoulli's Equation)

1.10 تعريف معادلة بيرنولي

عزيزي الدارس،

في البند السابق استعرضنا كيف يمكن حل المعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الأولى عندما تكون المعادلة متجانسة أو غير متجانسة ولكن هناك بعض المعادلات من الرتبة الأولى ولكن ليست خطية مثل معادلة بيرنولي والتي يمكن تحويلها إلى معادلة خطية ثم إيجاد الحل العام لها حسب ما مر معنا سابقاً.

تعريف (معادلة بيرنولي)

معادلة بيرنولي: هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، وتكتب على الصيغة التالية:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

حيث n أي عدد حقيقي.

لاحظ أنه إذا كانت $n = 0$ ، $n = 1$ فإن المعادلة تصبح معادلة تفاضلية خطية متجانسة وغير متجانسة على الترتيب، وتحل كما مر معنا، لكن السؤال الذي يطرح نفسه: كيف يمكن تحويل المعادلة السابقة إلى معادلة خطية, لكل $A \neq 0,1$.

2.10 حل معادلة بيرنولي Solution of Bernoulli's equation

لحل معادلة بيرنولي تابع معنا الخطوات التالية:

1) معادلة بيرنولي هي $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ بقسمة المعادلة على y^n نحصل على:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{(1-n)} = Q(x). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2) نستخدم التعويض المناسب $u = y^{1-n}$ ثم نشتق المعادلة بالنسبة لـ x لنحصل على:

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad \text{.....(2)}$$

3) بتعويض $u = y^{1-n}$ ، $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{du}{dx}$ في المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{1}{(1-n)y^{-n}}\ y^{-n}\frac{du}{dx}+P(x)u=Q(x)$$

$$\frac{1}{(1-n)}\ \frac{du}{dx}+P(x)u=Q(x)$$

أو

$$\frac{1}{(1-n)}\ u'+P(x)u=Q(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى لكن في المتغير u ، نجد الحل العام لها باستخدام القاعدة في البند السابق.

4) نعوض قيمة $u = y^{1-n}$ بعد إجراء التكامل فيكون الحل العام لمعادلة بيرنولي.

وإليك الأمثلة التالية التي توضح حل معادلة بيرنولي.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'+y= x^2y^2$

الحل:

من الصورة العامة لمعادلة بيرنولي وهي:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n$$

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة بيرنولي.

نعيد صياغة المعادلة بالشكل التالي: $\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$

حسب ما تقدم نفرض أن: $u = y^{1-n}$ (هنا $n = 2$)، $u = y^{-1}$ ، $u=\frac{1}{y}$

بالاشتقاق نجد أن: $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$

وعليه تصبح المعادلة التفاضلية بعد التعويض على الشكل:

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+\frac{1}{u}=x^2\frac{1}{u^2}$$

بالقسمة على $\left(-\frac{1}{u^2}\right)$ نحصل على:

$$\frac{du}{dx}-u=-x^2$$

لاحظ أن المعادلة التفاضلية هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى، لحل هذه المعادلة:

لدينا $P(x) = -1$ إذن العامل المكامل: $w(x,y)=e^{-\int 1dx}=e^{-x}$

نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل $w(x,y)$ لنحصل على:

$$e^{-x}\frac{du}{dx}-u\,e^{-x}=-x^2\ e^{-x}$$

أو

$$e^{-x}\ u'-u\,e^{-x}=-x^2\ e^{-x}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$d\left(e^{-x}\ u\right)=-x^2\ e^{-x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية يأتي بتكامل الطرفين:

$$\frac{d}{dx}\int\left(e^{-x}\ u\right)dx=-\int x^2\ e^{-x}\ dx$$

$$e^{-x}\ u=x^2\,e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}+c$$

$$u=ce^{x}+x^2+2x+2$$

لكن $y=\frac{1}{u}$ لنحصل على الحل العام:

$$y=\frac{1}{c\,e^{x}+x^2+2x+2}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$dy+y\,dx=y^2\ e^{x}$$

الحل:

نعيد كتابة المعادلة على الصورة:

$$y' + y = y^2\ e^x$$

وهذه المعادلة هي معادلة برنولي فيها $(n = 2)$.

مما تقدم نفرض أن: $u = y^{1-n}$ (هنا $n = 2$)، $u = y^{-1}$ ، $u = \frac{1}{y}$

بالاشتقاق نجد أن: $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\ \frac{dy}{dx}$

وعليه تصبح المعادلة التفاضلية بعد التعويض على الشكل:

$$-\frac{1}{u^2}\ \frac{du}{dx} + \frac{1}{u} = e^x\ \frac{1}{u^2}$$

بالقسمة $\left(-\frac{1}{u^2}\right)$ نحصل على:

$$\frac{du}{dx} - u = -e^x$$

لدينا $P(x) = -1$ ، إذن العامل المكامل $w(x,y) = e^{-\int 1dx} = e^{-x}$

نضرب المعادلة التفاضلية بالعامل $w(x,y)$ لنحصل على:

$$e^{-x}\ \frac{du}{dx} - u\,e^{-x} = -1$$

$$e^{-x}\,u' - u\,e^{-x} = -1$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي: $d\left(e^{-x}\ u\right) = -1$

بالتكامل للطرفين نجد الحل العام للمعادلة وهو :

$$\frac{d}{dx}\int \left(e^{-x}\,u\right) dx = \int -1dx$$

$$e^{-x}\,u = -x + c$$

$$u = -x\,e^x + ce^x$$

لكن: $y = \frac{1}{u}$ وبالتالي:

$$y=\frac{1}{-x\,e^{x}+c\,e^{x}}$$

◄◄ مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$x dy + y dx = x^{3}\, y^{6}\, dx$$

الحل:

بترتيب المعادلة على الشكل: $x\,y' + y = x^{3}\, y^{6}$

ومن ثم إلى صيغة معادلة برنولي:

$$y' + \frac{1}{x} y = x^{2}\, y^{6}$$

حيث $(n = 6)$ نفرض أن: $u = y^{1-n}$ ومنها $u = y^{-5}$، $u = \frac{1}{y^{5}}$

بالاشتقاق نجد أن: $\frac{du}{dx} = -\frac{5}{y^{6}} \frac{dy}{dx}$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$-\frac{1}{5} - \overset{\frac{-6}{5}}{u}\, u' + \frac{1}{x} \overset{\frac{-1}{5}}{u} = x^{2}\, \overset{\frac{-6}{5}}{u}$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\left(-\frac{1}{5}\, \overset{\frac{-6}{4}}{u} \right)$ نحصل على:

$$u' - \frac{5}{x} u = -5x^{2}$$

لدينا $P(x) = -\frac{5}{x}$ إذن العامل المكامل $w(x,y) = e^{-\int \frac{5}{x} dx}$ ، $w(x,y) = e^{-5 \ln x}$

ومنها نجد أن: $w(x,y) = \frac{1}{x^{5}}$

بضرب طرفي المعادلة بالعامل w(x,y) نحصل على:

$$\frac{1}{x^5}u' - \frac{5}{x^4}u = \frac{-5}{x^3}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^5}u\right) = -\frac{5}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\int\left(\frac{1}{x^5}u\right)dx = \int\frac{-5}{x^3}dx$$

$$\frac{1}{x^5}u = -5\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

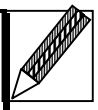
$$u = \frac{5}{2}x^3 + c\,x^5$$

لكن $u = \frac{1}{y^5}$ إذن:

$$\frac{1}{y^5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

$$y = \left(\frac{5}{2}x^3 + c\,x^5\right)^{-\frac{1}{5}}$$

التدريب (11)



أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y' + xy = xy^2 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5 \quad (2)$$

$$y' + xy = 6x\sqrt{y} \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x) \quad (4)$$

أسئلة التقويم الذاتي (11)



1. عرف معادلة برنولي ثم اكتبها.
2. أوجد حل المعادلة التفاضلية $xdy - \left(y + xy^3(1 + \ln x)\right)dx = 0$.
3. أوجد حل المعادلة التفاضلية $xdy + ydx = x^3y^6dx$ إذا كان $y=5$ عند $x=1$
4. أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' + y = \sin x$ وإذا كان $y=1$ عند $x = \pi$.

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

في نهاية هذه الوحدة دعنا نستعرض أهم ما ورد فيها من مفاهيم:

– المعادلة التفاضلية: هي المعادلة التي تحتوي في أحد طرفيها أو كليهما على إشارة المشتقات.

– المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n: هي المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n والتي تكتب على الصورة. $a_n(x)\frac{d^n y}{d^n x}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.....+a_0(x)y=g(x)$

– المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تكون قابلة للفصل إذا أمكن التعبير عنها في الصيغة:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{A(x)}{B(y)}$$

– تكون المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على الصورة $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ متجانسة إذا تحقق الشرط التالي: $f(tx,ty)=f(x,y)\ \ t\in\Re$.

– المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ معادلة تفاضلية مضبوطة إذا وجدت دالة مثل g(x,y) بحيث $dg(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

– تكون الدالة w(x,y) عاملاً مكاملاً للمعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ إذا كان $w(x,y)[M(x,y)dx+N(x,y)dy]=0$ معادلة مضبوطة.

– معادلة بيرنولي: هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، وتكتب على الصيغة التالية:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

الآن عد إلى أهداف الوحدة واقرأها مرة أخرى، هل تشعر أنك حققتها جميعا، إن كان لديك شك أو عدم وضوح في بعض الأهداف أو المفاهيم عد إلى قراءته مرة أخرى قبل أن تنتقل إلى الوحدة التالية.

بإنهائك لهذه الوحدة تكون قد أنجزت جزءا مهما من هذا المقرر، والآن لنستعرض بشكل موجز ما الذي تتحدث عنه الوحدة التالية، مع أمنياتنا لك بالتوفيق دائما.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،،

في الوحدة التالية سنتناول موضوع تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى في المسائل الهندسية (المسارات المتعامدة)، والمسائل الفيزيائية (قانون نيوتن للتبريد)، والأجسام الساقطة والمقذوفات، والمسائل الخاصة بنمو واضمحلال المجتمعات الإحصائية (كالبكتيريا)، وتحلل المواد المشعة.

نأمل أن تكون وحدة مفيدة لك.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

(1) معادلة تفاضلية عادية لأنها تحتوي على مشتقات عادية (أي أن الدالة y لا تعتمد إلا على متغير واحد مستقل x) وتصنيفها من الرتبة الثانية (أعلى درجة في الاشتقاق تظهر في المعادلة).

(2) معادلة تفاضلية لكنها ليست عادية لأن الدالة y تعتمد على أكثر من متغير وهما x,w.

(3) معادلة تفاضلية عادية لأنها تحتوي على مشتقات عادية (أي أن الدالة y تعتمد على متغير واحد تستعمل x) وتصنيفها من الرتبة الثانية (أعلى درجة في الاشتقاق تظهر في المعادلة).

(4) معادلة تفاضلية عادية لأنها تحتوي على مشتقات عادية (أي أن الدالة y تعتمد على متغير واحد مستقل x) وتصنيفها من الرتبة الخامسة حيث أن "($x\ y^{(3)}$) يعطى بعد الاشتقاق $y^{(5)}$ بعد إجراء عملية التفاضل.

تدريب (2)

(1) معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية (أعلى درجة في الاشتقاق) وكتبت المعادلة حسب صيغة تعريف المعادلة الخطية حيث

$$b_2(x)=5x, b_1(x)=4x^2, b_0(x)=-\sin x, g(x)=0$$

(2) معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية (أعلى درجة في الاشتقاق) وكتبت المعادلة حسب صيغة تعريف المعادلة الخطية حيث

$$b_2(x)=5,\ b_1(x)=2e^x, b_0(x)=-3,\ g(x)=0$$

(3) معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى (أعلى درجة في الاشتقاق) لكن رتبة المعادلة رفعت إلى الأس، إذن المعادلة التفاضلية غير خطية (لقد رفعت مشتقة الدالة y إلى أس لا يساوي 1).

تدريب (3)

$$y' = 3e^{3x}, y'' = 9e^{3x}, \quad y''' = 27e^{3x} \quad (1)$$

بالتعويض في المعادلة: $y''' - 9y'' = 0$

$$27\ e^{3x} - 9\left(3e^{3x}\right) = 27\ e^{3x} - 27\ e^{3x} = 0$$

إذن الدالة $y = e^{3x}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y''' - 9y' = 0$.

(2) بالتعويض في المعادلة $(y')^2 + xy' - y = 0$

$$(4)^2 + 4x - 4(x+4) = 16 + 4x - 4x - 16 = 0$$

إذن الدالة $y = 4\ (x+4)$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'^2 + x\,y' - y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

بالتعويض في المعادلة $y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + x = -x + x = 0$$

إذن الدالة $y = \sqrt{1-x^2}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$

تدريب (4)

(أ) $$xdx = y^3dy$$

$$\int xdx = \int y^3dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^4}{4} + c$$

(ب) $$ydy = (x+1)dx$$

$$\int ydy = \int (x+1)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c$$

(ج)

$$\frac{y^2+1}{3y^3+3y}=\frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{1}{3}\ln|y|=\ln|x+1|+c$$

(د) $$\frac{dy}{dx}-e^x\tan(y)=0\Rightarrow\frac{dy}{\tan(y)}=e^x dx\Rightarrow\frac{\cos(y)dy}{\sin(y)}=e^x dx$$

$$\int\frac{\cos(y)dy}{\sin(y)}=\int e^x dx\Rightarrow\ln|\sin(y)|=e^x+c$$

تدريب (5)

(1) باستخدام التعريف $f(tx,ty)=f(x,y)$ حيث $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

$$f(tx,ty)=\frac{2txty}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{2t^2xy}{t^2x^2-t^2y^2}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=f(x,y)$$

إذن المعادلة التفاضلية متجانسة.

(2) باستخدام التعريف $f(tx,ty)=f(x,y)$

حيث $$f(x,y)=\frac{x^2+2y^2}{xy}$$

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+2(ty)^2}{txty}=\frac{t^2x^2+2t^2y^2}{t^2xy}=\frac{x^2+2y^2}{xy}=f(x,y)$$

إذن المعادلة التفاضلية متجانسة.

(3) باستخدام التعريف $f(tx,ty)=f(x,y)$

حيث $$f(x,y)=\frac{y^2}{x}$$

$$f(tx,ty)=\frac{(ty)^2}{tx}=\frac{t^2y^2}{tx}=t\frac{y^2}{x}\neq f(x,y)$$

إذن المعادلة التفاضلية غير متجانسة.

(4) باستخدام التعريف $f(tx,ty)=f(x,y)$

حيث $f(x,y)=\frac{x^2+y}{x^3}$

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+ty}{(tx)^3}\neq f(x,y)$$

إذن المعادلة التفاضلية غير متجانسة.

تدريب (6)

(1) المعادلة المعطاة معادلة تفاضلية متجانسة (اختبر ذلك)، نفرض أن $y = vx$ بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

(2) وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx-x}{x}$$

$$x\frac{dv}{dx}=-1$$

$$\int dv=\int -\frac{1}{x}dx$$

$$v=-\ln|x|+c$$

$$y=-x\ln|x|+xc$$

(2) المعادلة المعطاة هي معادلة تفاضلية متجانسة (اختبر ذلك).

نفرض أن $y = vx$ بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2vx + x}{x}$$

$$x\frac{dv}{dx} = v + 1$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{1}{v+1}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|v+1| = \ln|x| + c$$

وبتعويض $v = \frac{y}{x}$ نجد الحل.

(3) هذه المعادلة معادلة تفاضلية متجانسة (اختبر ذلك).

نفرض أن $y = vx$ بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + 2(vx)^2}{x(vx)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v}$$

بفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|v^2+1| = \ln|x| + c$$

(4) المعادلة تفاضلية متجانسة، نفرض أن $y = vx$ بالاشتقاق نجد أن: $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + (vx)^2}{2x(vx)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v}$$

وبفصل المتغيرات:

$$\frac{2v}{1 - v^2}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$-\ln\left|1 - v^2\right| = \ln\left|x\right| + C$$

بتعويض $v = \frac{y}{x}$ نجد الحل.

تدريب (7)

(1) باستخدام التعريف هل $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ؟ حيث:

$$M(x,y) = y + 2xy^3, \qquad N(x,y) = 1 + 3x^2y^2 + x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 6xy^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 6xy^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة تفاضلية مضبوطة.

(2) باستخدام التعريف هل $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ؟

حيث $M(x,y) = ye^{xy}, \qquad N(x,y) = xe^{xy}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xy\,e^{xy}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xy\,e^{xy}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة تفاضلية مضبوطة.

(3) باستخدام التعريف هل $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$؟ حيث:

$$M(x,y) = x - y, \qquad N(x,y) = x + y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة التفاضلية غير مضبوطة.

تدريب (8)

(1) المعادلة التفاضلية مضبوطة حيث:

$$M(x,y) = y^3 - 3x^2y, \qquad N(x,y) = 3x\,y^2 - x^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = y^3 - 3x^2y$$

$$\int \frac{\partial g}{\partial x}\,dx = \int \left(y^3 - 3x^2y\right)dx + c(y)$$

$$g(x,y) = xy^3 - x^3y + c(y)$$

لنجد c(y) نشتق المعادلة g(x,y) بالنسبة لـ y لنحصل على

$$N(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y} = 3xy^2 - x^3 + \frac{dc}{dy}$$

$$\frac{dc}{dy} = 3xy^2 - x^3 - 3x\,y^2 + x^3 = 0$$
$$c(y) = c_1$$

حل المعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y) = xy^3 - x^3\,y + c_1 = k$$

إذن الحل هو

$$xy^3 - x^3\,y + c_2 = 0, \qquad c_2 = c_1 - k$$

(2) المعادلة التفاضلية مضبوطة حيث:

$$M(x,y) = 1 + ln(xy), \qquad N(x,y) = 1 + \frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{xy}} = \frac{1}{\mathrm{y}}, \qquad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{y}}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = 1 + \ln\,(xy)$$
$$g(x,y) = \int (1 + \ln\,(xy))dx + c(y)$$
$$g(x,y) = x\,\ln\,y + x\,\ln\,x + c(y)$$

لنجد c(y) نشتق المعادلة g(x,y) بالنسبة لـ y لنحصل على:

$$N(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{dc}{dy}$$
$$1 + \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{dc}{dy} \Rightarrow c = y + c_1$$

إذن حل المعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y) = x\ln\,y + \ln\,x + y + c_1 = k$$
$$\Rightarrow x\ln\,y + x\,\ln\,x + y = c_2 \quad c_2 = k - c_1$$

$$\mathrm{M(x,y)} = \mathrm{ye^x} + \mathrm{e^y}, \qquad \mathrm{N(x,y)} = \mathrm{e^x} + \mathrm{xe^y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \mathrm{e^x} + \mathrm{e^y}, \qquad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{e^x} + \mathrm{e^y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = ye^{x} + e^{y}$$

$$g(x,y) = \int (ye^{x} + e^{y})dx + c(y)$$

$$g(x,y) = ye^{x} + xe^{y} + c(y)$$

لنجد c(y) نشتق المعادلة g(x,y) بالنسبة لـ y لنحصل على:

$$N(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y} = e^{x} + xe^{y} + \frac{dc}{dy}$$

$$e^{x} + xe^{y} = e^{x} + xe^{y} + \frac{\partial c}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \Rightarrow c = c_1$$

إذن حل المعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y) = ye^{x} + xe^{y} + c_1 = k$$

إذن

$$ye^{x} + e^{y} = k - c_1$$

$$ye^{x} + e^{y} = c_2$$

تدريب (9)

(1) نكتب المعادلة على الصيغة التالية:

$$1dx - 2xy\ dy = 0$$

حيث: $M(x,y) = 1, \quad N(x,y) = -2xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

إذن المعادلة غير مضبوطة، نحتاج إلى إيجاد العامل المكامل

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-2y - 0}{1} = -2y$$

دالة في المتغير y، وبالتالي فإن العامل المكامل المناسب هو:

$$w(x,y) = e^{-\int 2ydy} = e^{-y^2}$$

بضرب المعادلة التفاضلية بالعامل المكامل e^{-y2} نحصل على المعادلة المضبوطة:

$$e^{-y^2}\,dx - 2xy\,e^{-y^2}\,dy = 0$$

نحل المعادلة $\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = e^{-y^2}$

$$g(x,y) = \int e^{-y^2}\,dx + c(y)$$

$$g(x,y) = xe^{-y^2} + c(y)$$

باشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2yxe^{-y^2} + \frac{dc}{dy}$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y} = N$ بالتعويض نحصل على:

$$-2xy\,e^{-y^2} = -2yxe^{-y^2} + \frac{dc}{dy}$$

$$\frac{dc}{dy} = 0 \Rightarrow c = c_1$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y) = xe^{-y^2} + c_1 = k$$

$$xe^{-y^2} = c_2, c_2 = k - c_1$$

(2) نكتب المعادلة على الصورة:

$$(-2xy+x)dx+dy=0$$

$$M(x,y)=-2xy+x,\qquad N(x,y)=1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2x,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

المعادلة التفاضلية غير مضبوطة وبالتالي نجد:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{-2x-0}{1}=-2x$$

دالة في المتغير x فقط، إذن العامل المكامل w(x,y) يساوي:

$$w(x,y)=e^{-\int -2x\,dx}=e^{-x^2}$$

بضرب هذا العامل بالمعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\left(-2xy\,e^{-x^2}+x\,e^{-x^2}\right)dx+e^{-x^2}dy=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=-2xy\,e^{-x^2}+xe^{-x^2}$$

$$g(x,y)=\int\left(-2xy\,e^{-x^2}+xe^{-x^2}\right)dx+c(y)$$

$$g(x,y)=y\,e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c(y)$$

باشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على $\frac{\partial g}{\partial y}=e^{-x^2}+\frac{dc}{dy}$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y}=N$ بالتعويض نحصل على:

$$e^{-x^2}=e^{-x^2}+\frac{dc}{dy}\Rightarrow\frac{dc}{dy}=0\Rightarrow c=c_1$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y)=y\,e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c_1=k$$

$$y e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} = c_2 \, , \; c_2 = k - c_1$$

(3) نكتب المعادلة على الصيغة التالية:

$$x\left(x^2 + y^2\right) dx + xdy - ydx = 0$$

نختار العامل المكامل المناسب $w(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ثم نضرب w(x,y) بالمعادلة التفاضلية لنحصل على المعادلة المضبوطة:

$$xdx + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$g(x,y) = \int \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + c(y)$$

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(y)$$

باشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{dc}{dy}$$

لكن $\frac{\partial g}{\partial y} = N$ ، بالتعويض نحصل على:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{dc}{dy}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \Rightarrow c = c_1$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$g(x,y)=\frac{x^2}{2}-arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)+c_1=k$$

$$g(x,y)=\frac{x^2}{2}-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=c_2\ ,\ c_2=k-c_1$$

(4) نكتب المعادلة على الصورة:

$$(ydx-xdy)+y\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

نختار العامل المكامل $w(x,y)=\frac{-1}{x^2+y^2}$

ونضرب المعادلة التفاضلية به ليصبح على الشكل:

$$\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}-\frac{y\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dy=0$$

أو

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\left(-y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$g(x,y)=\int\frac{-y}{x^2+y^2}dx+c(y)$$

$$g(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c(y)$$

باشتقاق g(x,y) بالنسبة لـ y نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dc}{dy}$$

لكن $N=\frac{\partial g}{\partial y}$ بالتعويض نجد أن:

$$-y+\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dc}{dy}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}=-y \Rightarrow c=-\frac{y^2}{2}$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{2}=k$$

(5) نكتب المعادلة على الشكل التالي:

$$ydx-(x-1)dy=0$$

$$(ydx-xdy)+1dy=0$$

نختار العامل المكامل $w(x,y)=\frac{1}{y^2}$ ونضربه بالمعادلة التفاضلية لنحصل على:

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{1}{y^2}dy=0$$

يمكن تحويل المعادلة الأخيرة إلى الشكل التفاضلي التالي:

$$d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(-\frac{1}{y}\right)=0$$

$$\int d\left(\frac{x}{y}\right)+\int d\left(\frac{-1}{y}\right)=c$$

$$\frac{x}{y}-\frac{1}{y}=c$$

تدريب (10)

(1) من المعادلة $P(x) = 100$ نجد أن العامل المكامل $w(x,y)$ حيث:

$$w(x,y)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int 100dx}=e^{100x}$$

نضرب المعادلة بـ $w(x,y)$ لنحصل على:

$$e^{100x}y'+100e^{100x}y=0$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{100x}\right)=0$$

$$\int\frac{d}{dx}\left(y\,e^{100x}\right)dx=c$$

$$y\,e^{100x}=c\Rightarrow y=c\,e^{-100x}$$

(2) من المعادلة $p(x)=e^{x}$ نجد العامل المكامل $w(x,y)$ حيث: $w(x,y)=e^{\int e^{x}dx}=e^{e^{x}}$

نضرب المعادلة بـ $w(x,y)$ لنحصل على: $e^{e^{x}}y'+e^{x}\,e^{e^{x}}y=0$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي: $\frac{d}{dx}\left(y\,e^{e^{x}}\right)=0$

$$\int\frac{d}{dx}\left(ye^{e^{x}}\right)dx=c$$

$$ye^{e^{x}}=c\Rightarrow y=ce^{-e^{x}}$$

(3) من المعادلة $P(x)=\frac{1}{x}$ نجد العامل المكامل $w(x,y)$ حيث

$$w(x,y)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

نضرب المعادلة بالعامل المكامل $w(x,y)$ لنحصل على:

$$xy'+y=0$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}(xy)=0$$

$$\int\frac{d}{dx}(xy)dx=c$$

$$xy=c\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

(4) من المعادلة نجد أن $P(x) = 6$ نجد العامل المكامل $w(x,y)$ حيث

$$w(x,y) = e^{\int 6dx} = e^{6x}$$

بضرب المعادلة التفاضلية بـ $w(x,y)$ نحصل على:

$$e^{6x} y' + 6y e^{6x} = 0$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{6x}\right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(y e^{6x}\right) dx = c$$

$$y e^{6x} = c \Rightarrow y = c e^{-6x}$$

تدريب (11)

(1) المعادلة المعطاة هي معادلة برنولي حيث $P(x) = x$ ، $q(x) = x$، $(n = 2)$ نفرض أن $v = y^{-2+1} = \frac{1}{y}$ ومنها نجد $y = \frac{1}{v}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + x\frac{1}{v} = x\frac{1}{v^2}$$

$$\frac{dv}{dx} - x\, v = -x$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية نجد حلها كما مر معنا سابقاً بإيجاد العامل المكامل $w(x,y)$ وضرب بالمعادلة التفاضلية:

$$w(x,y) = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}v' - e^{-\frac{x^2}{2}}xv = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}v\right) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}v\right)dx = \int -xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}v = e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

لكن $v = \frac{1}{y}$ إذن $v = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$

إذن حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = \frac{1}{1 + ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

(2) هذه المعادلة هي معادلة برنولي $p(x) = -1$ ، $q(x) = x$ $(n = 5)$

نفرض أن $v = y^{-5+1} = \frac{1}{y^4}$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نحصل على:

$$y^{-5}\,\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} + 4v = -4x$$

هذه معادلة تفاضلية خطية نجد حلها بإيجاد العامل المكامل

$$w(x,y) = e^{\int 4dx} = e^{4x}$$

ضرب المعادلة التفاضلية بـ w (x,y) نحصل على

$$e^{4x}v' + 4e^{4x} = -4x\,e^{4x}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dx}(v\,e^{4x}) = -4xe^{4x}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(ve^{4x}\right)dx = \int -4x\,e^{4x}\,dx$$

$$ve^{4x} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

لكن $v= y^{-4}$ إذن حل المعادلة التفاضلية هو :

$$\frac{1}{y^4}=-x+\frac{1}{4}+ce^{-4x}$$

(3) المعطاة هنا معادلة برنولي حيث $n=\frac{1}{2}$ نفرض أن:

$$v=y^{-\frac{1}{2}+1}=y^{\frac{1}{2}}$$

أي أن $y=v^2$

وبالاشتقاق نجد: $y'=2v\,v'$

وفيها نجد وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية: $v'+\frac{1}{2}x\,v=3x$

هذه معادلة خطية نجد العامل المكامل $w(x,y)= e^{\int\frac{1}{2}xdx}$ ، $w(x,y)=e^{\frac{x^2}{4}}$ بضرب المعادلة $w(x,y)$ نحصل على $e^{\frac{x^2}{4}}\,v'+\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}x\,v=3x\,e^{\frac{x^2}{4}}$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{4}}\,v\right)=3x\,e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$\int\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{4}}\,v\right)dx=\int 3x\,e^{\frac{x^2}{4}}\,dx$$

$$e^{\frac{x^2}{4}}\,v=6e^{\frac{-x^2}{4}}+c$$

$$v=6+ce^{-\frac{x^2}{4}}$$

لكن $v=y^2$

$$y^2=6+ce^{-\frac{x^2}{4}}$$

(4) نكتب المعادلة التفاضلية بالصورة التالية: $y^{-2}\frac{dy}{dx}+y^{-1}=\cos x-\sin x$

نفرض أن $v=y^{-1}$ بالاشتقاق نحصل على: $-y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على: $\frac{dv}{dx} - v = \sin x - \cos x$

نجد العامل المكامل: $w(x,y) = e^{-\int dx} = e^{-x}$

بالضرب بالمعادلة التفاضلية نحصل على:

$$e^{-x}\frac{dv}{dx} - e^{-x}v = e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\int \frac{d}{dx}(e^{-x}v) = \int e^{-x}(\sin x - \cos x)dx$$

$$e^{-x}v = -e^{-x}\sin x + c$$

لكن $v = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} = -\sin x + ce^{x}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. انظر إلى مفهوم المعادلة التفاضلية العادية.
2. لا تحتوي على مشتقات عادية أو غير عادية.
3. لا تحتوي على مشتقات عادية أو غير عادية.

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1. معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الرابعة.
2. معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الثالثة.

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1. بالتعويض في المعادلة $y' = \frac{1}{x}e^{x} + \frac{-1}{x^{2}}e^{x}$
2. c تنتمي للمجموعة $\{-3, 4\}$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

1. $y = 3e^{-\frac{3}{2}x}$
2. $y = 4(x+1)e^{-x}$
3. $y = e^{1-\frac{1}{x}} - 1$

أسئلة التقويم الذاتي (5)

1. الدالة متجانسة من الدرجة الثالثة.
2. الدالة غير متجانسة.
3. الدالة متجانسة من الدرجة $\frac{3}{2}$
4. الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

أسئلة التقويم الذاتي (6)

1. $\ln\left(y^2+2xy+2x^2\right)-4\arctan\left(\frac{x+y}{x}\right)=c$

2. $-2\sqrt{x/y}+\ln|y|=c$

أسئلة التقويم الذاتي (7)

1. بترتيب المعادلة على الصورة $ydx+xdy=0$ واحصل على أن المعادلة التفاضلية معادلة مضبوطة لأن $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=1$.

2. أعد كتابة المعادلة على الصورة:

$$\left(2+ye^{xy}\right)dx+\left(xe^{xy}-2y\right)dy=0$$

واحصل على أن المعادلة التفاضلية مضبوطة لأن:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}$$

أسئلة التقويم الذاتي (8)

1. $M(x,y)=2y,\quad N(x,y)=y^2-kx$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow 2=-k\Rightarrow k=-2$$

2. $M(x,y)=\sin y,\quad N(x,y)=x^k\cos y+y^3$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=k\,x^{k-1}\cos y$$

$$\cos y=k\;x^{k-1}\cos y$$

$$1=k\,x^{k-1}$$

$$x=kx^k\Rightarrow k=1$$

3. $M(x,y)=y^4+2kxy,\qquad N(x,y)=4xy^3+kx^3$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y^3+2kx \ , \ \frac{\partial N}{\partial x}=4y^3+3kx^2$$

$$4y^3+2kx=4y^3+3kx^2$$

$$2kx-3kx^2=0$$

$$k\left(2x-3x^2\right)=0$$

$$\Rightarrow k=0$$

أسئلة التقويم الذاتي (9)

1. اضرب $w(x,y)$ بالمعادلة ثم بين هل $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

2. $\left(x^2+1\right)\sin y+\cos y=c$

3. نختار العامل المكامل $w(x,y)=\frac{1}{y^2}$ ، ونجد الحل العام وهو $\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=c$

4. اضرب المعادلة التفاضلية بالعامل المكامل $w(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{-n}$ لتحصل على الصورة:

$$\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^n}dx+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^n}dy=0$$

ثم بين أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-n\ x\ y}{\left(x^2+y^2\right)^{n-1}}$$

أسئلة التقويم الذاتي (10)

1. $y=\frac{-5e^{\cos x}+c}{\sin x}$

2. $y=(x-2)^3+c(x-2)$

3. $2y=x^3+c\,x^3\,e^{\frac{1}{x^2}}$

4. $y=\sin x+\frac{1}{x}\cos x+\frac{c}{x}$

أسئلة التقويم الذاتي (11)

1. انظر التعريف داخل الوحدة.

2. $\frac{x^2}{y^2} = \frac{-2}{3}x^3\left(\frac{2}{3}\ln x\right) + c$

3. الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $y = \left(\frac{5}{2}x^3 + cx^5\right)^{-\frac{1}{5}}$

لإيجاد c نعوض $x = 1$ ، $y = 5$

$5 = \left(\frac{5}{2} + c\right)^{-\frac{1}{5}}$ ومنها نجد c.

4. الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

ولإيجاد c نعوض $x = \pi$ ، $y = 1$ نحصل على:

$$1 = ce^{-\pi} + \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}e^{\pi}$$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس،

نظـرا لطبيعـة هـذا المقـرر، ولعـدم الرغبـة فـي إظهـار معـادلات رياضـية فـي مـسرد المصطلحات، لذا نقتصر هنا على ذكر المصطلح العربي وما يقابله من المصطلح الانجليزي، وذلك لمساعدة الدارس في الرجوع إلى المراجع الأجنبية، أو مواقع الإنترنت.

اشتقاق	**Derivation,Differentition**
تكامل	**Integration**
الحل العام	**General solution**
حل المعادلة التفاضلية	**Solution of differential equation**
شرط ابتدائي	**Initial Condition**
العوامل المكاملة	**Integrating factors**
غير متجانس	**Non homogeneous**
قابل للفصل	**Separable**
متجانس	**Homogeneous**
المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى	**First order ordinary differential equations**
المعادلة المضبوطة	**Exact equation**
معادلة بيرنولي	**Bernoulli's equation**
معادلة تفاضلية جزئية	**Partial differential equation**
وجود الحل	**Existance of solution**

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية

1. رشدي خليل، **مقدمة في المعادلات التفاضلية**. عمان: دار المناهج، 2003.
2. فرانك أيرز، **نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية**. القاهرة: الدار الدولية، 1991.
3. قيصر فيازمينسكي، **المعادلات التفاضلية**. دمشق: المركز العربي للتعريب، 1995.
4. ريتشارد برولسون، **2500 مسألة محلولة في المعادلات التفاضلية**. سلسلة المسائل المحلولة شوم، ترجمة فايز فوق العادة. بيروت: أكاديميا إنترناشيونال، 1997.

المراجع الأجنبية

1. William E. Boyce and Richard C. Diprima, **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1977.
2. Garret Birkhoff and Gian-carlo Rota, **Ordinary Differential Equations**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1978.
3. Ray while, **Differential Equations**. New York: Mc Graw-Hill Inc, 1979.
4. Shepley L.Ross, **Introduction To ordinary Differential Equations.** 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1980.

الوحدة الثانية

تطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**99**
تمهيد	99
أهداف الوحدة	100
1. تطبيقات المعادلات التفاضلية على المسارات المتعامدة	**102**
1.1 تعريف المسار	102
2.1 تعريف المنحنيين المتعامدين	104
3.1 المسارات المتعامدة لمنحنى معادلته معلومة	106
2. تطبيقات المعادلات التفاضلية على قانون نيوتن للتبريد.	**111**
1.2 قانون نيوتن للتبريد	111
2.2 حل المعادلة التفاضلية في مسائل التبريد	113
3. تطبيقات المعادلات التفاضلية على الأجسام الساقطة والمقذوفات	**119**
1.3 المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة جسم ما	120
2.3 حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$	122
4. تطبيقات المعادلات التفاضلية على مسائل النمو والاضمحلال	**131**
1.4 المسائل الخاصة بنمو البكتيريا	131
2.4 المسائل الخاصة بالاضمحلال (التحلل)	136
الخلاصة	**142**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**143**

الموضوع	الصفحة
إجابات التدريبات	143
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	153
مسرد المصطلحات	156
المراجع العربية والأجنبية	157

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

أهلاً بك في الوحدة الثانية من مقرر المعادلات التفاضلية، وهي وحدة تتناول بعض التطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

إن أهم أهداف دراسة المعادلات التفاضلية، دراسة التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية وخاصة في العلوم التطبيقية، كالهندسة، والفيزياء، والكيمياء، ... إلخ.

وفي هذه الوحدة سنتعرف على أهم التطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، وسنتعرف على المسارات المتعامدة، وعلى قانون نيوتن للتبريد، وعلى الأجسام الساقطة والمقذوفات. وفي نهاية الوحدة سنتعرف على مسائل النمو والاضمحلال.

يجدر بك عزيزي الدارس أن تهتم بهذه الوحدة وتدرسها بالتسلسل الذي وضعت به، فلا تنتقل إلى جزء إلا بعد أن تفهم الجزء السابق فهماً جيداً. وقد استخدمنا في عرض الوحدة الأسلوب نفسه الذي اتبعناه في الوحدة الأولى، حيث نبدأ بشرح المفاهيم النظرية ثم ما نلبث أن نعزز تلك المفاهيم بتطبيقات وأمثلة محلولة، ونظن أن هذه الطريقة ذات جدوى في توضيح المفاهيم النظرية الواردة في الوحدة.

إن واجهت صعوبة في طريقتنا السالفة أعلاه فإن بإمكانك أن تساهم في تعديل محتوى هذا المقرر عبر تقديم اقتراحاتك لمشرفك الأكاديمي، والذي بدوره سيعمل على إيصالها لنا، ونعدك أن ندرسها بكل جدية، وندخلها في التعديلات القادمة لهذا المقرر.

ولتعزيز تعلمك في هذه الوحدة تابع باستمرار حضور اللقاءات الأكاديمية التي تتم مع المشرف الأكاديمي، وتتبع عبر مركزك الدراسي أي وسائط تم إنتاجها لدعم هذه الوحدة، واحرص على مشاهدتها فورا. وقد ثبت أن الوسائط المساندة قادرة على شرح تطبيقات المعادلات التفاضلية أفضل من الحديث النظري المجرد.

أهلاً بك مرة أخرى في هذه الوحدة، ونتمنى لك التوفيق دائما.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،،

يتوقع منك بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1) **تشرح** بعض التطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

2) **توضح** مفهوم المسارات المتعامدة **وتحل** مسائل عليها.

3) **تكتب** قانون نيوتن للتبريد **وتحل** مسائل عليه.

4) **تضرب** أمثلة على الأجسام الساقطة والمقذوفات **وتحل** مسائل عليها.

5) **تشرح** مسائل النمو والاضمحلال (التحلل) **وتحل** مسائل عليها.

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

عزيزي الدارس،

في **الوحدة الأولى**، عرفنا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، وكيفية تميزها عن الأنواع الأخرى من المعادلات، كذلك عرفنا كيفية حل هذا النوع من المعادلات وذلك بفصل المتغيرات، وبيّنا المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى، وعرفنا الخطوات العامة لحل ذلك النوع من المعادلات، وبينا المعادلات التفاضلية المضبوطة، وعرفنا الخطوات العامة لحل ذلك النوع من المعادلات، كذلك درسنا تعريف العوامل المكاملة التي تستخدم في حل المعادلات التفاضلية، وقدمنا عدّة حالات في كيفية اختيار العامل المكامل $w(x,y)$ الذي يتبع معادلة تفاضلية مضبوطة، وعرفنا كيفية حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى على الصيغة $y' + p(x)\ y = q(x)$، وفي الوحدة قدمنا أيضاً **معادلة بيرنولي** (المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى غير الخطية) وعرفنا كيفية تحويل تلك المعادلة $\frac{dy}{dx} + p(x)\ y = Q(x)\ y^n$ إلى معادلة خطية.

في هذه الوحدة ستقدّم عدة تطبيقات للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى في المسائل الهندسية (المسارات المتعامدة)، والمسائل الفيزيائية (قانون نيوتن للتبريد)، والأجسام الساقطة والمقذوفات، والمسائل الخاصة بنمو واضمحلال تجمعات إحصائية (البكتيريا)، وتحلل المواد المشعة.

عزيزي الدارس،

هذه جولة سريعة فيما نحن مقدمين عليه، فهل أنت مستعد لها جيدا... إذا كان جوابك نعم، فهيا بنا ننطلق سوية إلى الجزء الأول من الوحدة!

1. تطبيقات المعادلات التفاضلية على المسارات المتعامدة

عزيزي الدارس،،،

توجد العديد من المسائل الهندسية التي تخضع لمعادلة تفاضلية ما، وفي هذا البند سوف نناقش بعض المسائل التي تخضع لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ومن أهمها المسارات المتعامدة (Orthogonal Trajectories).

عرفنا سابقاً أن مسار أي معادلة في المستوى xy يتحدد بمتغيرين هما x و y والذي يتحدد بدوره من خلال معادلة أو علاقة رياضية معينة، فمثلاً المعادلة التربيعية:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

يمثل مسار جسم على دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها (r) فكلما تغير نصف القطر r تغيرت الدائرة (كما تغير نصف القطر r أعطى مساراً جديداً).

1.1 تعريف المسار

عبارة عن مجموعة (عائلة) من المنحنيات تحددها مجموعة (عائلة) من المعادلات $F(x, y, c) = 0$. فكل قيمة لـِ c تعطينا معادلة تمثل عنصراً من عناصر المجموعة (العائلة).

فمثلاً المعادلة $x^2 + y^2 = c^2$ هي المعادلة:

$$F(x, y, c) = 0$$

حيث $F(x,y,c) = x^2 + y^2 - c^2$ تمثل عائلة (مجموعة) من الدوائر لكل قيمة مثل $(c > 0)$ تحصل على دائرة نصف قطرها c.

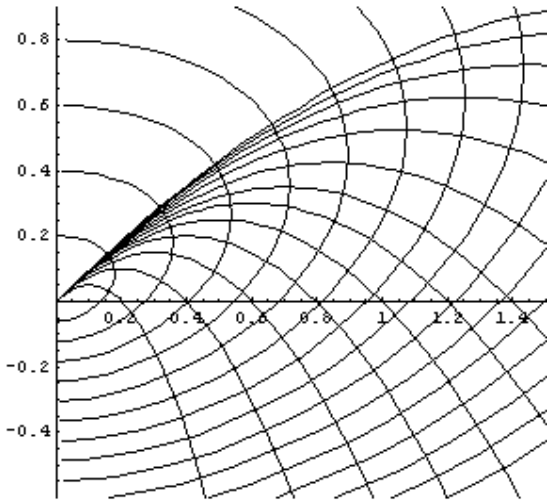
كذلك المعادلة $y^2 - x^2 = c^2$ هي معادلة تمثل مجموعة من القطوع الزائدية حيث $F(x,y,c) = y^2 - x^2 - c^2$، لكل قيمة مثل $(c > 0)$ تحصل على قطع زائد جديد.

أشكال توضيحية للمسارات المتعامدة

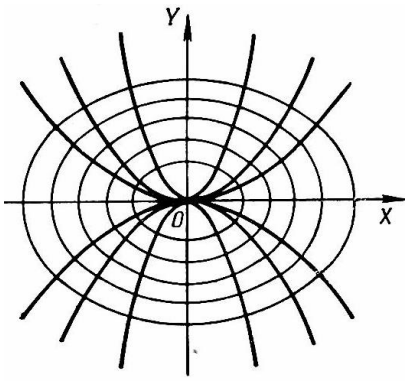
فيما يلي مجموعة من الأشكال التوضيحية للمسارات المتعامدة نقدمها لك بهدف تقريب الصورة الذهنية لهذا المفهوم قبل أن نتطرق إليه في البند القادم.

الشكل (1)

(ا) عائلة من المنحنيات مع انعكاساها على ما يشبه الجدار



(ب) عائلة من القطوع المخروطية

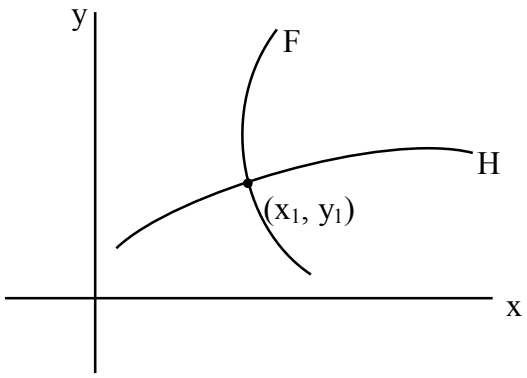


2.1 تعريـــــف "المنحنيـــــــــين

المتعامدين"

ليكن $F(x,y,c_1) = 0$ ، $H(x,y,c_2) = 0$ مسارين، ولنفرض أن هذين المسارين قد تقاطعا عند نقطة مثل (x_1, y_1) كما هو ظاهر في الشكل (2) :

الشكل (2)



فعند نقطة التقاطع (x_1, y_1) يمكن رسم مماس للمنحنى $F(x,y,c_1) = 0$ وليكن L_1 ومماس آخر للمنحنى $H(x,y,c_2) = 0$ وليكن L_2، نقول عندئذ إن:

المنحنيين متعامدان عند النقطة (x_1, y_1) إذا كان L_1 عموديا على L_2 $(L_1 \perp L_2)$.

أي أن ميل المماس عند نقطة التقاطع (x_1, y_1) على أي منحنى من العائلة الجديدة $H(x,y,c) = 0$ يجب أن يساوي معكوس ميل المماس (بإشارة معاكسة) عند النقطة نفسها من أي منحنى من منحنيات العائلة الأصلية $F(x,y,c_1) = 0$.

وللحصول على ميل المماس، نشتق المعادلة $F(x,y,c) = 0$ ضمنياً بالنسبة للمتغير x ثم نحذف الثابت c باستخدام المعادلة $F(x,y,c) = 0$ وتعويضها في المعادلة المشتقة، فيكون شكل المعادلة التفاضلية التي سنحصل عليها كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

فتكون المسارات المتعامدة هي حل المعادلة التفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x,y)}$$

والأمثلة التالية توضح مفهوم المسارات المتعامدة.

◄◄ مثال (1)

أوجد معادلة تفاضلية للمسارات المتعامدة مع عائلة المنحنيات $y = cx^2$.

الحل:

العائلة المعطاة $y = cx^2$ هي مجموعة من القطوع المكافئة.

نكتب المعادلة بالشكل $F(x,y,c) = y - cx^2 = 0$

بالاشتقاق الضمني بالنسبة لِـ x نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = 2cx$$

نحذف c ونستفيد من المعادلة الأصلية $c = \frac{y}{x^2}$ وبالتعويض لنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} = f(x,y)$$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية التي تمثل المسارات المتعامدة هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد معادلة تفاضلية للمسارات المتعامدة مع عائلة المنحنيات $x^2 + y^2 = cx$.

الحل:

العائلة المعطاة هي مجموعة من الدوائر، نكتب المعادلة على الصورة

$$F(x,y,c) = x^2 + y^2 - cx = 0$$

وبإجراء التفاضل الضمني بالنسبة لِـ x نحصل على:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = c$$

لحذف c نستفيد من المعادلة الأصلية:

$$c = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

إذن:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = f(x,y)$$

فتكون المسارات المتعامدة مع عائلة المنحنيات $x^2 + y^2 = cx$ هي حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

الآن، عرفنا كيف نجد المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة مع عائلة المنحنيات $F(x,y,c) = 0$، والسؤال الذي يطرح نفسه كيف نجد تلك المسارات المتعامدة.

3.1 المسارات المتعامدة لمنحنى معادلة معلومة

المسارات المتعامدة لمنحنى معادلته معلومة يتحدد وفق الخطوتين التاليتين:

1- نجد المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة مع عائلة المنحنيات $F(x,y,c) = 0$ كما مر معنا في البند السابق.

2- نجد حل المعادلة التفاضلية الناتجة من (1) لنحصل على عائلة المنحنيات على شكل المعادلة $H(x,y,b)=0$.

وإليك الأمثلة التالية التي توضح كيفية إيجاد المسارات المتعامدة لمنحنى إذا علمنا معادلته.

◄◄ مثال (1)

أوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات $y = cx^2$.

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة $F(x,y,c) = y - cx^2 = 0$.

بإجراء التفاضل الضمني بالنسبة لِـ x نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = 2cx$$

لحذف c من المعادلة الأصلية نجد أن $c = \frac{y}{x^2}$ وبالتعويض في الاشتقاق نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} = f(x,y)$$

إذن المعادلة التفاضلية التي تمثل المسارات المتعامدة هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x,y)} = \frac{-x}{2y}$$

وبفصل المتغيرات نحصل على: $xdx + 2ydy = 0$

إذن بتكامل الطرفين نجد عائلة المسارات المتعامدة:

$$\int xdx + \int 2ydy = c$$

$$\frac{x^2}{2} + 2\frac{y^2}{2} = c$$

$$x^2 + 2y^2 = b \ , \qquad (b=2c)$$

لاحظ أن المسارات المتعامدة عبارة عن عائلة من القطوع المخروطية الناقصة.

◄◄ مثال (2)

أوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات $x^2 + y^2 = 2cy$.

الحل:

بالاشتقاق الضمني للمعادلة تحصل على:

$$2x + 2yy' = 2cy' \ , \ y' = \frac{dy}{dx}$$

من المعادلة الأصلية نجد c والذي يساوي $c = \frac{x^2 + y^2}{2y}$ بتعويض c في المعادلة المشتقة نحصل على:

$$2x + 2yy' = 2\left(\frac{x^2 + y^2}{2y}\right) y'$$

ثم نحصل على المعادلة: $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x,y)$

إذن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة هي:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} = -\frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

بفصل المتغيرات وحل المعادلة نحصل على المسارات المتعامدة:

$(y^2 - x^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

$M(x,y) = y^2 - x^2, \ N(x,y) = 2xy$

المعادلة التفاضلية متجانسة لأن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

ولحل هذه المعادلة، كما مر معنا سابقاً، نعوّض $y = vx$ وبالاشتقاق نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية والترتيب على الصيغة:

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{2v}{(1+v^2)}dv$$

$$\int -\frac{1}{x}dx = \int \frac{2v}{(1+v^2)}dv + c$$

$$-\ln|x| = \ln|1+v^2| + c$$

لكن $v = \frac{y}{x}$ ، بالتعويض في الحل الأخير نحصل على:

$$\ln|x^2+y^2| - \ln|x^2| + \ln|x| = c$$

$$\ln|x^2+y^2| - \ln|x| = c$$

$$\ln\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right| = c$$

$$\frac{x^2+y^2}{x} = e^c \Rightarrow x^2+y^2 = xe^c$$

$$x^2+y^2 = xc_1 \quad , \quad c_1 = e^c$$

لاحظ أن المسارات المتعامدة عبارة عن عائلة من الدوائر.

◄◄ مثال (3)

أوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات $xy = c$.

الحل:

باشتقاق المعادلة ضمنياً بالنسبة لِـ x نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}$$

لكن المعادلة الأصلية $xy = c$ بالتعويض في المعادلة المشتقة نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x} = f(x,y)$$

المعادلة التفاضلية التي تمثل عائلة المسارات المتعامدة هي:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} = \frac{x}{y}$$

بفصل المتغيرات نحصل على:

$$ydy = xdx$$

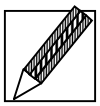
$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c$$

$$y^2 - x^2 = b \ , \quad (b=2c)$$

لاحظ أن المسارات المتعامدة عبارة عن عائلة من القطوع المخروطية الزائدية.

التدريب (1)



أوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات التالية:

(1) $y = ce^x$

(2) $y^2 = 4cx$

(3) $xy = c$

أسئلة التقويم الذاتي (1)



أوجد المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات:

1. $y = c\,(1 + \sin x)$
2. $y = \ln (x^3 + c)$

2. تطبيقات المعادلات التفاضلية على قانون نيوتن للتبريد

1.2 قانون نيوتن للتبريد

عزيزي الدارس،

من أهم تطبيقات المعادلات التفاضلية في مجال الفيزياء، هو قانون نيوتن للتبريد، والذي يتضمن شكله الرياضي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، وينص قانون نيوتن للتبريد على ما يلي:

تعريف "قانون نيوتن للتبريد"

> إن المعدل الزمني لتغير درجة حرارة جسم معين يتناسب مع الفرق بين درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الوسط الذي يقع فيه الجسم.

من هذا التعريف يمكن إيجاد معادلة تفاضلية تنظم تبريد جسم حار موجود في محيط بارد، وإليك وصف هذه المعادلة.

افرض أن T هي درجة حرارة الجسم، و T_m درجة حرارة الوسط المحيط، وبالتالي يكون المعدّل الزمني لتغيّر درجة حرارة الجسم بالنسبة للزمن هو $\frac{dT}{dt}$، وبناء على ذلك يمكن وضع قانون نيوتن للتبريد في الصيغة التالية:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m)$$

أو:

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$$

حيث $(k > 0)$ يمثل ثابت التناسب، والأمثلة التالية توضح معادلة التبريد التفاضلية.

◄◄ مثال (1)

أوجد المعادلة التفاضلية التي تحكم درجة حرارة جسم ساخن كدالة للزمن بفرض أن الجسم موضوع في حمام درجة حرارته 32° F.

الحل:

افرض أن T هي درجة حرارة الجسم الساخن عند أي لحظة، وعلى فرض أننا وضعنا الجسم في الحمام عند اللحظة $t = 0$، فإن معدّل تبريد الجسم يعبر عنه بالمشتقة الأولى لِـ T بالنسبة لِـ t $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ وفق المعلومات فإن:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - 32)$$

◄◄ مثال (2)

قضيب معدني درجة حرارته مائة درجة فهرنهايت 100°F يوضع في غرفة ذات حرارة ثابتة مقدارها 0°F، أوجد المعادلة التفاضلية التي تنظم حرارة هذا الجسم علماً بأن درجة حرارته انخفضت إلى 50°F بعد مضي 20 دقيقة.

الحل:

الوسط المحيط في هذه الحالة هو الغرفة وقد ثبتت درجة حرارته عند 0°F أي أن

$T_m = 0$، إذن المعادلة التفاضلية هي:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 0)$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

الحل الكامل في البند اللاحق.

2.2 حل المعادلة التفاضلية في مسائل التبريد

في البند السابق، عرفنا كيف نكوّن المعادلة التفاضلية والتي تنظم درجة حرارة الجسم الموضوع في وسط معين والتي كانت على الصورة: $\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m)$

أو: $\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$

ويتم حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات، ثم إيجاد الحل العام لها بطريقة التكامل كما مر معنا سابقاً، والأمثلة التالية توضح ذلك.

◄◄ مثال (1)

قضيب معدني درجة حرارته 100°F يوضع في غرفة ذات حرارة ثابتة قدرها 0°F.

1. أوجد المعادلة التفاضلية التي تنظم حرارة القضيب كدالة في الزمن.
2. أوجد حل المعادلة التفاضلية في فرع (1).
3. أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية في فرع (1)، علماً بأن درجة حرارته انخفضت إلى 20°F بعد مضي 20 دقيقة.
4. أوجد الزمن اللازم حتى يبلغ القضيب درجة حرارة 25°F.
5. أوجد درجة حرارة القضيب بعد مرور (10) دقائق.

الحل:

1. كما مر معنا في مثال (2) في البند السابق فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي:

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

وهذه معادلة خطية من الرتبة الأولى، نحصل على حلها بفصل المتغيرات.

2. بفصل المتغيرات نجد أن:

$$\frac{1}{T}\,dT + kdt = 0$$

$$\int \frac{1}{T}\,dT + \int kdt = 0$$

$$\ln |T| = - kt + c$$

$$T = \bar{e}^{kt + c}$$

$$T = e^{c}\ \bar{e}^{kt}$$

$$T = c_1\ \bar{e}^{kt}, \qquad (c_1 = e^{c})$$

فيكون هذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

3. لإيجاد الحل الخاص نعوض $T = 100$ عندما $t = 0$ (درجة الحرارة الابتدائية) في الحل العام لنحصل على:

$$100 = c_1\ e^{\circ} \Rightarrow c_1 = 100$$

إذن الحل الخاص هو: $T = 100\ \bar{e}^{kt}$

ولحساب الثابت k، نستخدم معطيات السؤال (عندما $t = 20$، $T = 50$) للتعويض في الحل الخاص فنحصل على: $50 = 100\ \bar{e}^{20k}$

$$\ln (50) = \ln (100) - 20k$$

$$k = \frac{\ln (50) - \ln (100)}{-20} = 0.035$$

إذن درجة حرارة القضيب عند أي لحظة زمنية مثل t تعطى بالعلاقة:

$$T = 100\bar{e}^{0.035t}$$

4. لإيجاد t عندما $T = 25$، بالتعويض في المعادلة: $T = 100\bar{e}^{0.035t}$

نجد أن: $25 = 100\bar{e}^{0.035t}$

$$\ln (25) = \ln (100) - 0.035t$$

$$t = 39.6 \approx 40 \text{ min}$$

5. عندما $t = 10$ نجد T في التعويض في المعادلة السابقة:

$$T = 100\bar{e}^{0.035(10)} = 100\ (0.71) = 710\ F^{\circ}$$

◄◄ مثال (2)

يوضع جسم درجة حرارته 50°F في الخارج حيث الحرارة 100°F، أوجد المعادلة التي تمثل درجة حرارة الجسم عند أي لحظة، علماً بأن درجة حرارة الجسم تزيد إلى 60°F بعد 5 دقائق.

الحل:

كما في المثال السابق، المعادلة التفاضلية التي تنظم حرارة الجسم هي:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m)$$

من المعطيات $T_m = 100$ (الوسط المحيط بالجسم) $\qquad \frac{dT}{dt} = -k\,(T - 100)$

لحل هذه المعادلة التفاضلية، نفصل التغيرات فنحصل على:

$$\int \frac{1}{T-100}\,dT = \int -k\,dt$$

$$\ln\,|\,T - 100\,|\, = -\,kt + c$$

$$T - 100 = c_1 e^{-kt} \quad , \quad c_1 = e^{c}$$

$$T = c_1\, e^{-kt} + 100$$

لكن $T = 50$، $t = 0$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:

$$50 = c_1 + 100 \;\Rightarrow\; c_1 = -50$$

إذن T تصبح على الصيغة:

$$T = -50\, e^{-kt} + 100$$

ولإيجاد الثابت k نستخدم الشرط الموجودة في المسألة، أي أنه عندما $T = 60$، $t = 5$ وبالتعويض في T نجد أن:

$$60 = -\,50\, e^{-5k} + 100$$

$$-\,50\, e^{-5k} = -\,40$$

$$e^{-5k} = \frac{4}{5}$$

$$\ln \bar{e}^{5K} = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \; k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right) = 0.045$$

إذن المسألة التي تمثل درجة حرارة الجسم عند أي لحظة t :

$$T = -50\,\bar{e}^{0.045t} + 100$$

◄◄ مثال (3)

يوضع جسم ما مجهول درجة الحرارة في غرفة درجة حرارتها 30°F، أوجد المعادلة التي تمثل درجة حرارة الجسم عند أي لحظة t، علماً بأن درجة حرارة هذا الجسم بعد عشر دقائق تسجل 0°F وتصبح 15°F بعد عشرين دقيقة.

الحل:

درجة حرارة الوسط المحيط بالجسم تبقى ثابتة $(T_m = 30)$ وبناءً على ذلك تصبح المعادلة التفاضلية التي تمثل المعدّل الزمني لدرجة حرارة الجسم T بالنسبة للزمن t تساوي:

$$\frac{dT}{dt} + kT = 30k$$

أو:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(30 - T)$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{1}{30 - T}\,dT = kdt$$

$$\int \frac{1}{30 - T}\,dT = \int kdt$$

$$-\ln|30 - T| = kt - c$$

$$\ln|30 - T| = -kt + c$$

$$T = c_1\,\bar{e}^{kt} + 30, (c_1 = e^c)$$

لإيجاد الثابتين k, c_1 نستخدم المعطيات في السؤال وهي عند $t = 10$، $T = 0$، وكذلك عند $t = 20$، $T = 15$ لنحصل على المعادلتين:

$$0 = c_1\ \bar{e}^{10k} + 30 \quad \text{.....(1)}$$

$$15 = c_1\ \bar{e}^{20k} + 30 \quad \text{.....(2)}$$

وبحل المعادلتين نجد كلاً من k, c_1 وبالصورة التالية:

$$k = \frac{1}{10}\ln(2) = 0.069$$

ثم نجد c_1 بالتعويض في إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة (1)

$$0 = c_1\ e^{-10\ \frac{1}{10}\ln 2} + 30$$

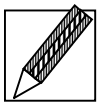
$$0 = c_1\ \frac{1}{2} + 30$$

$$c_1 = -60$$

إذن المعادلة التي تمثل درجة حرارة الجسم عند أي لحظة t:

$$T = -60\ e^{-\frac{1}{10}\ln 2} + 30$$

التدريب (2)



(1) وضع جسم درجة حرارته 50°F في فرن حرارته ثابتة وتساوي 150°F أوجد ما يلي:

ا. المعادلة التفاضلية التي تمثل المعدّل الزمني لتغير درجة حرارة الجسم بالنسبة للزمن t $\left(\frac{dT}{dt} = ??\right)$.

ب. أوجد درجة حرارة الجسم عند أي لحظة t علماً بأنه تزداد درجة الحرارة حتى تصل 75°F بعد مرور عشر دقائق.

جـ. أوجد الزمن اللازم للجسم كي يصل درجة حرارة 100°F.

(2) جسم درجة حرارته 72°F، وضع في محيط درجة حرارته 20°F، بعد خمس دقائق أصبحت درجة حرارة الجسم 55°F، بعد كم دقيقة تصبح درجة حرارة الجسم 32°F؟

أسئلة التقويم الذاتي (2)



1. وضع جسم درجة حرارته T في غرفة درجة حرارتها ثابتة وتساوي 68°F، أوجد درجة حرارة الجسم الأصلية، علماً بأنه بعد (10) دقائق أصبحت حرارة الجسم 50°F وبعد (15) دقيقة أصبحت 55°F.
2. يترك جسم درجة حرارته الابتدائية 100°C كي يبرد في محيط من الهواء درجة حرارته 20°C، أوجد المعادلة التي تعطي درجة حرارة الجسم كدالة للزمن t، علماً بأن درجة حرارة الجسم تنخفض بعد مرور عشر دقائق إلى 40°C.
3. حسب قانون نيوتن للتبريد: يتناسب معدل تبريد جسم في الهواء مع الفارق بين درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الهواء، وعلى فرض أن درجة حرارة الهواء تساوي 30°C وأن الجسم يبرد من درجة حرارة 100° C إلى درجة حرارة 70° C في غضون 15 دقيقة. أوجد الزمن اللازم كي يبلغ الجسم درجة حرارة 40° C؟

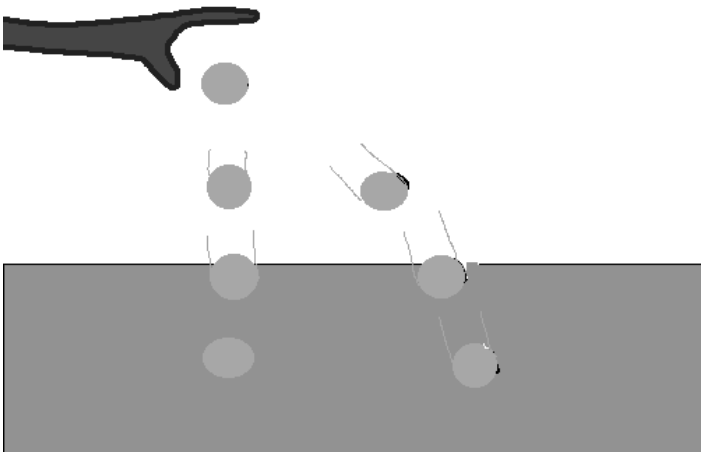
3. تطبيقات المعادلات التفاضلية على الأجسام الساقطة والمقذوفات

عزيزي الدارس،،

كما ذكرنا في البندين السابقين، توجد العديد من المسائل العلمية التي تخضع لمعادلة تفاضلية ما، مثل المسارات المتعامدة في المسائل الهندسية وقوانين نيوتن في التبريد والتسخين، وقلنا إن المسائل يمكن أن تؤول إلى صيغة رياضية على شكل معادلة تفاضلية ليست بالضرورة خطية من الرتبة الأولى وفي البند التالي سوف نستعرض بعض التطبيقات الفيزيائية في هذا المجال وخاصة في مسائل الميكانيك (مسائل الأجسام الساقطة والمقذوفات).

الشكل (3)

تطبيقات الأجسام الساقطة والمقذوفات كثيرة ومتعددة



1.3 المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة جسم ما

لإيجاد المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والتي تحكم حركة جسم كتلته m يسقط في منحنى رأسي ويتأثر بوزنه w وبمقاومة الهواء التي تتناسب مع سرعة الجسم، نفرض أن الوزن والكتلة تبقيان ثابتين ونختار اتجاه الحركة نحو الأسفل (الاتجاه الموجب)، وحسب قانون نيوتن الثاني للحركة، إن القوة المؤثرة في الجسم تساوي معدّل تغير كمية حركة الجسم.

أي أن:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

حيث F القوة المؤثرة في الجسم، v سرعة الجسم عند لحظة t و $\frac{dv}{dt}$ (المشتقة الأولى للسرعة بالنسبة للزمن) وهي عبارة عن تسارع الجسم عند اللحظة t.

في هذه المسألة، توجد قوتان تؤثران على الجسم هما:

1. قوة الثقل (الوزن) w والذي يساوي $w = mg$. حيث g يمثل تسارع الجاذبية الأرضية.
2. قوة مقاومة الهواء $-kv$ ، حيث $k \geq 0$ ثابت التناسب، والإشارة السالبة هنا تعني أن قوة مقاومة الهواء تعاكس اتجاه سرعة الجسم، وبذلك تكون محصلة القوة المؤثرة في الجسم تساوي:

$$F = mg - kv$$

لكن $F = m\frac{dv}{dt}$، وبذلك نحصل على:

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

أو:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = w$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى تمثل حركة الجسم.

ملاحظة (1)

مع إهمال مقاومة الهواء ($k = 0$) نحصل على المعادلة:

$$m \frac{dv}{dt} = w$$

ملاحظة (2)

إذا كانت w ثابتة ($w = w_o$) كما في مسائل المقذوفات، حيث قوة الجاذبية الأرضية ثابتة، فإن:

$$m \frac{dv}{dt} = w_o$$

وتحل هذه المعادلة حسب ما مر معنا سابقاً.

والأمثلة التالية توضح كيفية بناء المعادلة التفاضلية.

مثال

ألقي جسم كتلته 5 كغم من ارتفاع 100 قدم بسرعة ابتدائية تساوي صفرا، أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الجسم مع إهمال مقاومة الهواء؟

الحل:

بكل سهولة ويسر ومن الملاحظة (1):

$$m \frac{dv}{dt} = w$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{w}{m} = g$$

2.3 حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$

هذه المعادلة هي معادلة خطية من الرتبة الأولى، ويكون حلها كما مر سابقاً بفصل المتغيرات وإجراء التكامل للطرفين.

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى.

◄◄ مثال (1)

ألقي جسم كتلته 5 كغم من ارتفاع 100 قدم بسرعة ابتدائية تساوي صفر قدم/ ث. أوجد ما يلي:

1- المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الجسم عند أي لحظة t.

2- حل المعادلة التفاضلية في (1).

3- أوجد موقع الجسم عند أي لحظة t.

4- أوجد الزمن اللازم لكي يصل الجسم سطح الأرض.

ملاحظة: أهمل مقاومة الهواء.

الحل:

1- بما أن مقاومة الهواء مهملة فإن المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الجسم هي:

$$\frac{dv}{dt} = g$$

حل المعادلة التفاضلية هو:

2-

$$dv = gdt$$

$$\int dv = \int gdt$$

لكن $g = 32\ ft/s^2$ (الجاذبية الأرضية). إذا:

$$v = gt + c$$

$$v = 32\,t + c$$

لكن من السؤال عند $t = 0$، $v = 0$، بالتعويض في المعادلة:

$$c + 0 = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$v = 32t$$

3- بما أن السرعة عبارة عن المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن أي:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

حيث x : تمثل المسافة (الموقع) عند أي لحظة t. إذا:

$$\frac{dx}{dt} = 32t$$

بفصل المتغيرات:

$$dx = 32t\, dt$$

$$\int dx = \int 32t\, dt$$

$$x = 16t^2 + c$$

لكن $x = 0$ عند $t = 0$ بالتعويض في المعادلة.

$$c + 0 = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

إذن موقع الجسم في أي لحظة t هو: $x = 16t^2$

4- حتى يبلغ الجسم مسطح الأرض تكون $x = 100$، بالتعويض في المعادلة:

$$x = 16t^2$$

$$100 = 16t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{100}{16}$$

$$t = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{(ثانية)}$$

◄◄ مثال (2)

سقط جسم من السكون من ارتفاع 500 متر تحت تأثير قوة الجاذبية، وكان هناك مقاومة للهواء والتي تتناسب مع السرعة بثابت التناسب k = 3 كغم/ ت. على فرض أن قوة الجاذبية ثابتة وكتلته (كغم) m = 3 وكان (متر/ث^2) g = 9.81 تسارع الجاذبية، أوجد الزمن اللازم حتى يلامس الجسم سطح الأرض؟

الحل::

المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الجسم عند أي لحظة t.

$$m\frac{dv}{dt} + kv = w = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg$$

بفصل المتغيرات، نجد حل المعادلة التفاضلية.

كما مر معنا سابقاً في الوحدة الأولى، بإيجاد العامل المكامل:

$$w(v,t) = e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

بضرب المعادلة بالعامل المكامل، نحصل على:

$$e^{\frac{k}{m}t}\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}ve^{\frac{k}{m}t} = g\,e^{\frac{k}{m}t}$$

وهذا يكافئ الشكل التفاضلي:

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{k}{m}t}v) = ge^{\frac{k}{m}t}$$

بتكامل الطرفين:

$$\frac{d}{dt}\int\left(e^{\frac{k}{m}t}v\right)dt = g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + c$$

$$e^{\frac{k}{m}t}\ v = \frac{gm}{k}\, e^{\frac{k}{m}t} + c`$$

$$v = c\, e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$$

لكن $k = 3$ ، $mg = (3)\ (9.81)$

$$v = c\, e^{-t} + 9.81$$

لإيجاد الثابت c، وبما أن السقوط كان حراً فإن السرعة تساوى صفرا عند بداية حركة الجسم، أي أن: $v = 0$، $t = 0$، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة.

$$v = c\, e^{-t} + 9.81$$

$$0 = (1)\ c + 9.81 \Rightarrow c = -9.81$$

إذن:

$$v = -9.81\ e^{-t} + 9.81$$

لكن $v = \frac{dx}{dt}$ (المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن)، وبالتالي:

$$\frac{dx}{dt} = -9.81\ e^{-t} + 9.81$$

$$dx = (-9.81\ e^{-t} + 9.81)\ dt$$

$$\int dx = \int (-9.81\ e^{-t} + 9.81)\ dt$$

$$x = 9.81\ e^{-t} + 9.81t + c_1$$

وبما أن السقوط حرّ فإن $x = 0$، $t = 0$، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$0 = 9.81 + c_1 \Rightarrow c_1 = -9.81$$

إذن معادلة حركة الجسم:

$$x = 9.81\ t + 9.81\ (e^{-t} - 1)$$

الآن نجد الزمن اللازم لكي يلامس الجسم مسطح الأرض، أي عند $x = 500$، نجد t، بالتعويض في معادلة x الأخيرة نحصل على:

$$500 = 9.1\, t + 9.81\, (e^{-t} - 1)$$

ويحل المعادلة نجد أن:

$t \approx 52$ ثانية

◄◄ مثال (2)

قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية 1960 سم/ ث، أوجد ما يلي (مع إهمال مقاومة الهواء).

1- سرعة الجسم عند أي لحظة t.

2- أوجد الزمن اللازم لكي يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع.

3- أوجد أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم.

4- أوجد الزمن اللازم لكي يعود الجسم إلى سطح الأرض.

الحل:

1- المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الجسم.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-kv}{m} - g$$

لكن مقاومة الهواء مهملة $(k = 0)$.

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$dv = -gdt$$

$$\int dv = -\int gdt$$

$$v = -gt + c$$

لإيجاد الثابت c، من السؤال عند $t = 0$، $v = 1960$ بالتعويض في المعادلة:

$$1960 = - g (0) + c$$

$$c = 1960$$

إذن معادلة حركة الجسم هي:

$$v = -gt + 1960$$

بتعويض ثابت الجاذبية $g = 980$ سم/ ث^2، نحصل على:

$$v = -980t + 1960$$

2- الزمن اللازم لكي يصل الجسم أقصى ارتفاع عندما ($v = 0$) بالتعويض في المعادلة $v = 980t + 1960$، نحصل على:

$$0 = -980t + 1960 \Rightarrow t = 2 \text{ (ثانية)}$$

3- لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم، لا بد من إيجاد معادلة حركة الجسم x.

$$v = \frac{dx}{dt} = -980t + 1960$$

$$dx = (-980t + 1960)\, dt$$

$$x = \int (-980t + 1960)\, dt$$

$$x = -490t^2 + 1960\, t + c$$

لإيجاد c، نعوّض $t = 0$، $x = 0$، لنحصل على:

$$0 = c \Rightarrow c = 0$$

$$x = -4\,90\, t^2 + 1960\, t$$

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم (x) عندما $t = 2$ وبالتالي:

$$x = -\,490\,(2)^2 + 1960\,(2) = 1960 \text{ cm}$$

4- الزمن اللازم لكي يعود الجسم إلى سطح الأرض يساوي ضعف زمن وصول الجسم إلى أقصى ارتفاع.

$$t = 2\,(2) = 4 \text{ (ثانية)}$$

◄◄ مثال (4)

يسقط جسم وزنه 192 نيوتن من السكون عبر وسط يفرض مقاومة مقدارها $3v^2$ نيوتن. أوجد المعادلة التي تمثل حركة الجسم.

الحل:

حسب قانون نيوتن الثاني: $m\frac{dv}{dt} = w - kv^2$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 3v^2$$

$m = \frac{w}{g}$ ، $m = 192$، بالتعويض في المعادلة نجد أن: $\frac{192}{g}\frac{dv}{dt} = 192 - 3v^2$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3v^2 g}{192} = g(1 - \frac{v^2}{64}) = \frac{g}{64}(64 - v^2)$$

وبفصل المتغيرات نجد أن: $\int \frac{dv}{64 - v^2} = \frac{g}{64}\int dt$

$$\int \frac{dv}{64 - v^2} = \frac{g}{64}\, t + c$$

يلزم حل التكامل $\int \frac{dv}{64 - v^2}$ (بالكسور الجزئية)

$$\frac{1}{64 - v^2} = \frac{A}{8 - v} + \frac{B}{8 + v} = \frac{A\,(8 + v) + B\,(8 - v)}{(8 - v)\,(8 + v)}$$

$$= 1A\,(8+v) + B\,(8-v)$$

من هذه المعادلة نجد A, B بتعويض $v = 8$، $v = -8$ لنجد أن:

$$A = \frac{1}{16},\ B = \frac{1}{16}$$

$$\int \frac{1}{64 - v^2}\, dv = \int \frac{1}{16\,(8 - v)} dv + \int \frac{1}{16\,(8 + v)}\, dv$$

$$\int \frac{1}{64 - v^2}\, dv = -\frac{1}{16}\ln|8 - v| + \frac{1}{16}\ln|8 + v| + c_1$$

$$= \frac{1}{16} \ln \left| \frac{8+v}{8-v} \right| + c_1$$

حل المعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{1}{16} \ln \left| \frac{8+v}{8-v} \right| + c_1 = \frac{g}{64} t + c$$

$c - c_1 = c_2$

$$\frac{1}{16} \ln \left| \frac{8+v}{8-v} \right| = \frac{g}{64} t + c_2$$

لإيجاد الثابت c_2 (عندما $v = 0$، $t = 0$) بالتعويض في المعادلة نجد أن:

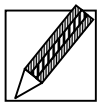
$$\frac{1}{10} \ln (1) = \frac{g}{64} (0) + c_2$$

$c_2 = 0$

إذن معادلة حركة الجسم تعطى بالعلاقة:

$$\ln \left| \frac{8+v}{8-v} \right| = \frac{g}{4} t$$

التدريب (3)



(1) سقط جسم من السكون كتلته 5 كجم من ارتفاع 1000م عن سطح الأرض، وكانت قوة مقاومة الهواء متناسبة مع سرعة الجسم، وكان ثابت التناسب 50 كجم/ ث = k. أوجد معادلة حركة الجسم عند أي لحظة، ثم أوجد الزمن اللازم حتى يلامس الجسم سطح الأرض.

(2) قذف جسم إلى الأسفل بسرعة ابتدائية قدرها 50 م/ ث. إذا علمت أن كتلة الجسم 5 كجم، وكانت قوة مقاومة الهواء تساوي $(-10v)$، أوجد معادلة حركة الجسم عند أي لحظة.

(3) قذف جسم رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها 30م/ ث، بإهمال الاحتكاك ومقاومة الهواء، أوجد

أ) معادلة سرعة الجسم عند أي لحظة t.

ب) معادلة موقع الجسم عند أي لحظة t.

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1. إذا كانت سرعة هبوط مظلي لحظة فتح المظلة 52.8 م/ ث، وعلى فرض أن مقاومة الهواء تساوي $wv^2/256$ حيث w هو (وزن المظلي + وزن المظلة). أوجد سرعة المظلي كدالة للزمن بعد انفتاح المظلة.
2. سقط جسم من السكون كتلته 2 كجم من ارتفاع 25 م، أوجد سرعة الجسم عند أي لحظة t علماً بأن القوة الناتجة عن مقاومة الهواء $\left(-\frac{1}{2}v\right)$، اعتبر أن (g $=10\ ms^{-2}$).
3. قذف جسم رأسياً للأسفل كتلته 2 كجم من ارتفاع 200م، أوجد سرعة الجسم عند أي لحظة t، علماً بأن القوة الناتجة عن مقاومة الهواء (50v-) نيوتن؟ علماً بأن سرعته الابتدائية = 3م/ ث.
4. سقط جسم من السكون كتلته m باوند في وسط يقاوم حركة الجسم، بحيث تتناسب قوة المقاومة مع مربع سرعة الجسم قدم/ث إذا علمت أن السرعة النهائية للجسم كانت 150 قدم / ث.

أوجد:

1. سرعة الجسم بعد مرور ثانيتين؟
2. الزمن اللازم بحيث تكون السرعة 100 قدم/ ث.

4. تطبيقات على مسائل النمو والاضمحلال

عزيزي الدارس،،

في البنود السابقة من تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عرفنا بعض المسائل الهندسية (المسارات المتعامدة)، ومسائل على قانون نيوتن الثاني (التبريد والتسخين) ومسائل الميكانيك (الأجسام الساقطة والمقذوفات)، وفي هذا البند سوف نستعرض المسائل الخاصة بنمو واضمحلال مجتمعات إحصائية (البكتيريا مثلا) وتحلل المواد المشعة.

1.4 المسائل الخاصة بنمو البكتيريا

من المعلوم أنه إذا وضعت بكتيريا في محلول ما، فإنها تنمو وتتكاثر بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة في الحيز (المحلول)، أي أن البكتيريا تزداد بمعدل يتناسب مع عددها، ولنفرض أن $N(t)$ دالة في الزمن تمثل عدد البكتيريا عند أي لحظة t، وبالتالي يتناسب معدل ازدياد البكتيريا $\frac{dN}{dt}$ مع عددها N، فإن المعادلة التفاضلية التي تحكم هذا النمو تعطى بالعلاقة:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

حيث k: يمثل ثابت التناسب، وتحل هذه المعادلة بفصل المتغيرات أي أن:

$$\frac{1}{N}\, dN = kdt$$

$$c = e^{c_1}$$

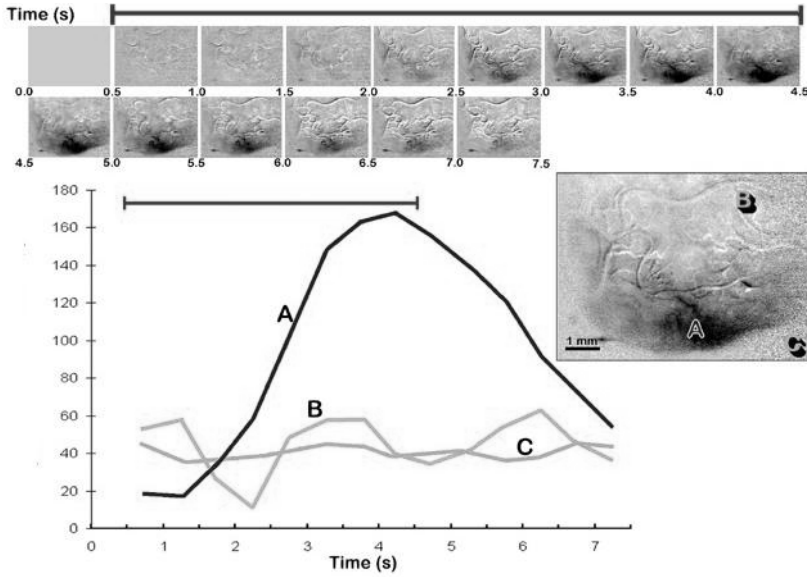
$$\ln |N| = kt + c_1$$

$$N = e^{kt+c_1} = e^{c_1}\, e^{kt} = c\, e^{kt}$$

$$N = c\, e^{kt}$$

هذه المعادلة تعطي عدد البكتيريا الموجودة في أي لحظة t، والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام هذه المعادلة.

الشكل (4)



◄◄ مثال (2)

افرض أن عدد البكتيريا كان 250 ثم وضعت في حيز قابل للنمو فأصبح العدد بعد (7) ساعات (800).

1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل معدّل نمو البكتيريا في الحيز.

2- أوجد حل المعادلة التفاضلية في (1).

3- أوجد العدد التقريبي للبكتيريا الذي سيكون بعد مرور 24 ساعة.

4- أوجد الزمن اللازم كي يزداد عدد البكتيريا إلى 2500.

الحل:

1- المعادلة التفاضلية هي $\frac{dN}{dt} = kN$

2- حل المعادلة التفاضلية هو:

$$N = c\, e^{kt}$$

يلزم إيجاد الثابتين، k, c .

من معطيات السؤال في البداية ($t = 0$) كان عدد البكتيريا ($N = 250$)، بتطبيق هذا الشرط على المعادلة نجد c:

$$ce^0 = 250 \Rightarrow c = 250$$
$$N = 250\, e^{kt}$$

في النهاية عند ($t = 7$) أصبح العدد $N = 800$، بتطبيق هذا الشرط على المعادلة نجد k.

$$800 = 250\, e^{7k}$$
$$e^{7k} = \frac{800}{250}$$
$$k = \frac{1}{7} \ln \frac{800}{250} = 0.166$$

∴ المعادلة التي تعطي عدد البكتيريا في أي لحظة t، هي :

$$N = 250\, e^{0.166t}$$

3- عندما ($t = 24$) نجد عدد البكتيريا N بالتعويض في المعادلة:

$$N = 250\, e^{0.166(24)} = 13433$$

4- عندما ($N = 2500$) نجد الزمن اللازم t بالتعويض في المعادلة:

$$2500 = 250\, e^{0.166t}$$
$$e^{0.166t} = \frac{2500}{250} = 10$$
$$0.166 \cdot t = \ln\left(\frac{2500}{250}\right) = \ln(10)$$
$$t = \frac{\ln 10}{0.166} \approx 14 \text{ ساعة}$$

◄◄ مثال (3)

إذا كان عدد البكتيريا في مزرعة ما يزداد بمعدل يتناسب مع كمية البكتيريا الموجودة، أوجد المعادلة التي تمثل عدد البكتيريا في أي لحظة t علماً بأن العدد الأصلي كان 300 وارتفع العدد بنسبة 20% بعد مرور ساعتين؟

الحل:

كما في المثال السابق، المعادلة التفاضلية التي تمثل معدل الزيادة هي $\frac{dN}{dt} = kN$ وحلها أيضاً هو:

$$N = c\, e^{kt}$$

لإيجاد الثابتين c, k تستخدم المعطيات في السؤال عندما $(t = 0)$ كانت $(N = 300)$ بالتعويض في المعادلة نجد أن:

$$300 = ce^{0} \Rightarrow c = 300$$

تصبح المعادلة:

$$N = 300\, e^{kt}$$

أيضاً عندما $(t = 2)$ ازداد العدد بنسبة 20% والذي يساوي 60، وبذلك يصبح عدد البكتيريا $300 + 60 = 360$، بالتعويض في المعادلة نجد أن:

$$360 = 300\, e^{2k}$$

$$e^{2k} = \frac{360}{300} = \frac{36}{30}$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{36}{30} = 0.09116$$

إذن المعادلة التي تعطي عدد البكتيريا في أي لحظة t هي:

$$N = 300\, e^{0.09116\, t}$$

◄◄ مثال (3)

يتناسب معدل تكاثر خلايا الخميرة مع العدد الموجود، فعلى فرض أن العدد الأصلي يتضاعف في ساعتين، أوجد الزمن اللازم كي يصبح العدد المتوفر ثلاثة أضعاف العدد الأصلي؟

الحل:

نفرض أن عدد خلايا الخميرة في أي لحظة t هو $N(t)$ وفقاً لمثال (1) فإن المعادلة التي تمثل عدد البكتيريا في أي لحظة t هي:

$N = N_o e^{kt}$

حيث N_o هو العدد الأصلي، k ثابت التناسب.

لكن من السؤال عندما $(t = 2)$ فإن $N = 2N_o$ (العدد = ضعف العدد الأصلي).

$N = N_o e^{kt}$

$2N = N_o e^{kt}$

$e^{2k} = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.3466$

إذن المعادلة التي تمثل عدد الخلايا في أي لحظة t هي:

$N = N_o e^{0.3466t}$

ولحساب t عندما $N = 3N_o$، نعوض في المعادلة السابقة فنحصل على:

$3N_o = N_o e^{0.3466t}$

$3 = e^{0.3466t}$

$t = \frac{\ln(3)}{0.3466} = 3.17$ ساعة

2.4 المسائل الخاصة بالاضمحلال (التحلل)

من المعلوم أن المواد المشعّة تتحلل بمعدل يتناسب مع الكمية المتوفرة منها، وهذا يعني أن المادة المشعّة تتناقص بمعدل يتناسب مع كمية الإشعاع المتوافر فيها، ولنفرض أن N(t) دالة في الزمن تمثل كمية المادة المشعة المتبقية عند أي لحظة t، يتناسب معدل تناقص المواد المشعة $\frac{dN}{dt}$ مع الكمية N، والمعادلة التفاضلية التي تمثل هذا المعدل هي:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

حيث k ثابت التناسب، وتحل هذه المعادلة بفصل المتغيرات، أي أن:

$$\frac{1}{N}\, dN = -\, kdt$$

وبحل المعادلة التفاضلية كما مر سابقاً، نحصل على:

$$N = c\, \bar{e}^{kt}$$

هذه الكمية تمثل الكمية المشعة المتبقية عند أي لحظة t والأمثلة التالية توضح ذلك.

◄◄ مثال (1)

تتحلل إحدى المواد المشعة بمعدل يتناسب مع الكمية المتوفرة منها، وعلى فرض أن كمية المادة الأصلية كانت 100mg وأن 5% من كتلتها الأصلية تتحلل في سنتين، أوجد

1- المعادلة التي تمثل كمية المادة المتبقية عند أي لحظة t ؟

2- أوجد الزمن اللازم لتحلل 10% من المادة الأصلية.

الحل:

نفرض أن N(t) كمية المادة في أي لحظة t، فإن المعادلة التفاضلية التي تمثل هذه الكمية هي:

$$\frac{dN}{dt} = -\, kN$$

وحلها كما مر سابقاً

$$N = c\, e^{-kt}$$

لإيجاد الثابتين c, k تستخدم معطيات السؤال عندما (N = 100) فإن (t = 0) بالتعويض في المعادلة، نحصل على:

$$100 = c\, e^{-k(0)} \Rightarrow c = 100$$

أيضاً عند (t=2) تتحلل نسبة 5% من المادة الأصلية أي 5mg إذن كمية المادة المتبقية عند (t=2) تساوي N= 100-5= 95 بالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$95 = 100\, e^{-2k}$$

أي أن

$$-k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{95}{100}\right) = -0.0256$$

إذن المعادلة التي تمثل المادة المتبقية عند أي لحظة t هي $N= 100\ e^{-0.0256t}$

2) بما أن المعادلة $N= 100e^{-0.0256t}$ تمثل كمية المادة المتبقية، يلزم أن تحسب الزمن اللازم t لانخفاض N إلى 90% من المادة الأصلية 100mg والذي يساوي (90mg) بالتعويض في المعادلة (N= 90, t= ???).

$$90 = 100\ e^{0.0256t}$$

$$e^{-0.0256t} = \frac{9}{10} = 0.90$$

$$-0.0256t = \ln(0.9)$$

$$t \approx 4.12$$

◄◄ مثال (2)

تتحلل إحدى المواد المشعة بمعدل يتناسب مع ما يتوفر منها، وعلى فرض أن كمية المادة الأصلية تساوي 50 mg حيث أن 10% من هذه المادة قد تحللت خلال ساعتين، أوجد:

1) معادلة المادة المتبقية عند أي لحظة t ؟

2) كمية المادة بعد مرور أربع ساعات؟

3) الزمن اللازم لتحلل المادة إلى النصف؟

الحل:

1) نفرض أن N(t) كمية المادة المتبقية في أي لحظة t، فإن المعادلة التفاضلية التي تعطي هذه الكمية: $\frac{dN}{dt} = -kN$

وحلها $N = C\, e^{-kt}$، عندما $N = 50$ ، $t = 0$

بالتعويض في المعادلة نحصل على: $50 = c\, e^{0} \Rightarrow c = 50$

$$N = 50\, e^{-kt}$$

لكن المادة تتحلل بعد مرور ساعتين ($t = 2$) بنسبة 10% من المادة الأصلية (50) تساوي 5 mg. إذن كمية المادة المتبقية عند هذه اللحظة تساوي: $N = 50 - 5 = 45$

وبالتعويض في المعادلة:

$$N = 50\ e^{-kt}$$

$$45 = 50\, e^{-2k}$$

$$e^{-2k} = \frac{45}{50}$$

$$-k = \frac{1}{2} \ln \frac{45}{50} = -0.053$$

$$k = 0.053$$

إذن معادلة المادة المتبقية عند أي لحظة t هي:

$$N = 50\ e^{-0.053t}$$

2) المطلوب حساب N عندما ($t=4$) وبالتعويض في المعادلة:

$$N = 50\ e^{-0.053t}$$

$$N = 50\ e^{-0.053(4)} = 40.5 \text{ mg}$$

3) المطلوب إيجاد الزمن t عندما تكون $N = \frac{50}{2} = 25$ بالتعويض في المعادلة:

$$N = 50\ e^{-0.053t}$$

نحصل على: $25 = 50\ e^{-0.053t}$

$$-0.053t = \ln\left(\frac{25}{50}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$t = 13$ ساعة

◄◄ مثال (3)

يبقى من مادة مشعة بعد يومين ما يساوي 10 غم، وبعد خمسة أيام يبقى من نفس المادة 5 غم، أوجد الكمية الأصلية للمادة الكيميائية.

الحل:

نفرض أن N هي كمية المادة المشعة عند أي لحظة t إذن: $\frac{dN}{dt} = -kN$

حيث k ثابت التناسب، وحل المعادلة التفاضلية هو: $N = c\ e^{-kt}$

لكن $N = 10$ عند $t = 2$. بالتعويض في المعادلة:

$$10 = c\ e^{-2k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

أيضاً عندما $(N = 5)$ ، $t = 5$ بالتعويض في المعادلة:

$$5 = c\ e^{-5k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$2 = e^{3k}$$

$$k = \frac{\ln 2}{3} = 0.231$$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين (2) نجد أن:

$$5 = c\ e^{-5(0.231)}$$

$$c = 15.87$$

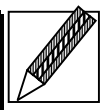
إذن معادلة المادة المتبقية في أي لحظة t هي: $N = 15.87\ e^{-0.231t}$

لإيجاد كمية المادة الأصلية (نجد N عند t= 0)

$$N = 15.87\, e^{-0.231(0)}$$

$$= 15.87 \text{ (غرام)}$$

التدريب (4)



(1) من المعلوم أن البكتيريا تنمو بمعدل يتناسب مع كمية البكتيريا الموجودة، لوحظ وجود 1000 من البكتيريا بعد مرور ساعة واحدة، ثم ارتفع العدد إلى 3000 بعد أربع ساعات أوجد:

أ) المعادلة التي تبين عدد البكتيريا الموجودة في أي لحظة t ؟

ب) عدد البكتيريا الأصلي الذي كان موجوداً؟

(2) يتضاعف عدد السكان في بلد ما كل (50) سنة أوجد بعد كم سنة يزداد هذا العدد إلى ثلاثة أضعافه وذلك على فرض أن معدل الازدياد يتناسب مع عدد السكان.

(3) تتحلل مادة مشعة بمعدل 10%، كم من هذه المادة يتحلل بعد ساعة؟ أوجد **عمر النصف** للمادة المشعة[عمر النصف هو الزمن الذي تستغرقة المادة لتفقد نصف كتلتها].

(4) يتحلل عنصر الراديوم بمعدل يتناسب مع ما يتوفر منه، وعلى فرض أن نصف الكمية الأصلية تختفي في 1600 سنة، أوجد النسبة المفقودة في 100 سنة.

(5) تنمو خميرة فعالة في مكان مناسب لها بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة، وعلى فرض أن الكمية تتضاعف كل ساعة، أوجد الكمية التي يمكن الحصول عليها بعد مضي $\frac{11}{4}$ ساعة بدلالة الكمية الأصلية.

أسئلة التقويم الذاتي (4)

1. تتحلل مادة مشعة بمعدل يتناسب مع ما يتوفر منها وعلى فرض أن الكمية الأصلية للمادة كانت $\frac{1}{2}$ غم وأن نسبة 0.1 % من تلك الكتلة قد تحللت بعد مرور ساعة، أوجد المعادلة التي تحدد كمية المادة في أي لحظة.
2. تتحلل مادة مشعة بمعدل يتناسب مع ما يتوفر منها، وعلى فرض أن كمية المادة الأصلية كانت 500 mg وان نسبة 20% من هذه المادة قد تحلل خلال ثلاث سنوات، أوجد المعادلة التي تحدد كمية المادة في أي لحظة.
3. تتحلل إحدى المواد المشعة بمعدل يتناسب مع ما يتوفر منها، وعلى فرض أن 50 mg هي كمية المادة الأصلية وأن 10% من هذه المادة تتحلل خلال ساعتين أوجد المعادلة التي تحدد كمية المادة؟

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

عند بلغونا هذه النقطة من الوحدة نأمل أن تكون قد حققت الأهداف الواردة في بدايتها. إذا كان هناك أمر غير واضح فيما سبق.. لا تقلق، ما عليك سوى إعادة دراسته مرة أخرى، وحل الأمثلة والأسئلة والتدريبات، والاطلاع على الحلول النموذجية نهاية هذه الوحدة، فإن لم تستطع تجاوز المشكلة فعليك بالاستعانة بمشرفك الأكاديمي؛ سواء بالاتصال الفوري معه، أو الانتظار إلى أقرب لقاء يجمعك معه عبر اللقاءات الأكاديمية المتواصلة.

على أية حال علينا في نهاية هذه الوحدة أن نستعرض بإيجاز أهم ما ورد فيها من مفاهيم، وذلك من خلال الفقرات التالية، الموجزة كل الإيجاز:

- المسار/ عبارة عن مجموعة (عائلة) من المنحنيات تحددها مجموعة (عائلة) من المعادلات $F(x,y,c)=0$.
- قانون نيوتن للتبريد: المعدل الزمني لتغير درجة حرارة جسم معين تتناسب مع الفرق بين درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الوسط المحيط بهذا الجسم.
- قانون نيوتن الثاني للحركة: إن القوة المؤثرة في الجسم تساوي معدل تغير حركة الجسم أي أن: $F = m\frac{dv}{dt}$.
- نمو البكتيريا: تنمو البكتيريا وتتكاثر بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة منها في الحيز (المحلول) $\left(\frac{dN}{dt}=kN\right)$.

هذه أبرز النقاط التي تناولناها في الوحدة، نرجو أن تكون واضحة وسهلة، وأن تكون قد تمكنت من تحقيق الأهداف الواردة في بداية الوحدة، مع أمنياتنا لك بالتوفيق.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،،

نتناول في الوحدة الثالثة المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، المتجانسة منها وغير المتجانسة، وبالتالي ننتقل بك إلى مرحلة متقدمة من استعراض المعادلات التفاضلية.

نبدأ الوحدة بتعريف المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، ونستعرض أنواعها المختلفة بعد ذلك، وكما عودناك في الوحدتين الأولى والثانية سنورد لك عدداً كبيراً من الأمثلة لتوضيح الأفكار الواردة في الوحدة.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك، ونتمنى لك التوفيق.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1) باشتقاق المعادلة ضمنياً بالنسبة لـ x نحصل على: $\frac{dy}{dx}=ce^{x}$

لكن من المعادلة الأصلية $c=\frac{y}{e^{x}}$ بالتعويض في $\frac{dy}{dx}$

نحصل على: $\frac{dy}{dx}=y=f(x,y)$

المعادلة التفاضلية التي تمثل عائلة المسارات المتعامدة هي:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f(x,y)}=-\frac{1}{y}$$

بترتيب المعادلة نحصل على: $ydy+1dx=0$

هذه معادلة قابلة للفصل، وبتكامل الطرفين نحصل على:

$$\int y dy + \int 1 dx = 0$$

$$\frac{1}{2} y^2 + x = c$$

2) باشتقاق المعادلة ضمنياً بالنسبة لـ x نحصل على:

$$2y \frac{dy}{dx} = 4c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{y}$$

لكن من المعادلة الأصلية نجد أن:

$$c = \frac{y^2}{4x}$$

وبالتعويض في المعادلة المشتقة نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{4x\,y} = \frac{y}{2x} = f(x,y)$$

المعادلة التفاضلية التي تمثل عائلة المسارات المتعامدة هي: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} = -\frac{2x}{y}$

بترتيب المعادلة نحصل على: $y dy + 2x dx = 0$

بتكامل الطرفين نحصل على:

$$\int y dy + \int 2x\, dx = 0$$

$$\frac{1}{2} y^2 + x^2 = c$$

3) باشتقاق المعادلة ضمنياً بالنسبة لـ x نحصل على $\frac{dy}{dx} = \frac{-c}{x^2}$

لكن من المعادلة الأصلية $c = xy$ بالتعويض في $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = f(x,y)$$

المعادلة التفاضلية التي تمثل عائلة المسارات المتعامدة هي:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} = \frac{x}{y}$$

بترتيب المعادلة نحصل على: $x\,dx - y\,dy = 0$

هذه المعادلة قابلة للفصل، وبتكامل الطرفين نحصل على:

$$\int x\,dx - \int y\,dy = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = c$$

تدريب (2)

(1) ا) درجة حرارة الوسط المحيط هي درجة حرارة الفرن والتي تبقى ثابتة وهي $T_m = 150^oF$ إذن المعادلة التفاضلية هي

$$\frac{dT}{dt} + kT = 150k$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 150)$$

ب) بفصل المتغيرات نحصل على

$$\int \frac{1}{T-150}\,dT = \int -k\,dt$$

$$\ln(T-150) = -kt + c$$

$$T - 150 = c\,e^{-kt}, (c = c_1)$$

$$T = 150 + ce^{-kt}$$

عند $t = 0$ فإن $T = 50$ لإيجاد c نحصل على:

$$50=150+c \Rightarrow c=-100$$

$$T=150-100\,e^{-kt}$$

ولإيجاد k من معطيات المسألة عند t= 10 ، T = 75

$$75=150-100\,e^{-k(10)}$$

$$e^{-10k}=-\frac{3}{4}\Rightarrow k=0.02877$$

$$T=150-100\,e^{-0.02877t}$$

جـ) المطلوب إيجاد t=??? عندما T = 100 بالتعويض في المعادلة:

$$T=150-100\,e^{-0.02877t}$$

$$100=150-100e^{-0.02677t}$$

$$e^{-0.02877t}=0.5\Rightarrow t=24.1\ \text{min}$$

(2) درجة حرارة الوسط المحيط هي درجة حرارة العراء $T_m=20°F$ إذن المعادلة التفاضلية هي:

$$\frac{dT}{dt}+kT=20k$$

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$$

$$\frac{1}{T-20}dT=-k\,dt$$

$$\ln(T-20)=-kt+c$$

$$T=20+ce^{-kt}$$

عند t = 0 فإن T = 72 بالتعويض نحصل على

$$72=20+c\Rightarrow c=52$$

$$\therefore T=20+52\,e^{-kt}$$

لإيجاد k نستخدم المعطيات في السؤال T= 55 عند t = 5 بالتعويض نحصل على:

$$55 = 20 + 52\, e^{-5k}$$

ومنها نجد أن

$$k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{35}{52}\right)$$

$$T = 20 + 52\, e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{35}{52}\right)t}$$

والمطلوب إيجاد t = ??? عندما T = 32

بالتعويض نجد أن: $32 = 20 + 52\, e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{35}{52}\right)t}$

ومنها نجد أن: $t = 5\ln\left(\frac{12}{52}\right) / \ln\left(\frac{35}{52}\right)$

$$t \approx 18.5$$

تدريب (3)

1) حسب قانون نيوتن الثاني:

$$m\frac{dv}{dt} = w - kv$$

من معطيات السؤال، w = mg، ومنها w = (5) (10) = 50، k = 50، بالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{w}{m} - \frac{kv}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{50v}{5}$$

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 10v = 10\,(1 - v)$$

$$\frac{1}{1-v}\,dv = 10dt$$

$$\ln (v-1) = -10 + c$$

$$v - 1 = c\, e^{-10t} \Rightarrow v = c\, e^{-10t} + 1$$

لإيجاد c نعوض $v = 0$، $t = 0$ لنحصل على:

$$0 = c + 1 \Rightarrow c = -1$$

$$v = 1 - e^{-10t}$$

والمطلوب إيجاد الزمن اللازم بحيث يكون ارتفاع الجسم عن الأرض = صفر لا بد من إيجاد معادلة المسافة x، ولكن $v = \frac{dx}{dt}$.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - e^{-10t}$$

$$\int dx = \int \left(1 - e^{-10t}\right) dt$$

$$x = t + \frac{e^{-10t}}{10} + c$$

لكن عند $t = 0$ ، $x = 0$ نحصل على:

$$0 = 0 + \frac{1}{10} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{10}$$

$$x = t + \frac{e^{-10t}}{10} - \frac{1}{10}$$

$$x = t + \frac{1}{10}\left(e^{-10t} - 1\right)$$

بالتعويض $x = 1000$ نجد ثانية $t = 1019$

2) حسب قانون نيوتن الثاني: $m\frac{dv}{dt} = -w - kv$

لكن: $m = 5$ ، $k = -10v$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{w}{m} - \frac{kv}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{10v^2}{5} = -10 + \frac{10v^2}{5} = -10 + 2v^2$$

بفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{1}{2\left(v^2-5\right)}dv=dt$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{v^2-5}dv=\int dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}\ \ln\left|v-\sqrt{5}\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ \ln\left|v+\sqrt{5}\right|\right]=t+c$$

3) أ) حسب قانون نيوتن الثاني:

$$m\ \frac{dv}{dt}=-w$$

$$\frac{dv}{dt}=-g=-10$$

$$\int dv=\int -10dt$$

$$v=-10t+c$$

لكن عندما $v = 30\ ms^{-1}$ ، فإن $t = 0$

$$30=0+c\Rightarrow c=30$$

$$v = -10\ t + 30$$

ب) لإيجاد موقع الجسم x ، $\frac{dx}{dt}=v$

$$\frac{dx}{dt}=-10t+30$$

$$dx=\left(-10t+30\right)dt$$

$$x=-5t^2+30t+c_1$$

لإيجاد c_1 نعوض $t = 0$ ، $x = 0$ لنحصل على $c_1 = 0$

$$x(t)=-5t^2+96t$$

تدريب (4)

(1) أ) المعادلة التفاضلية التي تحكم هذه الحركة $\frac{dN}{dt}=kN$ حيث أن N(t) هو عدد البكتيريا الموجودة و k ثابت التناسب، بفصل المتغيرات نجد حل هذه المعادلة:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k\ dt$$

$$\ln N = kt + C_1$$

$$N = c e^{kt}, (c = e^{c_1})$$

لإيجاد k، c عندما t = 1 ، N = 1000 و t = 4 ، N = 3000. بالتعويض في N نحصل على:

$$1000 = ce^{k}$$

$$3000 = ce^{4k}$$

بحل المعادلتين $k=\frac{1}{3}\ln 3=0.366$ ، $c=1000e^{-0.366}=694$

إذن المعادلة التي تبين عدد البكتيريا في أي لحظة t هي : $N = 694\ e^{0.366t}$

ب) لإيجاد عدد البكتيريا الأصلي نعوض (t = 0) وبالتالي: N = 694.

(2) ليكن x عدد السكان في وقت ما (بالسنوات)، فإن المعادلة التفاضلية التي تنظم هذا النمو $\frac{dx}{dt}=kx$ بفصل المتغيرات نجد الحل:

$$\frac{1}{x} dx = k\, dt$$

$$\ln x = kt + c_1$$

$$x = c\ e^{kt}, (c = e^{c_1})$$

لكن عند t = 50 فإن x = 2c وذلك لأن x = c عند t = 0

وبالتالي: $x = c e^{kt} \Rightarrow 2c = c e^{50k}$

$$e^{50k} = 2$$

أيضاً لدى بلوغ العدد x القيمة x= 3 c نحصل على $3 = e^{kt}$ إذن $\left(e^{50k}\right)^t = 2^t$

$e^{50kt} = 2^t \Rightarrow 3^{50} = 2^t \Rightarrow t = 79$ سنة

(3) نفرض أن N(t) كمية المادة الموجودة في أي لحظة t إذن المعادلة التفاضلية التي تحكم هذه المادة $\frac{dN}{dt} = -kt$ بحل المعادلة نجد أن الحل هو $N = ce^{-kt}$

لنفرض أن المادة الأصلية عند (t=0) هي N_0 وبالتالي فإن:

$$N_0 = e^{-kt} = e^{-k(0)} = c$$

$$N = N_0\ e^{-kt}$$

تتحلل 10% من المادة الأصلية N_0 عند (t = 1) ويبقى منها 90% وهذا يعني أن N = 0.9 N_0 ولإيجاد k بالشكل:

$$0.9N_0 = N_0\ e^{-k}$$

$$e^{-k} = 0.9 \Rightarrow k = 0.105$$

$$N = N_0\ e^{-0.105t}$$

إن عمر النصف هو الزمن المرتبط بالكمية $\left(N = \frac{1}{2}N_0\right)$ وبالتعويض في N

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0\ e^{-0.105t}$$

$$t = 6.601 \text{ ساعة}$$

(4) نفرض أن N(t) كمية الراديوم الموجودة عند أي لحظة t، المعادلة التفاضلية التي تحكم كمية المادة الموجودة

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

وحلها $N = C\ e^{-kt}$

$$N = N_0\ e^{-kt}$$

حيث N_0: كمية المادة الأصلية.

لكن عمر النصف للراديوم يساوي 1600، فيكون لدينا $N=\frac{1}{2}N_0$ عند $t = 1600$

بالتعويض في N :

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0\, e^{-1600k}$$

$$k = \frac{\ln(1/2)}{-1600} = 0.0004332$$

$$N = N_0\, e^{-0.0004332t}$$

وهكذا تكون المادة المتبقية بعد (100) سنة:

$$N = N_0\, e^{-0.0004332(100)} = 0.958\, N_0$$

إذن نسبة النقص في المادة الأصلية: $100\times\frac{N_0 - 0.958N_0}{N_0} = 4.2\%$

(5) نفرض أن N(t) كمية الخميرة الموجودة عند أي لحظة t إذن $\frac{dN}{dt} = kN$

وحلها: $N = c\, e^{kt}$

ولو فرضنا أن المادة الأصلية $N = N_0$ عند $(t = 0)$ فإن:

$$N = N_0\, e^{kt}$$

عند $(t = 2)$ فإن $N = 2N_0$ بالتعويض في N :

$$2N_0 = N_0\, e^{k} \Rightarrow k = \ln(2) = 0.693$$

$$N = N_0\, e^{0.693t}$$

عند $(t = 2.75)$ تكون $N = N_0\, e^{0.693\,(2.75)}$ وهذا يمثل 6.72 من المادة الأصلية.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. $\frac{y^2}{2}+\ln|\sec x+\tan x|+\ln|\sec x|=c$

2. $-e^{-y}-\frac{1}{3x}=c$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1. حل المعادلة التفاضلية $\frac{dT}{dt}+kT=68k$ هو:

$T=68+ce^{-kt}$ حيث $k=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{18}{13}\right)$ ، $c=-\frac{18^3}{13}$ ، $T=68-\frac{18^3}{13}e^{-\frac{1}{5}\ln\left(\frac{18}{13}\right)}$.

لإيجاد درجة الحرارة الأصلية نعوض $t=0$ لنحصل على: $T=68-\frac{18^3}{13}$

2. المعادلة التفاضلية هي $\frac{dT}{dt}+kT=20k$ وحلها هو:

$T=20+c\,e^{-kt}$ ، ونظراً لأن $T=100$، عند $t=0$ يعطى $c=80$ ، $T=40$ عند $t=10$ نجد $k=0.1386$ إذن المعادلة التي تمثل حرارة الجسم هي: $T=20+80e^{-0.1386t}$

3. بنفس الأسلوب السابق نجد أن: $t=\frac{15\ \ln 7}{0.56}=52\min$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1. المعادلة التفاضلية هي $\frac{w}{g}\frac{dv}{dt}=w-\frac{w\,v^2}{256}$ ومنها نجد $\frac{1}{v^2-256}dv=\frac{1}{8}dt$ نجري التكامل بين الحدين $t=0$ ، $v=176$ ، و $t=t$ ، $v=v$ فنحصل على:

$$\frac{1}{32}\ln\left(\frac{v-16}{v+16}\right)\Big|_{v=176}^{v=v}=-\frac{t}{8}\Big|_{0}^{t=t}$$

$$\ln\left(\frac{v-16}{v+16}\right)-\ln\left(\frac{5}{6}\right)=-4t$$

ومنها نجد أن سرعة المظلي كدالة للزمن بعيد انفتاح المظلة هي:

$$v=16\,\frac{6+5\,e^{-4t}}{6-5e^{-4t}}$$

2. المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+\frac{1}{4}v=10$ وبحل هذه المعادلة نحصل على $v=40+ce^{-t/4}$

عند v= 0 ، t =0 نجد c = - 40، سرعة الجسم عند أي لحظة t هي $v=40-40e^{-t/4}$.

3. المعادلة التفاضلية هي $\frac{dv}{dt}+25v=9.8$ وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$v=0.392+ce^{-25t}$$

عند t=0 ، v=3 ومنها نجد c = 2.608 إذن سرعة الجسم عند أي لحظة

$$v=0.392+2.608e^{-25t}$$

4. المعادلة التفاضلية $m\frac{dv}{dt}=mg-k_1v^2$ حيث $k_1 = 2m\,k^2$

وبالتالي نحصل على معادلة الحركة: $\frac{dv}{k^2v^2-16}=-2\,dt$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$\ln\left(\frac{kv-4}{kv+4}\right)=-16kt+c$$

عند t = 0 ، v = 0 نجد أن c = -1

عندما $t\to\infty$ $v=150$ إذن $k=\frac{2}{7}$ وبذلك يصبح الحل:

$$\frac{v-150}{v+150}=-e^{-0.43t}$$

1) لإيجاد v عندما $t = 2$ ومنها نجد قدم/ث $v = 16$.

2) لإيجاد t عندما $v = 100$ ومنها نجد ثانية $t = 3.7$.

أسئلة التقويم الذاتي (4)

1. نفرض أن N(t) كمية المادة، $\frac{dN}{dt} = -kt$ وبالتالي فإن $N = ce^{-kt}$ ، لأن $N = \frac{1}{2}$ عند t =0 نجد $c = \frac{1}{2}$ أيضاً نسبة 0.1% من المادة الأصلية قد تحلل عند (t=1) بينما تبقى 99.9% عند (t= 1) أي أن غم N= 0.4995. ولإيجاد k نعوض N= 0.4995 عند (t=1).

$$0.4995 = \frac{1}{2} e^{-k(1)} \Rightarrow k = 0.001$$

$$N = \frac{1}{2} e^{-0.001t}$$

2. المعادلة $N = c\ e\text{-}kt$

لإيجاد c، نعوض N= 500 ، t =0 في المعادلة N نجد أن $c = 500$

$$N = 500e^{-kt}$$

أيضاً 20% من المادة الأصلية يتحلل خلال $(t = 3)$.

وتبقى 80% عند هذه اللحظة $(N = 0.8(500) = 400)$ إذن $(N = 400)$ عند $(t = 3)$ نجد منها k بالتعويض في N .

$$400 = 500e^{-3k} \Rightarrow k = 0.07438$$

$$N = 500e^{-0.07438t}$$

3. $N = ce^{-kt}$ عند $N = 50$ ، $t = 0$ وبالتالي نجد أن: $50 = c\ e^{k(0)} = c$

$$N = 50e^{-kt}$$

أيضاً عند $(t = 2)$، $N = 50 - 5 = 45$ بالتعويض في N نجد k

$$45 = 50e^{-2k} \Rightarrow k = 0.053$$

$$N = 50\ e^{-0.053t}$$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس، نظرا لطبيعة هذا المقرر، ولعدم الرغبة في إظهار معادلات رياضية في مسرد المصطلحات، لذا نقتصر هنا على ذكر المصطلح العربي وما يقابله من المصطلح الانجليزي، وذلك لمساعدة الدارس في الرجوع إلى المراجع الأجنبية، أو مواقع الإنترنت.

Orthogonal Trajectories	**المسارات المتعامدة**
Second Newton's law of Cooling	**قانون نيوتن للتبريد**
Decay	**اضمحلال**
Half - life	**عمر النصف**
Mechanics	**ميكانيك**
Coefficient of Resistance	**عامل المقاومة**
Velocity	**سرعة**
Gravitational field	**مجال الجاذبية**
Physical system	**النظام الفيزيائي**
Arbibrary Constant	**ثابت اعتباطي**
Force	**قوة**
Growth	**نمو**
Radioactive Decay	**إضـــمحلال إشـــعاعي (اضـــمحلال المـــادة المشعة)**
Application	**تطبيق**
Slope	**ميل**

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية

1. رشدي خليل، **مقدمة في المعادلات التفاضلية**. عمان: دار المناهج، 2003.
2. فرانك أيرز، **نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية**. القاهرة: الدار الدولية، 1991.
3. قيصر فيازمينسكي، **المعادلات التفاضلية**. دمشق: المركز العربي للتعريب، 1995.
4. ريتشارد برولسون، **2500 مسألة محلولة في المعادلات التفاضلية**. سلسلة المسائل المحلولة شوم، ترجمة فايز فوق العادة. بيروت: أكاديميا إنترناشيونال، 1997.

المراجع الأجنبية

1. William E. Boyce and Richard C. Diprima, **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1977.
2. Garret Birkhoff and Gian-carlo Rota, **Ordinary Differential Equations**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1978.
3. Ray while, **Differential Equations**. New York: Mc Graw-Hill Inc, 1979.
4. Shepley L.Ross, Introduction To ordinary Differential Equations. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1980.

الوحدة الثالثة

المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الثانية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**162**
تمهيد	162
أهداف الوحدة	163
1. تعريف المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية	**164**
2. المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة	**165**
1.2 الحالة الأولى: إذا كان $p^2 - 4q > 0$	166
2.2 الحالة الثانية: إذا كان $p^2 - 4q = 0$	170
3.2 الحالة الثالثة: إذا كان $p^2 - 4q < 0$	173
4.2 ملخص الحالات الثلاث	176
3. المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة،بإستخدام طريقة المعاملات غير المعينة.	**179**
الخلاصة	**188**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**189**
إجابات التدريبات	**189**
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	**199**
مسرد المصطلحات	**203**
المراجع العربية والأجنبية	**204**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

في الوحدة الأولى عرفنا كيفية حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى $\frac{dy}{dx}+P(x)y=q(x)$ وفي الوحدة الثانية عرفنا بعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية والكيميائية على تلك المعادلات، أما في هذه الوحدة فسوف نحاول تقديم المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بصورة مختصرة وسهلة وميسرة، وذلك لأن هذا النوع من المعادلات يمثل عقبة في طريق العديد من الدارسين، وخصوصا في عملية حل هذه المعادلات، ولعل ذلك ناشيء عن أسلوب عرض تلك المعادلات وتقديمها للدارس، ونحن من جانبينا لا نجد في هذه المعادلات سوى تطوير للمفاهيم الواردة في الوحدتين الأولى والثانية، فبدلا من معادلات الرتبة الأولى سنتطرق إلى معادلات الرتبة الثانية؛ المتجانسة وغير المتجانسة، وستجد أن التعامل معها وحلها سهل وميسر، بعكس ما يشكو منه الدارسون أحيانا.

سنتناول في البداية المعادلات المتجانسة من الرتبة الثانية، وكذلك غير المتجانسة، وسنزودك بأمثلة وافية على كل فكرة من الأفكار الواردة، وسيتبع كل قسم رئيس في الوحدة مجموعتان من التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي كما عودناك في الوحدتين السابقتين، وذلك بهدف تطبيق ما تعلمته بشكل فوري ومباشر. ما عليك سوى حل تلك الأسئلة والتدريبات، والتأكد من الإجابات المثبته في نهاية الوحدة.

تكمن أهمية هذه الوحدة في أنها مقدمة لفهم التطبيقات الواردة في الوحدة الرابعة (الأخيرة)، لذا من الضروري أن لا تتجاوزها إلا وقد استوعبت جميع ما ورد فيها من مفاهيم.

نأمل أن تكون وحدة مفيدة لك، وأن تجدها ممتعة، وأن تساهم معنا في تطويرها عبر التواصل مع مركزك الدراسي ومشرفك الأكاديمي باستمرار، ونتمنى لك التوفيق دائما.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

يتوقع منك بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1) **تعرّف** المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية.

2) **تميز** بين المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الثانية.

3) **تشرح** من نعنيه بالمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة.

4) **تحل** المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة.

5) **تميز** بين المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة وذات المعاملات غير المعينة.

6) **تحل** المعادلة التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة والمعاملات غير المعينة.

1. تعريف المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

عزيزي الدارس،

أعتقد أن السؤال الملحَ عليك منذ قرأت عنوان هذه الوحدة هو: ما الذي نعنيه بالمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية؟ ولا أريد هنا أن أبدأ بمقدمات وشروحات قد تؤدي بك إلى الملل، وإنما سأنتقل مباشرة إلى تعريف تلك المعادلات حتى يطمئن قلبك.

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية: هي المعادلة التفاضلية التي تكتب على الصيغة الرياضية التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x).. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث $P(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ عبارة عن دوال متصلة في مجالها.

وإذا كانت الدالة $r(x)=0$ فإن المعادلة (1) تصبح:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وتسمى **معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية**، وإذا كانت الدالة $r(x)\neq 0$ (كما في المعادلة (1)) فتسمى **معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية.**

والأمثلة التالية تشرح لك الفروقات بين المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية والمعادلات غير المتجانسة.

◄◄ مثال (1)

المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}-xy=e^x$ معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية حيث:

$$P(x)=x^2, \quad q(x)=-x, \quad r(x)=e^x.$$

◄◄ مثال (2)

المعادلة التفاضلية $\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=0$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية حيث $P(x)=-1 \quad , \quad q(x)=2 \ , r(x)=0$

وسوف نناقش في هذه الوحدة نوعين من المعادلات التفاضلية.

1) المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

(Homogenous Differential Equations with Constant Coefficients)

2) المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة: المعاملات غير المعينة.

(Non - homogenous Differential Equations with Constant Coefficient: Undetermined Coefficients)

2. المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

عزيزي الدارس،

في هذا البند سنناقش حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة إذا كانت الدوال $P(x)$، $q(x)$ ثابتة أي أن المعادلة هي: $\frac{d^2y}{d^2x} + P\frac{dy}{dx} + qy = 0$ والهدف إيجاد حلين مستقلين لهذه المعادلة، والنظرية التالية توضح ذلك:

نظرية (1)

إذا كان كلٌ من $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ حلين مستقلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

وتحت شروط معينة نستطيع إيجاد الثابتين c_1, c_2 لنحصل على الحل الخاص لهذه المعادلة.

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا: كيف يمكن إيجاد الحلين y_1, y_2 ؟

وللإجابة على هذا السؤال، أفرض أن $y = e^{mx}$ هو الحل المقترح والممكن للمعادلة التفاضلية وعليه:

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

ثم نعوض في المعادلة التفاضلية لنحصل على:

$$m^2 e^{mx} + Pme^{mx} + qe^{mx} = 0$$

$$e^{mx}\left(m^2 + Pm + q\right) = 0$$

$$\therefore m^2 + Pm + q = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

والمعادلة (3) هي معادلة تربيعية (المعادلة المساعدة) نجد حلها باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

$$m = \frac{P \mp \sqrt{P^2 - 4q}}{2}$$

أو $m_1 = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4q}}{2}$ ، $m_2 = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4q}}{2}$

بالاعتماد على مميّز المعادلة التربيعية (المعادلة المساعدة) $P^2 - 4q$ نستطيع تحديد الحل العام للمعادلة التفاضلية. وهنا سيظهر لنا عدة حالات اعتمادا على المميز، ونفصلها فيما يلي.

1.2 الحالة الأولى: إذا كان $p^2 - 4q > 0$

في هذه الحالة إذا كان $p^2 - 4q > 0$ فإن المعادلة التربيعية لها جذران مختلفان m_1, m_2 وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية لها حلان: $y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}$

ويكون الحل العام هو: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

ويمكن أن نجد c_1, c_2 تحت شروط معينة للحصول على الحل الخاص، والأمثلة التالية توضح كيفية حل المعادلة التفاضلية في هذه الحالة:

◄◄ مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - y' - 6y = 0$

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.

نجد حل المعادلة التربيعية $m^2 - m - 6 = 0$

بالتحليل إلى العوامل:

$$(m+2)(m-3)=0$$

$$m_1 = -2 \ , \quad m_2 = 3$$

فإن المعادلة التفاضلية لها حلان:

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{3x}$$

ويكون الحل العام هو:

$$y = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.

نجد حل المعادلة التربيعية (المساعدة): $m^2 + 6m + 5 = 0$

$$(m+1)\ (m+5) = 0$$

$$m_1 = -1, \quad m_2 = -5$$

فإن المعادلة التفاضلية لها حلان:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-5x}$$

ويكون الحل العام هو: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}$

◀◀ مثال (3)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

تحت الشروط $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 5$.

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة:

نجد حل المعادلة التربيعية (المساعدة)

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$(m+3)(m-1) = 0$$

$$m_1 = -3, \quad m_2 = 1$$

ومباشرة يكون الحل العام هو

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

لإيجاد الحل الخاص، نستخدم الشرطين المعطيين في السؤال:اي $y(0) = 1$

إذن

$$1 = c_1 + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

أيضاً $y'(0) = 5$ حيث باشتقاق معادلة الحل العام نحصل على:

$$y' = -3c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

$$y^1(0) = -3c_1 + c_2 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بحل المعادلتين:

$$-3c_1 + c_2 = 5$$

$$c_1 + c_2 = 1$$

نجد أن $c_1 = -1$ ، $c_2 = 2$ إذن الحل الخاص هو $y = -e^{-3x} + 2e^x$

◄◄ مثال (4)

أوجد المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة التي حلها العام $y = c_1\ e^{5x} + c_2\ e^{-2x}$

الحل:

من الحل العام $y_1 = c_1\ e^{5x}$ ، $y_2 = c_2\, e^{-5x}$

إذن $m_1 = 5$ ، $m_2 = -2$ (جذور المعادلة التربيعية).

لإيجاد المعادلة التربيعية نستخدم القانون التالي:

m^2- (مجموع الجذرين) m + حاصل ضرب الجذرين = 0

$$m^2 - (-2+5)m + (-2)(5) = 0$$

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة $m^2 + Pm + q = 0$ نجد أن:

$P = -3, \quad q = -10$ ، وبالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + q\,y = 0$$

نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} - 10\,y = 0$$

أو

$$y'' - 3y' - 10\,y = 0$$

2.2 الحالة الثانية: إذا كان $P^2 - 4q = 0$

إذا كان $P^2 - 4q = 0$ فإن المعادلة التربيعية لها جذران متساويان $m_1 = m_2 = m$

وبالتالي فهذه المعادلة التفاضلية لها حلان هما:

$y_1 = e^{mx}, \quad y_2 = x\ e^{mx}$

والحل العام هو: $y = c_1\ e^{mx} + c_2\ x\ e^{mx}$

ويمكن أن نجد c_1, c_2 تحت شروط معينة للحصول على الحل الخاص، والأمثلة التالية توضح كيفية حل المعادلة التفاضلية في هذه الحالة.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''+2y'+y = 0$

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.

نجد حل المعادلة التربيعية (المساعدة)

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)(m+1) = 0$$

$$m_1 = m_2 = m = -1$$

إذن المعادلة لها حلان هما: $y_1 = e^{-x}$ ، $y_2 = x\ e^{-x}$

الحل العام للمعادلة هو:

$$y = c_1\ e^{-x} + c_2\ x e^{-x}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 10y' + 25 = 0$$

الحل:

المعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية، متجانسة وذات معاملات ثابتة.

نجد حل المعادلة التربيعية (المساعدة)

$$m^2 + 10m + 25 = 0$$

$$(m+5)(m+5) = 0$$

$$m_1 = m_2 = m = -5$$

إذن المعادلة التفاضلية لها حلان هما: $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = x\, e^{-5x}$

والحل العام هو: $y = c_1\ e^{-5x} + c_2\, x\, e^{-5x}$

◄◄ مثال (3)

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام:

$$y = c_1\ e^{x} + c_2\ x e^{x}$$

الحل:

من السؤال $y_1 = e^x$ ، $y_2 = x\, e^x$ وجذرا المعادلة التربيعية (المساعدة) هما

$m_1 = m_2 = m = 1$ ومنها نجد المعادلة التربيعية

m^2 − (مجموع الجذرين) m + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة $m^2 + Pm + q = 0$

نجد أن, P = -2، q = 1 ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أن:

$$y'' + Py' + qy = 0$$
$$y'' - 2y' + y = 0$$

◄◄ مثال (4)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

إذا علمت أن $y'(0) = 1$ ، $y(0) = 2$

الحل:

المعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.

المعادلة التربيعية (المساعدة) هي:

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$(m-3)(m-3) = 0$$

$$m_1 = m_2 = m = 3$$

إذن الحلان الأساسيان للمعادلة التفاضلية هما:

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = x e^{3x}$$

وبالتالي فإن الحل العام:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

بالاشتقاق من معطيات السؤال نجد c_1, c_2 وبالشكل:

$$y(0) = c_1 + 0 = 2 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 \left(3x e^{3x} + e^{3x}\right)$$

$$y'(0) = 3c_1 + c_2 = 1$$

$$3(2) + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -5$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = 2e^{3x} - 5x e^{3x}$$

3.2 الحالة الثالثة: إذا كان $P^2 - 4q < 0$

إذا كان $P^2 - 4q < 0$ فإن المعادلة التربيعية لها جذران غير حقيقيين (مركبين) في حقل الأعداد المركبة، ونجد الجذرين باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$m = \frac{-P \mp \sqrt{P^2 - 4q}}{2}$$

وعلى فرض أن $m_1 = \alpha - i\beta$ ، $m_2 = \alpha + i\beta$

حيث $i = \sqrt{-1}$ فإن الحلين الأساسيين للمعادلة التفاضلية هما:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad , \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

حسب **صيغة أويلر Euler**

ويكون الحل العام هو:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

وتحت شروط معينة تعطى في السؤال، تستطيع إيجاد الثابتين c_1, c_2 لنحصل على ما يسمى بالحل الخاص للمعادلة التفاضلية. وإليك الأمثلة التالية التي توضح هذه الحالة.

◄◄ مثال (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + 5y = 0$

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.

نجد الجذر للمعادلة التربيعية (المساعدة)

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية نجد الجذور:

$$m = \frac{2 \mp \sqrt{4 - 4(5)}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{16}\ \sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{-2 \mp 4i}{2} = -1 \mp 2i$$

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 2$$

وبناء على ذلك فإن الحلين الأساسيين للمعادلة هما:

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x, \qquad y_2 = e^{-x}\sin 2x$$

وعليه فإن الحل العام هو:

$$y = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2\ e^{-x}\sin 2x$$

◄◄ مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

الحل:

نجد جذري المعادلة التربيعية (المساعدة) $m^2 + 9 = 0$

وجذراها حسب القانون العام للمعادلة هما: $m = 0 \mp 3i$

أي أن $\alpha = 0$ ، $\beta = 3$ فيكون الحلان الأساسيان هما:

$$y_1 = e^{(0)x}\cos 3x = \cos 3x$$

$$y_2 = e^{(0)x}\ \sin 3x = \sin 3x$$

وبناء على ذلك فإن الحل العام هو: $y = c_1\ \sin 3x + c_2 \cos 3x$

◄◄ مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+8y=0$

الحل:

المعادلة التربيعية (المساعدة) هي:

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

باستخدام القانون العام، نجد جذري المعادلة:

$$m = -\frac{-4 \mp \sqrt{(4)^2 - 4(8)}}{2} = \frac{-4 \mp \sqrt{-16}}{2} = -2 \mp 2i$$

$$m_1 = -2-2i, \qquad m_2 = -2+2i$$

إذن الحلان الأساسيان هما:

$$y_1 = e^{-2x}\cos 2x, \qquad y_2 = e^{-2x}\sin 2x$$

والحل العام هو:

$$y = c_1 e^{-2x}\cos 2x + c_2 e^{-4x}\sin 2x$$

◄◄ مثال (4)

أوجد المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة علماً بأن أحد حلولها هو $e^{-x}\cos 5x$.

الحل:

$y_1 = e^{-x}\cos 5x$ يقابل الجذر $(-1 + 5i)$ وبما أن الجذور مركبة مترافقة، إذن الجذر الثاني هو $(-1 - 5i)$ وبذلك تكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(-1 + 5i)$ ، $(-1 - 5i)$ هي:

$$m^2 - (-1-5i + -1+5i) + (-1-5i)(-1+5i) = 0$$

$$m^2 + 2m + 26 = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة: $m^2 + Pm + q = 0$

نجد أن: $P = 2$ ، $q = 26$

إذن المعادلة التفاضلية هي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+26y=0$$

◄◄ مثال (5)

أوجد الحل العام لمعادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة علماً بأن أحد جذري المعادلة التربيعية (المساعدة) هو (3 + 7i).

الحل:

الجذر الأول = (3 + 7i)

إذا الجذر الثاني = (3 - 7i) ، وبالتالي فالمعادلة التربيعية (المساعدة) هي:

$$m^2-(3-7i+3+7i)m+(3-7i)(3+7i)=0$$
$$m^2-6m+9+49=0$$
$$m^2-6m+58=0$$

بالمقارنة مع المعادلة التربيعية $m^2+Pm+q=0$

نجد أن P= - 6 ، q = 58

إذن المعادلة التفاضلية هي: $y''-6y'+58y=0$

والجدول التالي يلخص الحالات الثلاث في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الثانية وذات المعاملات الثابتة.

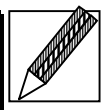
4.2 ملخص الحالات الثلاث

المعادلة التفاضلية : $y''+Py'+qy=0$ ، والمعادلة التربيعية المميزة المرافقة: $m^2+Pm+q=0$

الحالة	الحل العام
1) إذا كانت المعادلة التربيعية المرافقة لها جذران حقيقيان مختلفان هما: m_2 , m_1	$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$
2) إذا كانت المعادلة التربيعية المرافقة لها جذران حقيقيان متساويان هما: $m_1=m_2=m$	$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$

3) إذا كانت المعادلة التربيعية المرافقة لها جذران مركبان هما: $m_1 = a+ bi,\ m_2 = a-bi$	$y = e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right)$

التدريب (1)



(1) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

أ- $y'' + 6y' + 5y = 0$

ب- $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$

جـ- $y'' + 4y' + 5y = 0$

(2) أوجد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

أ- $y'' - 6y' - 7y = 0$ حيث $y(0) = 5,\ y'(0) = 3$

ب- $y'' - 6y' + 9y = 0$ حيث $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

جـ- $y'' + 4y' + 5y = 0$ حيث $y(0) = -3,\ y'(0) = 0$

(3) أوجد المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وذات المعاملات الثابتة إذا كان الحل العام لها هو:

أ- $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}$

ب- $y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

جـ- $y = c_1 e^{-x} \cos 4x + c_2 e^{-x} \sin 4x$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. أوجد الحل العام لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة إذا علمت بأن $e^{2x}\cos 5x$ حل خاص لتلك المعادلة؟

2. إذا كان الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-ky=0$

هو $y=c_1 e^{2x}+c_2 e^{-3x}$

أوجد قيمة الثابت k.

3. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$

4. أوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة علماً بان لمعادلتها المميزة (المساعدة) جذراً مكرراً هو $m=\frac{1}{2}$.

5. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''-6y'+13y=0$ ثم أوجد الحل الخاص بحيث أن $y'(0)=1$, $y(0)=-1$.

6. افرض أن المعادلة المميزة (المساعدة) التربيعية للمعادلة التفاضلية $y''+Py'+qy=0$ لها جذران حقيقيان مختلفان m_1, m_2 أثبت أن الدالة $\frac{e^{m_1x}-e^{m_2x}}{m_1-m_2}$ أيضاً تمثل حلا للمعادلة التفاضلية.

3. المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة: إستخدام طريقة المعاملات غير المعينة

عزيزي الدارس،،

في البند السابق عرفنا كيفية حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة، وبيّنا أن الحل يعتمد على جذور المعادلة التربيعية المميزة (المساعدة)، في هذا البند سوف نعالج حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة على الصيغة.

$$y'' + Py' + qy = r(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث P, q ثوابت، r(x) عبارة عن دالة متصلة. باستخدام ما يسمى المعاملات غير المعينة.

نظرية (1)

الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''+Py'+qy=r(x)$

هو $y(x)=c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)+y_p(x)$

حيث $c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)$: هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y'' + Py' + qy = 0$

و $y_p(x)$: هو أي حل للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة.

ملاحظة

نسمي المعادلة المتجانسة $y'' + Py' + qy = 0$ بالمعادلة المتممة للمعادلة (1) ونسمي $y_p(x)$ بالحل الخاص للمعادلة (1)، والنظرية السابقة تحدد أن **الحل العام للمعادلة التفاضلية** رقم (1) يمكن الحصول عليه **بإضافة الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة إلى الحل الخاص** للمعادلة (1). والأمثلة التالية توضح هذه النظرية وتشرحها.

◄◄ مثال (1)

أوجد الحل الخاص والحل العام للمعادلة التفاضلية: $y''+2y'-8y=e^{3x}$

الحل:

لاحظ أن الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية عبارة عن دالة أسية، إذن نتوقع أن يكون الحل الخاص على شكل $y_p(x)=Ae^{3x}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية: $y'_p(x)=3Ae^{3x}, \quad y''_p(x)=9Ae^{3x}$

نحصل على: $9Ae^{3x}+2(3Ae^{3x})-8(Ae^{3x})=e^{3x}$

$$7Ae^{3x}=e^{3x} \Rightarrow A=\frac{1}{7}$$

إذن كما قلنا في النظرية فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$y_p(x)=\frac{1}{7}e^{3x}$$

وبإيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة كما مر معنا في البند السابق:

$$y''+2y'-8y=0$$

المعادلة المميزة: $m^2+2m-8=0$

$$m=\frac{-2\pm\sqrt{4+4(8)}}{2}=-1\pm\sqrt{\frac{36}{4}}=-1\pm\sqrt{9}=-1\pm3$$

$$m_1=-1+3=2, m_2=-1-3=-4$$

$$y_c(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y=y_p(x)+y_c(x)=\frac{1}{7}e^{3x}+c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}$$

◄◄ مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y'' + y' = 4x^2$

الحل:

نجد أولاً الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (المتممة) $y''+y'=0$

والمعادلة التربيعية المميزة هي:

$$m^2 + m = 0$$

$$m(m+1)=0 \Rightarrow m_1=0,\ m_2=-1$$

إذن الحل العام للمعادلة المتجانسة (المتممة) هو:

$$y_c(x)=c_1 e^{0x} + c_2\ e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x}$$

نجد ثانياً الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$y'' + y' = 4x^2$$

لاحظ أن الطرف الأيمن عبارة عن دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية، نتوقع أن يكون حل المعادلة عبارة عن دالة تربيعية من الدرجة الثانية على الصيغة:

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

لكن A_0 حل للمعادلة التفاضلية المتممة أي أن $(c_1 = A_0)$ لذلك فإن الحل الثاني الممكن لـ $y_p(x)$ هو :

$$y_p(x) = x\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right)$$

$$= A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$$

$$y'_p(x) = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2$$

$$y''_p(x) = 2A_1 + 6A_2 x$$

بالتعويض في المعادلة $y'' + y' = 4x^2$ نجد أن:

$$(2A_1 + 6A_2 x) + \left(A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2\right) = 4x^2$$

$$(A_0 + 2A_1) + (2A_1 + 6A_2)x + 3A_2 x^2 = 4x^2$$

بالتناظر بين معاملات الطرفين نجد أن:

$$A_0 + 2A_1 = 0$$

$$2A_1 + 6A_2 = 0$$

$$3A_2 = 4$$

$$A_2 = \frac{4}{3}, A_1 = -4,\ A_0 = 8$$

إذن: $y_p(x) = 8x - 4x^2 + \frac{4}{3}x^3$

الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + 8x - 4x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

◄◄ مثال (3)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - 2y' + y = \sin 2x$

الحل:

أولاً: نجد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة (المتممة) $y'' - 2y' + y = 0$

المعادلة التربيعية المميزة هي:

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)(m-1) = 0$$

$$m_1 = m_2 = m = 1$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة (المتممة) هو

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

ثانياً: لإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة غير المتجانسة لاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة $\sin 2x$ وهو على الصيغة $a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$ حيث $(a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ b = 2)$

إذن الحل المقترح الخاص للمعادلة غير المتجانسة هو:

$$y(p) = A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x$$

$$y'_p(x) = -2A_1 \sin 2x + 2A_2 \cos 2x$$

$$y_p''(x) = -4A_1 \cos 2x - 4A_2 \sin 2x$$

بالتعويض في المعادلة $y''-2y'+y=\sin 2x$ نحصل على

$$(-4A_1\cos 2x-4A_2\sin 2x)-2(-2A_1\ \sin\ 2x+2A_2\cos 2x)+$$
$$(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)=\sin\ 2x.$$

$$(-3A_1-4A_2)\ \cos 2x+(4A_1-3A_2)\sin 2x=\sin 2x$$

بالتناظر بين طرفي المعادلة نجد أن:

$$-3A_1-4A_2=0$$

$$4A_1-3A_2=1$$

بحل المعادلتين آنياً نحصل على:

$$A_1=\frac{4}{25},\ A_2=\frac{-3}{25}$$

إذن: $y_p(x)=\frac{4}{25}\cos 2x-\frac{3}{25}\sin 2x$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y(x)=y_c(x)+y_p(x)=c_1e^x+c_2\,x\,e^x+\frac{4}{25}\cos 2x-\frac{3}{25}\sin 2x$$

■ **عزيزي الدارس،،**

من خلال الأمثلة الثلاثة السابقة نلاحظ أن الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو إما:

1) دالة أسية على الصيغة $k\,e^{ax}$
2) دالة كثيرات حدود على الصيغة $a_0+a_1x+.....+a_n\,x^n$
3) دالة مثلثية على الصيغة $a_1\cos bx+a_2\sin bx$

ولإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة سوف يكون الحل المقترح وعلى الترتيب حسب (1)، (2) ، (3):

1) $y_p=x^s\,A\,e^{ax}$
2) $y_p=(A_0+A_1\,x+.....+A_n\,x^n)x^s$
3) $y_p=(A_1\cos x+A_2\sin bx)\,x^s$

ملاحظة :

إذا وجد في أي حد من حدود y_p حلاً للمعادلة المتجانسة (المتممة) y_c، فنلجأ إلى ضرب الحل المقترح y_p بالمقدار x^s بحيث يعطي مصححاً y_p.

وإليك الأمثلة التي تؤكد كيفية إيجاد الحل y_p، y_c .

مثال (4)

أوجد الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 2y' - 3y = x^2 - 3$$

الحل:

أولاً نجد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

المعادلة المميزة هي:

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$(m+1)(m-3) = 0$$

$$m_1 = -1, \quad m_2 = 3$$

الحل العام (المتمم) $y(x)$ هو:

$$y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

وللإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ نلاحظ أن الطرف الأيمن هو دالة كثيرات حدود من الدرجة الثانية، فيكون الحل المقترح y_p على الصيغة.

$$y_p(x) = x^n \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right)$$

بالمقارنة مع الحل العام (المتمم) لا يوجد حدود مشتركة مع y_p إذن نختار $n=0$ ونحصل على y_p.

$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

$$y'_p = A_1 + 2A_2 x$$

$$y''_p = 2A_2$$

بالتعويض في المعادلة $y''-2y'-3y=x^2-3$ نجد أن:

$$2A_2-2(A_1+2A_2x)+3(A_0+A_1x+A_2x^2)=x^2-3$$

$$(2A_2-2A_1+3A_0)+(3A_1-4A_2)x+3A_2x^2=x^2-3$$

بالتناظر مع المعادلات نحصل على:

$$2A_2-2A_1+3A_0=-3$$

$$3A_1-4A_2=0$$

$$3A_2=1$$

نجد أن

$$A_2=\frac{1}{3}$$

$$A_1=\frac{4}{9},\quad A_0=\frac{-25}{9}$$

إذن

$$y_p=\frac{-25}{9}+\frac{4}{9}x+\frac{1}{3}x^2$$

الحل العام هو:

$$y=y_p+y_c$$

◄◄ مثال (5)

أوجد y_p للمعادلة التفاضلية $y''+y'=3e^{-x}$

الحل:

نجد أولاً الحل العام (المتمم) للمعادلة $y''+y=0$

المعادلة المميزة

$$m^2+m=0$$

$$m(m+1)=0$$

$$m_1=0,\quad m_2=-1$$

إذن الحل y_c هو

$$y_c(x)=c_1+c_1 e^{-x}$$

لإيجاد y_p نفترض أن الحل المقترح هو:

$$y_p = x^s Ae^{ax} = xAe^{-x}$$

بإيجاد y_p' , y_p'' وتعويضها في المعادلة $y'' + y' = 3\ e^{-x}$ نحصل على:

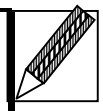
$$A\left(-2e^{-x}+xe^{-x}\right)+A\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=3e^{-x}$$

$$-Ae^{-x}=3e^{-x} \Rightarrow A=-3$$

إذن:

$$y_p=-3xe^{-x}$$

التدريب (2)



(أ) أوجد الحل العام (المتمم) y_c، والحل الخاص y_p للمعادلة $y'' - y = 10\cos 2x$ ثم أوجد الحل العام لها؟

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة: $y''-y'-2y=4x^2$

(جـ) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة: $y''+4y'+4y=e^{-2x}$

(د) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة: $y''+3y'-4y=x+e^x$

(هـ) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة: $y''+4y=\cos^2 x-\sin^2 x$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1.أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة إذا كان الحل الخاص كما هو معطى إزاء المعادلة:

أ- $y'' - y' = x, \qquad y_p = -x$

ب- $y'' - y' - 2y = 1 - 2x, \qquad y_p = x - 1$

جـ- $y'' + 2y' + 4y - 4\cos 2x = 0, \qquad y_p = \sin 2x$

2. إذا كان $y_{p_1} = \cos x$ حلاً للمعادلة $y'' - y' + y = \sin x$ وكان $y_{p_2} = \frac{e^{2x}}{3}$ حلاً للمعادلة $y'' - y' + y = e^{2x}$ أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية:

أ- $y'' - y' + y = 5\sin x$

ب- $y'' - y' + y = \sin x - 3e^{2x}$

جـ- $y'' - y' + y = 4\sin x + 18e^{2x}$

3. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$y'' - y' - 2y = 7 + e^{3x}$

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

في نهاية هذه الوحدة، دعنا نستعرض أهم ما ورد فيها من مفاهيم:

- المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية هي المعادلة التي تكتب على الصورة الرياضية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)$$

- المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة هي المعادلة التي تكتب على الشكل الرياضي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+q\,y=0$$

حيث q ، P دالتان ثابتتان.

- المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة هي المعادلة التي تكتب على الشكل الرياضي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+q\,y=r(x)$$

حيث q ، P ثابتان، r(x) دالة متصلة.

في ختام هذه الوحدة أذكرك بما أوردته في مقدمتها (راجع مقدمة الوحدة) والذي يتلخص بنقطنين: الأولى أن المفاهيم الواردة في هذه الوحدة كانت سلسة ميسرة (وأرجو أن يكون الأمر كذلك بالنسبة لك) والمسألة الثانية تتعلق بأهمية هذه الوحدة بالنسبة للوحدة التالية (الأخيرة)، حيث تعتمد الوحدة التالية اعتمادا كبيرا على هذه الوحدة.

عد مرة أخرى إلى الأهداف، وكن واثقا قبل البدء بالوحدة التالية أنك قد حققت الأهداف جميعها التي وردت في بداية هذه الوحدة. متمنيا لك التوفيق والسداد.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،،

الوحدة التالية هي الوحدة الأخيرة في هذا المقرر، وتبحث في تطبيقات على المعادلات التفاضلية التي لا حصر لها، إلا أننا آثرنا التركيز على مسائل الاهتزازات الميكانيكية، "وحركة الزنبرك" .

نأمل أن تكون وحدة مفيدة لك.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

(1) (أ) نجد الجذور التربيعية للمعادلة المميزة (المساعدة) $m^2+6m+5=0$

$$(m+5)(m+1)=0$$

$$m_1=-5,\quad m_2=-1$$

إذن الحلان الأساسيان هما: $y_1=e^{-5x},\qquad y_2=e^{-x}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y=c_1e^{-5x}+c_2e^{-x}$$

(ب) المعادلة المميزة هي :

$$m^2+3m=0$$

$$m(m+3)=0$$

$$m_1=0,\quad m_2=-3$$

إذن الحلان الأساسيان هما:

$$y_1 = e^{-0x} = 1, \qquad y_2 = e^{-3x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x}$$

(جـ) نجد المعادلة التربيعية المميزة $m^2 + 4m + 5 = 0$

$$m = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$m = \frac{-4 \mp \sqrt{-4}}{2} = -2 \mp i$$

$$m_1 = -2 - i, \qquad m_2 = -2 + i$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{-2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)$$

(2) أ- نجد المعادلة المميزة $m^2 - 6m - 7 = 0$

$$(m-7)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 7, \quad m_2 = -1$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = c_1 e^{7x} + c_2 e^{-x}$$

$$y' = 7c_1 e^{7x} - c_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = 7c_1 - c_2 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 5. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بحل المعادلتين نجد أن $8c_1 = 8$ ومنها $c_1 = 1$ بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد c_2 ومنها $c_2 = 4$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^{7x} + 4e^{-x}$

ب- نجد المعادلة المميزة $m^2 - 6m + 9 = 0$

$$(m-3)(m-3)=0$$

$$m_1=m_2=m=3$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y=c_1 e^{3x}+c_2 x e^{3x}$$

$$y(0)=c_1+0=2\Rightarrow c_1=2$$

$$y'=3c_1 e^{3x}+3c_2 x e^{3x}+e^{3x} c_2$$

$$y(0)=3c_1+0+c_2=1$$

$$6+c_2\Rightarrow c_2=-6$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو

$$y=2e^{3x}-6x e^{3x}$$

جـ- نجد الجذور للمعادلة المميزة:

$$m^2+4m+5=0$$

$$m=\frac{-4\mp\sqrt{-4}}{2}=-2\mp i$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

$$y(0)=e^{-0}(c_1\cos 0+c_2\sin 0)=-3$$

$$=1(c_1+0)=-3\Rightarrow c_1=-3$$

$$y'=e^{-2x}(-c_1\sin x+c_2\cos x)+(-2e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x))$$

$$y'(0)=e^{-0}(0+c_2)-2e^{-0}(c_1+0)=0$$

$$=c_2-2c_1=0\Rightarrow c_2=2c_1=-6$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$y=e^{-2x}(-3\cos x-6\sin x)$$

(3) أ- من الحل العام للمعادلة التفاضلية نجد أن:

$$m_1 = 5, \quad m_2 = -2$$

المعادلة المميزة $m^2 - (5-2)m + (5)(-2) = 0$

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

إذن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي:

$$y'' - 3y' - 10y = 0$$

ب- من الحل العام نجد أن: $m_1 = m_2 = m = 4$

المعادلة التربيعية المميزة هي:

$$m^2 - (4+4)m + (4)(4) = 0$$

$$m^2 - 8m + 16 = 0$$

إذن المعادلة التفاضلية هي:

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

جـ- من الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$m_1 = -1 + 4i, \quad m_2 = -1 - 4i$$

المعادلة المميزة هي: $m^2 - (-1+4i-1-4i)m + (-1+4i)(-1-4i) = 0$

$$m^2 + 2m + 17 = 0$$

إذن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي:

$$y'' + 2y' + 17y = 0$$

تدريب (2)

(أ) نجد الحل العام (المتمم) y_c بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة $y''-y=0$

المعادلة التربيعية المميزة هي: $m^2-1=0$ نجد الجذور $m^2=1\Rightarrow m=\mp 1$

$m_1=-1, \quad m_2=1$

$y_c=c_1\ e^{-x}+c_2\ e^{x}$

لإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة غير المتجانسة لاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة $10\cos 2x$ وهو على الصيغة $a_1\cos bx+a_2\sin bx$

بالمقارنة مع $10\cos 2x$ نجد أن: $(a_1=10, \quad b=2, \ a_2=0)$

إذن الحل المقترح للمعادلة غير المتجانسة هو:

$y_p(x)=A_1\ \cos 2x+A_2\ \sin 2x$

$y'_p(x)=-2A_1\ \sin 2x+2A_2\cos 2x$

$y''_p(x)=-4A_1\ \cos 2x-4A_2\sin 2x$

بالتعويض في المعادلة $y''-y=10\cos 2x$ نحصل على

$(-4A_1\cos 2x-4A_2\sin 2x)-(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)=10\cos 2x$

$-5A_1\cos 2x-5A_2\sin 2x=10\cos 2x$

$-5A_1=10\Rightarrow A_1=-2, \qquad -5A_2=0\Rightarrow A_2=0$

إذن $y_p(x)=-2\cos 2x$

الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$y=c_1\ e^{-x}+c_2\ e^{x}-2\cos 2x$

(ب) نجد الحل العام (المتمم) y_c بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة $y''-y'-2y=0$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية هي:

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m-2)(m+1) = 0$$

$$m_1 = +2, \qquad m_2 = -1$$

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

لإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة غير المتجانسة، لاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة $4x^2$ وهو على الصيغة.

$$y_p = x^s \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right)$$

نختار $s = 0$ أي أن $y_p = \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right)$ لأنه لا يوجد أي حد من حدود y_p حل للمعادلة المتممة y_c .

$$y'_p(x) = A_1 + 2A_2 x$$

$$y''_p(x) = 2A_2$$

بتعويض كل من $y_p(x)$ ، $y''_p(x)$ ، $y'_p(x)$ في المعادلة التفاضلية

$$2A_2 - A_1 - 2A_2 x - 2A_0 - 2A_1 x - 2A_2 x^2 = 4x^2$$

$$(2A_2 - A_1 - 2A_0) + (-2A_2 - 2A_1)x - 2A_2 x^2 = 4x^2$$

$$-2A_2 x^2 = 4x^2 \Rightarrow -2A_2 = 4 \Rightarrow A_2 = -2$$

$$-2A_2 - 2A1 = 0 \Rightarrow 4 - 2A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 2$$

$$2A_2 - A_1 - 2A_0 = 0 \Rightarrow -4 - 2 - 2A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = -3$$

الحل الخاص هو:

$$y_p(x) = -3 + 2x - 2x^2$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + 2x - 2x^2 - 3$$

(ج) نجد الحل العام (المتمم) y_c بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة $y'' + 4y' + 4y = 0$

نجد المعادلة التربيعية المميزة $m^2 + 4m + 4 = 0$ بحل المعادلة $(m+2)(m+2) = 0$

$$m_1 = m_2 = m = -2$$

$$y_c = c_1 e^{-x2} + c_2 x e^{-2x}$$

لإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة غير المتجانسة، لاحظ أن بالطرف الأيمن لـ y_c حد على الشكل e^{-2x} وهو على الصيغة

$$y_p = A e^{ax}$$

بالمقارنة مع e^{-2x} نجد أن $a = -2$

إذن الحل المقترح للمعادلة غير المتجانسة هو :

$$y_p = x^s A e^{-2x}$$

نختار $s = 2$ أي أن $y_p = x^2 A e^{-2x}$ لأنه لا يوجد أي حد من حدود y_p هو حل للمعادلة المتممة y_c .

$$y'_p = A\left(x^2\left(-2e^{-2x}\right) + 2x e^{-2x}\right) = A e^{-2x}\left(-2x^2 + 2x\right)$$

$$y''_p = A e^{-2x}\ (2-4x) + \left(-2A e^{-2x}\right)\left(-2x^2 + 2x\right)$$

$$= A e^{-2x}\left(2 - 8x + 4x^2\right)$$

بتعويض كلٍ من $y'_p(x)$ ، $y''_p(x)$ ، $y_p(x)$ في المعادلة التفاضلية

$$A e^{-2x}\left(2 - 8x + 4x^2\right) + 4A e^{-2x}\left(-2x^2 + 2x\right) - 2x^2 A e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$A e^{-2x}\left(2 - 8x + 4x^2 - 2x^2 + 2x - 2x^2\right) = e^{-2x}$$

$$A e^{-2x}\ (2-6x) = e^{-2x} \Rightarrow A = 1$$

الحل الخاص هو

$$y_p(x) = x^2 e^{-2x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + x^2 e^{-2x}$$

(د) نجد حل المعادلتين:

$$y'' + 3y' - 4y = x. \quad \ldots\ldots (1)$$

$$y'' + 3y' - 4y = e^x \quad \ldots\ldots (2)$$

نجد الحل العام (المتمم) y_c بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y''+3y'-4y=0$$

المعادلة المميزة هي: $m^2+3m-4=0$ نجد حل هذه المعادلة

$$(m+4)(m-1)=0$$

$$m_1=-4,\ \ m_2=-1$$

$$y_c=c_1\ e^{-4x}+c_2\ e^{x}$$

لإيجاد الحل الخاص $y_{p_1}(x)$ للمعادلة غير المتجانسة (1) لاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة هو x وهو على الصيغة:

$$A_0+A_1\,x$$

إذن الحل المقترح للمعادلة المتجانسة (1) هو:

$$y_{p_1}(x)=x^{s}\,(A_0+A_1\,x)$$

نختار $s=0$ أي أن $y_{p_1}(x)=A_0+A_1\,x$ لأنه لا يوجد أي حد من حدود y_{p_1} هو حل للمعادلة المتممة y_c

$$y'_{p_1}(x)=A_1,\qquad y''_{p_1}(x)=0$$

بتعويض كل من $y'_p(x)$ ، $y''_p(x)$ في المعادلة التفاضلية (1)

$$0+3A_1-4(A_0+A_1\,x)=x$$

$$(3A_1-4A_0)-4A_1\,x=x$$

$$3A_1-4A\ =0, 4A_1=1\Rightarrow A_1=\frac{1}{4}$$

$$3\left(\frac{1}{4}\right)-4\,A_0=0\Rightarrow 4A_{\ 0}=\frac{3}{4}\Rightarrow A_0=\frac{3}{16}$$

$$y_{p_1}(x)=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}x$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (1) هو

$$y_1=y_{p1}+y_c=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}x+c_1\,e^{-4x}+c_2\ e^{x}$$

أيضاً ونجد الحل الخاص $y_{p_2}(x)$ للمعادلة غير المتجانسة (2) ولاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة هو e^x وهو على الصيغة Ae^x

إذن الحل المقترح للمعادلة غير المتجانسة (2) هو:

$$y_{p_2}(x)=x^s\,Ae^x$$

نختار $s=1$ أي أن $y_{p_2}(x)=Axe^x$ لأنه يوجد حد من حدود y_{p_2} هو حل للمعادلة المتممة y_c

$$y'_{p_2}(x)=A\left(xe^x+e^x\right)$$

$$y''_{p_2}(x)=A\left(xe^x+2e^x\right)$$

وبتعويض كل من $y_p(x)$ ، $y'_p(x)$ ، $y''_p(x)$ بالمعادلة (2):

$$A\left(xe^x+2e^x\right)+3A\left(xe^x+e^x\right)-4Axe^x=e^x$$

$$2Ae^x+3Ae^x=e^x\Rightarrow 4Ae^x=e^x\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$y_{p_2}(x)=\frac{1}{4}x\,e^x$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (2) هو :

$$y_2=y_{p_2}(x)+y_c=\frac{1}{4}xe^x+c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}$$

الحل العام للمعادلة $y''+3y'-4y=x+e^x$ هو $y=y_1+y_2$

(هـ) بما أن $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$ إذن المعادلة التفاضلية تصبح

$$y''+4y=\cos 2x$$

نجد الحل العام (المتمم) y_c بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة $y''+4y=0$

المعادلة المميزة هي: $m^2+4=0$ نجد الجذور $m^2=-4\Rightarrow m=\mp 2i$

$$m_1=0-2i,\quad m_2=0+2i$$

الحل المتمم $y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

لإيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة غير المتجانسة لاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة $\cos 2x$ وهو على الصيغة: $a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$

بالمقارنة مع $\cos 2x$ نجد أن: $(a_1 = 1,\ b = 2,\ \ a_2 = 0)$

إذن الحل المقترح للمعادلة غير المتجانسة هو:

$$y_p(x) = x^s \left(A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x\right)$$

نختار $s = 1$ لأنه يوجد حد من حدود $y_{p(x)}$ هو حل أي أن:

$$y_p(x) = x\left(A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x\right)$$

$$y'_p(x) = x\left(-2A_1 \sin 2x + 2A_2 \cos 2x\right) + \left(A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x\right)$$

$$y''_p(x) = x\left(-4A_1 \cos 2x - 4A_2 \cos 2x\right) + \left(-2A_1 \sin 2x + 2A_2 \cos 2x\right)$$

$$+\left(-2A_1 \sin 2x + 2A_2 \cos 2x\right)$$

بتعويض كل من y_p ، y'_p، y''_p في المعادلة التفاضلية:

$$x\left(-4A_1 \cos 2x - 4A_2 \cos 2x\right) - 2A_1 \sin 2x + 2A_2 \cos 2x$$

$$-2A_1 \sin 2x + 2A_2 \cos 2x + 4x\left(A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x\right) - \cos 2x$$

$$-4A_1 \sin 2x + 4A_2 \cos 2x = \cos 2x$$

$$4A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4},\ -4A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$y_p(x) = \frac{1}{4} x \sin 2x$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y = \frac{1}{4} x \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. $y_1 = e^{2x}\cos 5x$ إذن $y_2 = c_2\, e^{2x}\sin 5x$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = c_1 e^{2x}\cos^{5x} + c_2 e^{2x}\sin 5x$$

2. المعادلة التربيعية المميزة هي $m^2 + m - k = 0$

أيضاً من الحل العام نجد أن جذور المعادلة التربيعية المميزة هي $m_1 = 2,\ m_2 = -3$

بتعويض m_1 ، أو m_2 في المعادلة المميزة نجد k

$$(2)^2 + 2 - k = 0 \Rightarrow k = 6$$

3. المعادلة المميزة هي $m2+9=0 \Leftarrow m = \mp 3i$ ، $m_1 = 0+3i$ ، $m_2 = 0-3i$، الحل العام للمعادلة هو $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$

4. $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ الحل العام هو $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2\ x e^{\frac{x}{2}}$.

5. المعادلة المميزة $m^2 - 6m + 13 = 0$

$$m = \frac{6 \mp \sqrt{36 - 4(1)(13)}}{2}$$

$$m = \frac{6 \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \mp 4i}{2} = 3 + 2i$$

$$m_1 = 3 - 2i, \qquad m_2 = 3 + 2i$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{3x}\left(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x\right)$$

$$y(0) = c_1(1) + 0 = -1 \Rightarrow c_1 = -1$$

$$y' = e^{3x}\left(-2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x\right) + 3e^{3x}\left(c_1\,os 2x + c_1\sin 2x\right)$$

$$y'(0)=e^{0}(2c_2+c_1)=1\Rightarrow 2c_2-1=1\Rightarrow c_2=1$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو

$$y=e^{3x}(-\cos 2x+\sin 2x)$$

6. نجد

$$y'=\frac{m_1 e^{m_1 x}-m_2 e^{m_2 x}}{m_1-m_2}$$

$$y''=\frac{m_1^2 e^{m_1 x}-m_2^2 e^{m_2 x}}{m_1-m_2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$y''+py'+qy=0$$

$$\frac{m_1^2 e^{m_1 x}-m_2^2 e^{m_2 x}}{m_1-m_2}+\frac{pm_1 e^{m_1 x}-pm_2 e^{m_2 x}}{m_1-m_2}+\frac{qe^{m_1 x}-qe^{m_2 x}}{m_1-m_2}$$

$$\frac{e^{m_1 x}(m_1^2-pm_1+q)-e^{m_2 x}(m_2^2-pm_2+q)}{m_1-m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

لكن المعادلة المميزة هي $m^2 - pm + q = 0$ لها جذران هما m_1 , m_2 أي أن:

$$m_1^2-pm_1+q=0$$

$$m_2^2-pm_2+q=0$$

إذن المعادلة رقم (1) تصبح:

$$\frac{e^{m_1}(0)-e^{m_2}(0)}{m_1-m_2}=0$$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

.1

أ- الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y''-y=0$

نجد المعادلة التربيعية المميزة $m^2 - 1 = 0$ وبحل المعادلة نحصل على $m^2=1\Rightarrow m=\mp 1$

$$m_1=-1 , \quad m_2=1$$

الحل العام للمعادلة $y'' - y = 0$ هو:

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

الحل العام للمعادلة $y'' - y = x$ هو $y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - x$

ل- بنفس الأسلوب السابق نجد المعادلة التربيعية المميزة وهي:

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m-2)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 2, m_2 = -1$$

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + 1 - 2x$$

جـ- نجد المعادلة التربيعية المميزة $m^2 + 2m + 4 = 0$ وبحل المعادلة:

$$m = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4(4)}}{2} = -1 \mp \frac{2\sqrt{3}\, i}{2}$$

$$m_1 = -1 - \sqrt{3}\, i, \quad m_3 = -1 + \sqrt{3}\, i$$

الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + 4 = 0$ هو:

$$y_c = e^{-x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\, x + c_2 \sin\sqrt{3}\, x\right)$$

الحل العام للمعادلة غير المتجانسة $y'' + 2y' + 4 = 4\cos 2x$

$$y = y_c + y_p = e^{-x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\, x + c_2 \sin\sqrt{3}\, s\right) + \sin 2x$$

2. نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + y = 0$ وهو:

$$yc = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

أ- الحل العام للمعادلة $y'' - y' + y = 5 \sin x$ هو:

$$y = y_c + 5y_{pl} = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 5\cos x$$

ب- الحل العام للمعادلة $y'' - y' + y = \sin x - 3e^{2x}$ هو:

$$y = y_c + y_{p_1} - 3y_{p_2}$$

$$= e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \cos x - e^{2x}$$

جـ- الحل العام للمعادلة $y''-y'+y=4\sin x+18e^{2x}$ هو

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + 4 + 6e^{2x}$$

3.نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''-y'-2y=0$

المعادلة المميزة $m^2-m-2=0$

$$(m-2)(m+1)=0$$

$$m_1=2, m_2=-1$$

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

نجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $y''-y'-2y=7$ وهو:

$$y_{p_1} = \frac{-7}{2}$$

ونجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $y''-y'-2y=e^{3x}$ وهو:

$$y_{p_2} = \frac{1}{4}e^{3x}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $y''-y'-2y=7+e^{3x}$ هو:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{-7}{2} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس،

نظـرا لطبيعـة هـذا المقـرر، ولعـدم الرغبـة فـي إظهـار معـادلات رياضـية فـي مـسرد المصطلحات، لذا نقتصر هنا على ذكر المصطلح العربي وما يقابله من المصطلح الانجليزي، وذلك لمساعدة الدارس في الرجوع إلى المراجع الأجنبية، أو مواقع الإنترنت.

المعـــادلات التفاضـــلية المتجانـــسة ذات المعاملات الثابتة	**Homogeneous differential equations with Constant Coefficients**
المعادلة المميزة	**Characteristic equation**
المعادلة غير المتجانسة	**Non- homogenous equation**
المعاملات غير المعينة	**Undetermined Coefficients**
الحل المتمم	**Complementary solution**
الحل العام	**General Solution**
الجذور المركبة	**Complex roots**
الحل الخاص	**Particular Solution**
معالم	**Parameters**
تفاضل	**Differentiation**
رتبة	**Order**

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية

1. رشدي خليل، **مقدمة في المعادلات التفاضلية**. عمان: دار المناهج، 2003.
2. فرانك أيرز، **نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية**. القاهرة: الدار الدولية، 1991.
3. قيصر فيازمينسكي، **المعادلات التفاضلية**. دمشق: المركز العربي للتعريب، 1995.
4. ريتشارد برولسون، **2500 مسألة محلولة في المعادلات التفاضلية**. سلسلة المسائل المحلولة شوم، ترجمة فايز فوق العادة. بيروت: أكاديميا إنترناشيونال، 1997.

المراجع الأجنبية

1. William E. Boyce and Richard C. Diprima, **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1977.
2. Garret Birkhoff and Gian-carlo Rota, **Ordinary Differential Equations**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1978.
3. Ray while, **Differential Equations**. New York: Mc Graw-Hill Inc, 1979.
4. Shepley L.Ross, **Introduction To ordinary Differential Equations.** 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1980.

الوحدة الرابعة

تطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**208**
تمهيد	**208**
أهداف الوحدة	**208**
1. مسائل الاهتزازات الميكانيكية	**209**
2. حل المعادلة التفاضلية لحركة الزنبرك	**214**
الخلاصة	**224**
إجابات التدريب	**225**
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	**229**
مسرد المصطلحات	**232**
المراجع العربية والأجنبية	**233**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

أهلاً بك في الوحدة الرابعة من مقرر المعادلات التفاضلية، وهذه الوحدة تتناول تطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الثانية في مسائل الاهتزازات الميكانيكية، وبما أنها الوحدة الأخيرة في هذا المقرر فإنها تلخص كافة المفاهيم التي مرت بك في الوحدات السابقة، وتعتمد اعتمادا أساسيا على ما قبلها، وخصوصا الوحدة الثالثة.

يوجد كثير من التطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية، لكن في هذه الوحدة سنتناول أحد أهم التطبيقات وهو المتعلق بمسائل الاهتزازات الميكانيكية (حركة زنبرك) حيث سنتعرف على كيفية تكوين المعادلة التفاضلية التي تمثل الحركة الاهتزازية ومن ثم إيجاد الحل العام والحل الخاص لهذه المعادلة والتي تمثل حركة الزنبرك.

فيجدر بك عزيزي الدارس أن تهتم بهذه الوحدة وتدرسها بالتسلسل الذي وضعت به، فلا تنتقل إلى جزء إلا بعد أن تفهم الجزء السابق فهماً جيداً.

أهلاً بك مرة أخرى في هذه الوحدة.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،،

يتوقع منك بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1) **تتعرّف** حركة زنبرك حتى يبلغ وضع التوازن.
2) **تكتب** المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة زنبرك.
3) **تحل** المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة زنبرك **وتجد** الحل الخاص لها تحت الشرطين الأساسيين.

1. مسائل الاهتزازات الميكانيكية

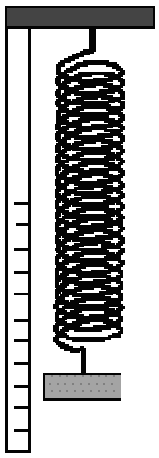
عزيزي الدارس،،

ذكرنا في الوحدة الثانية عدة تطبيقات عملية على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى، كما قدمنا في الوحدة الثالثة طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة، وفي هذه الوحدة سنقدم بعض التطبيقات العملية على المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية في مسائل الاهتزازات الميكانيكية.

دعنا نبدأ بالأشكال التالية حول موضوع هذه الوحدة.

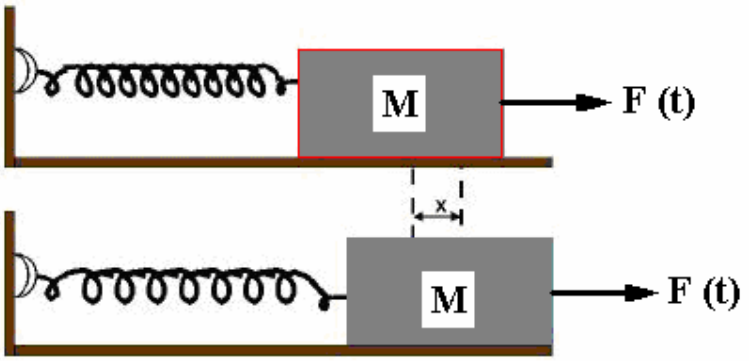
الشكل (1)

تعليق كتلة في أسفل زنبرك معلق، وقياس مقدار الاستطالة عبر وضع مسطرة مدرجة، من أشهر التجارب في المختبرات



الشكل (2)

تأثير القوة F (t) على زنبرك لتحريكه مسافة x



قانون هوك

عزيزي الدارس،

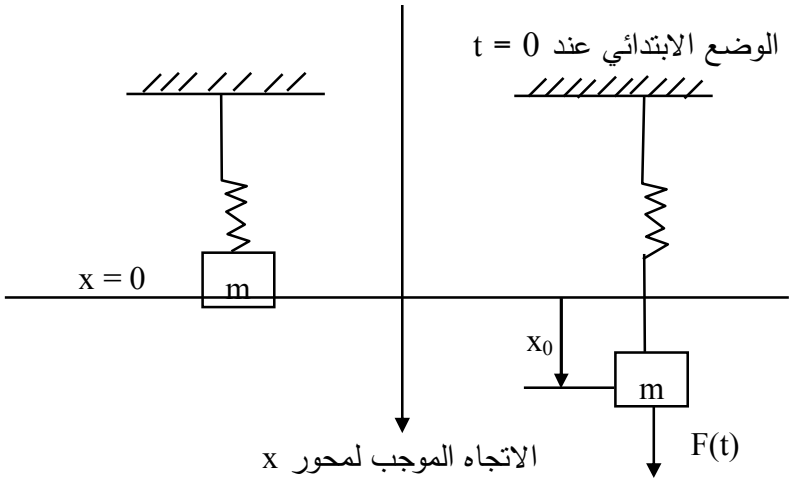
من أشهر العلماء الذين درسوا موضوع الاهتزازات، العالم هوك، وله قانون مشهور يدعى قانون هوك، وهو ينص على أن **القوة المرجعة للزنبرك تتناسب مع استطالته**، فإذا استخدمنا قانون هوك بالإضافة إلى قانون نيوتن الثاني للحركة، نستطيع أن نجد المعادلة التفاضلية التي تصف حركة الزنبرك.

وللتعرف على حقيقة قانون هوك، ومن خلال رجوعك إلى الرسومات التي أوردناها بداية الوحدة، يمكننا تزويدك بالمفاتيح التالية:

- لكل زنبرك ثابت يدعى ثابت الزنبرك ويرمز له بالرمز **k**.
- إذا ربطنا كتلة مع زنبرك، وسحبناها بعكس اتجاه قوة شد الزنبرك، سنلاحظ أن الزنبرك قد استطال مسافة معينة (**x**) والتي نسميها الاستطالة، وهي الفرق بين موضع الكتلة بعد السحب عن موضعها قبل السحب.
- تكون الكتلة في وضع سكون قبل تأثير القوة، أي أن سرعتها الابتدائية تساوي صفرا.

والآن: إذا ربطنا كتلة قدرها m إلى الجهة السفلى لزنبرك معلق من جهته العليا في نقطة ثابتة، يُترك الزنبرك يتحرك كي يبلغ وضع التوازن، تشد الكتلة إلى مسافة ولتكن x_0 تحت وضع التوازن وتحرر بسرعة ابتدائية قدرها v_0 وتؤثر عليها في نفس الوقت قوة خارجية قدرها F(t) اتجاهها نحو الأسفل ولنفرض أن الاتجاه نحو الأسفل هو الاتجاه الموجب، وسوف نعتبر أن المبدأ ينطبق على مركز ثقل الكتلة في وضع التوازن (انظر الشكل (3)).

الشكل (3)



ولنفرض وجود مقاومة للهواء متناسبة مع سرعة الكتلة، وفي هذه الحالة تؤثر في الكتلة عند أي لحظة t ثلاث قوى:

1- F(t) في الاتجاه الموجب (إلى الأسفل).

2- قوة مرجعة تعطى وفق قانون هوك بالمعادلة $Fs = - kx$

حيث ($k > 0$) ثابت التناسب (ثابت الزنبرك).

3- قوة مقاومة الهواء $F_a = -a\frac{dx}{dt}$ ($a > 0$) حيث a ثابت التناسب.

نشير هنا إلى أن القوة المرجعة Fs تؤثر دوماً في اتجاه يعيد الزنبرك إلى وضع التوازن.

إذا كانت الكتلة فوق وضع توازنها تكون الإزاحة x سالبة وبالتالي القوة $(-kx)$ موجبة، وإذا كانت الكتلة تحت وضع توازنها تكون الإزاحة x موجبة والقوة $(-kx)$ سالبة. ولأن الثابت ($a > 0$) فإن مقاومة الهواء تعاكس السرعة وهي بذلك تتجه إلى إخماد حركة الكتلة، ولتطبيق قانون نيوتن الثاني على المعادلة:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \frac{dx}{dt} + F(t) \quad \text{.....(1)}$$

أو

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad \text{.....(1)}$$

وحيث أن حركة الكتلة تبدأ من اللحظة $t = 0$ وبسرعة ابتدائية قدرها v_0 من الموقع الابتدائي x_0 يكون لدينا شرطان ابتدائيان:

$$x(0) = x_0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = v_0$$

ملاحظة :

لا تظهر قوة الجاذبية (g) بشكل صريح في المعادلة (1) لكنها موجودة، لو عوضنا عن هذه المعادلة بقياس المسافة من وضع التوازن، وعلى افتراض أن المسافة تقاس من الجهة السفلى للطول الطبيعي للزنبرك، أي أن معادلة حركة زنبرك مهتز تعطى بالمعادلة التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = g + \frac{F(t)}{m} \quad \text{.....(2)}$$

وبتعويض $F(t) = 0$ ، $a = 0$ في المعادلة (2) نحصل على المعادلة لحركة زنبرك يفترض فيها أن الاهتزازات حرة أي أن المعادلة (2) تصبح:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

والأمثلة التالية توضح مفهوم هذه الحركة.

◄◄ مثال (1)

تتدلى كرة فولاذية وزنها 20 newton من زنبرك يتمدد بمقدار 0.5 متر بالمقارنة مع طوله الطبيعي، أوجد ثابت الزنبرك؟

الحل:

إن القوة المسؤولة عن تمدد الزنبرك هي وزن الكرة 20 نيوتن إذن - F=20 N وحسب قانون هوك(F=kx) -20 = -kx0.5 ومنها نجد أن نيوتن/ متر k = 40 .

◄◄ مثال (2)

علقت كرة فولاذية وزنها 20 نيوتن بزنبرك، فتمدد الزنبرك إثر ذلك بمقدار 0.5 متر مقارنة مع طوله الطبيعي، وضعت الكرة في حالة الحركة بدون سرعة ابتدائية وذلك بإزاحتها مسافة 0.15 متر فوق موضع التوازن. أوجد المعادلة التفاضلية التي تنظم اهتزازات الزنبرك وذلك بإهمال مقاومة الهواء.

الحل:

من المثال السابق أوجدنا ثابت الزنبرك k= 40 نيوتن/ متر ووزن الكرة mg = 20نيوتن (حيث g هو تسارع الجاذبية الأرضية= 10 متر/ث^2) ومنه $m = \frac{20}{10} = 2$ kg وحيث أن حركة الزنبرك حركة حرة (بدون مقاومة) فإن المعادلة التفاضلية التي تحكم هذه الحركة هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

بتعويض قيم k ، m نحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{40}{2}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20x = 0$$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. اذكر نص قانون هوك، واشرح معنى الاستطالة في الزنبرك.
2. عد إلى الشكل (1) وعين عليه الكتلة، وافترض استطالة معينة، وارسمها بشكل تقريبي.
3. عد إلى الشكل (3)، واشرح باسلوبك الخاص ماذا يمثل لك.
4. أعد اشتقاق المعادلة (2) التالية حسب الخطوات والفرضيات الرياضية التي تم اعتمادها اثناء الشرح.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=g+\frac{F(t)}{m} \quad .....(2)$$

5. أثرت قوة مقدارها 200 نيوتن على زنبرك، فتمدد مسافة متر واحد، احسب ثابت الزنبرك.

2. حل المعادلة التفاضلية لحركة الزنبرك

عزيزي الدارس،

في البند السابق بينا أن المعادلة التفاضلية لحركة زنبرك مهتز تعطى بالعلاقة:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

وعلى فرض أن الاهتزازات حرة $F(t) = 0$, $a = 0$ أوجدنا أن المعادلة التفاضلية هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

ونجد حل هذه المعادلة التفاضلية بإيجاد المعادلة المميزة.

$$s^2+\frac{k}{m}=0$$

$$s^2 = \frac{-k}{m} \Rightarrow s = \mp \sqrt{\frac{k}{m}} \quad i$$

$$s_1 = 0 - \sqrt{\frac{k}{m}}\ i, \qquad s_2 = 0 + \sqrt{\frac{k}{m}}\ i$$

الحل العام لحل المعادلة التفاضلية كما مر سابقاً في الوحدة الثالثة هو:

$$x = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

وحيث أن الكتلة (m) تبدأ حركتها عند اللحظة ($t = 0$) وبسرعة ابتدائية قدرها v_0 من الموقع الابتدائي x_0 ، يكون لدينا الشرطان الابتدائيان: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$, $x(0) = x_0$

نجد منهما c_1 ، c_2 (أي أننا نجد الحل لخاص للمعادلة التي تمثل حركة زنبرك).

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المعادلة التفاضلية التي تنظم حركة زنبرك.

◄◄ مثال (1)

علقت كرة فولاذية وزنها 20 نيوتن من زنبرك فتمدد الزنبرك بسبب ذلك مقدار 0.5 متر من وضعه الأصلي. دفعت الكرة إلى الحركة بدون سرعة ابتدائية بإزاحتها مسافة 0.15 متر فوق موضعها التوازني، أوجد موقع الكرة عند $t = \frac{\pi}{12}$ ثانية على فرض عدم وجود مقاومة للهواء.

الحل:

بما أن حركة الزنبرك حركة حرة، فإن المعادلة التفاضلية التي تحكم هذه الحركة هي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

إن القوة المسؤولة عن تمدد الزنبرك هي وزن الكرة 20 نيوتن إذن F= -20 N وحسب قانون هوك نجد أن k تحسب من خلال المعادلة:

$-20 = -k(0.5) \Rightarrow$ k = 40 N / متر

إذن المعادلة التفاضلية هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{40}{2}x=0$$

حيث: $m=\frac{F}{g}=\frac{20}{10}=2$

نجد الجذور للمعادلة المميزة:

$$m_1=0-\sqrt{20}i,\qquad m_2=0+\sqrt{20}i$$

الحل العام هو:

$$x=c_1\cos\sqrt{20}t+c_2\sin\sqrt{20}t$$

يوجد لدينا في المسألة شرطان ابتدائيان هما:

$x(0)=-0.15$ متر $v(0)=0$

$$x(0)=c_1+0=-0.15\Rightarrow c_1=-0.15$$

$$\frac{dx}{dt}=v=-\sqrt{20}\,c_1\ \sin\ \sqrt{20}t+\sqrt{20}c_2\cos\sqrt{20}t$$

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0}=v(0)=\sqrt{20}c_2=0\Rightarrow c_2=0$$

إذن

$$x=-0.15\cos\sqrt{20}t$$

موقع الكرة عند $t=\frac{\pi}{12}$ يساوي: $x\left(\frac{\pi}{12}\right)=-0.15\cos\left(\sqrt{20}\,\frac{\pi}{12}\right)$

◄◄ مثال (2)

يعلق وزن قدرة 20 Lb من نهاية زنبرك رأسي فيتسبب بتمدد الزنبرك بمقدار 6 بوصة، أوجد موضع الوزن عند أي لحظة، على فرض عدم وجود قوى خارجية وبإهمال مقاومة الهواء تماماً، علماً بأن الوزن يشد في البدء من موضع توازنه مسافة 2 بوصة نحو الأسفل ثم يترك.

الحل:

حركة الزنبرك حركة حرة، والمعادلة التفاضلية التي تحكم هذه الحركة هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

إن القوة المسؤولة عن تمدد الزنبرك هي وزن الكرة 20 Lb إذن F= -20 Lb وحسب قانون هوك نجد أن k تحسب من خلال المعادلة:

$$-20k=-k\frac{1}{2}\Rightarrow k=40 \text{ قدم} \quad /Lb$$

ونحسب m من خلال المعادلة: $m=\frac{F}{g}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$

إذن المعادلة التفاضلية التي تحكم هذه الحركة هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{40}{\frac{5}{8}}x=0\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+64x=0$$

نجد الجذور للمعادلة المميزة:

$$s^2+64=0\Rightarrow s=\mp 8i$$

$$s_1=0-8i,\quad s_2=0+8i$$

الحل العام هو:

$$x=c_1\cos 8t+c_2\sin 8t$$

لكن ومن المسألة: $\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$ ، $x(0)=\frac{1}{6}$

بالتعويض في x، $\frac{dx}{dt}$ نجد c_1 ، c_2 .

$$x(0)=c_1+0=\frac{1}{6}\Rightarrow c_1=\frac{1}{6}$$

$$\frac{dx}{dt}=-8c_1\sin 8t+8c_2\cos 8t$$

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0}=8c_2=0\Rightarrow c_2=0$$

إذن

$$x = \frac{1}{6}\cos 8t$$

◄◄ مثال (3)

أوجد معادلة الحركة الخاصة بكتلة قدرها m مربوطة إلى زنبرك معلق من نقطة ثابتة، على فرض أن الاهتزازات حرة وإن مقاومة الهواء معدومة.

الحل:

المعادلة التفاضلية التي تحكم هذه الاهتزازات هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

حيث k هو ثابت الزنبرك.

المعادلة المميزة $s^2 + \frac{k}{m} = 0$

بإيجاد الجذور نجد أن: $s^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow s = \mp\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي:

$$x = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

لكن عند $(t = 0)$، $x(0) = x_0$ ، $v(0) = v_0$ بالتعويض نجد أن $c_1 = x_0$ ، $c_2 = v_0\sqrt{m/k}$ إذن معادلة الحركة الخاصة هي:

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

◄◄ مثال (4)

يتمدد زنبرك مسافة 0.7 م زيادة على طوله الطبيعي بسبب كتلة مقدارها (10) كجم مربوطة إليه، تدفع الكتلة إلى الحركة من موقع التوازن بسرعة ابتدائية متجهة نحو الأعلى قدرها 1م/ث أوجد معادلة الحركة الناتجة علماً بأن مقاومته تساوي $-90\frac{dx}{dt}$ نيوتن.

الحل:

لدينا في هذه المسألة $m=15$ ، $a=90$ ، $k=140$ ، $F(t)=0$ بتعويض هذه القيم في المعادلة التفاضلية (1) وهي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{90}{10}\frac{dx}{dt}+14x=0$$

لحل هذه المعادلة نجد المعادلة المميزة:

$$s^2+\frac{90}{10}s+14=0$$
$$(s+2)(s+7)=0$$
$$s_1=-2,\ s_2=-7$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$x=c_1e^{-2t}+c_2\ e^{-7t}$$

لكن لدينا شرطان لإيجاد c_1, c_2 وهما:

$$x(0)=0,\quad \frac{dx}{dt}|_{t=0}=v(0)=-1$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن:

$$x(0)=c_1+c_2=0. \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{dx}{dt}=-2c_1\ e^{-2t}-7c_2\ e^{-7t}$$

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-2c_1-7c_2=-1. \quad \text{.....(2)}$$

بحل المعادلتين نجد أن: $c_1 = -\frac{1}{5}$ ، $c_2 = \frac{1}{5}$

معادلة الحركة:

$$x(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{1}{5} e^{-7t}$$

ملاحظة :

في المثال السابق، وجدنا أن المعادلة المميزة لها جذران حقيقيان، في هذه الحالة يقال أن حركة الزنبرك مفرطة في التخامد لأنه عندما x تقترب من الصفر $(x \to 0)$ فإن $(t \to \infty)$ فالحركة هنا تسمى حركة عابرة.

مثال (5)

تربط كتلة قدرها $\frac{1}{4}$slug إلى زنبرك، يتمدد الزنبرك بسبب ذلك مسافة 1.28 قدم عن طوله الطبيعي، تدفع الكتلة إلى الحركة من موقع التوازن بسرعة ابتدائية تساوي 4 قدم/ث متجه نحو الأسفل.

1) أوجد معادلة الحركة للكتلة علماً بأن مقاومة الهواء تساوي $-2\frac{dx}{dt}$ Lb .

2) صنف الحركة في هذه المسألة.

الحل:

1) لدينا في هذه المسألة $m = \frac{1}{4}$ ، $a = 2$ ونجد k وزن الكتلة $\left(\frac{1}{4}\right)(32) = 8$ Lb

وحسب قانون هوك: $-8 = -k(1.28) \Rightarrow k = 6.25$ Lb / قدم

بتعويض هذه القيم في المعادلة التفاضلية (1) وهي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2}{1/4}\frac{dx}{dt}+\frac{6.25}{1/4}x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+25x=0$$

المعادلة المميزة:

$$m^2+8m+25=0$$

$$m=\frac{-8\mp\sqrt{64-4(25)(1)}}{2}$$

$$m=\frac{-8\mp\sqrt{-36}}{2}=\frac{-8\mp6i}{2}=-4\mp3i$$

$$m=-4\mp3i,\ m_1=-4-3i\ ,\ m_2=-4+3i$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$x=e^{-4t}\left(c_1\cos3t+c_2\sin3t\right)$$

لدينا الشرطان الابتدائيان: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v(0)=4$ ، $x(0)=0$

$$x(0)=c_1+0=0\Rightarrow c_1=0$$

$$\frac{dx}{dt}=e^{-4t}\left(-3c_1\sin3t+3c_2\cos3t\right)+\left(-4e^{-4t}\left(c_1\cos3t+c_2\sin3t\right)\right)$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-4c_1+3c_2=4$$

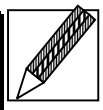
$$c_2=4/3$$

معادلة الحركة للكتلة هي:

$$x=\frac{4}{3}e^{-4t}\sin3t$$

2) بما أن جذري المعادلة المميزة عقدية، فحركة الزنبرك قاصرة التخامد، إذن الحركة هنا حركة عابرة.

التدريب (1)



(1) تربط كتلة قدرها $\frac{1}{4}$ كجم إلى زنبرك ثابته يساوي 1. نيوتن/متر .تدفع الكتلة إلى الحركة بإزاحتها لمسافة 0.5 متر نحو الأسفل وتمنحها سرعة ابتدائية متجهة نحو الأعلى تساوي 0.5 متر/ ث أوجد:

أ- الحركة التالية لكتلة علماً بأن قوة مقاومة الهواء $-1\frac{dx}{dt}$ نيوتن.

ب- صنف الحركة في هذه المسألة.

(2) يعلق وزن قدره 6.25 نيوتن من نهاية زنبرك رأسي فيتمدد الزنبرك بسبب ذلك مسافة 625 0.15 متر زيادة على طوله الطبيعي.

نفرض أن القوة الخارجية الوحيدة هي قوة مخمدة تساوي av.

حيث v هي السرعة اللحظية مقاسة بالأمتار لكل ثانية و a ثابت، أوجد المعادلة التي تحكم هذه الاهتزازات علماً بأن a = 12.5 kg /s وأن الكتلة تدفع إلى الحركة بإزاحتها 0.05 متر أسفل موقع توازنها؟

(3) تعلق كتلة مقدارها 10 kg بزنبرك ثابته يساوي 140 N/m تدفع الكتلة إلى الحركة نحو الأعلى من موقع التوازن بسرعة ابتدائية تساوي 1 m/s وبقوة خارجية معطاة بالعلاقة $F(t)=5\sin t$ أوجد معادلة الحركة للكتلة، علماً بأن مقاومة الهواء تساوي $-90\frac{dx}{dt}N$.

أسئلة التقويم الذاتي (2)



1. يعلق وزن قدرة 20 Lb من نهاية زنبرك رأسي فيتمدد الزنبرك بسبب ذلك مسافة 6 in زيادة على طوله الطبيعي، نفرض أن القوة الخارجية الوحيدة تساوي av حيث v السرعة اللحظية قدم/ث أوجد المعادلة التي تنظم الاهتزازات علماً بأن a = 10 slug /s .

2. تعلق كتلة مقدارها 1 slug بزنبرك ثابته 8 Lb/ft تدفع الكتلة إلى الحركة من موقع التوازن وبدون سرعة ابتدائية بفعل قوة خارجية تساوي:

$$F(t) = 16 \cos 4t$$

أوجد الحركة التالية للكتلة علماً بأن مقاومة الهواء تساوي $-4\frac{dx}{dt}$ Lb .

3. تربط كتلة وزنها 64 Lb إلى زنبرك يساوي ثابته k= 50 Lb/ft وتوضع في حالة السكون، أوجد موضع الكتلة عند أي لحظة t إثر تطبيق القوة $4\sin 2t$ عليها.

4. تعلق كتلة تساوي 20g من نهاية زنبرك رأسي فيتمدد الزنبرك بسبب ذلك مسافة قدرها 4cm بالمقارنة مع طوله الطبيعي، وعلى فرض عدم وجود قوى خارجية وعدم وجود مقاومة للهواء. أوجد المعادلة التي تمثل موضع الكتلة عند أي لحظة t علماً بأن الكتلة تزاح مسافة قدرها 1 cm تحت موضع توازنها وتدفع متجهة نحو الأعلى بسرعة ابتدائية تساوي $\frac{1}{2}\text{cm/s}$.

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

في نهاية هذه الوحدة، دعنا نستعرض أهم ما ورد من فيها من مفاهيم:

- قانون هوك ينص على أن القوة المرجعة للزنبرك تتناسب مع استطالته.

- المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة زنبرك مربوطة به كتلة يتحرك كي يبلغ وضع التوازن هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

- حل المعادلة التفاضلية يعتمد على الجذور للمعادلة المميزة.

بهذا عزيزي الدارس نكون قد أنهينا هذه الوحدة، وكذلك انتهى هذا المقرر، والذي نرجوه أن تكون قد حققت الأهداف التي رسمناها في بداية المقرر، وكذلك أهداف كل وحدة على حدة.

نؤكد في الختام على ما ابتدأنا به في الوحدات السابقة، بأنك تستطيع الاستعانة بمشرفك الاكاديمي في أي وقت لاستيعاب الأفكار والمفاهيم الواردة هنا، وإياك أن تتجاوز هذه الصفحة إلا وأنت مدرك تماما لما ورد في هذا المقرر بوحداته كافة من مفاهيم ونظريات.

وفي الختام: أوصيك بأن تتعلم من أجل الفهم والاستيعاب، لا من أجل أن تحصل على درجة مرتفعة في الاختبارات التي تعقدها الجامعة، فهذا المقرر يتناول موضوعا من أهم موضوعات الرياضيات، وستجده يطرق بابك في مقررات أخرى كثيرة، ولديك فرصة اليوم أكثر من أي وقت آخر لاستيعاب المفاهيم الواردة فيه، والاستزادة من مراجع أخرى إن كان لديك وقت كاف لذلك.

وأمنياتنا لك بالتوفيق دائماً.

إجابات التدريب

تدريب (1)

(1)

أ- من المسألة لدينا $m=\frac{1}{4}$ ، $a=1$ ، $k=1$ ، $F(t)=0$

بتعويض هذه القيم في المعادلة التفاضلية (1) وهي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=0$$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية:

$$m^2+4m+4=0$$

$$(m+2)(m+2)=0\Rightarrow m_1=m_2=m=-2$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x=c_1e^{-2t}+c_2\,te^{-2t}$$

لدينا الشرطان الابتدائيان $x(0)=0.5$ ، $\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-0.5$

$$x(0)=c_1+0=2\Rightarrow c_1=0.5$$

$$\frac{dx}{dt}=-2c_1e^{-2t}+c_2\,t(-2)e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-2c_1+c_2=-0.5\Rightarrow c_2=0.5$$

معادلة الحركة التالية هي:

$$x(t)=2e^{-2t}+2te^{-2t}$$

ب- لأن المعادلة المميزة لها جذران حقيقيان ومتساويان فإن حركة الزنبرك حركة متخامدة بشكل حرج.

(2) من المسألة لدينا $mg = 6.25$ ومنها $m = \frac{6.25}{10} = 0.625$

وحسب قانون هوك $6.25 = k \times 0.15625$

ومنها $k = 40$ ، $F(t) = 0$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{12.5}{0.625}\frac{dx}{dt} + \frac{40}{0.625}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية:

$$m^2 + 20m + 64 = 0$$

$$(m+16)(m+4) = 0$$

$$m_1 = -16,\ m_2 = -4$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$$

لدينا من المسألة شرطان ابتدائيان: $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0,\ x(0) = 1/20$

نعوض في x ونحصل على:

$$x(0) = c_1 + c_2 = \frac{1}{20} \quad \ldots\ldots (1)$$

أيضاً

$$\frac{dx}{dt} = -4c_1 e^{-4t} - 16c_2 e^{-16t}$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -4c_1 - 16c_2 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نجد أن:

$$c_1 = 1/15, \qquad c_2 = -\frac{1}{60}$$

إذن حركة الكتلة التالية تعطى بالعلاقة:

$$x = \frac{1}{15}\, e^{-4t} - \frac{1}{60}\, e^{-16t}$$

(3) من المسالة $m = 10$ ، $k = 140$ ، $a = 90$ ، $F(t) = 5\sin t$،

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}\,x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 14x = \frac{1}{2}\sin t$$

هذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة لحل هذه المعادلة

(أ) نجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 14x = 0$$

المعادلة المميزة:

$$m^2 + 9m + 14 = 0$$

$$(m+2)(m+7) = 0$$

$$m_1 = -2,\ m_2 = -7$$

$$x_p = c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^{-7t}$$

(ب) نجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 14x = \frac{1}{2}\sin t$$

نفرض أن هذا الحل هو:

$$x_c = A_1 \sin t + A_2 \cos t$$

$$\frac{dx_c}{dr} = A_1 \cos t - A_2 \sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = -A_1 \sin t - A_2 \cos t$$

$$-A_1\ \sin t-A_2\ \cos t+9\,A_1\cos t-9\,A_2\ \sin t+14\,A_1\sin t+$$
$$14\,A_2\ \cos t=\frac{1}{2}\sin t$$

$$(13\,A_1-9\,A_2)\sin t+(13\,A_2+9\,A_1)\ \cos t=\frac{1}{2}\sin t$$

$$13\,\mathrm{A}_1-9\mathrm{A}_2=\frac{1}{2}$$

$$13\,\mathrm{A}_2+9\mathrm{A}_1=0$$

بحل المعادلتين نجد أن:

$$\mathrm{A}_1=\frac{13}{500},\ \mathrm{A}_2=-\frac{9}{500}$$

إذن الحل الخاص هو:

$$x_p=\frac{13}{500}\sin t-\frac{9}{500}\cos t$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$x=c_1\,e^{-2t}+c_2\,e^{-7t}\ +\frac{13}{500}\sin t-\frac{9}{500}\cos t$$

لدينا شرطان أساسيان وهما:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{\ t=0}\ =-1,\ x(0)=0$$

بالتعويض نجد أن:

$$x(0)=c_1\ +c_2-\frac{9}{500}=0$$

$$c_1+c_2\ =\frac{9}{500}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{dx}{dt}=-\ 2\,c_1\ e^{-2t}\ -7\,c_2\ e^{-2t}\ +\frac{13}{500}\cos\ t\ +\frac{9}{500}\ \sin\ t$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{\ t=0}\ =-\ 2c_1-7c_2+\frac{13}{500}=-1$$

$$2c_1 - 7c_2 = -\frac{513}{500} \quad \text{.....(2)}$$

بحل المعادلتين نجد أن:

$$c_2 = -\frac{55}{500},\ c_1 = -\frac{64}{500}$$

$$x(t) = \frac{64}{500}\, e^{-2t} - \frac{55}{500}\, e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

(1−4) هذه الأسئة مباشرة وحسب ما ورد في الوحدة، ولا تحتاج إلى إجابات.

5. القوة المؤثرة هي: (نيوتن) F= -200

وحسب قانون هوك - k(1) = −200

ومنها نجد أن: (نيوتن/متر) k = 200 . (انتبه للوحدات)

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1. نجد المعادلة التفاضلية من خلال معطيات السؤال فتكون $\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 64\ x = 0$

ثم نجد الجذور للمعادلة المميزة:

$$m^2 + 16m + 64 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -8$$

فيكون الحل العام هو:

$$x(t) = c_1\ ^{-8t} + c_2\, t e^{-8t}$$

لدينا من المسألة شرطان أساسيان وهما:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\ ,\ x(0)=1/6$$

فنحصل منهما على:

$$c_2=8/6\ ,c_1=1/6$$

$$x(t)=\frac{1}{6}\,e^{-8t}+\frac{8}{6}t\,e^{-8t}$$

(2) من معطيات المسألة، $F(t)=16\cos 4t\quad a=4\ ،\ k=1\ ،\ m=1$

ثم نكون المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+8x=16\cos 4t$$

هذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة حلها:

$$x(t)=c_1\,e^{-2t}\cos 2t+c_2\,e^{-2t}\sin 2t+\frac{4}{5}\sin 4t-\frac{2}{5}\cos 4t$$

من المسالة: $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0,\ x(0)=0$

منها نجد أن: $c_2=\frac{-6}{5},\ c_1=\frac{2}{5}$

إذن المعادلة التي تمثل الحركة:

$$x(t)=\frac{2}{5}\,e^{-2t}\cos 2t-\frac{6}{5}\,e^{-2t}\sin 2t+\frac{4}{5}\sin 4t-\frac{2}{5}0.54t$$

(3) من معطيات السؤال نجد أن معادلة الحركة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+25x=2\sin 2t$$

هذه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة حلها:

$$x=c_1\cos 5t+c_2\sin 5t+\frac{2}{12}\sin 2t$$

بتطبيق الشرطين: $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=v(0)=0,\ x(0)=0$

نجد أن: $c_2 = -\frac{4}{105},\ c_1 = 0$

ومنه نجد أن معادلة الحركة هي: $x = -6.038 \sin 5t + 0.095 \sin 2t$

(4) حسب قانون هوك $20(980) = k(4)$ ومنها نجد أن $k = 4900$ من المسألة $m = 20g$، $x(0) = 1cm$ ، $v(0) = -\frac{1}{2}$ (لاحظ أن اتجاه السرعة الابتدائية نحو الأعلى) بالتعويض في المعادلة نجد أن المعادلة التفاضلية التي تمثل معادلة الحركة.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 245x = 0$$

بحل المعادلة التفاضلية نجد أن x تعطى بالعلاقة:

$$x = \cos\sqrt{245t} - 0.03194 \sin \sqrt{245t}.$$

مسرد المصطلحات

عزيزي الدارس، نظرا لطبيعة هذا المقرر، ولعدم الرغبة في إظهار معادلات رياضية في مسرد المصطلحات، لذا نقتصر هنا على ذكر المصطلح العربي وما يقابله من المصطلح الانجليزي، وذلك لمساعدة الدارس في الرجوع إلى المراجع الأجنبية، أو مواقع الإنترنت.

Free vibrations	**اهتزازات حرة**
Damped Forced vibrations	**اهتزازات حرة متخامدة**
Newton's Second law of Motion	**قانون نيوتن في الحركة**
Weight	**وزن**
Hook's Law	**قانون هوك**
Spring Constant	**ثابت الزنبرك**
Spring vibration	**اهتزاز الزنبرك**
Mass	**كتلة**
Damping Force	**قوة متخامدة**
Frequency	**تردد**
Critically damped	**متخامد بشكل حرج**
Acceleration due to gravity	**تسارع الجاذبية**
Release	**يتحرر**
Spring Force	**قوة الزنبرك**

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية

1. رشدي خليل، **مقدمة في المعادلات التفاضلية**. عمان: دار المناهج، 2003.
2. فرانك أيرز، **نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية**. القاهرة: الدار الدولية، 1991.
3. قيصر فيازمينسكي، **المعادلات التفاضلية**. دمشق: المركز العربي للتعريب، 1995.
4. ريتشارد برولسون، **2500 مسألة محلولة في المعادلات التفاضلية**. سلسلة المسائل المحلولة شوم، ترجمة فايز فوق العادة. بيروت: أكاديميا إنترناشيونال، 1997.

المراجع الأجنبية

1. William E. Boyce and Richard C. Diprima, **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1977.
2. Garret Birkhoff and Gian-carlo Rota, **Ordinary Differential Equations**. 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1978.
3. Ray while, **Differential Equations**. New York: Mc Graw-Hill Inc, 1979.
4. Shepley L.Ross, **Introduction To ordinary Differential Equations.** 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, 1980.