
الوحدة الأولى
المستقيم والدائرة
والقطع المخروطي

محتويات الوحدة

الموضـــوع	رقم الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
أهداف الوحدة	
1. المستوى الديكارتي	
1.1 النظام الإحداثي المتعامد	
2.1 المسافة بين نقطتين	
2. الخط المستقيم	
1.2 تعريف الخط المستقيم	
2.2 ميل الخط المستقيم	
3.2 معادلة الخط المستقيم	
4.2 معادلة الخط المستقيم المار بين نقطتين	
5.2 حالات خاصة للخط المستقيم	
6.2 الصيغة العامة للخط المستقيم	
3. التوازي والتعامد	
1.3 التوازي	
2.3 التعامد	
4. البعد بين نقطتين وخط مستقيم	
5. المحل الهندسي	
6. الدائرة	
1.6 صور وعادلة الدائرة	

2.6 مماس الدائرة	
7. القطع المخروطي	
الخلاصة	
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	
إجابات التدريبات	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس، مرحباً بك في هذه الوحدة الأولى من مقرر الهندسة التحليلية وهي بعنوان "المستقيم والدائرة والقطع المخروطي".

إن لهذه أهمية كبيرة فمنذ القدم عرف اليونان المستقيم واستخدموه للتعبير عن الاعداد الحقيقية الموجبة. ثم جاء ديكارت الذي عمل على تمثيل نقاط المستوى R^2 وبهذا الاسلوب أصبح من السهل وصف الخط المستقيم بمعادلة جبرية والتي لها كثير من التطبيقات في العلوم الطبيعية والإنسانية كالتمثيل البياني للعلاقات الخطية والمتباينات والبرمجة الخطية ويرها.

أما القطوع المخروطية فقد استعملت لحل المعادلات التكعيبية ودراسة حركة الكواكب.

وقد ركزنا في هذه الوحدة على الناحية النظرية، أمّا الناحية التطبيقية فقد تركناها للوحدات القادمة من هذا المقرر.

وقد أوردنا في هذه الوحدة الكثير من الأملة المحلولة لتسهل على الدارس دراسة هذه الوحدة.

كما وضعنا تدريبات متنوعة وأسئلة للتقويم الذاتي وارفقنا حلولاً لها تقع في نهاية الوحدة علاوة على الأشكال والرسومات التوضيحية.

وأخيراً نتمنى لك التوفيق في فه هذه الوحدة.

أهداف الوحدة



يتوقع منك أخي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1- **ترسم** المستوى الديكارتي بمحورية x و y.

2- **تعيّن** النقط في المستوى الديكارتي.

3- **تشتق** قانون المسافة بين نقطتين في المستوى، وتجري تطبيقات عليه.

4- **تعرّف** ميل الخط المستقيم.

5- **تشتق** معادلات الخط المستقيم المختلفة.

6- **تحدد** شروط توازي مستقيمين وتعامدهما، وتجد ميل مستقيم يوازي مستقيم أخر أو يعامده.

7- **تشتق** قانون بعد نقطة عن مستقيم معلوم وتطبيقه.

8- **تشرح** مفهوم المحل الهندسي.

9- **تشتق** معادلة الدائرة بصورها المختلفة.

10- **تشتق** معادلة مماس الدائرة.

11- **تحسب** طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها.

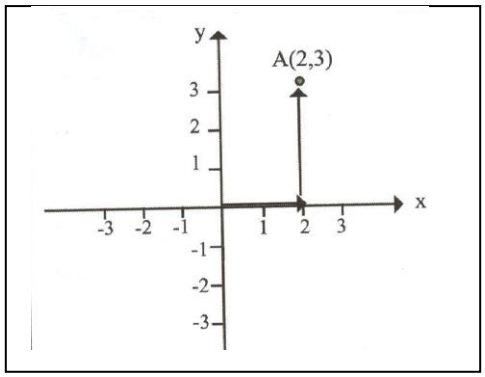
12- **تتعرف** مفهوم القطع المخروطي.

1.المستوى الديكارتي

1.1 النظام الإحداثي المتعامد

عزيزي الدارس، لقد درست في مراحل التعليم السابقة النظام الإحداثي المتعامد وعرفت أنه يتكون من تقاطع محورين كما في الشكل (1).

الشكل (1)



حيث أن المحور الأفقي يسمى x والمحور العمودي يسمى y ونقطة تقاطع المحورين تسمى نقطة الأصل، والمستوى الناتج يسمى المستوى الديكارتي أو المستوى الإحداثي.

كل نقطة في المستوى الإحداثي تقابل زوجاً مرتباً من الأعداد الحقيقية، مسقطة الأول يسمى الإحداثي x ومسقطة الثاني يسمى الإحداثي y، ويرمز له (x,y) وكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يقابل نقطة في المستوى وكل نقطة في المستوى تمثل زوجاً مرتباً.

لتعيين النقطة التي تمثل الزوج المرتب A(2,3) في المستوى الإحداثي نبدأ من نقطة الأصل ونتحرك إلى اليمين بمقدار وحدتين، ثم نتحرك إلى الأعلى بمقدار (3) وحدات لتصل إلى النقطة المطلوبة A كما هو موضح بالشكل (1).

مثال (1):

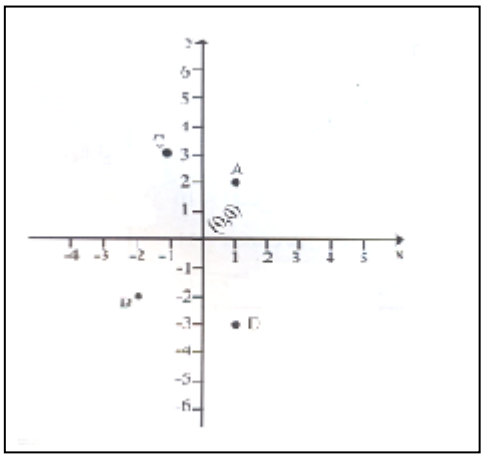
عين على المستوى الديكارتي النقاط التالية:

O(0,0),A(1,2),B(-2,-2),C(-1,3),D(1-3)

الحل:

أنظر الشكل (2):

الشكل (2)



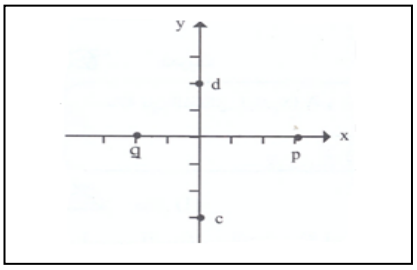
النقطة O(0,0) تسمى نقطة الأصل وهي نقطة تقاطع المحورين xوy

مثال (2):

عين النقاط p(3,0), q(-2,0), d(0,2), c(0,-3) في المستوى الديكارتي (ماذا تستنتج؟).

الحل: أنظر الشكل (3)

الشكل (3)



لاحظ ن النقاط تقع على محور x أو على محور y بصور عامة:

؟ النقطة التي تقع على محور x تكون إحداثياتها (x,0).

؟ النقطة التي تقع على محور y تكون إحداثياتها (0,y)

تدريب (1)



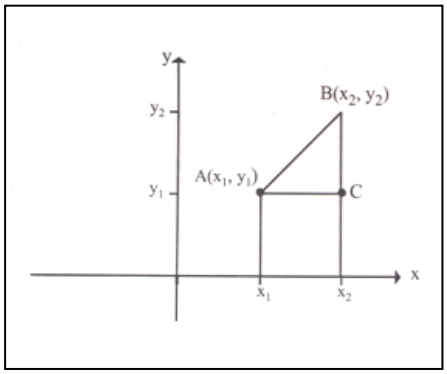
ارسم محورين متعامدين وعيّن في المستوى الديكارتي النقط التالية:

a(4,-1), b(4,3), c(0,3), d(-5,-4)

1.2 المسافة بين نقطتين

افرض أن $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ نقطتان في المستوى الكارتيزي كما في الشكل (4):

الشكل (4)



لحساب المسافة بين النقطتين B,A, أي طول النقطة المستقيمة AB نلاحظ أن المثلث ABC قائم الزاوية في C وأن:

$AC = X_2 - X_1$, $BC = Y_2 - Y_1$

و بتطبيق نظرية فيساغورس نجد:

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2}$$

وتعريف العلاقة الأخيرة بقانون المسافة بين نقطتين.

تعريف:

المسافة بين نقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2}$$

مثال (1):

احسب المسافة بين النقطتين A(2,3) , B(4,5)

الحل:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{8}$$

تدريب (2)



إذا كانت A(0,1) أي النقط التالية أقرب إلى A:
B(-3,-1) , C(1,1) , D(3,2)

مثال (2):

برهن أن المثلث الذي رؤسه A(-2,-2) , B(1,-2) , C(1,3) قائم الزاوية.

الحل:

$$AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2)-(-2))^2} = 3$$

$$AC = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(1-1)^2 + (3-(-2))^2} = 5$$

نلاحظ أن:

$$(AB)^2 = 9$$
$$(AC)^2 = 34$$
$$(BC)^2 = 25$$

إذاً: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

وبالتالي فالمثلث ABC قائم الزاوية.

مثال (3):

أثبت أن النقاط A(6,1) , B(5,2) , C(3,6)

الحل:

$$AB = \sqrt{(6-6)^2 + (2-1)^2} = 1$$
$$AC = \sqrt{(6-6)^2 + (3-1)^2} = 2$$
$$BC = \sqrt{(6-6)^2 + (3-2)^2} = 1$$

نلاحظ أن AC = AB + BC

إذن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

تدريب (3)

إذا كانت $ac < (ab + bc)$

ماذا يكون الشكل الناتج عند وصل النقاط الثلاث a , b , c معاً.

أسئلة تقويم ذاتي

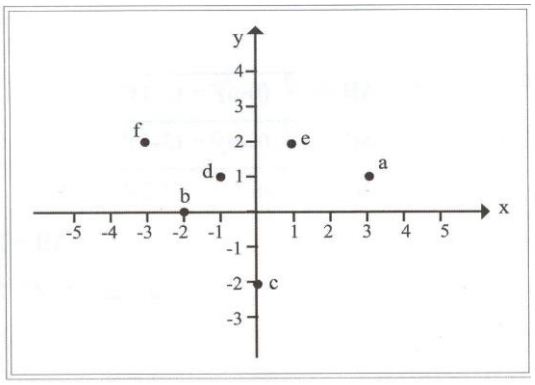
1- إذا كانت A(-1,5) , B(5,-3) , C(-7,-3) أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين؟

2- إذا كانت A(2,5) , B(-3,-1) , C(1,-4) اثبت أن النقاط A , B , C لا تقع على استقامة واحدة؟

3- انظر في الشكل (5) ثم حدد إحداثيات كل من النقاط التالية:

F , e , d , c , b , a

الشكل (5)



4- إذا كانت $F(3,5), L(8,7), H(7,3), K(2,1)$ أثبت أن الشكل khlf متوازي أضلاع.

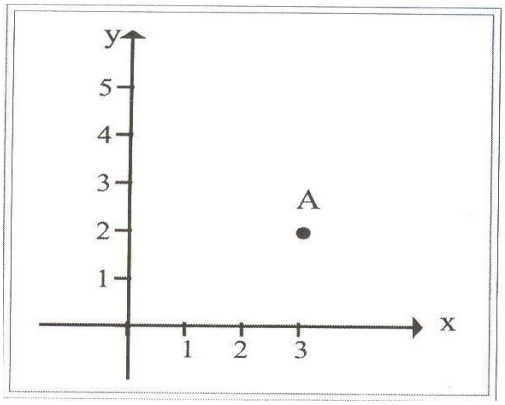
1. الخط المستقيم

1.2 تعريف الخط المستقيم

لقد درسنا المستوى الديكارتي وقلنا أن أي زوج مرتب (X,Y) يمثل نقطة في المستوى.

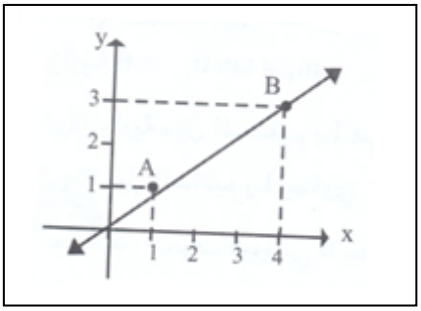
فلو أخذنا النقطة(3,2)A فإنها تمثل بنقطة في المستوى كما في الشكل (6).

الشكل (6)



والآن خذ النقطتين A(1,1), B(4,3) كما في الشكل (7):

الشكل (7)



لو وصلنا النقطتين B,A مع بعضهما لنتجت لدينا القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

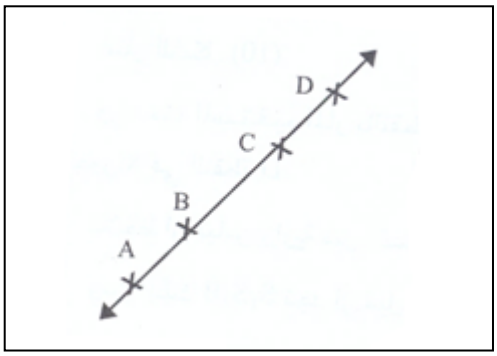
ولو أكملنا أمتداد القطعة AB من جهة A إلى المالانهاية ومن جهة B إلى المالانهاية لنتج إلينا الخط المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

إذن :

فالخط المستقيم: هو مجموعة لا نهائية من النقاط المتصلة معاً والتي تقع على استقامة واحدة.

ملاحظة: القطعة المستقيم $\overline{AB}$ هي جزء من الخط المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ وهي تمثل هذا الخط فميل القطعة $\overline{AB}$ هو نفسه ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ كما سيأتي لاحقاً.

الشكل (8)



ويتم تعريف الخط المستقيم بنقطتين عليه، فنقول المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو نفسه المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ وهو نفسه المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ المبين في الشكل التالي، وذلك لأن النقاط D,C,B,A واقعة على ذلك الخط المستقيم.

2.2 ميل الخط المستقيم

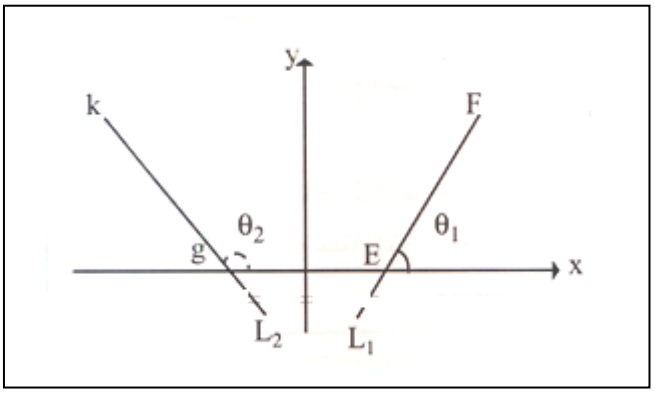
تعريف:

(أ) زاوية ميل المستقيم هي أصغر زاوية موجبة يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب X ونقيسها في الإتجاه المعاكس لإتجاه عقارب الساعة.

(ب) ميل الخط المستقيم يساوي ظل زاوية ميله.

بالنظر إلى الشكل (9) نجد أن زاوية ميل المستقيم L_1 هي XEF والتي قياسها $\emptyset_1$ وبالتالي فإن ميل المستقيم L_1 يساوي ظل الزاوية $m_1 = \tan \emptyset_1 = \emptyset$

وأن زاوية ميل المستقيم L_2 هي $\emptyset_2$ وبالتالي فإن ميل المستقيم L_2 يساوي $m_2 = \tan \emptyset_2$



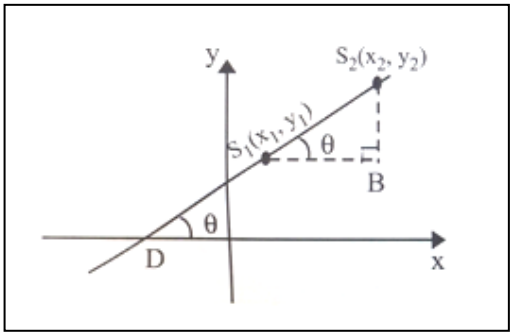
ملاحظة:

الحرف اليوناني $\emptyset$ يُلفظ هكذا ثيتا.

والآن نريد إيجاد علاقة لحساب ميل الخط المستقيم المار بنقطتين. افرض أن $S_1(x_1,y_1), S_2(x_{2,}y_2)$ نقطتين في المستوى الديكارتي.

انظر الشكل (10)

الشكل (10)



ورسمنا المستقيم المار بالنقطتين S_1 و S_2 ليقطع محور X في النقطة D

نلاحظ أن قياس زاوية ميل المستقيم هي Ø، لكن Ø تساوي قياس B $< S_2S_1$ (لماذا؟)

ومن المثلث B S_2S_1 نجد أن ميل المستقيم يساوي $m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{y_2 y_1}{x_2 - x_1}$$

وتعرف العلاقة الأخيرة بميل الخط المستقيم المار بنقطتين.

مثال (1):

أوجد ميل المستقيم المال بالنقطتين (8,7) , (4,2)

الحل:

باستخدام العلاقة $m = \frac{y_2 y_1}{x_2 - x_1}$

نجد أن $m\frac{7-2}{8-4} = \frac{5}{4}$

مثال (2):

جد كلاً من ميل المستقيم وزاوية ميله إذا علمت أنه يمر بالنقطتين (5,7) , (-5,-3) .

الحل:

من العلاقة $m=\frac{y_2 y_1}{x_2-x_1}$

نجد أن $m=\frac{7-(-3)}{5-(-5)}$

وبالتالي $m=\frac{7+3}{5+5}=1$

لكن $m=\tan\theta$

إذن $\tan\theta=10$

إذن $\theta-\tan^{-1}=45^{o}$

ملاحظة:

العبارة $\emptyset=\tan^{-1}1$ تعني "$\emptyset$ الزاوية التي ظلها يساوي 1" وتعلم من حساب المثلثات أن أصغر زاوية موجبة ظلها يساوي 1 هي 45° .

تدريب (4)



أوجد كلاً من ميل المستقيم وزاوية ميله في الحالات التالية:

(A)يمر بالنقطتين (8,-9) , (3,-4) .

(B)يمر بالنقطتين (-4,6) , (-4,3).

(C)يمر بالنقطتين (13,5) , (13,7) .

مثال (2):

إذا كانت A(8,6) , B(5,h) وكان ميل الخط المستقيم AB يساوي 12 فما قيمة h .

الحل:

نطبق العلاقة العامة $m = \frac{y_2 y_1}{x_2 - x_1}$

بالضرب التبادلي $12 - \frac{h-6}{5-8} \Rightarrow 12 = \frac{h-6}{-3}$

$$-36 - h - 6 \Rightarrow h = -30$$

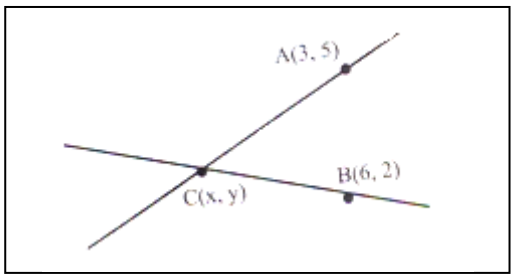
مثال (3):

إذا كانت (6,2) , A(3,5) وكان المستقيمان AC , BC متقاطعان في النقطة C ، جد إحداثيي C إذا كزان ميل AC يساوي 1 وميل BC يساوي 2.

الحل:

أنظر الشكل (11)

الشكل (11)



نفرض أن ميل المستقيم AC هو m_{AC}

نفرض أن ميل المستقيم BC هو m_{BC}

ونفرض أن إحداثيي النقطة C هما (x,y)

إذاً: $m_{AC} = \frac{y-5}{x-3} = 1 \Rightarrow y-5 = x-3$

$y = x + 2$.....(1)

$m_{BC} = \frac{y-2}{x-6} = 2 \Rightarrow y-2 = 2x-12$

$y = 2x01$.....(2)

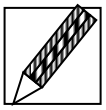
وبحل المعادلتين (1) ، (2) آنياًوذلك بتعويض قيمة y في (1) في المعادلة (2) نجد:

$x+2 = 2x-10 \Rightarrow 2x-x = 2+10 \Rightarrow x = 12$.....(3)

نعوض (3) في (1) $y = 12+2 = 14$

إذن احداثيات النقطة هي C(12,14)

تدريب (5)



أ- أوجد ميل المحور X.

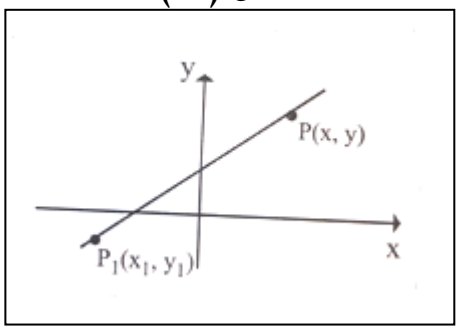
ب- أوجد ميل المحور Y.

3.2 معادلة الخط المستقيم

ليكن Λ مستقيماً ميله μ، ويمر بالنقطة $p_1(x_1y_1)$ ونريد إيجاد معادلته.

من المعروف أن معادلة الخط المستقيم هي العلاقة الجبرية بين الإحداثي X والإحداثي Y لأي نقطة تقع على الخط المستقيم، ولنفترض أنها النقطة P(x,y) كما في الشكل (12).

الشكل (12)



وبتطبيق علاقة الميل $m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

على النقطتين p_1, p نجد أن: $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

وبالضرب التبادلي ينتج أن

$$y-y_1=(x-x_1.....(1))$$

مثال (1):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m=\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة P(2,3)

الحل:

باتطبيق في العلاقة (1) السابقة:

$p_1(x_1,y_1)$

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow y-3=\frac{1}{2}x-1$$

وبالتالي:

$$y=\frac{1}{2}x-1+3\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

مثال (2):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m=-2$ ويمر بنقطة الأصل.

الحل:

بالتطبيق في العلاقة (1) وملاحظة أن نقطة الأصل هي: (0,0):

$$y-0=-2(x-0)$$

$$y=-2x$$

مثال (3):

أوجد معادلة المستقيم الذي زاوية ميله $\frac{\pi}{6}$ ويمر بالنقطة $\left(2,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل:

$$m=\tan\theta \Rightarrow m=\tan\frac{\pi}{6}=\tan 30^{\diamond}$$

$$=\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow m=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

الآن نطبق في العلاقة (1):

$$y-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)\Rightarrow y-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times-\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\times-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}\times-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

تدريب (6)



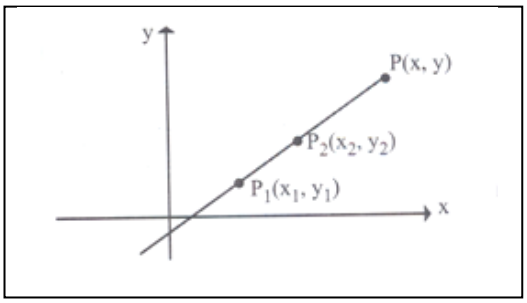
أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله m=2 ويقطع محور x عند x=-4

4.2 معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين

ليكن L مستقيماً يمر بالنقطتين $P_1\ (X_1,Y_1)$ ، $P_2\ (X_2,Y_2)$ ولتكن P(X,Y) نقطة على هذا المستقيم، أنظر الشكل (13) ونريد إيجاد العلاقة بين الإحداثي X والإحداثي Y ، أي إيجاد معادلة الخط المستقيم بتطبيق علاقة الميل.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

الشكل (13)



على النقطتين p_1, p_2 نجد أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وبتطبيق العلاقة نفسها على النقطتين p_1, p نجد أن $m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

وبما أن النقاط p_1, p_2, p تقع على المستقيم نفسه إذاً $m_1 = m_2$

وبالتالي: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .....(2)

وتعرف العلاقة (2) بمعادلة الخط المستقيم المار بنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (2,3) (-3,-4) بالتطبيق في العلاقة السابقة نجد أن:

$$\frac{y+4}{x+3} = \frac{3+4}{2+3} \Rightarrow \frac{y+4}{x+3} = \frac{7}{5}$$

وبالضرب التبادلي:

$$y + 4 = \frac{7}{5}(x+3) \Rightarrow y = \frac{7}{5}x + 5$$

تدريب (7)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين B,A إذا كانت:

أ- A(0,3) , B(2,5) . ب- A(1,-1) , B(-2,0).

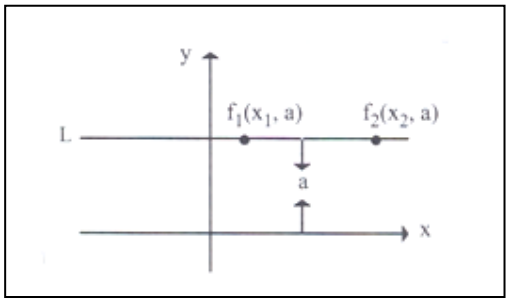
أسئلة تقويم ذاتي (2)

1. أوجد ميل الخط المستقيم L المار بالنقطتين $Q(4,5), O(0,0)$ ؟
2. أوجد ميل وزاوية ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $p_2\left(2\sqrt{3},2\right)$ و $p_1\left(\sqrt{3},1\right)$ ؟
3. أوجد معادلة المستقيم L الوارد في السؤال الأول؟
4. أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $m=\frac{1}{a}$ ويمر بالنقطة $p\left(a^3,a^2\right)$ ؟
5. خط مستقيم يمر بالنقطة $A(-2,3)$ وميله $m=4$ أوجد أحداثي نقطة تقاطعه مع محور Y ؟
6. أوجد ميل المستقيم L إذا كانت زاوية ميله مع محوره X الموجب 130°؟
7. إذا كان ميل المستقيم AB يساوي $\frac{1}{6}$ وكانت $A(-6,-4)$ ، $B(2,c)$ أوجد قيمة الثابت c؟
8. أوجد معادلة المستقيم الذي زاوية ميله $\frac{2\pi}{3}$ ويمر بالنقطة $\left(2,\sqrt{3}\right)$؟
9. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة $(2,-3)$؟

5.2 حالات خاصة للخط المستقيم

الحالة (أ) إذا كان المستقيم L يوازي محور X ويبعد عنه بمقدار ثابت وليكن a كما في الشكل (14).

الشكل (14)



لإيجاد معادلة هذا الخط المستقيم نأخذ أي نقطتين عليه مثل $S_1(x_1, a), S(x_2, a)$ (لماذا؟).

واضح أن الإحداثي Y لا يتغير مهما اختلفت النقطة على هذا الخط، فهي دائماً تساوي مقدار ثابت، وهنا تساوي a .

بالتطبيق في العلاقة $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

مثال (1):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يوازي محور X ويقع تحته ويبعد عنه وحدتين.

الحل:

بالتطبيق في العلاقة السابقة نجد Y=-2

مثال (2):

أوجد معادلة محور X.

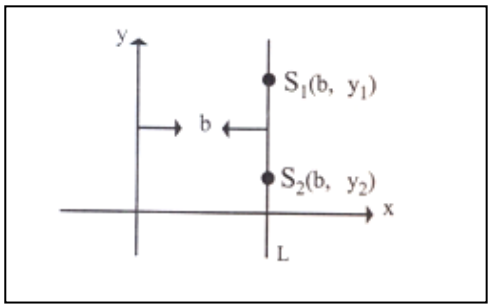
الحل:

بالتطبيق في العلاقة السابقة نجد Y=0

الحالة (ب):

إذا كان المستقيم L يوازي محور Y ويبعد عنه مقداراً ثابتاً يساوي b أنظر الشكل (15).

الشكل (15)



لإيجاد معادلة هذا المستقيم L نأخذ أي نقطتين عليه مثل $S_1(b, y_1)$ $S_2(b, y_2)$ (لماذا)؟

واضح أن الإحداثي X لا يتغير مهما اختلفت النقطة على المستقيم L فهي دائماً تساوي مقداراً ثابتاً وهو b وعند حساب ميل الخط L نجد أن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{b - b} = \frac{y_2 y_1}{0}$$

أي أن الميل كمية غير معينة (لأن المقام يساوي صفراً) ولكم نحن نعلم أن معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين هي: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وبالتطبيق في هذه العلاقة نجد أن:

كمية غير معينة = $\frac{y-y_1}{x-b}$

وتكون نتيجة المقدار $\frac{y-y_1}{x-b}$ كمية غير معينة إذا كان

$$x-b=0 \Rightarrow x=b.....(4)$$

وتعرف العلاقة (4) بمعادلة المستقيم الذي يوازير محور y ويبعد عنه مقداراً ثابتاً b.

مثال (1):

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي محور Y ويبعد عنه 7 وحدات إلى اليسار.

الحل:

بالتطبيق في المعادلة (4).

مثال (2):

أوجد معادلة محور Y .

الحل:

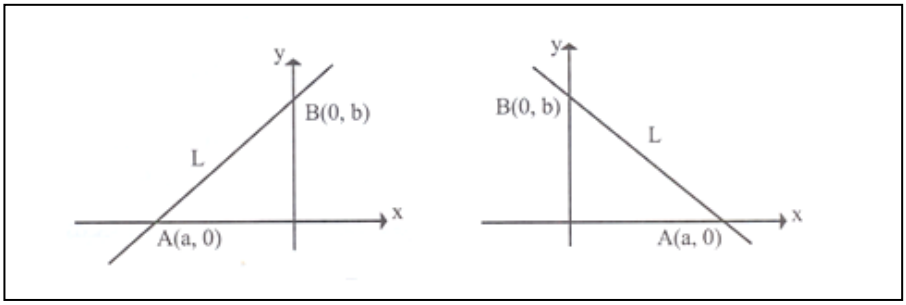
نطبق في العلاقة السابقة حيث b صفر وبالتالي "X=0 " .

الحالة (ج):

درسنا في الحالتين أ ، ب المستقيم الذي يوازي محور X أو مجحور Y ولاحظنا أنه يقطع أحد المحورين في نقطة واحدة فقط.

أما إذا كان المستقيم لا يوازي أحد المحورين فإنه سوف يقطع المحورين في نقطتين أنظر الشكل (16).

الشكل (16)



أما إحداثيات النقطة A فتكون (a,0) وإحداثيات B(0,b). ونسمي الإحداثي X للنقطة A مقطع المستقيم من محور X.

ولإيجاد معادلة هذا الخط المستقيم بدلالة مقطعية من المحورين X,Y نتبع الخطوات التالية:

من المعادلة: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

نجد أن: $\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}\Rightarrow\frac{y}{x-a}=\frac{b}{-a}$

بالضرب التبادلي: $bx-ba=-ay\Rightarrow bx+ay=ba$

بالقسمة على ba نجد أن $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.....(5)$

وتعرف العلاقة (5) بمعادلة المستقيم الذي مقطعه من المحورين y,x على الترتيب b,a .

مثال (1):

أوجد معادلة المستقيم الذي مقطعه من محور X يساوي 3 ومقطعه من محور Y يساوي 2.

الحل:

نطبق في (5) فنجد $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

مثال (2):

أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين، إذا كانت معادلته $6X - 12 = 3$

الحل:

نكتب المعادلة على صورة العلاقة (5).

نقسم على 3 ثم نضع المعاملات في المقام:

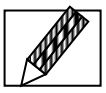
$$2x - 4y = 1 \Rightarrow \frac{\frac{x}{1}}{2} + \frac{\frac{y}{1}}{-4} = 1$$

(لاحظ أن $2x = \frac{\frac{x}{1}}{2}$)

إذن مقطعه من محور $x = \frac{1}{2}$

ومقطعه من محور $y = -\frac{1}{4}$

تدريب (8)



أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين إذا كانت x عند $x = -4$

6.2 الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم

لقد تعلمنا في البنود السابقة صيغ مختلفة لمعادلة المستقيم ومنها:

$$y - y = m(x - x_1)$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ويمكن التعبير عن جميع الصيغ السابقة لمعادلة الخط المستقيم بالصورة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن أحد العددين b,a على الأقل ≠ صفراً.

ونستطيع إثبات أن ميل المستقيم المعطاه معادلته في الصورة العامة يساوي $\frac{-a}{b}$

أي – معامل x

معامل y

البرهان:

$$ax+by+c=o$$

وبالتالي: $by=-ax-c$

$$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$$

نأخذ $\frac{-a}{b}$ كعامل مشترك فنجد:

$$y=\frac{-a}{b}\left(x+\frac{c}{b}\right)$$

ولكن: كيف اصبحت $\frac{-c}{b}$ بعد أخذ العامل المشترك $\frac{+c}{b}$؟

بسيطة: لنقسم: $\left(\frac{-c}{b}\right)\div\left(\frac{-a}{b}\right)$

ماذا نجد: $\left(\frac{-c}{b}\right)\div\left(\frac{-a}{b}\right)=\left(\frac{-c}{b}\right)\times\left(\frac{-b}{a}\right)$

$$=\frac{c}{a}$$

لنعد إلى المعادلة $y=\frac{-a}{b}\left(x+\frac{c}{a}\right)$

ونقارنها بالمعادلة العامة:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

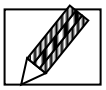
$$m=\frac{-a}{b}$$

مثال (1):

أوجد ميل المستقيم L الذي معادلته $3x+2y-5=0$.

نطبق في العلاقة (6) $m=\frac{-3}{2}$

تدريب (9)



أوجد ميل المستقيم L الذي معادلته $-2x=4y+6$

ملاحظة: يمكن إيجاد مقطع المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته معطاه بالصورة العامة بإتباع الطريقة الموضحة بالأمثلة التالية:

مثال (2):

أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته: $5y-3x=7$.

الحل:

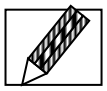
لايجاد مقطعه من محور x نضع $y=0$ فينتج:

$$-3x=7\Rightarrow x=\frac{-7}{3}$$

ولإيجاد مقطعه من محور y نضع $x=0$ فينتج أن:

$$5y=7\Rightarrow y\frac{7}{5}$$

تدريب (10)



أوجد إحداثيات نقط تقاطع المستقيم L مع المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته: $\frac{2x}{3}-\frac{4y}{5}+6=0$.

أسئلة تقويم ذاتي (2)

1- أوجد معادلة المستقيم في الحالات التالية:

أ- يوازي محور X ويبعد عنه 8 وحدات للأعلى.

ب- يوازي محور X ويبعد عنه 7 وحدات للأسفل.

ج- يوازي محور Y ويبعد عنه 12 وحدة لليمين.

د- يوازي محور Y ويبعد 8 وحدات لليسار.

هـ- مقطعه من محور X=31 ومقطعه من محور Y=99.

و- مقطعه من محور X=6 ويمر بالنقطة (2,3)

ز- مقطعه من محور Y=4 ويمر بالنقطة (5,6).

2- أوجد معادلة المستقيم L الذي زاوية ميله 30° ويقطع محور X عند العدد 3.

3- أوجد معادلة المستقيم L الذي زاوية ميله $\frac{\pi}{4}$ ويقطع محور Y عند العدد 12.

4- أوجد معادلة المستقيم L الذي مقطعه من محور X =9 ومقطعه من محور Y =-3

5- أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-12=0$

6- أوجد ميل المستقيم L الذي معادلته $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}-5$

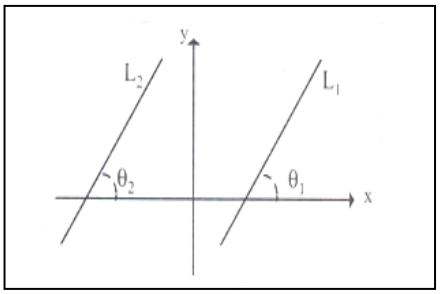
7- أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته $25x-50y=75$

3. التوازي والتعامد Parallel and Perpendicular

1.3 التوازي

لنأخذ مستقيمين L_1, L_2 في وضع توازي، أنظر الشكل (17) نلاحظ أن θ_2, θ_1 في وضع تناظر، أي أن: $\theta_2 = \theta_1$ (لماذا؟)

الشكل (17)



وإذا افترضنا أن:

$m_1 = l_1$ ميل

$m_2 = l_2$ ميل

فإن: $m_1 = \tan\theta_1$

$m_2 = \tan\theta_2$

وبما أن $\theta_1 = \theta_2$ إذن $\tan\theta_2 = \tan\theta_1$ إذن $m_1 = m_2$

وهذا يقود إلى النتيجة التالية:

نتيجة (1)

إذا كان المستقيمان L_1, L_2 متوازيان فإن ميليهما متساويان، والعكس صحيح.

مثال (1):

إذا كانت A(5,6) , (B(1,4),C(10,8),D(2,4)

الحل:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{2-10} = \frac{1}{2}$$

بما أن $m_{CD} = m_{AB}$ إذن المستقيمان متوازيان.

مثال (2):

إذا كانت A(3,2) , B(5,Y) , C(2,1) , D(3,-2) // CD أوجد قيمة Y (الإشارة // تعني يوازي).

الحل:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y-2}{5-3} = \frac{Y}{2} - 1$$

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{2-1}{3-2} = -3$$

بما أن $CD // AB$ إذن $m_{AB} = m_{CD}$

إذن $\frac{y}{2} - 1 = -3 \Rightarrow y = -4$

مثال (3):

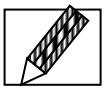
أوجد ميل المستقيم L الذي يوازي المستقيم الماربالنقطتين (4,10) , (5,7)

الحل:

نفرض أن ميل m_1L_1 وميل المستقيم المار بالنقطتين m_2 من التوازي ينتج أن

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-7}{4-5} = \frac{3}{-1} = -3 \quad \text{إذاً } m_2 = m_1$$

تدريب (11)

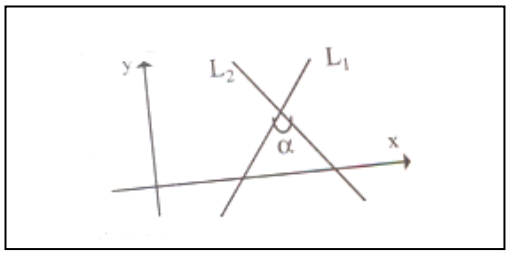


أوجد معادلة المستقيم L الذي مقطعه من محور y يساوي 2− ويوازي المستقيم الذي معادلته.

2.3 التعامد

إذا كانت α بين المستقيمين L_2, L_1 كما في الشكل (18) فإن من المعروف أن:

الشكل (18)



$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

حيث m_1 ميل المستقيم L_1 ، m_2 ميل المستقيم L_2

وإذا كان المستقيمان في وضع تعامد فإن $\alpha = 90^o$ وكذلك $\tan\alpha$ كمية غير معينة أي أن كمية غير معينة $= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

أي أن: $1+m_1m_2=0\Rightarrow m_1m_2=-1$

وهكذا يقود إلى النتيجة التالية:

نتيجة:

إذا كان المستقيمان $L_1.L_2$ متعامدين فإن معادلة ص33

مثال (4):

إذا كانت A(2,4) , B(-1,2) , C(-1,5) , D(1,2) بين أن المستقيمين AB , CD متعامدان .

الحل:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_2}{x_2-x_1}=\frac{2-4}{-1-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_2}{x_2-x_1}=\frac{2-5}{1-(-1)}=\frac{-3}{2}$$

لاحظ أن: $m_{AB}m_{CD}=\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{-3}{2}\right)=-1$

إذن $AB\perp CD$ (الإشارة $\perp$ تعني متعامد مع).

تدريب (12)

إذا كانت A(-2,0) , B(0,3) , C(-1,7) , D(8,1) بين أن المستقيم AB $\perp$ المستقيم CD

مثال (5):

أوجد ميل المستقيم L_1 الذي يعامد المستقيم المار بالنقطتين (1,5) , (2,3)

الحل:

افرض m_1 ميل المستقيم L_1

m_2 ميل المستقيم المار بالنقطتين.

بما أن المستقيمين متعامدان إذاً $[m_1 m_2]$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{1-2} = -2$$

إذاً $$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

مثال (6):

إذا كانت زاوية ميل المستقيم L_1 تساوي $150°$، وزاوية ميل المستقيم L_2 تساوي $60°$ بين أن $L_2 \perp L_1$

الحل:

$$m_1 = \tan 150 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 = \tan 60 = \sqrt{3}$$

$$m_1 m_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right) = -1$$

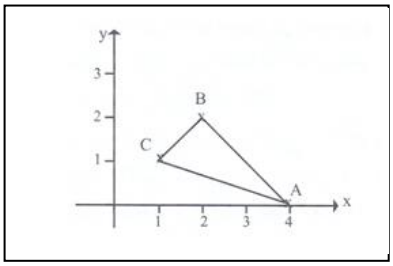
بما أن $m_1 m_2 = -1$ إذن $L_2 \perp L_1$

مثال (7):

باستعمال الميل بين أن النقط A(4,0) , B(2,2) , C(1,1) رؤوس مثلث قائم الزاوية.

الحل: أنظر الشكل 19.

الشكل (19)



$$m_{AB} = \frac{2-0}{2-4} = -1$$

$$m_{AC} = \frac{1-0}{1-4} = \frac{1}{-3}$$

$$m_{CB} = \frac{1-2}{1-2} = 1$$

لاحظ أن: $m_{AB}.m_{CB} = -1$

إذن: $CD \perp AB$ إذن مثلث قائم الزاوية.

مثال (8):

إذا كانت A(3,2) , B(5,Y) , C(2,1) , D(3,-2) أوجد قيمة Y إذا كان $CD \perp AB$

الحل:

$$m_{AB} = \frac{y-2}{5-3} = \frac{y-2}{2}$$

$$m_{CD} = \frac{-2-1}{3-2}$$

بما أن $CD \perp AB$

إذاً: $m_{AB}.m_{CD}$

إذاً:

$$\left(\frac{y-2}{2}\right)(-3) = -1$$

$$\frac{y-2}{2} = \frac{1}{3}$$

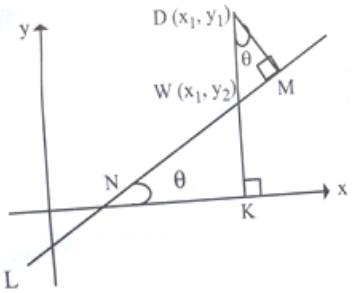
$$y = \frac{8}{3}$$

4. البعد بين نقطة الأصل وخط مستقيم

سنستعمل الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم $ax+by=0$ في إيجاد بعد نقطة عن مستقيم، ويعرف هذا البعد بأنه: طول العمود النازل من تلك النقطة على ذلك المستقيم.

ولإيجاد طول العمود النازل من النقطة $D(x_1,y_1)$ على المستقيم L نرسم من النقطة D عموداً على المستقيم L فيقطعه في النقطة M كما في الشكل (20).

الشكل (20)



إذاً المطلوب إيجاد طول DM.

نفرض أن النقطة $W(x_1y_2)$ وهي نقطة تقاطع العمود النازل من D على محور X مع المستقيم L ، والنقطة W تقع على المستقيم L إذن فهي تحقق معادلته، أي أن:

$$ax_1+by_2+c=0\Rightarrow$$

$$by_2=-ax_1-c$$

$$y_2=\frac{-a}{b}x_1-\frac{c}{b}$$

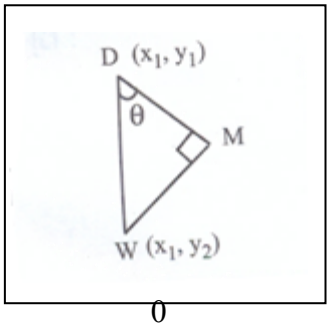
لكن: $DW=Y_1Y_2$

وبالتعويض بقيمة Y_2

$$DW=y_1-\left(\frac{-a}{b}x_1-\frac{c}{b}\right)=y_1+\frac{a}{b}x_1+\frac{c}{b}$$

خذ المثلث القائم الممثل في الشكل (21):

الشكل (21)



0

نلاحظ أن:

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{DM}{DW}$$

وبالضرب التبادلي

$$DM = |DW\cos\theta| \ldots (1)$$

ومن معادلة المستقيم

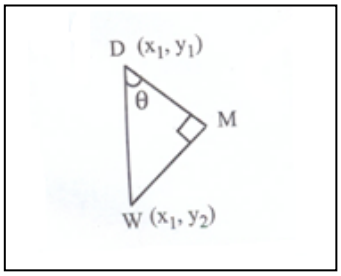
$$y_2 = \frac{-a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

نلاحظ أن ميل المستقيم هو معامل x_1 أي $\frac{-a}{b}$

أي: $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{-a}{b}$

وبالعودة إلى المثلث وحسب فيثاغورس نلاحظ أن:

الشكل (22)



$$DW = \sqrt{a^2 + b^2}$$

إذن: $\cos\theta = \frac{DM}{DW}$

وبالتعويض قيمة $DW = y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}$

وقيمة $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

في المعادلة (1) نجد أن:

$$DM = \left| \left(y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b} \right) . \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

إذن: $DM = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

وتعرف العلاقة (7) بـ بعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = o$

مثال (1):

أوجد بعد النقطة D(-5,1) عن المستقيم الذي معادلته $3x - 4y + 4 = 0$.

الحل:

نطبق في العلاقة (7)

بعد النقطة D عن المستقيم L تساوي

$$|3(-5) + (-4)(1) + 4| = 3$$

مثال (2):

أوجد بعد النقطة (1,-3) عن المستقيم الذي معادلته $2x - 3y = 4$

الحل:

نكتب معادلة المستقيم بالصورة العامة: $2x - 3y - 4 = 0$

إذن: $a = 2, b = -3, c = -4$

ونطبق في العلاقة (7)

بعد النقطة عن المستقيم $\frac{(2)(1) + (-3)(-3) + (-4)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$

تدريب (13)

أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين L_1, L_2.

1. إذا كانت معادلة $L_1 : x - 3y = 1$.
2. ومعادلة المستقيم $L_2 : x - 3y = 4$

5. المحل الهندسي Plane Geometry

تعريف:

يسمى المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة بالمحل الهندسي لهذه النقطة.

وبصورة عامة:

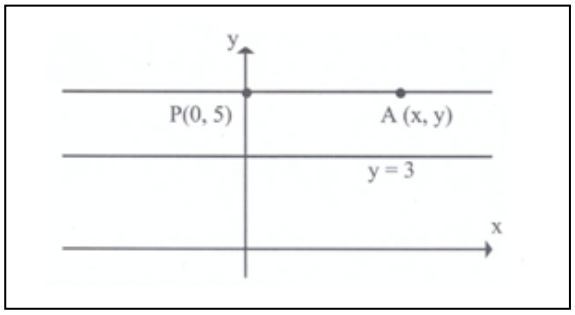
معادلة المحل الهندسي هي علاقة جبرية بين الإحداثي x والإحداثي للنقطة المتحركة (x, y).

مثال (1):

أوجد المحل الهندسي للنقطة المتحركة $A(x, y)$ بحيث تبعد بمقدار وحدتين عن المستقيم $y = 3$

إذن المحل الهندسي للنقطة المتحركة $A(x, y)$ هو مستقيم يوازي المستقيم الثابت $y = 3$ ويبعد عنه وحدتين كما في الشكل (23).

الشكل (23)



وباستعمال قانون البعد بين النقطة A والمستقيم $y=3$ نجد أن $\frac{|y-3|}{\sqrt{1}}=2\rightarrow|y-3|=2$

إذن $y-3=\pm2$

أي $y=1$ أو $y=5$

وبما أن النقطة المتحركة $A(x,y)$ تمر بالنقطة $p(0,5)$ إذن $y=1$ غير ممكنة أي أن معادلة المحل الهندسي $y=5$.

أسئلة تقويم ذاتي (4)



1- ABCD قطعة أرض بحيث أن A(40,10) B, (30,30) , C(-10,10) , D(0,-10) بين بوساطة الميل أن القطعة مستطيلة الشكل.

2- بإستخدام قانون البعد بين نقطة ومستقيم بيَن أن النقطة $(-1،1)$ تقع على المستقيم:

$5x+3y-2=0$.

3- أوجد المحل الهندسي للنقطة المتحركة $A(x,y)$ التي تبعد بعداً ثابتاً قدره وحدتان عن النقطة $B(1,2)$ ثم أوجد معادلته.

6. الدائرة The Circle

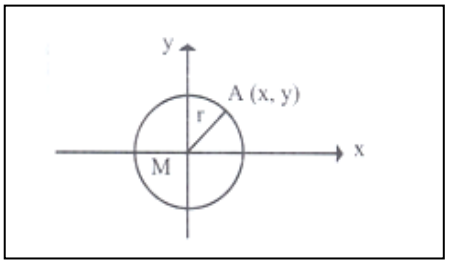
تعريف : الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة، ويسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة.

1.6 صورة معادلة الدائرة

أولاً الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل M ونصف قطرها r.

في الشكل المجاور.

الشكل (24)



نفرض أن $A(x,y)$ نقطة على الدائرة، وباستخدام قانون البعد بين النقطتين A , R نجد أن:

$$AM = \sqrt{(x-o)^2 + (y-0)^2 = r}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

بالتربيع $x + y^2 = r$

تعرف العلاقة السابقة بالصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل M ونصف قطرها r .

مثال (1):

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

الحل:

بالتطبيق في العلاقة $x^2 + y^2 = r^2$ نجد أن:

$$x^2 + y^2 = 9$$

مثال (2):

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $2x^2 = 18 - 2y^2$.

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة العامة $2x^2 + 2y^2 = 18$

بالقسمة على 2 $x^2 + y^2 = 9$

إذن مركز الدائرة (0و0) ونصف قطرها = 3

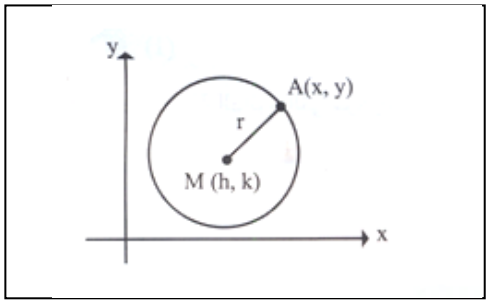
تدريب (14)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

ثانياً: الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $M(h,,k)$ ونصف قطرها 3

نفرض أن $A(x,y)$ نقطة على الدائرة كما في الشكل (25).

الشكل (25)



نستخدم قانون البعد بين نقطتين

$$MA=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2=r}$$

بالتربيع (9) ..... $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

تعرف العلاقة (9) بالصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $M(h,,k)$.

مثال (3):

أزجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-2و-3)$ ونصف قطرها 2.

الحل:

نطبق في العلاقة (9) فنحصل على $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

تدريب (15)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(5و6)$ ونصف قطرها 9 وحدات.

مثال (4):

أوجد المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها: $(x-4)^2+y^2=25$

الحل:

بمقارنة المعادلة أعلاه بالمعادلة (9) نجد أن مركز الدائرة (0و4) ونصف قطرها =5.

ثالثاً: الصورة القياسية لمعادلة الدائرة العامة التي مركزها $M(h,,k)$ ونصف قطرها r.

لنبدأ بالمعادلة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

بفك الأقواس $x^2-2hx+h^2-2ky+k^2=r$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

ونفرض أن: $h^2+k^2-r^2=c$ و $-k=f$ و $-h=g$

وينتج أن: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0...(10)$

تعرف المعادلة (10) بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة العامة التي مركزها $M(h,,k)$ ونصف قطرها r .

ملاحظات:

إذا أعطيت معادلة الدائرة كما في الصورة (10) يكون:

(أ) المركز (-g,-f)

(ب) نصف قطر الدائرة $\sqrt{g^2+f^2-c}$

حيث $g^2+f^2-c\succ 0$

(ج) معامل x^2 = معامل $y^2=1$

(2) معامل $xy=o$

مثال (5):

أوجد المركز ونصف القطر للدائرة: $x^2+y^2+4x+6y-12=0$

الحل:

بمقارنة المعادلة أعلاه بالمعادلة (10) نجد:

$2g = 4 \rightarrow g = 2$ و $2f = 6 \rightarrow f = 3$

إذن المركز (-2,-3) ونصف القطر

$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{2^2 + (3)^2 - (-12)} = 5$

مثال (6):

للدائرة $2x^2 + 2y^2 - 12x = 14$ أوجد المركز ونصف القطر.

الحل:

نكتب المعادلة على صور (10): $2x^2+2y^2 - 12 - 14 = 0$

نقسم على 2 $x^2 + y^2 - 6x - 7 - 0$

بالمقارنة نجد $c = -7$ و $f = 0$ و $g = -3$

إذن المركز (3,0) ونصف القطر $\sqrt{9+0+7} = \sqrt{16} = 4$

تدريب (16)



(أ) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-3,-7) وتمس محور x .

(ب) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (0,0) (2,0) , (3,-1).

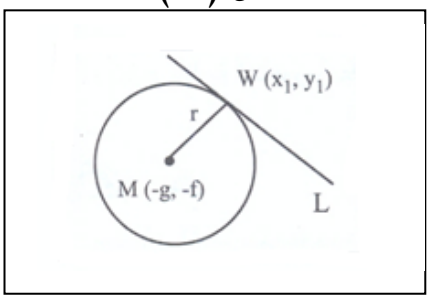
2.6 مماس الدائرة

أولاً: الصورة العامة لمعادلة مماس الدائرة عند نقطة معلومة عليها.

نحن نعلم أن: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ هي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها $M(h,,k)$ ونصف قطرها r.

ونعلم ايضاً أن مركز هذه الدائرة هو $(-g,-f)$ فلو أخذنا الدائرة التي مركزها $(-g,-f)$ ورسمنا لها مماساً L عند نقطة عليها مثل $W(x_1, y_1)$ كما في الشكل (26).

الشكل (26)



لوجدنا أن الصورة العامة لمعادلة المماس L هي:

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \ldots\ldots (11)$$

وسوف أترك إثبات هذه المعادلة لك عزيزي الدارس.

مثال (1):

أوجد معادلة المماس للدائرة $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$

الحل:

النقطة (4,-11) تقع على الدائرة لأنها تحقق معادلتها (تأكد من ذلك) وبالتطبيق في العلاقة (11) نجد أن معادلة المماس هي:

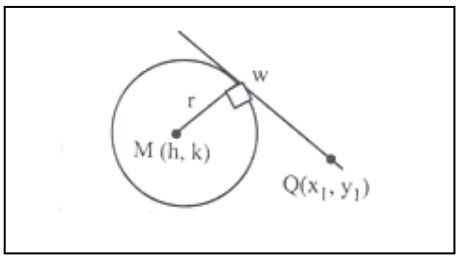
$$4x - 11y - \frac{3}{2}(x + 4) + 5(y - 11) - 15 = 0$$

أي: $5x - 12y = 152$

ثانياً: طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها.

لتكن الدائرة M مركزها $M(h,k)$ ونصف قطرها r وليكن QW مماساً للدائرة عند النقطة W ومرسوماً من النقطة المعلومة $Q(x_1, y_1)$ كما في الشكل (27).

الشكل (27)



إذن (12)..... $QW = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$

وتعرف العلاقة (12) بطول المماس المرسوم من نقطة خارجها.

البرهان:

نصل MQ فينتج المثلث القائم الزاوية QMW القائم فس W (لماذا؟)

وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين نجد أن:

$$MQ = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم نجد أن:

$$QW = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$$

مثال:

جد طول المماس المرسوم من النقطة (1,2) للدائرة $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$

الحل:

نطبق العلاقة (12) $L = \sqrt{(1-2)^2 + (2+5)^2 - 9} = \sqrt{41}$

تدريب (17)



بين أن طول المماس L المرسوم من النقطة $Q(x_1, y_1)$ للدائرة

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$L\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

أسئلة تقويم ذاتي (4)



1- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 4؟

2- أوجد المركز ونصف القطر للدائرة $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 36$؟

3- أوجد مركز الدائرة ونصف قطر الدائرة

$4x^2 - 8 - 12y + 4x = -4y^2$؟

4- أوجد معادلة المماس للدائرة أوجد معادلة المماس للدائرة

$x^2 + y^2 4x + 6y - 12 = 0$ عند النقطة $(2,0)$.

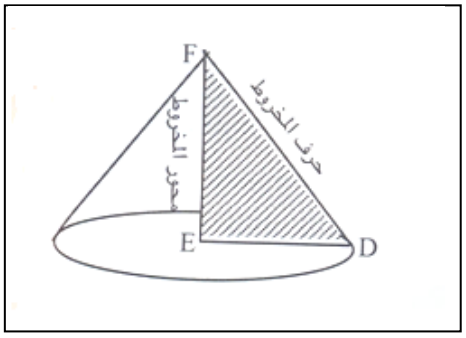
5- جد طول المماس المرسوم من النقطة $(13,1)$ للدائرة

$(x+3)^2 + (y-12)^2 = 16$.

7. القطع المخروطيConical Section

تعلم أنه إذا زاد مثلث DEF القائم الزاوية في E دورة كاملة حول الضلع EF يتكون نتيجة الدوران مخروط دائري قائم كما في الشكل (28).

الشكل (28)



تسمى النقطة F رأس المخروط وتسمى القطعة المستقيمة EF محور المخروط وتسمى القطعة FD حروف المخروط إذا كونا جسماً من مخروطين متطابقين بحيث يكون لهما رأس مشرك ومحورها على استقامة واحدة وقطعنا سطح هذا الجسم بسطح مستو فإن المنحنى الناتج من القطع يسمى قطعاً مخروطياً.

ونتيجة هذا القطع نحصل على أحد القطوع التالية:

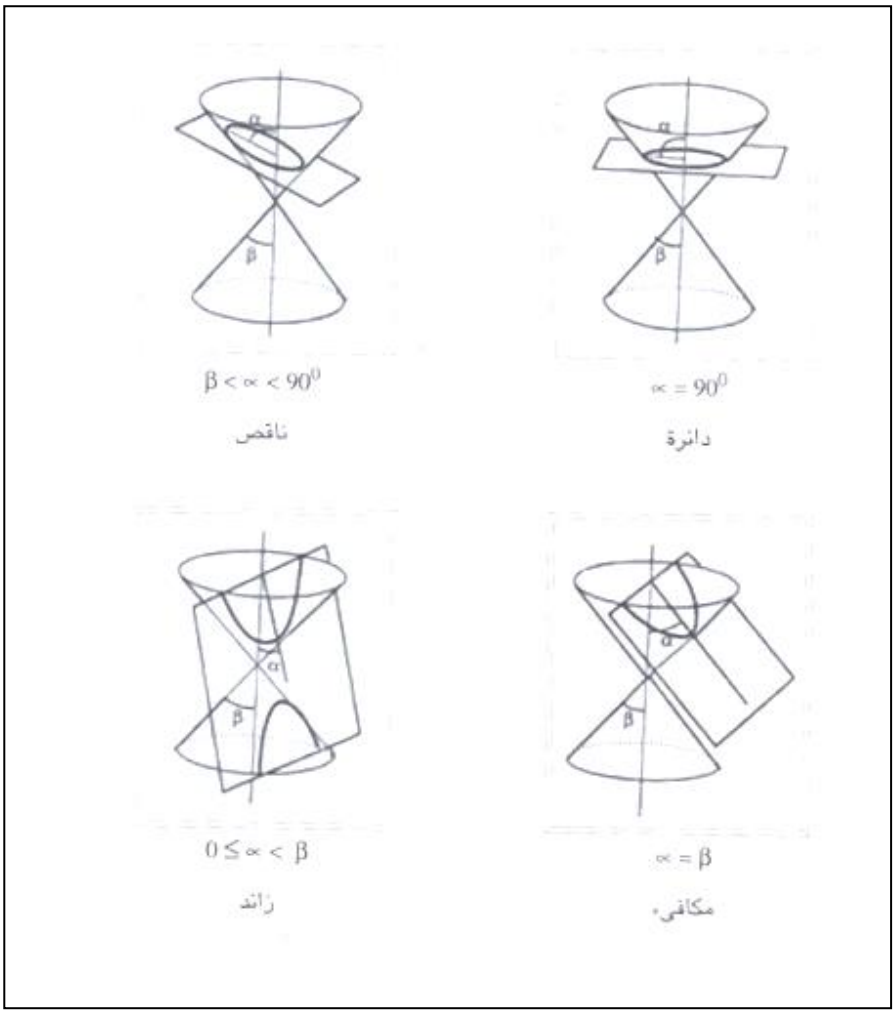
أ- **دائرة:** وتنتج عندما يكون المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط وغير مار بالرأس كما في الشكل (29).

ب- قطع ناقص: وينتج عندما يقطع المستوى أحد المخروطين بحيث يكون مائلاً على محور المخروط كما في الشكل (29).

ج- قطع زائد: وينتج عندما يقطع المستوى المخروطين معاً ولا يكون موازياً لحرف المخروط كما في الشكل (29).

د- قطع مكافئ: وينتج عندما يكون المستوى موازياً لحرف المخروط كما في الشكل (29).

الشكل (29)



α الزاوية الحادة بين محور المخروط والمستوى الذي يقطعه.

β الزاوية الحادة بين محور المخروط وحرفه.

ونلخص ما يأتي:

1) يكون القطع دائرة إذا كانت $\alpha = 90^{\circ}$

2) يكون القطع ناقصاً إذا كانت $\beta \prec \alpha \prec 90^{\circ}$

3) يكون القطع مكافئاً إذا كانت $\alpha = \beta$

4) يكون القطع زائداً إذا كانت $0 \leq \alpha \prec \beta$

مثال (1):

دار المثلث ABC المرسوم في الشكل حول الضلعAB ، ثم صُنع منه المخروط الذي في الشكل، ثم قطع بمستوى يصنع زاوية α مع محوره MN.

(1) $\alpha = 30$.

(2) $\alpha = 60$.

(3) $\alpha = 90$.

(4) $\alpha = 75$.

الحل:

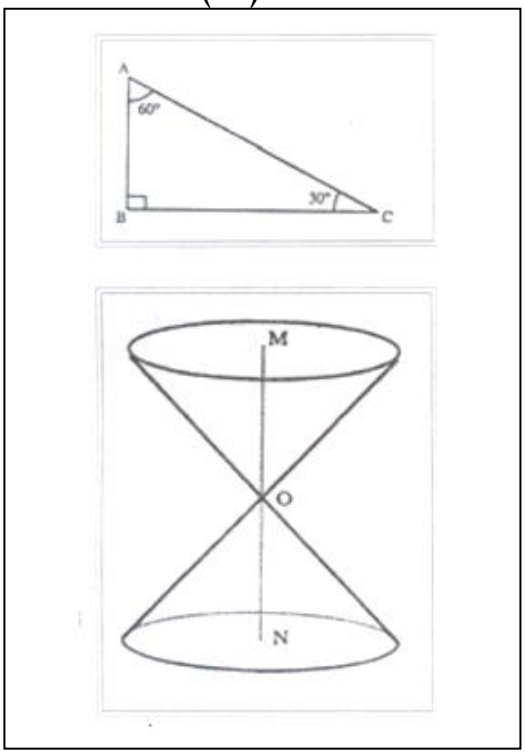
(1)زتائد.

(2)مكافئ.

(3)دائرة.

(4)ناقص.

الشكل (30)



الخلاصة

عزيزي الدارس، في نهاية هذه الوحدة نرجو أن تكون قد حققت الأهداف المرجوة منها، ولمساعدتك على استذكار أهم المفاهيم الواردة في الوحدة، اقدم فيما يلي تلك المفاهيم عبر النقاط التالية:

1- بدأنا بالمستوى الديكارتي وكيفية تعيين النقاط عليه، وذكرنا أن كل نقطة على ذلك المستوى تعرف بإحداثيين هما (x, y).

2- أوجدنا المسافة بين نقطتين $B(x_2 y_2), A(x_1, y_1)$ وذلك باشتقاق العلاقة $AB\sqrt{(x_2 - x_1)^2} =$.

3- عرفنا ميل المستقيم الذي يميل بزاوية θ عن محور x الموجب يساوي ظل زاوية الميل: $m = \tan\theta$

وميل المستقيم المار بالنقطتين $B(x_2, y_2), A(x_1 x_2)$ هو $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

4- قمنا باشتقاق معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$ وهي $y - y_1 = m(x - x_1)$.

5- قمنا باشتقاق معادلة المستقيم المار بالنقطتين $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$ وهي $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

6- وقمنا بإيجاد معادلات المستقيم لحالات خاصة وهي:

$x = b$ يوازي محور y ويبعد عنه بمقدار b.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ معادلة المستقيم بدلالة مقطعية من المحورين الإحداثيين.

7- كتبنا معادلة المستقيم بالصيغة العامة وهي:

$$ax + by + c = 0$$

بحيث أحد العددين a,b على الأقل $\neq 0$.

8- درسنا التوازي وقلنا أن المستقيم L_1 والذي ميله m_1 يوازي المستقيم L_2 والذي ميله m_2 إذا كان $m_1 = m_2$.

9- درسنا التعامد وقلنا أن المستقيم L_1 والذي ميله m_1 يعامد المستقيم L_2 والذي ميله m_2 إذا كان $m_1 m_2 = 1$.

10- اشتقاق البعد بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ والمستقيم $ax + by + c = 0$ وهو $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.

11- شرحنا نفهوم المحل الهندسي، وهو المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة، كما ذكرنا أن الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

12- قمنا باشتقاق معادلات الدائرة العامة، وهي ضمن الحالات التالية:

- مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r $\left(x^2 + y^2 = r^2\right)$
- مركزها $M(h,k)$ ونصف قطرها r $\left((x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\right)$

13- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة العامة هي:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

14- معادلة المماس المرسوم من النقطة $A(x_1, y_1)$ للدائرة:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ هي

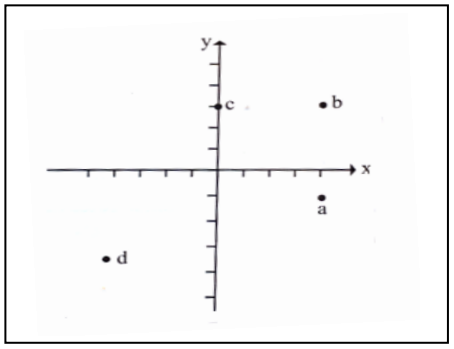
$$xx_1 yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

15- قمنا باشتقاق طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها والتي احداثياتها (x_1, y_1) فكان الطول = $\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$

16- وأخيراً عرفنا القطوع المخروطية وهي الدائرة والقطع الزائد والقطع الناقص والقطع المكافئ وكيف تنتج.

إجابات التدريبات:

تدريب (1)



تدريب (2):

$$AB = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$AC = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$$
$$AD = \sqrt{9=1} = \sqrt{10}$$

C أقرب

تدريب (3):

الشكل مثلث.

تدريب (4):

A) $m = -1.\theta = 135°$

B) $m = \frac{3}{0} = \ 1.\theta = 90°$ غير معرف

C) $m = \frac{-2}{0} = 1.\theta = 90°$ غير معرف

تدريب (5)

A) 0

B) غير عرف

تدريب (6):

$$m = 2, (-4,0)$$

المعادلة

$$Y - 0 = 2(X = 4)$$

$$Y = 2X = 8$$

تدريب (7):

$a) \frac{y-3}{x-0} = \frac{5-3}{2-0} \Rightarrow y = x + 3$ **المعادلة:**

$b) \frac{y+1}{x-1} = \frac{0+1}{-2-1} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{1}{-3}$

$$y = \frac{-x}{3} - \frac{2}{3}$$

تدريب (8):

A) نضع $x = 0$ ينتج أن

مقطع من المحور y $-3y - 5 = 0 \Rightarrow y - \frac{-5}{3}$

نضع $y = 0$ ينتج أن

مقطع من محور x $2x - 5 - 0 \Rightarrow x - \frac{5}{2}$

B) نضع $x = 0$ ينتج أن

مقطع من محور y $-5y + 10 - 0 \Rightarrow y - 2$

نضع $y=0$ ينتج أن

$3x+10=0 \Rightarrow x-\frac{-10}{3}$ مقطع من محور x

تدريب (9):

$4y=-2x-6$

بالقسمة على 4

$y=\frac{-1}{2}x-\frac{6}{4}$

إذن $m=\frac{-1}{2}$

تدريب (10):

نكتب المعادلة على الصورة:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$\frac{2x}{3}-\frac{4y}{5}=-6$

نقسم على -6

$\frac{x}{-9}+\frac{y}{\frac{15}{2}}=1$

مقطعة من محور $-9=x$

مقطعة من محور $\frac{15}{2}=y$

تدريب (11):

ميل المستقيم $2y=4x-1$ يساوي 2

ميل =ع ميل المستقيم =2

إذن $m=2,(0,-2)$

المعادلة $m=2,(0,-2)$

$y-2x-2$

تدريب (12):

$$m_{AB} = \frac{3}{2}, m_{CD} = \frac{-6}{9}$$

$$m_{AB} m_{CD} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-6}{9}\right) = -1$$

إذن المستقيمان متعامدان

تدريب (13):

نأخذ معادلة L_1 : $x - 3y - 1$

نفرض قيمة $y = 0$ نجد أن $x = 1$

إذن النقطة $(1,0)$ تقع على L_1

نضع معادلة L_2 على الصورة $ax + by + c = 0$

فينتج $x - 3y - 4 = 0$

$$a = 1, b = -3, c = -4$$

نطبيق على قانون المسافة بين النقطة $(1,0)$ والمستقيم L_2

$$\left|\frac{(1)(1) + (-3)(0) - 4}{\sqrt{9+1}}\right| = \frac{3}{10}$$

البعد بين المستقيمين $\frac{3}{\sqrt{10}}$

تدريب (14):

المعادلة $x^2 + y^2 = 25$

تدريب (15):

المعادلة $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 81$

تدريب (16):

بما أن الدائرة تمس محور x إذن نصف قطرها 7.

المعادلة $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$

تدريب (17):

مركز الدائرة $(-g,-f)$

نصف قطرها $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

باستخدام المعادلة (12) نجد أن طول المماسL هو

$$L=\sqrt{[x_1-(-g)]^2+[y_1-(-f)]^2-(g^2+f^2-c)}$$

$$=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1 2fy_1+c}$$

مسرد المصطلحات

- **الزاوية Angle**:

المسافة الدائرية بين مستقيمين متقاطعين.

- **محور Axis:**

خط مستقيم أفقي أو عمودي نقوم بتدريجه ليكون مرجعاً للأشكال الهندسية، واصطلح على أن يكون الخط الأفقي هو محور x والخط العمودي هو محور y.

- **المستوى الديكارتي Cartesian plane:**

هو المستوى الواقعه بين محور x و y عند تقاطعهما معاً في نقطة الأصل (0,0).

- **نقطة الأصل Origin:**

النقطة التي يتقاطع عندها محور x و y.

- **المحل الهندسي Plane geometry:**

المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة.

- **الخط المستقيم Streat line:**

مجموعة لا نهائية من النقاط المتصلة معاً، والتي تقع على استقامة واحدة، ويتم تعريفه بنقطتين واقعتين عليه.

- **الدائرة The Circle:**

هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة، تسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة، وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة.

- **مماس الدائرة Tangent:**

الخط المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة تقع عليها.

- **القطوع المخروطية Conical Sections:**

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع سطح مستوٍ مع مخروطين متحدين من جهة رأسيهما، واشهر القطوع المخروطية ثلاثة هي: القطع المكافئ Parabola والناقص Ellipse والزائد Hyperbola.

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية:

1. عوض عدنان، وعزام مفيد؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، الهندسة الإحداثية عمان: جامعة القدس المفتوحة، ط2، 2003م.
2. نصير، عبد المجيد؛ والناشف، بسام، الحسبان: التفاصيل والتكامل والهندسة التحليلية عمان: دار البشير، 1989م.
3. سمور، خالد، الرياضيات والهندسة التحليلية عمان: دار الفكر، ط1، 1999م.

المراجع الأجنبية:

- Silverman R.A, Calculus with Analytic Geometry. New Jersey: Prentice-Hall,1985.
- Swokowski, E.W. Calculus with Analytic Geometry. Prindle, Weberand Schmidt,3 rd ed. 1984.
- Salas S.I, Calculus, one and Several Varaiables.Wiley,1980.

الوحدة الثانية

القطع المكافئ



محتويات الوحدة

الموضـــوع	رقم الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
أهداف الوحدة	
1. تعريف القطع المكافئ	
2. عناصر القطع المكافئ	
3. الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ	
4. إيجاد عناصر القطع المكافئ (من الحالات من "1" إلى "4")	
5. إنسحاب المحاور	
6. معادلات القطع المكافئ بصورة عامة	
7. إيجاد عناصر القطع من المعادلات العامة	
8. الإختلاف المركزي (e) للقطع المكافئ	
9. معادلة المماس والعمودي على المماس للقطع المكافئ	
10. المحل الهندسي	
11. تطبيقات على القطع المكافئ	
الخلاصة	

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	
إجابات التدريبات	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس، نقدم اليك الآن عزيزي الدارس، الوحدة الثانية من مقرر 161 رياضيات (1) الهندسة التحليلية وهي بعنوان "القطع المكافئ".

إن القطع المكافئ هو أحد القطوع المخروطية والتي تنتج من خلال تقاطع مخروط مع سطح مستوٍ، وكغيره من القطوع فهو ذا أهمية كبيرة في علم الرياضيات وارتبط ايضاً بعلوم أخرى كعلم الفيزياء حيث استخدم لدراسة حركة المقذوفات وفي المرايا وفي علم الهندسة وغيرها من العلوم.

وسوف نتعرف في هذه الوحدة على تعريف القطع المكافئ وأجزاء القطع مثل الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل ورسم منحنى القطع وانسحاب المحاور ومعادلة المماس عند نقطة ومعادلة العمودي عند نقطة وبعض التطبيقات العملية للقطع المكافئ.

وأرجو أن تكون وحدة مفيدة لك، وأن تشساهم معنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1- **تعرَف** القطع المكافئ.

2- **تكتب** معادلة القطع المكافئ.

3- **تجد** عناصر القطع المكافئ.

4- **تجد** معادلة قطع مكافئ محوره يوازي أحد المحورين الاحداثيين إذا علمت شروط كافية

5- **تعرف** انسحاب المحاور.

6- **تعرف** الاختلاف المركزي للقطع المكافئ.

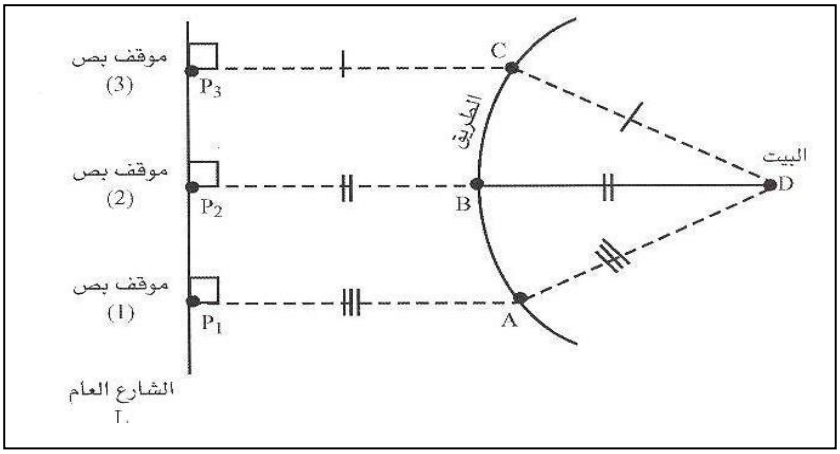
7- **تجد** معادلة المماس عند نقطة للقطع المكافئ.

8- **تجد** معادلة العمودي على المماس عند نقطة للقطع المكافئ.

9- **تستخدم** معادلة القطع المكافئ في بعض التطبيقات.

1. تعريف القطع المكافئ

الشكل (1)



سار رجلان "محمد وعبدالله" على أحد الطرق الفرعية في مدينة الخرطوم الموضح في الشكل (1) فنظر محمد إلى عبدالله، وقال له:

لماذا لا تذهب معي إلى البيت.

فأجابه لماذا لا تذهب أنت معي إلى السوق.

واتفق الإثنان على ما يلي:

إن كانت المسافة بين النقطة التي يقفون عندها "A" اقرب إلى البيت "D" فسوف يذهب عبدالله إلى بيت محمد.

أما إذا كانت المسافة بين النقطة التي يقفون عندها "A" والشارع العام "L" اقرب إلى السوق فسوف يذهب محمد إلى السوق مع عبدالله.

وعند حساب المسافة بين "A" والبيت "D" أي: AD ثم حساب المسافة بين "A" وموقف باص (1) الذي يقع على الشارع العام أي: Ap_1 .

وجد أن البعدين متساويان أي أن $AD = Ap_1$ فاتفق الرجلان على السير على الطريق نفسه إلى أن وصلا إلى النقطة B ثم قررا أن يحسبا المسافة مرة أخرى وهي BD ، Bp_2 (حيث P_2 : موقف الباص الثاني والذي يقع على الشارع العام). ثم سار الرجلان على نفس الطريق إلى أن وصلا إلى النقطة C، وقاما بحساب المسافتين: CD ، Cp_3 (حيث p_3 : موقف الباص (3) والذي يقع على الشارع العام)، فوجداها متساويتين ايضاً أي أن $Cp_3 = CD$.

إن مثل هذا الطريق سار عليه الرجلان يسمى قطعاً مكافئاً، أما البيت فيسمى بؤرة القطع المكافئ وأما الشارع العام فيسمى "دليل القطع المكافئ".

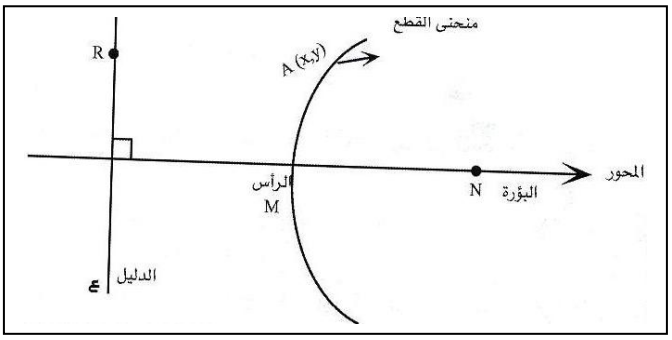
تعريف:

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي لمجموعة النقط $A(x, y)$ والتي بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.

2. عناصر القطع المكافئ

في هذا البند سوف نعرض رسماً توضيحياً للقطع المكافئ يوضح عناصره الأساسية كما في الشكل (2).

الشكل (2)



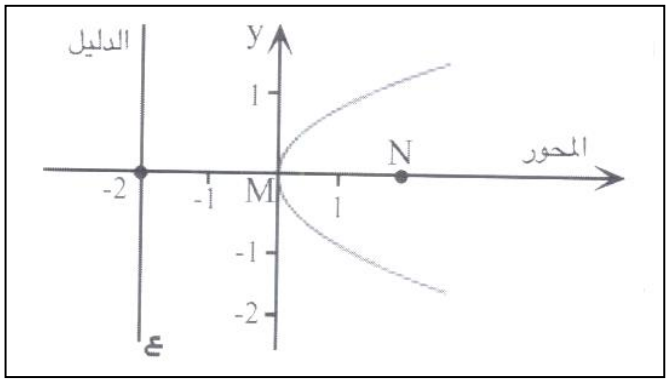
عناصر القطع المكافئ:

1. **البؤرة:** وهي احداثيات النقطة N والتي تقع على المحور وداخل المنحنى.
2. **الرأس:** وهي احداثيات النقطة M والتي تقع على المحور وعلى منحنى القطع وفي منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.
3. **الدليل:** وهو المستقيم ع كما في الشكل (2).
4. **المحور:** وهو المستقيم الذي يكون عموداً على الدليل وتقع عليه البؤرة والرأس ويكون القطع متماثلاً حوله.

مثال (1):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور مستعيناً بالشكل (3).

الشكل (3)



الحل:

إحداثيات الرأس M هي $(0,0)$

إحداثيات البؤرة N هي (2.0)

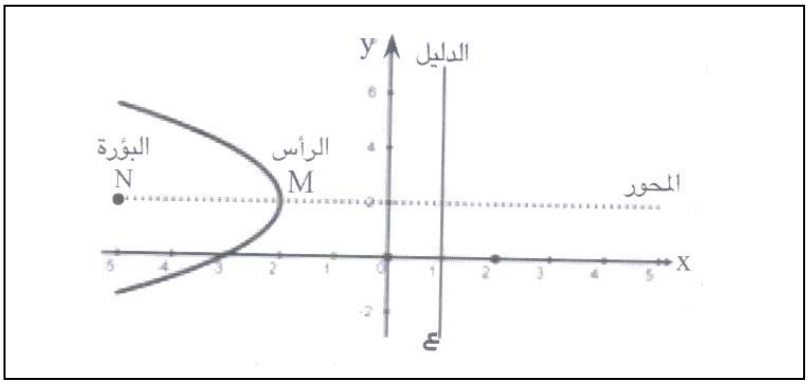
معادلة الدليل $x = -2$

معادلة المحور $y = 0$

مثال (2):

مستعيناً بالشكل (4) أوجد معادلة الدليل والمحور وإحداثيات البؤرة والرأس للقطع المكافئ.

الشكل (4)

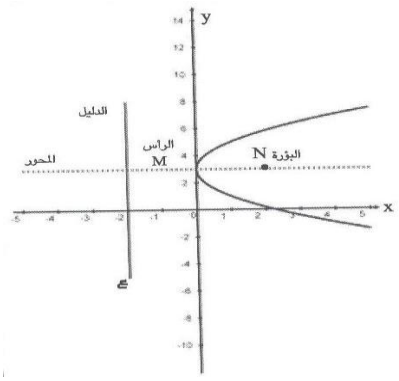


الحل:

1. معادلة الدليل $x=1$
2. معادلة المحور $y=2$
3. إحداثيات البؤرة $N(-5,2)$
4. إحداثيات الرأس $M(-2,2)$

تدريب (1)

اكتب إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة محور التماثل للقطع المرسوم في الشكل (5).

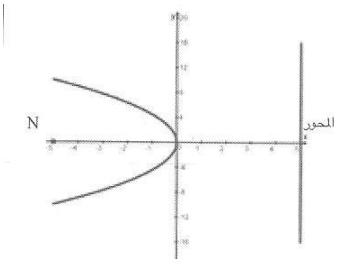


أسئلة تقويم ذاتي

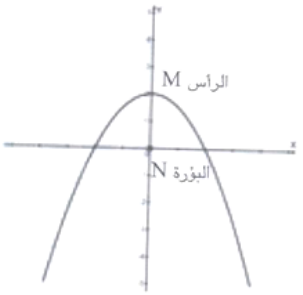
لكل من الأشكال 6،7،8

اكتب إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور.

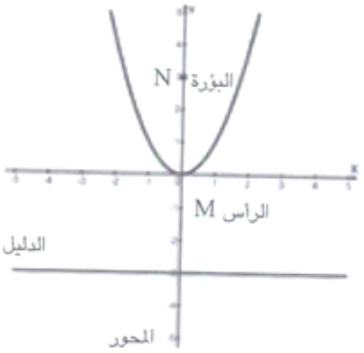
الشكل (6)



الشكل (7)



الشكل (8)



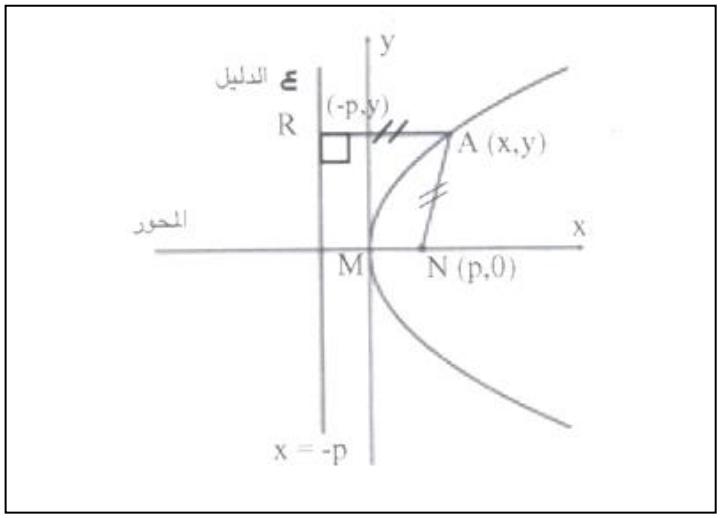
3. الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ

سوف ندرس هنا الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المتماثل حول أحد المحورين الإحداثيين ورأسه نقطة الأصل، ولهذا سوف نقسم الدراسة إلى (4) حالات:

الحالة الأولى:

وفي هذه الحالة سوف نأخذ القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومتماثل حول محور x وبؤرته تقع على محور x الموجب كما في الشكل (9).

الشكل (9)



تكون إحداثيات البؤرة $N(p,0)$ حيث p عدد حقيقي موجب لأنها تقع على المحور x الموجب ومعادلة الدليل $x=-p$ لأن بعد البؤرة عن الرأس يساوي بعد الدليل عن الرأس.

ولتكن النقطة $A(x,y)$ تقع على منحنى القطع والنقطة R تقع على الدليل L ولذلك فإن احداثيات R هي $(-P,Y)$.

ومن تعريف القطع المكافئ: فإن بعد أي نقطة على المنحنى عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل أي أن: $|AN|=|AR|$

وباستخدام قانون البعد بين نقطتين الذي درسناه في الوحدة الأولى نجد أن:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-o)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x+p)^2}$$

وبتربيع الطرفين: $(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$

وبفك الأقواس: $x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2$

وبتجميع الحدود: $x^2-x^2+y^2-2px-2px+p^2-p^2=0$

$$y^2-4px=0$$

إذن:

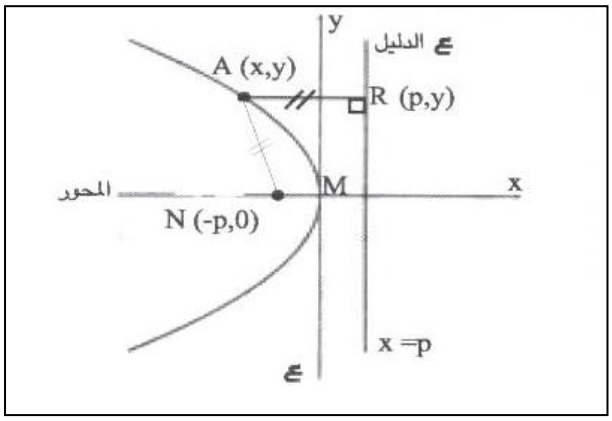
$$y^2=4px\ ,\ p\geq 0...(1)$$

ويطلق على العلاقة (1) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور x وراسه (0,0) وبؤرته تقع على محور x الموجب.

الحالة الثانية:

وفي هذه الحالة نأخذ القطع المكافئ المتماثل حول محور x ورأسه (0,0) وبؤرته تقع على محور x السالب في الشكل (10).

الشكل (10)



بما أن البؤرة تقع على محور x السالب تكون إحداثياتها $N(-p,0)$ حيث p عدد حقيقي موجب $(P \in R^+)$ ولذلك فإن معادلة الدليل $X = P$.

ولتكن $A(x,y)$ نقطة تقع على منحنى القطع المكافئ، والنقطة R تقع على الدليل وبالتالي فإن إحداثيات $R(P,Y)$ ومن تعريف القطع المكافئ فإن:

$$|AN| = |AR|$$

أي أن: $\sqrt{(x+p)^2+(y-o)^2} = \sqrt{(x-p)^2+(y-y)^2}$

أي: $\sqrt{(x+p)^2+y^2} = \sqrt{(x-p)^2}$

وبتربيع الطرفين: $(x+p)^2+y^2 = (x-p)^2$

وبفك الأقواس: $x^2+2px+p^2+y^2 = x^2-2px+p^2$

وبتجميع الحدود والاختصار $x^2-x^2+y^2+2px+2px+2px+p^2-p^2=0$

$$y^2+4px=0$$

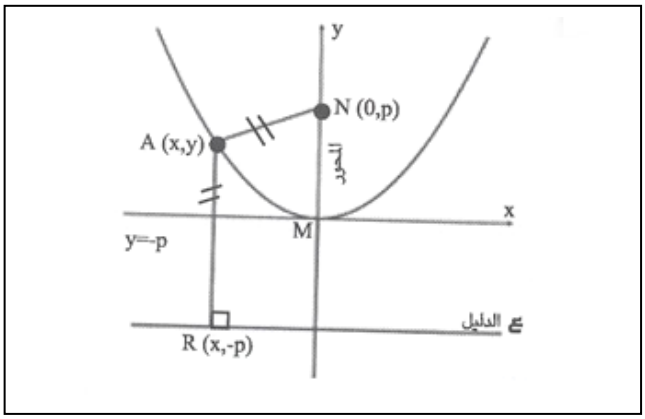
$$y^2 = 4px \text{ و } p \succ 0 \ldots.(2)$$

ويطلق على العلاقة (2) بمعادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور x ورأسه (0,0) وبؤرته على محور x السالب.

الحالة الثالثة:

أما فغي هذه الحالة فسوف نأخذ القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه (0,0) وبؤرته على محور y الموجب كما في الشكل (11).

الشكل (11)



وفي هذه الحالة فإن البؤرة تقع على محور y الموجب إذن إحداثياتها $N(o,\ p)$ (حيث $p \in R^+$) ولذلك فإن معادلة الدليل $Y = -P$.

ولتكن $A(x,\ y)$ نقطة على منحنى القطع المكافئ ولتكن R نقطة على المستقيم ع (الدليل) فتكون إحداثيات R هي $(x,-p)$.

ومن تعريف القطع المكافئ: $|AN| = |AR|$

أي أن: $\sqrt{(x-o)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

وبتربيع الطرفين: $x^2(y-p)^2 = (y+p)^2$

وبفك الأقواس والاختصار: $x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$

وبتجميع الحدود: $x^2-4py=0$

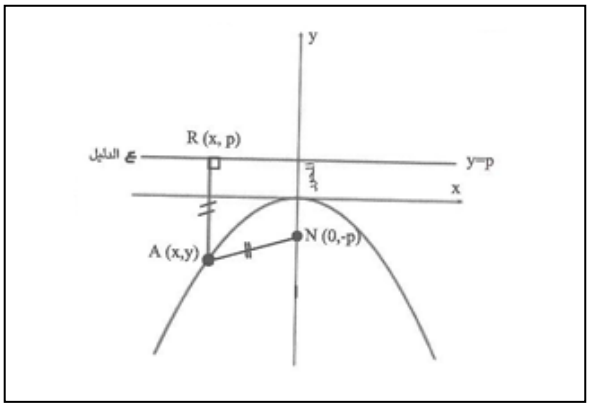
إذن: $\boxed{x^2 = 4py,\ p \succ 0....(3)}$

ويطلق على العلاقة (3) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y وبؤرته تقع على محور y الموجب.

الحالة الرابعة:

وهنا نأخذ القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه (0,0)وبؤرته y السالب كما في الشكل (12).

الشكل (12)



وكما نلاحظ في الشكل (12) فإن إحداثيات البؤرة $N(0,-p)$ حيث $(P \in R^+)$ والنقطة $A(x,y)$ تقع على منحنى القطع، والنقطة $R(x,p)$ تقع على المستقيم ع (الدليل).

ومن تعريف القطع المكافئ: $|AN| = |AR|$

أي أن: $\sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}$

$$\sqrt{x^2+(y+p)^2} = \sqrt{(y-p)^2}$$

وبتربيع الطرفين: $x^2+(y+p)^2 = (y-p)^2$

وبفك الأقواس والاختصار: $x^2+y^2+2ppy+p^2 = y^2-2py+p^2$

وبتجميع الحدود: $x^2+2py+2py=0$

أي أن: $\boxed{x^2 = -4py,\ p \succ 0 \ldots (4)}$

ويطلق على العلاقة (4) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه (0,0) وبؤرته على محور y السالب.

أمثلة متنوعة على الحالات الأربعة:

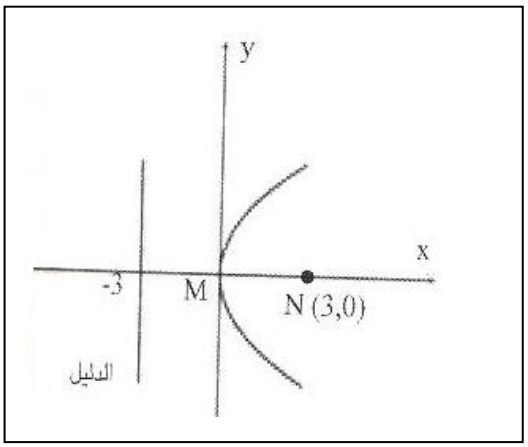
مثال (1):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (3,0).

الحل:

نرسم شكلاً توضيحياً (13) وبالنظر إلى الشكل نجد أن:

الشكل (13)



القطع متماثل حول محور x وبؤرته على محور x الموجبة وقيمة p=3.

إذن المعادلة حسب الحالة (1): $y^2 = 4px$

وبالتعويض بقيمة p=3 نجد أن: $y^2 = 12x$

ملاحظة: اتجاه فتحة القطع باتجاه البؤرة وعكس الدليل.

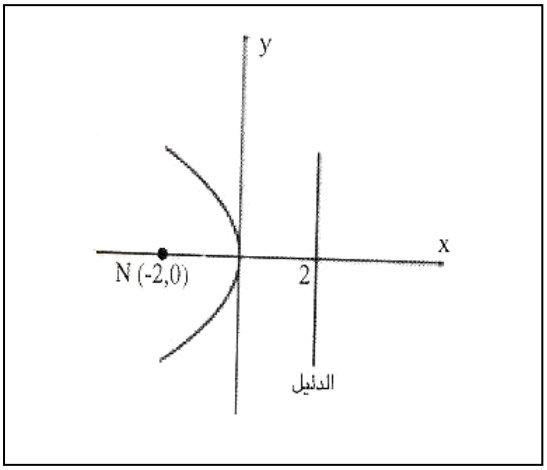
مثال (2):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-2,0) ورأسه نقطة الأصل.

الحل:

نرسم شكلاً توضيحياً (14) لقطع متماثل حول محور x السالب وقيمة p=2 .

الشكل (14)



إذن المعادلة حسب الحالة (2):

$$y^2 = -4px$$

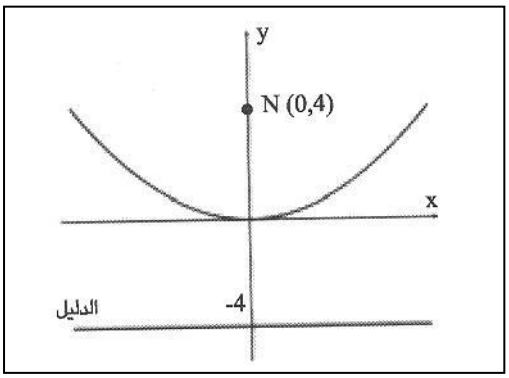
وبالتعويض بقيمة p=2 نجد أن: $y^2 = -8x$

مثال (3):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0,0) وبؤرته (0,4).

الحل:

الشكل (15)



نلاحظ كما في الشكل (15) أن القطع متماثل حول محور y وبؤرته تقع على محور y الموجب وقيمة p=4 إذن المعادلة حسب الحالة (3):

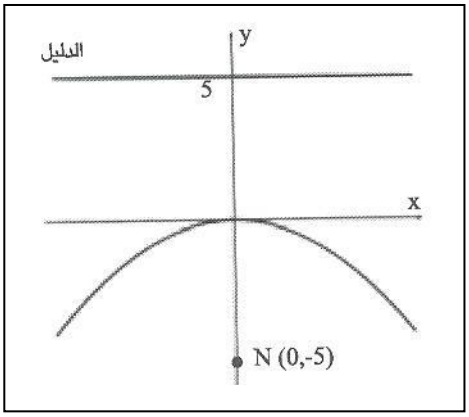
$$x^2 = 4py$$

وبالتعويض بقيمة p=4 نجد أن $x^2 = 16y$

مثال (4):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0,-5) ورأسه نقطة الأصل.

الشكل (16)



نلاحظ من الشكل (16) أن القطع متماثل حول محور y وبؤرته على محور y السالب، وقيمة p=5 إذن المعادلة حسب الحالة (4):

$$x^2 = -4py$$

وبالتعويض بقيمة p=5 نجد أن $x^2 = -20y$

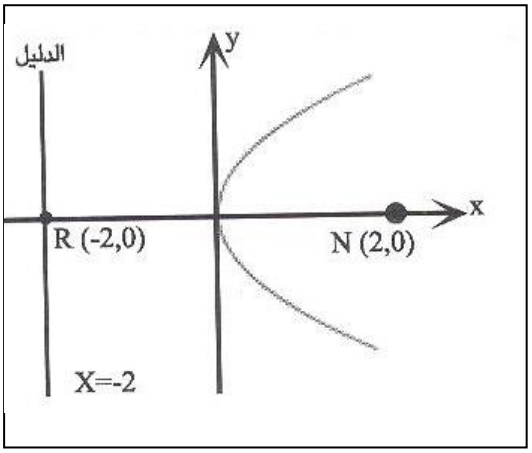
مثال (5):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (2,0) ومعادلة دليله x=-2.

الحل:

نرسم الشكل (17)

الشكل (17)



نحن نعرف أن الرأس هو في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل، إذن احداثيات الرأسM هي: منتصف المسافة بين النقطتين R , N مع ملاحظة أن احداثيات النقطة R هي: (-2,0).

إذن احداثيات M: $(0,0)=\left(\frac{0+0}{2},\frac{2+(-2)}{2}\right)$

وبحساب P $p=2-0=2$

وملاحظة الشكل (17): المعادلة حسب الحالة (1): $y^2=4px$

وبتعويض قيمة p=2 نجد أن $y^2=8x$

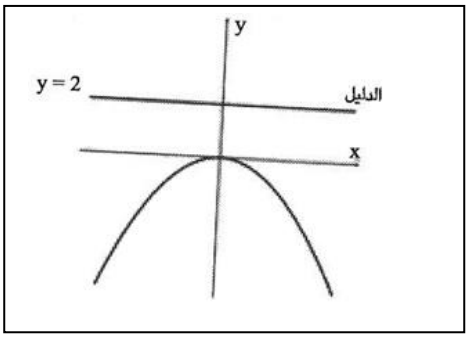
مثال (6):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y=2$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل:

بعد الرأس عن الدليل = بعد الرأس عن البؤرة = $p=2$ ، لاحظ الشكل (18)

الشكل (18)



إذن حسب الحالة (4) المعادلة هي: $x^2 = -4py$

وبتعويض قيمة $p = 2$ نجد أن: $x^2 = -8y$

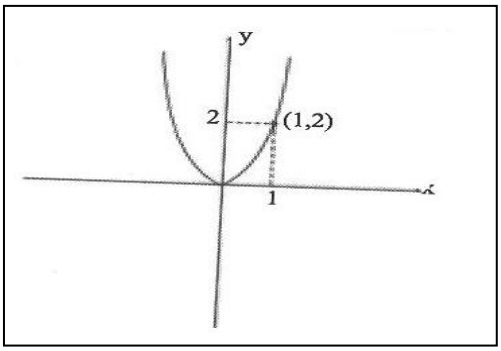
مثال (7):

أوجد معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه نقطة الأصل ويمر منحناه بالنقطة (1,2).

الحل:

بما أن رأس القطع نقطة الأصل ومتماثل حول محور y إذن فهو مفتوح للأعلى أو للأسفل وبما أن منحناه يمر بالنقطة (1,2) إذن فهو مفتوح للأعلى كما في الشكل (19).

الشكل (19)



إذن حسب الحالة (3) المعادلة هي: $x^2 = 4py$

وبما أن النقطة 1,2) تقع على منحنى القطع إذن تحقق معادلته.

$$(1)^2 = 4p(2)$$

$$p = 8p$$

$$p = \frac{1}{8}$$

وبتعويض قيمة $p = \frac{1}{8}$ في المعادلة نجد أن:

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y$$

$$x^2 = \frac{1}{2}y$$

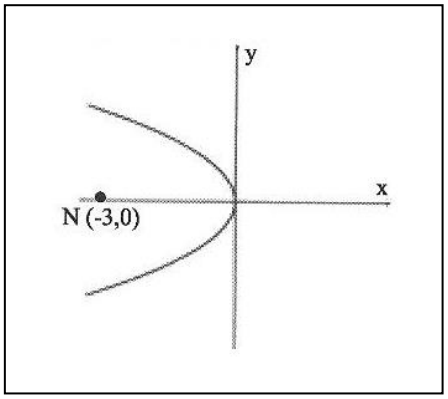
مثال (8):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه بقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة: $(x+3)^2 + y^2 = 16$.

الحل:

مركز الدائرة $(-3,0)$ = البؤرة وبملاحظة الشكل (20) نجد $p = 3$

الشكل (20)



إذن حسب الحالة (2) فإن المعادلة $y^2 = -4px$

وبتعويض قيمة $p = 3$ نجد أن: $y^2 = -12x$

تدريب (2)



أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه مركز الدائرة: $x^2 = 3 - y^2$ ودليله المستقيم $y + 3 = 0$

مثال (9):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته نقطة تقاطع المستقيم: $\frac{y}{4} - \frac{x}{2} = 1$ مع محور x.

الحل:

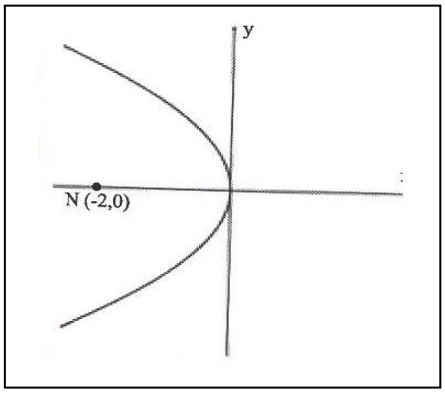
لإيجاد البؤرة نكتب معادلة المستقيم عى الصورة: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

فينتج أن: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$

إذن مقطع هذا المستقيم من محور $x = -2$

إذن البؤرة $(-2,0)$ إذن $p = 2$ انظر الشكل (21)

الشكل (21)



المعادلة حسب الحالة (2): $y^2 = -4px$

وبتعويض $p = 2$ نجد أن: $y^2 = -8x$

أسئلة تقويم ذاتي

1. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (5,0).
2. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-3,0) ورأسه نقطة الأصل.
3. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0,0) وبؤرته (0,2).
4. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0,-4) ورأسه نقطة الأصل.
5. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (4,0) ومعادلة دليله $x+4=0$.
6. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y-3=0$ ورأسه نقطة الأصل.
7. اوجد معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور y ورأسه نقطة الأصل ويمر منحناه بالنقطة (2,3).
8. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة: $(x+2)^2=2-y^2$.
9. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه مركز الدائرة $x^2+y^2=8$ ودليله $y-2=0$.
10. اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته هي نقطة تقاطع المستقيم $\frac{y}{2}-\frac{x}{3}=1$ مع محور y.

4. ايجاد القطع المكافئ (من الحالات 1–4)

لقد عرفنا في بند (2) عناصر القطع المكافئ وهي البؤرة والرأس ومعادلة الدليل ومعادلة المحور وسوف نتعلم في هذا البند كيف نجد هذه العناصر بقطع مكافئ معادلته على إحدى الحالات الأربع التي درسناها في بند (3) والمثلة التالية توضح ذلك.

ولكن قبل الأمثلة هناك ملاحظات هامة يجب معرفتها:

1. إذا كان التربيع للمتغير y يكون القطع متماثل حول محور x ويكون لدينا حالتان:
   A) إذا كانت اشارة معامل x موجبة، يكون القطع مفتوحاً لليمين.
   B) إذا كانت اشارة معامل x سالبة، يكون القطع مفتوحاً لليسار.
2. إذا كان التربيع للمتغير x، يكون القطع متماثلاً حول محور y ويكون لدينا حالتان:
   A) إذا كانت اشارة معامل y موجبة، يكون القطع القطع مفتوحاً للأعلى.
   B) إذا كان اشارة معامل y سالبة، يكون القطع مفتوحاً للأسفل.

مثال (1):

اوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $y^2 = 12x$.

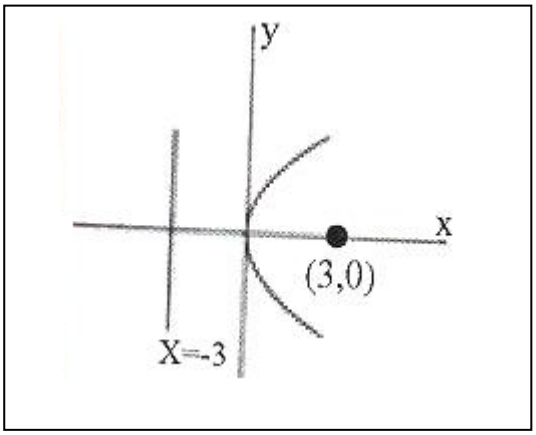
الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$

وبمقارنة المعادلة $y^2 = 12x$ بالمعادلة القياسية $y^2 = 4px$ نجد أن: $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

وبما أن إشارة التربيع للمتغير y إذاً القطع متماثل حول محور x وبما أن إشارة معامل x موجبة إذن القطع مفتوح لليمين انظر الشكل (22).

الشكل (22)



إذن احداثيات البؤرة $(3,0)=(p,0)$

ومعادلة الدليل $x=-p$

وبما أن القطع متماثل حول محور x إذن معادلة المحور $y=0$.

مثال (2):

اوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ الذي معادلته:

$y^2=-8x$

الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$ وبمقارنة المعادلة $y^2=-4px$ بالمعادلة $y^2=-8x$ نجد أن:

$-4p=-8 \Rightarrow p=2$

وبما أن إشارة التربيع y إذن القطع متماثل حول محور x.

وبما أن إشارة معامل x سالبة إذن القطع مفتوح لليسار.

إذن احداثيات البؤرة $(-2,0)=(-p,0)$

ومعادلة الدليل $x=p \Leftarrow x=2$

وبما أن القطع متماثل حول محور x إذن معادلة المحور $y=0$

مثال (3):

اوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع $x^2 = 16y$.

الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$

التربيع للحد x إذن القطع متماثل حول محور y

واشارة معامل y موجبة إذن القطع مفتوح للأعلى.

وبمقارنة المعادلة $x^2 = 16y$ بالمعادلة القياسية $x^2 = 4py$

نجد أن: $4p = 16 \Rightarrow p = 4$

إذن احداثيات البؤرة $(0,4) = (0, p)$

ومعادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -4$

وبما أن القطع متماثل حول محور y إذن معادلة المحور $x = 0$

مثال (4):

اوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع المكافئ: $x^2 = -20y$

الحل:

احداثيات الرأس $(0,0)$

وبما أن التربيع للحد x ، إذنالقطع متماثل حول محور y.

وبما أن اشارة معامل y سالبة إذن القطع مفتوح للاسفل.

وبمقارنة المعادلة $x^2 = -20y$ بالمعادلة القياسية $x^2 = -4py$.

نجد أن: $-4p = -20 \Rightarrow p = 5$.

إذن احداثيات البؤرة $(0,-5) = (0,-p)$.

ومعادلة الدليل $y = p \Rightarrow y = 5$.

وبما أن القطع متماثل حول محور y إذن معادلة المحور $x=0$.

تدريب (3)

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور والدليل للقطع $y^2=8x$

أسئلة تقويم ذاتي

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل وارسم القطع المكافئ الذي معادلته:

(1) $y^2=20x$ (2) $y^2=-12x$ (3) $x^2=8y$

(4) $x^2=-16y$ (5) $y^2=16x$ (6) $x^2=-12y$

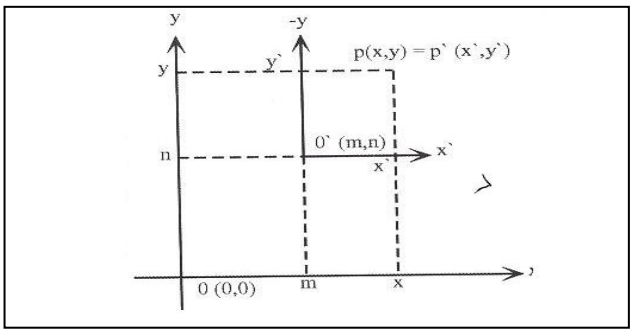
(7) $x^2=\frac{4}{3}y$ (8) $y^2=-8x$ (9) $x^2=-8y$

5. انسحاب المحاور

افرض أن لدينا المستوى الديكارتي xy ونقطة الأصل $O(0,0)$.

واردنا سحب هذا المستوى إلى مستوى آخر $x'y'$ نقطة الأصل له $O(m,n)$ كما هو موضح في الشكل (23).

الشكل (23)



فإذا كانت النقطة $p(x,y)$ في المستوى $x'y'$ واردنا سحب هذه النقطة إلى المستوى xy ولتكن احداثياتها بعد الانسحاب $p'(x',y')$ فما العلاقة بين احداثيات النقطة p واحداثيات النقطة p .

واضح من الشكل (23) أن:

$$x = x - m$$

$$y^{-} = y - m$$

وتسمى العلاقة (*) علاقة انسحاب المحاور

مثال (1):

إذا كانت النقطة $p(7,4)$ في المستوى xy فماهي احداثيات p في المستوى $x'y'$ الذي نقطة الأصل له $(3,-5)$.

الحل:

نعتمد على علاقة الانسحاب: $x' = x - m = 7 - 3 = 4$

$$y' = y - n - 4 - (-5) - 9$$

إذن النقطة p بعد الانسحاب تصبح $p'(4,9)$

مثال (2):

xy نظام احداثيات المستوى الديكارتي، اجري له انسحاب للنظام xy الذي مركزه $(2,3)$ فما احداثيات النقطة $p(5,10)$ في النظام xy الجديد.

الحل:

نطبق على علاقة الانسحاب: $x' = x - m = 5 - 2 = 3$

$$y' = y - n = 10 - 3 = 7$$

إذن: $p'(x',y') = p'(3,7)$

تدريب (4)



إذا كان مركز النظام الجديد $x'y'$ هو $(12,8)$أوجد احداثيات النقطة p' إذا كانت احداثيات النقطة p في النظام القديم xy هي $(4,-4)$.

أسئلة تقويم ذاتي



1. افرض أن نقطة الاصل لنظام الاحداثيات الجديد $x'y'$ هي $(-5,4)$، للنظام القديم xy ما هما الاحداثيان الجديدان للنقطة p التي احداثياتها $(6,1)$؟
2. إذا كانت $p_2(5,4)$ ، $p_1(15,25)$ نقطتان في المستوى xy أوجد احداثيات p_1', p_2' للنظام $x'y'$ الذي مركزه $(7,2)$؟

6. معادلات القطع المكافئ بصورة عامة

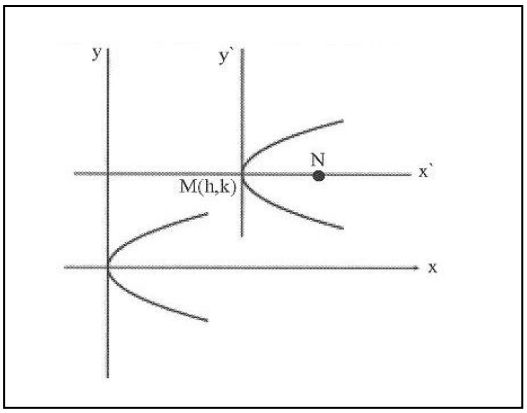
في هذا البند سوف نتعرف على معادلات القطع المكافئ بصورة عامة أي عندما يكون رأس القطع $M(h,k)$ وحوره يوازي محور x أو y.

وهنا يوجد أربع حالات ايضاً.

الحالة الخامسة:

إذا كان القطع المكافئ متماثل حول محور يوازي محور x ورأسه$M(h,k)$ ومفتوح لليمين كما في الشكل (24).

الشكل (24)



واضح من الشكل (24) أن الحالة (1) للقطع المكافئ والذي معادلته $y^2 = 4px$ والتي درسناها في البند (4) قد اجري لها انسحاب للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو (h,k) والذي يمثل رأس القطع المكافئ الجديد والذي معادلته $y'^2 = 4px'$ بالنسبة للمحاور $x'y'$

وباستخدام علاقة انسحاب المحاور:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.....(5)

وتسمى العلاقة (5) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي محور x ومفتوح لليمين.

ملاحظات:

1. معادلة المحور $y = k$.
2. البؤرة $(h+p,k)$.
3. معادلة الدليل $x = h - p$.

مثال (1):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(2,3)$ وبؤرته $(5,3)$.

الحل:

نحن نعرف أن محور التماثل يمر بالبؤرة والرأس إذن القطع متماثل حول مستقيم يوازي محور x .

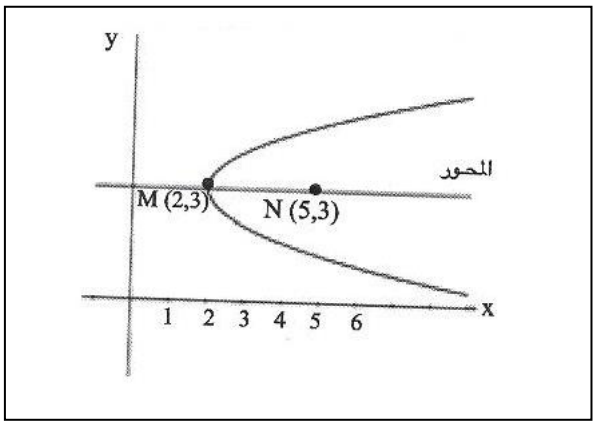
وبما أن اتجاه فتحة القطع هي باتجاه البؤرة إذن فالقطع مفتوح لليمين.

إذن معادلته حسب الحالة (5): $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

وبحساب قيمة p: $p = 5-2 = 3$

والتعويض في المعادلة (5) ينتج أن: $(y-3)^2 = 12(x-2)$ أنظر الشكل (25).

الشكل (25)



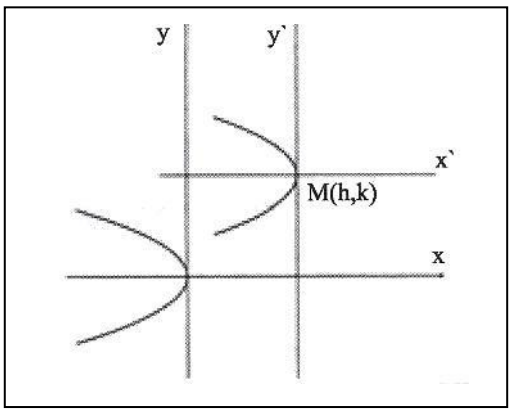
تدريب (5)

أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه $(-2,4)$ وبؤرته $(2,4)$؟

الحالة السادسة:

إذا كان القطع المكافئ متماثلاً حول محور يوازي محور x ورأسه $M(h,k)$ ومفتوحاً لليسار كما في الشكل (26).

الشكل (26)



واضح من الشكل (26) أن الحالة (2) للقطع المكافئ والذي معادلته $y^2 = -4px$ والتي درسناها في البند (4) قد اجرى لها انسحابلا للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو $M(h,k)$ والذي يمثل رأس القطع المكافئ الجديد والذي معادلته $y'^2 = -4px$.

بالنسبة للمحاور $x'y'$.

وباستخدام علاقة انسحاب المحاور:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(y-k)^2 = -4(x-h).....(6)$$

وتسمى العلاقة (6) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي x ومفتوح لليسار.

ملاحظات:

1. معادلة المحور: $y = k$
2. احداثيات البؤرة: $(h - p, k)$
3. معادلة الدليل: $x = h + p$

مثال (2):

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(3,2)$وبؤرته $(1,2)$.

الحل:

بما أن البؤرة والرأس واقعتان على محور يوازي x إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور x ومفتوح لليسار (بإتجاه البؤرة).

إذن المعادلة حسب الحالة (6): $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

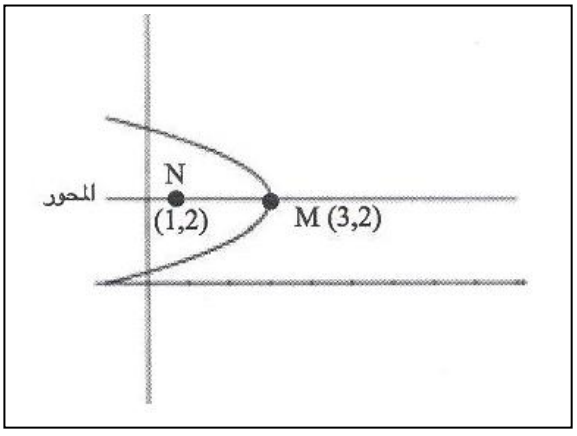
وبحساب قيمة p: $p = 3 - 1 = 2$

والتعويض بقيمة p، واحداثيات الرأس نجد أن:

$$(y-2)^2 = -8(x-3)$$

انظر الشكل (27).

الشكل (27)



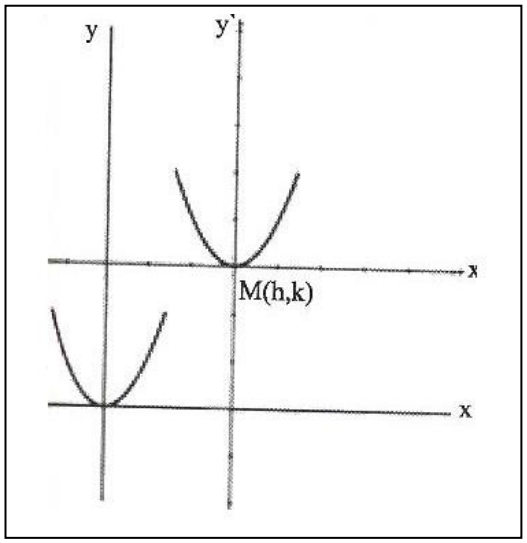
تدريب (6)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-1,2)$ وبؤرته $(-3,2)$.

الحالة السابعة:

إذا كان القطع المكافئ متماثل حول محور يوازي محور y ورأسه $M(h,k)$ ومفتوح للأعلى كما في الشكل (28).

الشكل (28)



واضح من الشكل (28) أن الحالة (3) للقطع المكافئ والذي معادلته $x^2 = 4py$ والتي درسناها في البند (4) قد اجرى لها انسحاب للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو $M(h,k)$ والذي يمثل رأس القطع المكافئ الجديد والذي معادلته $x'^2 = 4py'$ بالنسبة للمحاور $x'y'$ وباستخدام علاقة انسحاب المحاور التي درسناها في بند (5).

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)....(7)$$

وتسمى العلاقة (7) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي محور y ومفتوح للأعلى:

ملاحظات:

1. معادلة المحور $x = h$.
2. معادلة الدليل $y = k - p$
3. احداثيات البؤرة $(h, k + p)$

مثال (3):

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(3,2)$ وبؤرته $(3,5)$

الحل:

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور y إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور y، والقطع مفتوح للأعلى (بإتجاه البؤرة).

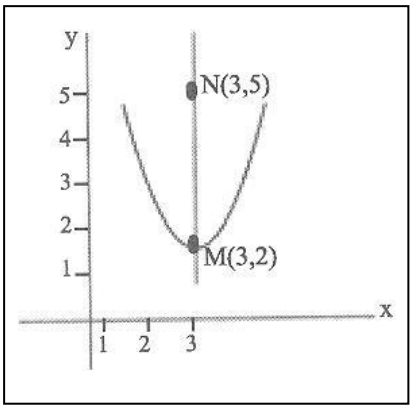
إذن المعادلة حسب الحالة (7): $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

وبحساب p: $p = 5 - 2 = 3$

والتعويض باحداثيات الرأس $(3,2)$ نجد أن:

$(x-3)^2 = 12(y-2)$ انظر الشكل (29).

الشكل (29)



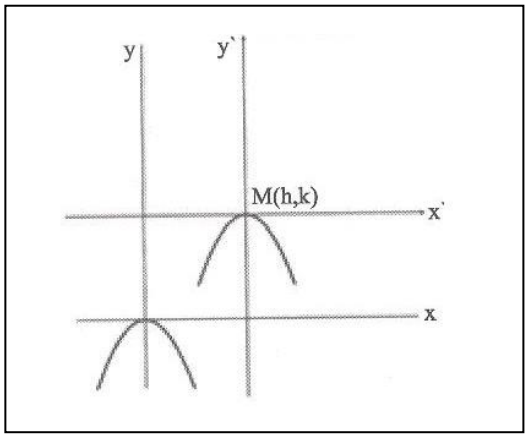
تدريب (7)

اوجد معادلة قطع مكافئ رأسه $(-3,2)$ وبؤرته $(-3,5)$

الحالة الثامنة:

إذا كان القطع متماثل حول محور يوازي محور y ورأسه $M(h,k)$ ومفتوح للأسفل. كما في الشكل (30).

الشكل (30)



واضح من الشكل (30) أن الحالة (4) للقطع المكافئ والذي معادلته $x^2 = -4py$ والتي درسناها في البند (4) قد اجري لها انسحاب للمحاور $x'y'$ الجديدان وبمركز جديد هو $M(h,k)$ والذي يمثل رأس المقطع المكافئ الجديد والذي معادلته: $x'^2 = -4py$.

وبالنسبة للمحاور $x'y'$ وباستخدام علاقة انسحاب المحاور:

$$x' = x - h$$
$$y = y - k$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \ldots (8)$$

وتسمى العلاقة (8) معادلة قطع مكافئ متماثل حول محور يوازي محور y ومفتوح للأسفل:

ملاحظات:

1. معادلة المحور $x = h$.
2. معادلة الدليل $y = k + p$.
3. احداثيات البؤرة $(h, k-p)$

مثال (4):

جد معادلة قطع مكافئ رأسه $(3,5)$ وبؤرته $(3,2)$.

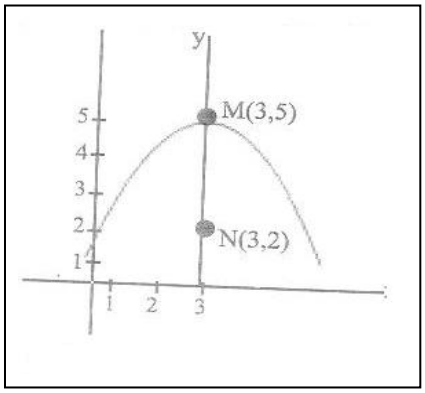
الحل:

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور y إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور y، والقطع مفتوح للاسفل (بإتجاه البؤرة)، إذن المعادلة حسب الحالة (8): $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ وبحساب p: $p = 5 - 2 = 3$

والتعويض في المعادلة نجد أن: $(x-3)^2=-12(y-5)$

انظر الشكل (31).

الشكل (31)



تدريب (8)

جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(-1,-1)$ورأسه $(1,-1)$

أمثلة متنوعة:

مثال (1):

اوجد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(0,4)$ ومعادلة دليله $y=-4$.

الحل:

انظر الشكل (32) احداثيات رأس القطع هي M وهي منتصف القطعة المستقيمة NR

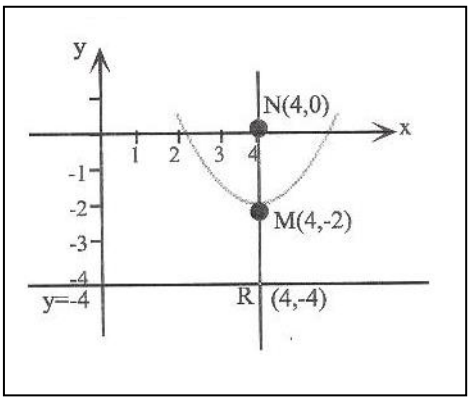
إذن احداثيات الرأس = $\left(\frac{4+4}{2},\frac{0+(-4)}{2}\right)=(4,-2)$

وبحساب P: $P=0-(-2)=2$

وبملاحظة أن المسألة تنطبيق على الحالة (7) إذن المعادلة: $(x-h)^2=4p(y-k)$

وبتعويض قيمة p واحداثيات الرأس نجد أن: $(x-4)^2=8(y+2)$.

الشكل (32)



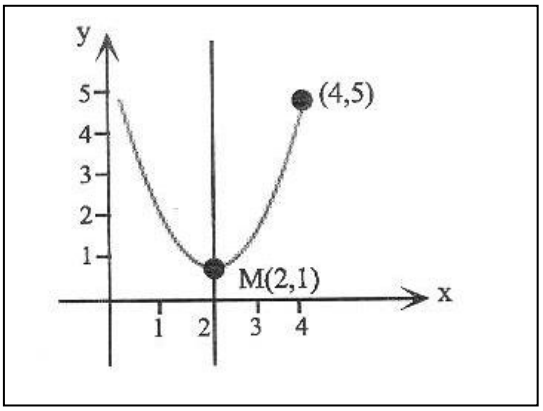
مثال (2):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (2,1)ويمر منحناه بالنقطة (5,4)ومحوره يوازي محور y ثم ارسم منحناه؟

الحل:

بما أن محور القطع يوازي محور y إذن هو متماثل حول مستقيم يوازي محور y، ويكون أما مفتوح للأعلى أو للأسفل وبما أن منحناه يمر في النقطة (4,5)، إذن هو مفتوح للأعلى، انظر الشكل (33).

الشكل (33)



إذن معادلته حسب الحالة (7): $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

وبتعويض احداثيات الرأس نجد أن: $(x-2)^2 = 4p(y-1)$

وبما أن النقطة $(4,5)$ تقع على منحنى القطع إذن تحقق المعادلة:

$$(4-2)^2 = 4p(5-1)$$

$$4 = 16p$$

$$p = \frac{1}{4}$$

وبتعويض قيمة p في المعادلة نحصل على:

$$(x-2)^2 = (y-1)$$

ملحظة هامة:

1. معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور y قد تكتب على الصورة:

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0 \quad , \quad a,b,c \in R$$

2. معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور x قد تكتب على الصورة:

$$x = ay^2 + by + c \quad , \quad \neq 0 \quad , \quad a,b,c \in R$$

مثال (3):

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور y ويمر منحناه بالنقاط $(2,3)$ و $(-1,6)$ و $(1,0)$.

الحل:

معادلة القطع كما ورد في الملاحظات أعلاه هي:

$$y = ax^2 + bx + c$$

وبما أن النقاط الثلاث تقع على منحنى القطع إذن تحقق معادلته.

$$(2,3) \Rightarrow 3 = 4a + 2b + c \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(-1,6) \Rightarrow 6 = a - b + c \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(1,0) \Rightarrow 0 = a + b + c \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبجمع المعادلتين (3) , (2) نحصل على:

$$6 = 2a + 2c \ldots\ldots\ldots(4)$$

بضرب المعادلة (2) بـ 2 نحصل على:

$$12 = 2a - 2b + 2c.....(5)$$

بجمع المعادلتين (5) , (1) نحصل على:

$$15 = 6a + 3c.....(6)$$

بضرب المعادلة (4) بـ 3− نجد أن:

$$-18 = -6a - 6c.....(7)$$

بجمع المعادلتين (7) و (6) نحصل على:

$$-3 = -3c \Rightarrow c = 1$$

نعوض قيمة c في المعادلة (4): $6 = 2a + 2 \Rightarrow 4 = 2a$

$$a = 2$$

نعوض قيمة a,c في المعادلة (1) لنحصل على: $3 = 8 + 2b + 1 \Rightarrow -6 - 2b$

$$b = -3$$

وبتعويض قيم b,c في معادلة القطع نجد أن: $y = 2x^2 - 3x + 1$

أسئلة تقويم ذاتي

1. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(2,-2)$ وبؤرته $(4,-2)$.
2. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,-2)$ وبؤرته $(-3,-2)$.
3. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(6,1)$ وبؤرته $(6,5)$.
4. جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(6,1)$وبؤرته $(6,-4)$.
5. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محوره $y = 0$ ويمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(2,-3)$

7. إيجاد عناصر القطع المكافئ من المعادلات العامة

في هذا البند سنجد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته على إحدى الحالات (5)، (6) ، (7) ، (8) ، والعناصر هي:

1. احداثيات البؤرة.
2. احداثيات الرأس.
3. معادلة المحور.
4. معادلة الدليل.

مع الأخذ بنظر الاعتبار الملاحظات التالية:

1- إذا كان التربيع للمقدار الذي يحوي على المتغير y فإن القطع متماثل حول محور يوازي محور x وهنا تظهر حالتان:

A) إذا كانت إشارة معامل x موجبة فالقطع مفتوح لليمين.

B) إذا كانت إشارة معامل x سالبة فالقطع مفتوح لليسار.

2- إذا كان التربيع للمقدار الذي يحتوي على المتغير x فإن القطع متماثل حول محور يوازي محور y وهنا تظهر حالتان ايضاً:

A) إذا كانت إشارة معامل Y موجبة فالقطع مفتوح للأعلى.

B)إذا كانت إشارة معامل Y سالبة فالقطع مفتوح للأسفل.

مثال (1):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل وارسم منحنى القطع المكافئس الذي معادلته: $(Y-3)^2=12(X-2)$.

الحل:

إحداثيات الرأس $M(2,3)$، بما أن التربيع للمقدار الذي يحتوي على المتغير y إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور x.

وبما أن معامل x موجب إذن القطع مفتوح لليمين وبحساب قيمة p: $4p=12\Rightarrow p=3$

إذن إحداثيات البؤرة $(h+p,k)=(5,3)$

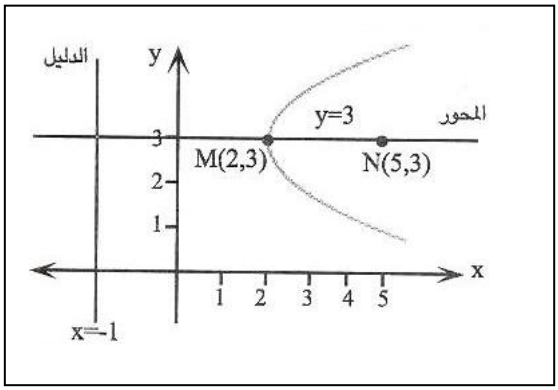
معادلة المحور: $y=k \Rightarrow y=3$

معادلة الدليل: $x=h-p=2-3$

$x=-1$

ورسمه القطع كما في الشكل (34)

الشكل (34)



مثال (2):

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل وارسم منحنى القطع المكافئ الذي معادلته: $(y-2)^2=-8(x-3)$

الحل:

رأس القطع $M(h,k)=M(3,2)$ وبما أن التربيع للمقدار الذي يحتوي على المتغير Y إذن القطع متمائل حول محور يوازي x .

وبما أن إشارة معامل x سالبة إذن القطع مفتوح لليسار.

وبحساب قيمة p: $-4p=-8 \Rightarrow p=2$

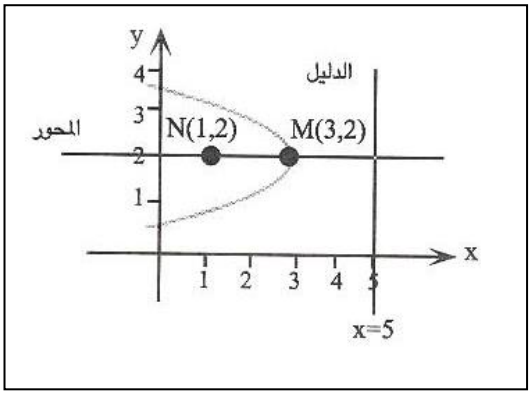
معادلة المحور: $y=k \Rightarrow y=2$

احداثيات البؤرة: $(h-p,k)=(3-2,2)=(1,2)$

معادلة الدليل: $x=h+p \Rightarrow x=3+2 \Rightarrow x=5$

ورسمة القطع كما في الشكل (35).

الشكل (35)



مثال (3):

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور وارسم منحنى القطع المكافئ الذي معادلته: $(x-3)^2=12(y-2)$

الحل:

احداثيات الرأس: $M(h,k)=M(3,2)$

بما أن التربيع للمقدار الذي يحتوى على الحد x إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور y وبما أن اشارة معامل y موجبة إذن القطع مفتوح للأعلى.

وبحساب قيمة p: $4p=12\Rightarrow p=3$

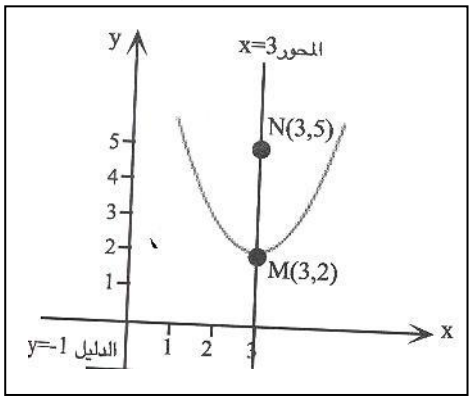
معادلة المحور: $x=h\Rightarrow x=3$

معادلة الدليل: $y=k-p\Rightarrow y=2-3\Rightarrow y=-1$

احداثيات البؤرة: $(h,k+p)\Rightarrow(3,2+3)=(2,3)$

ورسمة القطع المكافئ في الشكل (36).

الشكل (36)



مثال (4):

أوجد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته: $x^2-2x+8y+9=0$

الحل:

هذه المعادلة تربيعية في x وخطية في y لذلك نقوم بإكمال المربع في x على النحو التالي:

$$(x^2-2x+1)-1=-8y-9\Rightarrow$$

$$x^2-2x+1=-8y-8\Rightarrow$$

$$(x-1)^2=-8(y+1)$$

وبما أن التربيع للمتغير xإذاً القطع متماثل حول محور يوازي محور y.

وبما أن إشارة معامل y سالبة إذاً القطع مفتوح للأسفل ورأس القطع $M(h,k)=M(1,-1)$

معادلة المحور: $x=h\Rightarrow x=1$

وبحساب قيمة P: $-4p=-8\Rightarrow p=2$

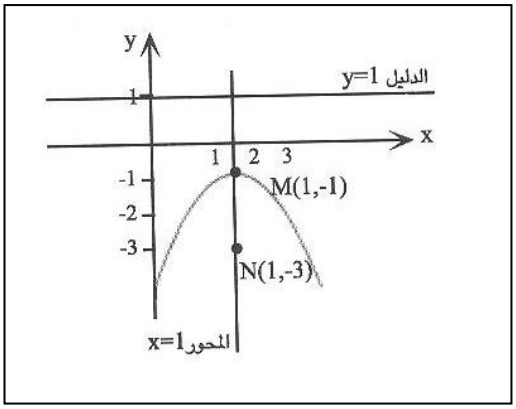
معادلة الدليل: $y=k+p\Rightarrow y=-1+2$

$$y=1$$

احداثيات البؤرة: $(h,k-p)=(1,-1-2)=(1,-3)$

ورسمة القطع كما في الشكل (37).

الشكل (37)



تدريب (9)

بين أن منحنى $y = 6x^2 - 12x + 8$ هو قطع مكافئ.

أسئلة تقويم ذاتي

أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور وارسم منحنى القطع المكافئ الذي معادلته:

(1) $(y-4)^2 = 16(x+2)$.

(2) $(y-2)^2 = -8(x+1)$.

(3) $(x+3)^2 = 12(y-2)$.

(4) $(x+1)^2 = -8(y-1)$.

(5) $(y+2)^2 = -12x$.

(6) $(x-6)^2 = 16(y-1)$.

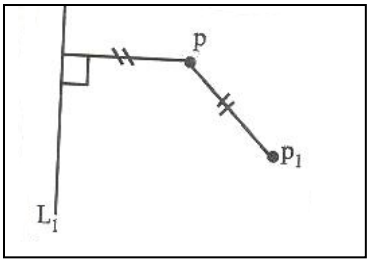
8. الاختلاف المركزي (e) للقطع المكافئ

الاختلاف المركزي (e) هو خاصية هندسية للقطع المكافئ والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية:

إذا كان L_1 مستقيماً وكانت P_1 نقطة خارج المستقيم وكان (e) عدداً حقيقياً موجباً؛ فإن المحل الهندسي للنقطة p في هذا المستوى والتي تحقق المعادلة: (المسافة بين PP_1) = (المسافة بين P والخط L_1 مضروباً في (e)) هو معادلة قطع مخروطي، ويكون هذا القطع: قطعاً مكافئاً إذا كانت $e=1$

الشكل (38)



البرهان:

النقطة p تحقق المعادلة $PP_1 = ePL_1$

وبقسمة الطرفين على PL_1 ينتج أن: $\frac{PP_1}{PL_1} = e$

إذن $e=1$

مثال (1):

احسب الاختلاف المركزي (e) للقطع الذي معادلته $x^2 = 3y$

الحل:

بما أن المعادلة تمثل معادلة قطع مكافئ إذن:

$$e=1$$

تدريب (10)

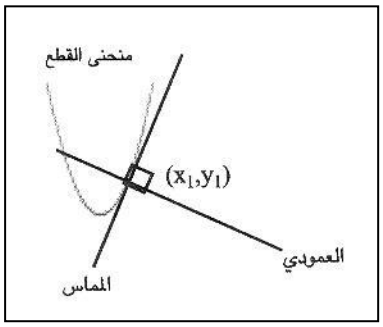
احسب الاختلاف المركزي (e) للقطع الذي معادلته: $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

9. معادلة المماس والعمودي على المماس للقطع المكافئ

في هذا البند سوف ندرس معادلة المماس للقطع المكافئ الذي معادلته:

$y^2 = 4px$ عند نقطة تماس المماس مع منحنى القطع وهي (x_1, y_1) كما في الشكل (39).

الشكل (39)



ومعادلة العمودي على المماس عند نفس النقطة (x_1, y_1).

نظرية:

إن معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته: $y^2 = 4px$ عند النقطة (x_1, y_1) هي $y_1 y = 2p(x + x_1)$.

مثال (1):

جد معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 16x$ ، أوجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1,4)$.

الحل:

بما أن النقطة $(1,4)$تحققر معادلة القطع المكافئ إذن فهي تقع على منحناه. وتكون معادلة المماس $y_1 y = 2p(x + x_1)$

وبحساب قيمة p: $4p = 16 \Rightarrow p = 4$

وتعويض قيمة p وإحداثيات النقطة $(1,4)$ في معادلة المماس، نحصل على معادلة المماس: $4y = 8(x + 1)$

وبالتبسيط: $y = 2x + 2$

ولايجاد معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1,4)$وبمعرفتنا بميل المماس وهو (2) نطبق على العلاقة$m_1 m_2 = -1$

حيث : (m_1) ميل المماس.

(m_2) ميل العمودي على المماس.

إذن: $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{-1}{2}$$

إذن معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

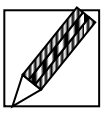
$$\Rightarrow y - 4 = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{9}{2}$$

تدريب (11)



جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ عند النقطة $(2,4)$.

10. المحل الهندسي

لقد عرفنا المحل الهمدسي في الوحدة الأولى، والقطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة يكون بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم. واليك عزيزي الدارس الأمثلة التالية:

مثال (1):

اوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة $N(x,y)$ التي بعدها عن المستقيم $y = -2$ يساوي بعدها عن النقطة $(0,4)$.

الحل:

إن هذا المال ينطبق تماماً على تعريف القطع المكافئ الذي بؤرته $N(0,4)$ ودليله $y = -2$.

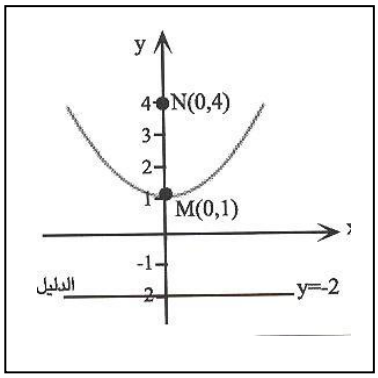
احداثيات الرأس: $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = (0,1)$

إذن المعادلة هي: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

وبالتعويض بقيمة $p = 3$ واحداثيات الرأس $(0,1)$ نجد أن: $x^2 = 12(y-1)$

أنظر الشكل (40).

الشكل (40)



مثال (2):

النقطة $w(x,y)$ تتحرك في المستوى بحيث أن: $y=t^2+7$ ، $x=2t+3$

اكتب المعادلة بدلالة x,y وما نوع القطع.

الحل:

من المعادلة: $x=2t+3\Rightarrow$

$$t=\frac{x-3}{2}$$

وبتعويض قيمة t في المعادلة: $y=t^2+7$ نجد أن:

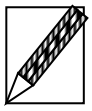
$$y=\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+7\Rightarrow$$

وبالضرب التبادلي $y-7=\frac{(x-3)^2}{4}$

$$(x-3)^2=4(y-7)$$

وهذه قطع مكافئ.

تدريب (12)



النقطة $w(x,y)$ تتحرك بحيث أن:

$$x=\sin t-\cos t$$

$$y=\sin 2t$$

اكتب معادلة المنحنى وما نوعه.

11. تطبيقات على القطع المكافئ

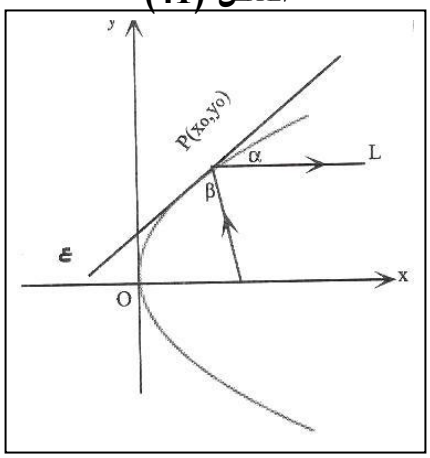
في هذا البند سوف نتعرف على بعض تطبيقات القطع المكافئ:

1- تستعمل أشكال القطع المكافئ في عواكس الضوء وموجات الراديو.

فالامواج التي مصدرها البؤرة تنعكس على سطح القطع المكافئ موازية لمحوره.

فإذا كان المستقيم ε مماساً للقطع المكافئ عند $p(x_0, y_0)$ انظر الشكل (41).

الشكل (41)



PL موازي للمحور x فإن الزاوية B (زاوية السقوط) تساوي الزاوية α (زاوية الانعكاس).

وكذلك أي شعاع قادم ساقط على القطع المكافئ موازي للمحور ينعكس في البؤرة.

ولهذا تجد هوائيات البث والاستقبال الراديو ذات مقاطع تشبه القطع المكافئ.

2- خط سير مقذوفة تسير بتأثير الجاذبية الأرضية فقط هو قطع مكافئ. سواء أكانت المقذوفة، قذيفة مدفع أو صاروخ أو كرة جولف.

3- شكل الكيبل المعلق يكون قطعاً مكافئاً، إذا كان وزن الكيبل صغيراً مقارنة مع الأوزون التي يحملها، وإذا كانت موزعة توزيعاً منتظماً على طول الكيبل.

والجسور التي تحملها الكيبلات بهذه الطريقة تسمى جسور تعليق، وكثرة من الجسور الضخمة هي جسور تعليق. ومن أشهرها في الولايات المتحدة الأمريكية جسر البوابة الذهبية.

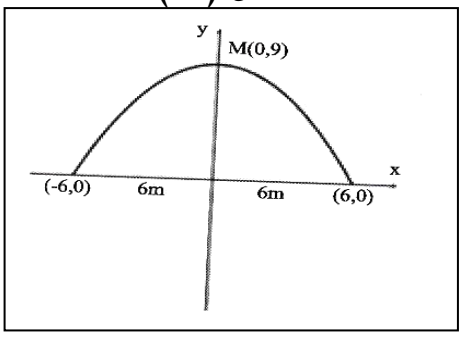
مثال (1):

طول قاعدةقوس بشكل قطع مكافئ 12 متراً ورأس القوس يرتفع بمقدار 9 أمتار فوق سطح الأرض، أكتب المعادلة الممثلة لهذا القوس علماً بأنه متماثل حول محور y.

الحل:

نرسم المسألة كما في الشكل (42)

الشكل (42)



إذن المعادلة هي: $(x-h)^2=-4p(y-k)$

وبتعويض إحداثيات الرأس $M(0,9)$ في المعادلة نجد أن:

$$x^2=-4p(y-9)$$

وبما أن النقطة $(6,0)$تقع على المنحنى إذن فهي تحقق معادلته:

$$36=-4p(0-9)\Rightarrow 36=36p\Rightarrow p=1$$

وبتعويض قيمة $p=1$ في المعادلة نحصل على:

$$x^2=-4(y-9)$$

مثال (2):

قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة:

$$d(t)=20t-5t^2$$

حيث (t) الزمن بالثواني، (d) المسافة بالامتار. احسب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

الحل:

إن المقذوفات تأخذ منحنى قطع مكافئ، حيث أن الاحداثي y للرأس يمثل يمثل أقصى ارتفاع كما في الشكل (43).

لذلك نكتب المعادلة $d=20t-5t^2$ على شكل معادلة قطع مكافئ وكما يلي:

$$-5t^2+20t=d$$

بالقسمة على (5−) نجد ن $t^2-4t=\frac{d}{-5}$

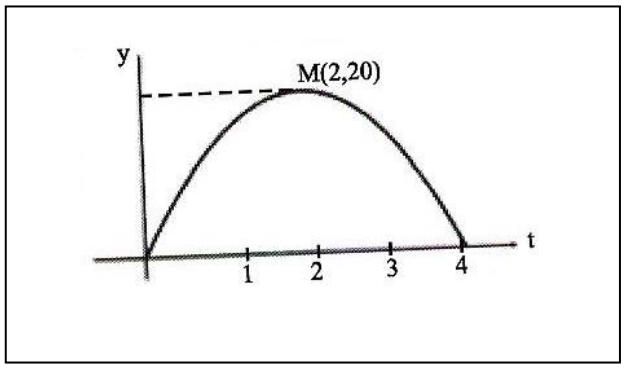
وباكمال المربع $t^2-4t+4=\frac{-1}{5}d+4$

$$(t-2)^2=\frac{-1}{5}(d-20)$$

إذن احداثيات الرأس $M(t,d)=M(2,20)$ أي عند $t=2$ (ثانية) يكون اقصى ارتفاع $d=20$ متراً والشكل (44) يوضح ذلك.

وبعبارة اوضح اقصى ارتفاع هو (20) متراً عندما يكون الزمن (2) ثانية.

الشكل (44)



الخلاصة

عزيزي الدارس، لقد تم في هذه الوحدة بحث الأمور التالية:

1. تعريف القطع المكافئ: وهو المحل الهندسي لمجموعة النقط $A(x,y)$ التي بعدها عن نقطة الأصل ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.
2. اشتقاق معادلات القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ومحوره اما محور x أو محور y وهي: $x^2=-4py$ و $x^2=4py$ و $y^2=-4px$ و $y^2=4px$.
3. اشتقاق معادلات القطع المكافئ الذي رأسه $M(h,k)$ ومحوره يوازي محور x أو محور y وهي: $(y-k)^2=-4p(y-k)$ و $(y-k)^2=4p(x-h)$ و $(x-h)^2=-4p(x-k)$ و $(x-h)^2=4p(y-k)$.
4. ايجاد العناصر الاساسية من المعادلات المختلفة وهي البؤرة والرأس ومعادلة المحور ومعادلة الدليل.
5. اشتقاق علاقة التحويلات الهندسية (انسحاب المحاور) وهي:

$$x'=x-m$$

$$y'=y-n$$

6. ايجاد الاختلاف المركزي للقطع المكافئ ويساوي (1).
7. ايجاد معادلة المماس لقطع مكافئ وهي: $y_1y=2p(x+x_1)$.
8. حل مسائل عملية تحتوي على معادلة القطع المكافئ.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، سنتناول في الوحدة التالية موضوع القطع الناقص، وهو النوع الثاني من القطوع المخروطية التي سنستعرضها في هذا المقرر، نبدأ بتعريفة ومعرفة عناصره ومعالادته بالطريقة نفسها التي استعرضنا فيها القطع المكافئ.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك.

اجابات التدريبات

تدريب (1):

احداثيات الرأس $M(0,3)$ ، احداثيات البؤرة $N(2,3)$ معادلة الدليل $x=-2$ ، معادلة المحور $y=3$.

تدريب (2)

الرأس $M(0,0)$ ، $p=3$

المعادلة حسب الحالة (3): $x^2=4py$

وبتعويض قيمة $p=3$ نجد أن: $x^2=12y$

تدريب (3):

احداثيات الرأس $(0,0)$

وبما أن التربيع للحد y إذن القطع متماثل حول محور x .

وبما أن اشارة معامل x موجبة إذن القطع مفتوح لليمين وبمقارنة المعادلة $y^2=8x$ بالمعادلة $y^2=4px$ نجد أن $4p=8 \Leftarrow p=2$

البؤرة $(2,0)=(p,0)$

معادلة الدليل $x=-p \Leftarrow x=-2$

وبما أن القطع متماثل حول محور x إذن معادلة المحور $y=0$.

تدريب (4)

$$x'=x-m=4-12=-8$$

$$y'=y-n=-4-(-8)=4$$

$$p'(x',y')=(-8,4)$$

تدريب (5)

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور x إذن القطع متماثل حول مستقيم يوازي محور x، ومفتوح لليمين (باتجاه البؤرة) إذن معادلته حسب الحالة (5).

$$(y-4)^2 = 16(x+2)$$

تدريب (6):

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور x إذن القطع متماثل حول محور يوازي محور x ومفتوح لليسار (باتجاه البؤرة).

إذن معادلته حسب الحالة (6): $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

وبحساب p: $p = -1+3 = 2$

والتعويض: $(y-2)^2 = -8(x+1)$

تدريب (7):

بما أن المحور المار بالبؤرة والرأس يوازي محور y إذن القطع متماثل حول مستقيم يوازي محور y ومفتوح للأعلى (باتجاه البؤرة) إذن المعادلة حسب الحالة (7):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

وبحساب p: $p = 5-3 = 2$

والتعويض: $(x+3)^2 = 12(y-2)$

تدريب (8):

حسب الحالة (8) المعادلة هي:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

وبحساب p: $p = 1-(-1) = 2$

والتعويض: $(x+1)^2 = -8(y-1)$

تدريب (9):

$$\frac{6x^2}{6} - \frac{12}{6}x = \frac{y}{6} - \frac{8}{6}$$

$$x^2 - 2x = \frac{y}{6} - \frac{8}{6}$$

$$(x-1)^2 = \frac{y}{6} - \frac{8}{6} + \frac{6}{6}$$

$$(x-1)^2 = \frac{y}{6} - \frac{2}{6}$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{6}(y-2)$$

تدريب (10):

$e=1$ لانها معادلة قطع مكافئ

تدريب (11):

$$4p = 8$$

$(2,4)$ و $p=2$

معادلة المماس: $y_1 y = 2p(x+x_1)$

وبالتعويض: $4y = 4(x+2)$

$$4y = 4x + 8$$

$$y = x + 2$$

ميل العمودي = $\frac{1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{1} = -1$

معادلة العمودي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = -(x-2)$$

$$y - 4 = -x + 2$$

$$y = -x + 6$$

تدريب (12):

$$x^2 = (\sin t - \cos)^2$$

$$= \sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t \cos t$$

$$= 1\sin 2t$$

$$x^2 = 1 - y$$

$$x^2 = -y + 1$$

$x^2 = -(y-1)$ ونوع القطع مكتفئ.

مسرد المصطلحات

- **مستقيم عمودي على منحنى عند نقطة: Normal Line to a curve at apoint:**

هو مستقيم يعامد المماس عند تلك النقطة وميله يساوي سالب مقلوب ميل المماس.

- **مقعر للأعلى: Concave up ward :**

يكون $F(x)$ مقعراً للأعلى في الفترة $[a,b]$ إذا وقع منحنى F فوق جميع مماساته في هذه الفترة.

- **مقعر للأسفل:**

يكون $F(x)$ مقعراً للأسفل في الفترة $[a,b]$إذا وقع منحنى F تحت جميع مماساته في هذه الفترة.

- **القطوع المخروطية Conic Sections**

هي منحنيات مستوية تنتج من تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم في أوضاع مختلفة.

- **القطع المكافئ Parabola :**

هو المحل الهندسي للنقطة (x,y) التي بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.

- **المحور الحقيقي Real axis**

هو المحور الأفقي في المستوى الذي تمثل عليه الأعداد الحقيقية.

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية:

1- عوض عدنان؛ وعزام، مفيد؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، أحمد، الهندسة الإحداثية. عمان: جامعة القدس المفتوحة، ط2، 2003.

2- نصير، عبدالمجيد؛ والناشف، بسام، الحسبان: التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية. عمان: دار البشير، 1989م.

3- سمور، خالد، الرياضيات والهندسة التحليلية. عمان: دار الفكر، ط1، 1999م.

المراجع الأجنبية

- Silverman R.A,Calculus with Analytic Geometry. New Jersey: Prentice- Hall,1985.
- Swokowski, E.W., calculus with Analytic Geomtry. Prindle, Weberand Schmidt,3rd ed. 1984.
- Salas S.|. , calculus;one and Several Varaiables. Wiley, 1980.


الوحدة الثالثة
القطع الناقص

محتويات الوحدة

الموضـــوع	رقم الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
أهداف الوحدة	
1. تعريف القطع الناقص	
2. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل	
3. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$	
4. إيجاد عناصر القطع الناقص	
5. معادلة المماس والعمودي على المماس	
الخلاصة	
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	
إجابات التدريبات	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

المقدمة

تمهيد

نقدم إليك عزيزي الدارس الوحدة الثالثة من مقرر 161 رياضيات 1 الهندسة التحليلية، وهي بعنوان "القطع الناقص".

أن القطع الناقص هو أحد القطوع المخروطية والتي تنتج من خلال قطع مخروطي بسطح مستوٍ، وكغيره من القطوع فهو ذو أهمية كبيرة في علم الرياضيات، وارتبط ايضاً بعلوم أخرى كعلم الفيزياء وعلم الهندسة وغيرها من العلوم.

سوف نتعرف في هذه الوحدة على تعريف القطع الناقص والمحور والبؤرتين والمعادلة النمطية ومعادلة المماس وشروطها والعلاقة بين بعدي نقطتين والحالات الخاصة والعامة للقطع الناقص.

نرحب بك مرة أخرى في هذه الوحدة، نرجو أن تستفيد منها، وأن تساهم في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1- **تعرّف** القطع الناقص.

2- **تشتق** معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق عل محور x أو محور y.

3- **تجد** العناصر الأساسية للقطع الناقص.

4- **تشتق** معادلة قطع ناقص محوره يوازي المحورين الاحداثيين.

5- **تعرّف** الاختلاف المركزي.

6- **تجد** معادلة المماس عند نقطة.

1. تعريف القطع الناقص

تعرفت عزيزي الدارس، في الوحدة الثانية أحد أنواع القطوع المخروطية وهو القطع المكافئ، وسوف تتعرف في هذه الوحدة نوعاً آخر من القطوع المخروطية وهو القطع الناقص، وفي هذا البند سوف نتناول تعريفه وخصائصه كما يأتي:

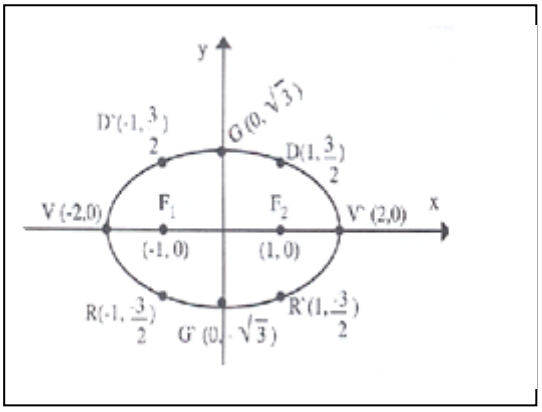
لتكن $F_1(-1,0)$ ، $F_2(1,0)$ نقطتين نعينهما في المستوى الإحداثي ولنأخذ بعض النقاط مثل:

$$V(\pm 2,0), R\left(-1,\frac{-3}{2}\right), R'\left(1,\frac{-3}{2}\right), G\left(0-\sqrt{3}\right)$$

$$G(0,\sqrt{3}), D\left(1.\frac{3}{2}\right), D\left(-1,\frac{3}{2}\right)$$

وبالمثل نجد أثم تعين النقطة في المستوى الأحداثي ونصل بينهما بخط منحنٍ ممهد متصل فنحصل على المنحنى الموضح في الشكل (1).

الشكل (1)



وعند حساب مجموع بعدي النقطة $D\left(1,\frac{3}{2}\right)$ من المنحنى عند النقطة $F_2(1,0), F_1(-1,0)$ نجد أن:

$$DF_1 + DF_2 = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

وبالمثل نجد أن مجموع بعدي النقطة $V'(2,0)$ من المنحنى عند النقطتين F_2, F_1 يساوي

$$V'F_1 + V'F_2 = \sqrt{(2+1)^2 + (0)^2} + \sqrt{(2-1)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{9} + \sqrt{1} = 4$$

ويكون هذا صحيحاً لبقية النقط الواقعة على المنحنى كما في الشكل (1).

وبشكل عام لتكن F_2, F_1 نقطتين في المستوى الإحداثي، المسافة بينهما $2C$، وليكن $2a$ عدداً حقيقياً موجباً بحيث $(2a \succ 2C)$، وإذا كانت $N(x,y)$ أي نقطة في المستوى الإحداثي تتحرك بحيث يكون مجموع بعديهما عن النقطتين F_2, F_1 دائماً مساوياً للعدد الثابت $2a$ فإنها ترسم منحنى هو المحل الهندسي لها ويسمى قطعاً ناقصاً، وعليه فإن:

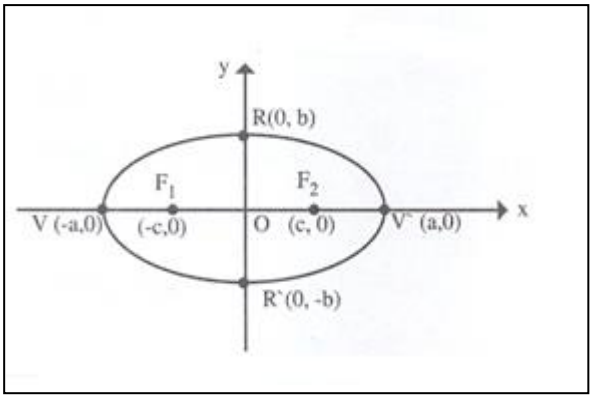
تعريف (1)

القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية $N(x,y)$ بحيث يكون مجموع بعدي $N(x,y)$ عن النقطتين ثابتين F_2, F_1 (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً.

* عناصر القطع الناقص:

بالنظر إلى الشكل (2):

الشكل (2)



نجد أن القطع الناقص يتمتع بالعناصر الثالية:

1. للقطع الناقص محورين للتماثل:

A. المستقيم المار بالبؤرتين F_2, F_1 والمركز O يسمى المحور الأكبر أو (المحور البؤري).

B. المستقيم العمودي على المحور الأكبر والمار بالمركز O يسمى المحور الأصغر.

2. مركز القطع الناقص النقطة O .

3. تسمى النقط V, V', R, R' ررؤوس القطع الناقص.

4. يسمى البعد بين البؤرتين (F_1F_2) البعد البؤري يساوي 2C .

5. نصف البعد البؤري وهو المسافة بين البؤرة والمركز يساوي C.

6. البعد بين الرأسين (VV') = طول المحور الأكبر= 2a.

7. البعد بين الرأسين (RR') = طول المحور الأصغر=2b.

تعريف (2):

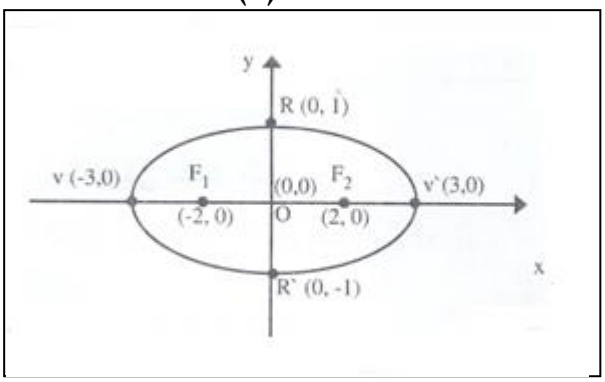
الاختلاف المركزي للقطع الناقص: هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز (e) حيث $e = \frac{c}{a}$.

وبما أن $(c \prec a)$ يكون الاختلاف المركزي دائماً أصغر من واحد وأكبر من صفر أي أن $0 \prec e \prec 1$.

مثال (1):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الناقص في الشكل (3).

الشكل (3)



الحل:

1) طول المحور الأكبر (VV')

$$VV' = 2a = 2(3) = 6$$

2) طول المحور الأصغر (RR')

$$RR' = 2b = 2(1) = 2$$

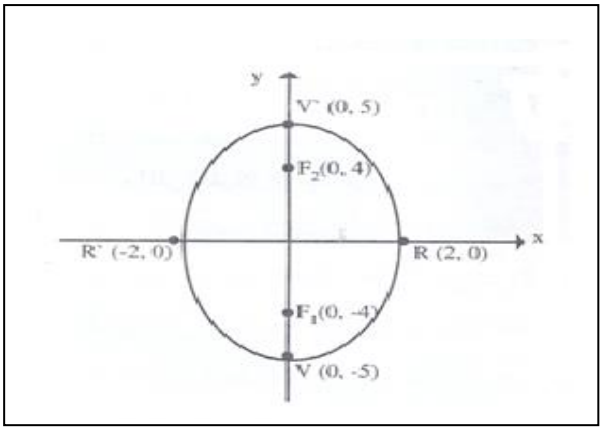
3) البعد البؤري (F_1F_2)

$$F_1F_2 = 2C = 2(2) = 4$$

4) الاختلاف المركزي (e):

$$e = \frac{c}{e} = \frac{2}{3} \prec 1$$

الشكل (4)



تدريب (1)

أوجد العناصر الأساسية للقطع الناقص في شكل (4)

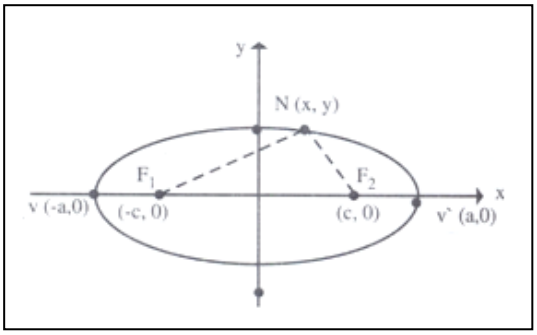
2. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل

في هذا البند سوف نشتق المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور x أو على محور y.

أولاً: القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور x.

لنأخذ القطع الناقص كما في الشكل (5):

الشكل (5)



نطبق تعريف القطع الناقص وهو:

$$F_1N + F_2N = 2A$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-y)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

وبفك الأقواس والاختصار:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

وبقسمة جميع الحدود على 4 نحصل على:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2\right]$$

$$a^2\left[\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)\right]+a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

وبفك الاقواس والاختصار:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx-c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

وبما أن $(a\succ c)$ من تعريف القطع الناقص. وأن كلاً من العددين c,a موجب فإن المتباينة $(a\succ c)$ لا تتغير بتربيع رفيها أي $\left(a^2\succ c^2\right)$ أي $\left(a^2-c^2\succ 0\right)$.

والأن نفرض أن: $b^2=a^2-c^2$

لتحصل على:

$$x^2b^w + a^2y^2 = a^2b^2$$

وبقسمة جميع الحدود على a^2b^2 نجد أن:

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

أي أن:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{..... (1)}$$

حيث b, a عددان موجبان

ويطلق على العلاقة (1) الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محور x حيث:

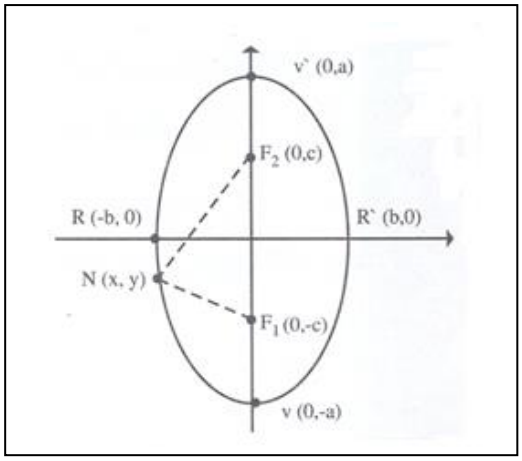
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

ثانياً: وبنفس الأسلوب السابق نحصل على العلاقة:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{..... (2)}$$

ويطلق على العلاقة (2) الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على محورة y كما في الشكل (6) حيث إحداثيات البؤرتين $F_2(0,c), F_1(0,-c)$.

الشكل (6)



ملاحظات هامة:

1) a^2 دائماً الأكبر والمتغير الموجود في البسط الذي مقامه a^2 يكون دائماً هو المحور الأكبر أو يكون المحور الأكبر يوازيه.

2) من معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ لاحظ أنه كانت $a=b$ فإن معادلة القطع الناقص تصبح على الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

أي أن: $x^2+y^2=a^2$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a أي أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص حيث $a=b$.

3) قيمة c تكون دائماً $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

مثال (2):

جد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص ثم ارسم منحناه إذا كان مركزه نقطة الأصل وطول المحور الأكبر (8) وطول المحور الأصغر (6).

الحل:

(يوجد حلان):

أولاً: إذا كان محوره الأكبر بنطبق على محور x فإن معادلته.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

طول المحور الأكبر (8) أي أن:

$$2a=8\Rightarrow a=4$$

طول المحور (6) أي أن:

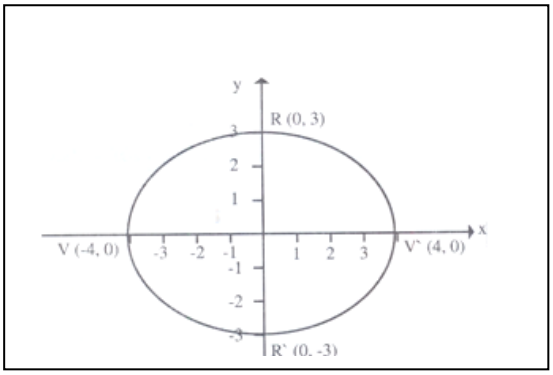
$$2a=6\Rightarrow a=3$$

إذن المعادلة هي:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

أنظر الشكل (7):

الشكل (7)



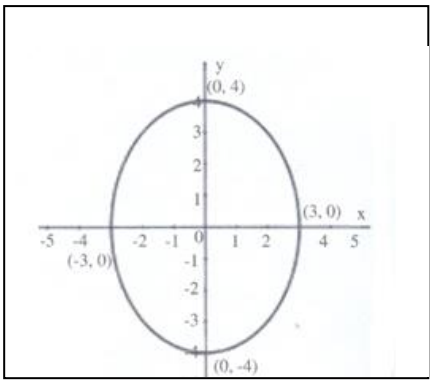
ثانياً: إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور y فإن معادلته:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

أنظر الشكل (8):

الشكل (8)



مثال (3):

جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 1,0)$ وطول محوره الأكبر (4).

الحل:

بما أن البؤرتين على محور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x ، إذن معادلته:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

طول محوره الأكبر (4):

$$2a=4\Rightarrow a=2$$

البعد بين البؤرتين (2):

$$2c=2\Rightarrow c=1$$

ومن العلاقة:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

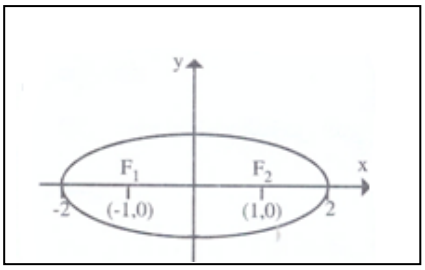
$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=4-1=3\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

وبتعويض قيم b,a في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

انظر الشكل (9):

الشكل (9)



مثال (4):

أوجد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 2,0)$ ويتقاطع مع محور x عند $x=\pm 4$.

الحل:

بما أن البؤرتين تقعان على محور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x وبما أنه يتقاطع مع محور x عند $x=\pm 4$ إذن احداثيات الرأسين $V(4,0)$, $V(-4,0)$.

إذن المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

طول المحور الأكبر يساوي المسافة بين الرأسين VV' ويساوي $VV'=4-(-4)=8$

$$2a=8 \text{ إذن}$$

$$a=4$$

المسافة بين البؤرتين F_1F_2 يساوي:

$$F_1F_2=2-(-2)=4$$

إذن: $2C=4\Rightarrow C=2$

ومن العلاقة $c=\sqrt{a^2-b^2}$

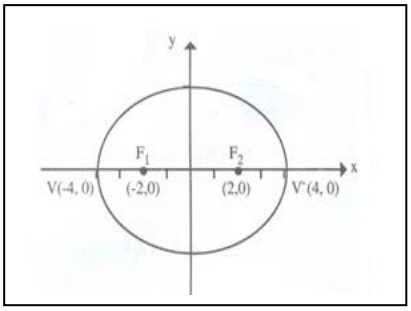
$$c^2=a^2-b^2\Rightarrow 4=16-b^2\Rightarrow b^2=16-4=12\Rightarrow b=\sqrt{12}$$

وبتعويض قيم b,a في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

أنظر الشكل (10):

الشكل (10)



مثال (5):

اكتب معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(\pm 4,0)$ ويمر منحناه بلنقطة (2,3).

الحل:

بما رأساه على محور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x إذن معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ولكن بعد الرأس (4,0) عن المركز نقطة الأصل يساوي:

$$4-0=4$$

إذن: $a=4$

وبتعويض قيمة a في المعادلة نجد أن: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$

وبما أن منحنى القطع يمر بالنقطة (2,3) إذن فهي تحقق معادلته:

$$\frac{4}{16}+\frac{9}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{9}{b^2}=1$$

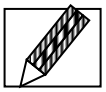
وبالضرب التبادل $\Rightarrow\frac{9}{b^2}=1-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{9}{b^2}=\frac{3}{4}$

$$3b^2=36\Rightarrow b^2=12$$

وبتعويض قيمة b^2 في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

تدريب (2)



قطع ناقص بؤرتاه $F_1(-4,0)$ ، $F_2(4,0)$ والنقطة $N(x,y)$ واقعة عليه بحيث أن محيط المثلث NF_1F_2 يساوي (24) وحدة أوجد معادلة هذا القطع.

مثال (6):

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(0,-2)$ ، $F_2(0,2)$ ونهايتا محوره الأكبر $V(0,-4)$ ، $V'(0,4)$.

الحل:

واضع من الشكل (11) أن: $c=2$ ، $a=4$ وأن المحور الأكبر ينطبق على محور y

إذن معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

ومن العلاقة:

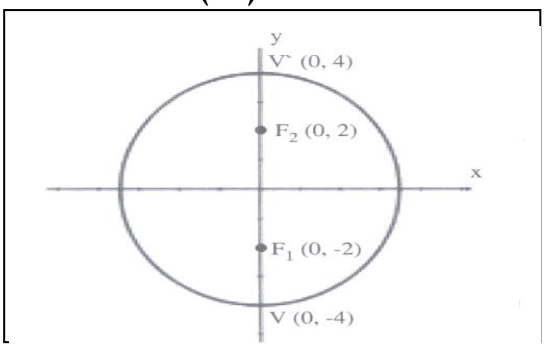
$$c^2=a^2-b^2$$

$$b^2=a^2-c^2=16-4=12$$

وبتعويض قيم b^2, a^2 في المعادلة نجد أن:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$$

الشكل (11)



أسئلة تقويم ذاتي

1. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الأصغر (4) وحدات ومحوره الأكبر يقع على محور y والمسافة بين بؤرتيه $\left(2\sqrt{5}\right)$ وحدة.
2. جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(0,\pm 3)$ وطول محوره الأكبر (10) وحدات.
3. جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(0,\pm 5)$ ويتقاطع مع محور y عند $y=\pm 8$.
4. احسب الاختلاف المركزي للقطع الناقص: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$.

3. المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$

لقد درسنا في البند (2) المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، وكان هناك حالتين:

1) محوره الأول ينطبق على محور x ومعادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2) محوره الأكبر ينطبق على محور y ومعادلته:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

وسوف نستخدم في هذا البند انسحاب المحاور للحصول على المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ لنفرض أن المحاور الجديدة $x'y'$ مركزها $M(h,k)$.

من علاقة الانسحاب:

$$x'=x+m$$

$$y'=y-m$$

نجد أن:

$$x'=x-h$$

$$y'=y-k$$

وبما أن معادلة القطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور x بالنسبة للمحاور $x'y'$ هي:

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

وبتعويض قيمة : $x'=x-h$

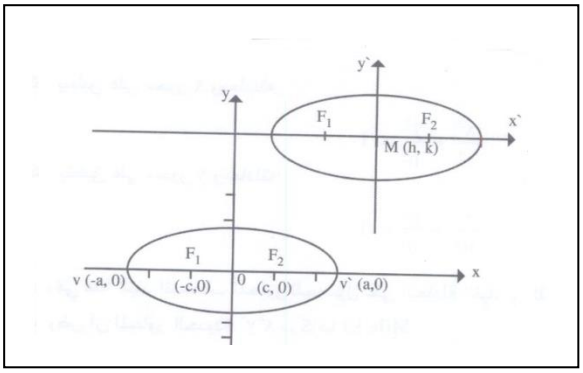
$$y' = y - k$$

في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.....(1)$$

وتسمى العلاقة (1) معادلة قطع ناقص مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور x انظر الشكل (12).

الشكل (12)



ملاحظة هامة:

1. محوره الأكبر يوازي محور x وطوله (2a) ومعادلته $y = k$.
2. محوره الأصغر يوازي محور y وطوله (2b) ومعادلته $x = h$.
3. بؤرتاه تقعان على المحور الموازي x وهما النقطتان $F_1(-c+h,k), F_2(c+h,k)$
4. رأساه النقطتان:

$$V(-a+h,k), V'(a+h,k)$$

بما ان معادلة القطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور y بالنسبة للمحاور الجديدة $x'y'$ هي:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$

$$x'=x-h$$

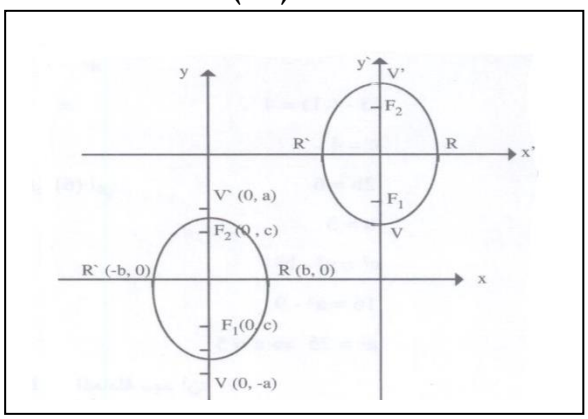
$$y'=y-k$$

في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.....(2)$$

وتسمى العلاقة (2) معادلة قطع ناقص مركزه $M(h,k)$ ومحوره الأكبر يوازي محور y انظر الشكل (13).

الشكل (13)



ملاحظة هامة:

1. محورهالأكبر يوازي محور y وطوله (2a) ومعادلته $x=h$.

2. محوره الأصغر يوازي محور x وطوله (2b) ومعادلته $y = k$.

3. بؤرتاه تقعان على المحور الموازي لمحور y وهي النقطتان

$F_1(h,-c+k), F_2(h,c+k)$

.

4. رأساه

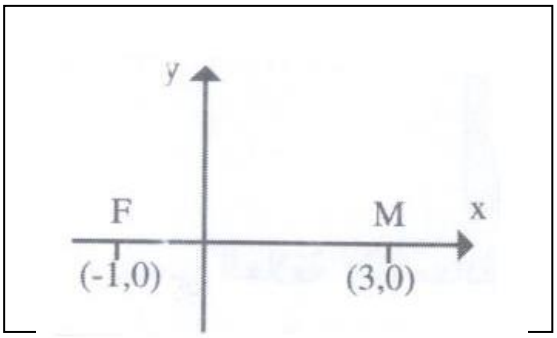
$$V(h,-a+k), V'(h,a+k)$$

مثال (7):

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(3,0)$ وإحدى بؤرتيه $(-1,0)$ وطول محوره الأصغر يساوي (6).

الحل:

انظر الشكل (14):



بما أن الؤرة والمركز على المحور x إذن محوره الأكبر ينطبق على محور x ومركزه $M(3,0)$ إذن معادلته:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

بعد المركز عن البؤرة $3-(-1)=4$

إذن $c=4$

طول المحور $2b=6$

$$b=3$$

ومن العلاقة: $c^2=a^2-b^2$

$$16=a^2-9$$

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

وبتعويض قيم a,b في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$$

مثال (8):

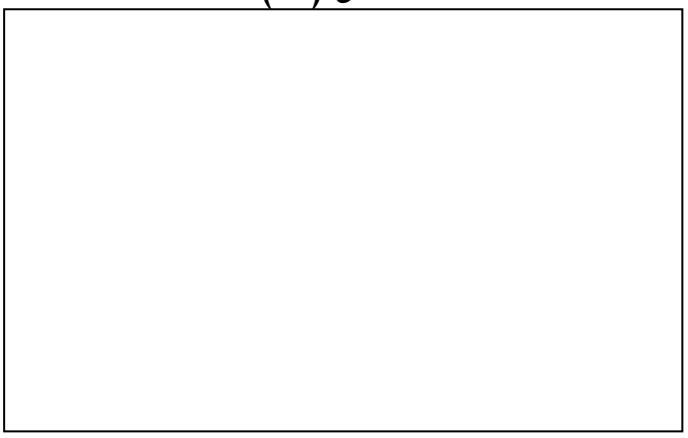
جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(13,-2),(3,-2)$ وبؤرتاه $(4,-2),(12,-2)$

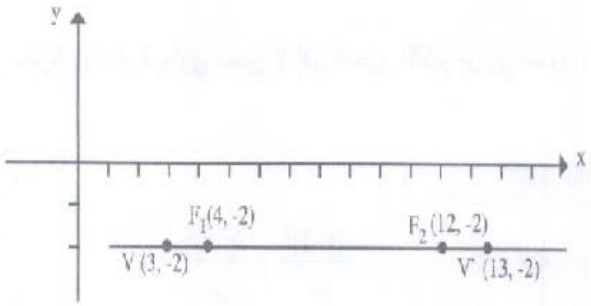
الحل:

نلاحظ من الشكل (15) أن محور القطع الناقص الأكبر يوازي محور x غذن معادلته

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الشكل (15)





وبما أن المركز يقع في منتصف المسافة بين الرأسين إذن إحداثيات المركز

$$\left(\frac{13+3}{2}.\frac{-2+(2)}{2}\right)=1 \qquad (8,-2)$$

إذن:

$$a=13-8=5$$
$$c=12-8=4$$

ومن العلاقة:

$$c^2=a^2-b^2$$

$$16=25-b^2 \Rightarrow b^2=9$$

وبتعويض إحداثيات المركز وقيم b,a في المعادلة نجد:

$$\frac{(x-8)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

تدريب (3)

جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأكبر (10) وحدات ونهايتا المحور الأصغر $(3,4),(3,2)$

.

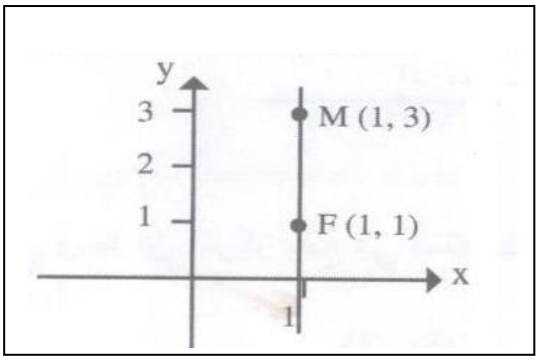
مثال (9):

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (1,3) وإحدى بؤرتيه (1,1) وطول المحور الأكبر (10).

الحل:

بما أن المستقيم المار بالمركز والبؤرة يوازي محور Y إذن المحور الأكبر يوازي محور Y انظر الشكل (16).

الشكل (16)



إذن المعادلة:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

والمسافة بين المركز والبؤرة هي (2) وتساوي:

$$C=3-1-2$$

وطول المحور الأكبر (10) إذن:

$$2a=10\Rightarrow a=5$$

ومن العلاقة:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$4 = 25 - b^2$$
$$b^2 = 21$$

وبتعويض إحداثيات المركز وقيم b,a في المعادلة نجد أن:

$$\frac{(x-1)^2}{21} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

أسئلة تقويم ذاتي

1. جد معادلة قطع ناقص مركزه (2,2) وإحدى بؤرتيه(-1,2) وطول محوره الأكبر $2\sqrt{10}$.
2. جد معادلة قطع ناقص مركزه (3,2) وبؤرتاه النقطتين (1,3)، (5,2) وطول محوره الأكبر يساوي ستة أمثال البعد البؤري.

4. إيجاد عناصر القطع الناقص

في هذا البند سوف نجد عناصر القطع الناقص إذا اعطينا معادلته. والعناصر هي:

1. أحداثيات البؤرتين.
2. أحداثيات الرأسين.
3. طول المحور الأكبر.
4. طول المحور الأصغر.
5. معادلة المحور الأكبر.
6. معادلة المحور الأصغر.
7. الاختلاف المركزي.

8. رسم المنحنى.

والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال (1):

أوجد أحداثيات البؤرتين والرأسين وطولي المحورين الأكبر والأصغرومعادلتهما والاخلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

الحل:

أحداثيات المركز

$$M(h,k)=M(2,1)$$

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير y ، إذن المحور الأكبر يوازي محور y ، إذن أحداثيات الرأسين :

$$V(h,-a+k)=V(2,-5+1)=V(2,-4)$$
$$V'(h,a+k)=V'(2,5+1)=V(2,6)$$

وطول المحور الأكبر

$$2a=2(5)=10\Leftarrow$$

ومعادلته

$$x=h\Rightarrow x=2$$

$$b^2=9\Rightarrow b=3$$

وطول المحور الأصغر $2b=2(3)=6\Leftarrow$

ومعادلته $y=k\Rightarrow y=1$

مثال (2)

أوجد عناصر القطع الناقص وارسم منحناه إذا علمت أن معادلته:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

الحل:

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير x إذن القطع متماثل حول محور x .

إذن إحداثيات الرأسين:

$$v'(-a,0)=(-5,0)$$

$$v(a,0)=(5,0)$$

$$b^2=16\Rightarrow b=4$$

ومن العلاقة

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=25-16$$

$$c^2=9$$

$$c=3$$

إذن احداثيات البؤرتين:

$$F_1(-c,o)=(-3,o)$$

$$F_2(c,o)=(3,o)$$

طول المحور الأكبر $2a=2\times5=10$ $\Leftarrow$

ومعادلته: $y=0$

طول المحور الأصغر $2b = 2 \times 4 = 8 \Leftarrow$

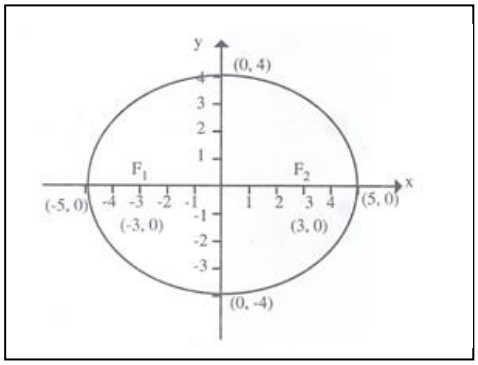
ومعادلته: $x = 0$

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \prec 1 \Leftarrow$$

ورسمة القطع هي الشكل (17):

الشكل (17)



مثال (3):

جد عناصر القطع: $3x^2 + 2y^2 = 6$

الحل:

نجعل المعادلة على الصورة القياسية بالقسمة على (6) ينتج:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

احداثيات الرأس $M(0,0)$

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

بما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير y إذن المحور الأكبر ينطبق على المحور x.

احداثيات الرأسين $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

طول المحور الأكبر $2a = 2\sqrt{3}$

ومعادلته $x = 0$

طول المحور الأصغر $\Leftarrow$ $2b = 2\sqrt{2}$

ومعادلته $y = 0$

ومن العلاقة $c^2 = a^2 - b^2$

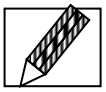
$$c^2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow c = 1$$

إذن احداثيات البؤرتين $(0,1),(0,-1)$

الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

تدريب (4)



أوجد خصائص القطع الناقص $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

5. معادلة المماس والعمودي على المماس

إن معالدلة المماس للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1, y_1) تعطى كما يلي:

$$\frac{x^2 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

وأن ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x_1, y_1) هو:

$$\frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

مثال (1):

جد معادلة المماس للقطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

عند النقطة $(5,0)$

الحل:

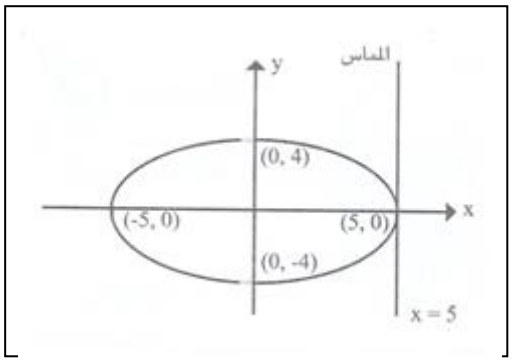
معادلة المماس هي:

$$\frac{5x}{25} + \frac{(0)y}{16} = 1$$

$$\frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$$

أنظر الشكل (18):

الشكل (18)



نرى في الشكل منحنى القطع والمماس له عند النقطة $(5,0)$ ونلاحظ أن معادلة المماس $x=5$.

مثال (2):

أوجد معادلة المماس للقطع: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ عند النقطة $\left(\sqrt{5},\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

الحل:

معادلة المماس: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}x}{25}+\frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{16}=1$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}\sqrt{5}.5}+\frac{8y}{16\sqrt{5}}=1$$

$$\frac{x}{5\sqrt{5}}+\frac{y}{2\sqrt{5}}=1$$

$$\frac{y}{2\sqrt{5}}=1-\frac{x}{5\sqrt{5}}$$

بالضرب في $2\sqrt{5}$

معادلة المماس: $y=2\sqrt{5-\frac{2}{5}x}$

تدريب (5)

أوجد معادلة العمودي على المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ عند النقطة $\left(\frac{\sqrt{75}}{2},2\right)$

أسئلة تقويم ذاتي

(1) أوجد خصائص القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}=1$$

(2) أوجد خصائص القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$$

(3) جد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(-2,1)$ لمنحنى القطع الناقص: $x^2+4y^2=8$

الخلاصة

عزيزي الدارس لقد تناولنا في هذه الوحدة مجموعة من المفاهيم سنختصرها فيما يلي:

1- تعريف القطع الناقص: وهو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية $N(x,y)$ بحيث يكون مجموع بعدي $N(x,y)$ عن نقطتين ثابتتين F_1,F_2 (تسميان البؤرتين) يساوي مقدار ثابت.

2- الاختلاف المركزي: وهو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز (e) حيث $e=\frac{c}{a}$، والاختلاف المركزي دائماً أقل من واحد بالنسبة للقطع الناقص.

3- المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وهي:

a) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور x : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

b) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور y: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

4- المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه $M(h,k)$ وهي:

a) محوره الأكبر يوازي محور x: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

b) محوره الأكبر يوازي محور y: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

5- إيجاد عناصر القطع الناقص إذا عرفنا معادلته، أو بعض المعلومات عنه.

6- معادلة المماس للقطع الناقص: محوره الأكبر يوازي محور x: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

وهي: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، في الوحدة التالية نتناول قطعاً مخروطياً أخر وهو القطع الزائد، ونستكمل فيه جزءاً مهماً من القطوع المخروطية، نبدأ الوحدة بتعريفه ثم نتعمق في دراسة عناصره ومعادلته، مع تعزيز ذلك بالعديد من الأمثلة والتدريبات.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك.

إجابات التدريبات

تدريب (1):

طول المحور الأكبر $VV' = 2a = ax5 = 10 \Leftarrow$

طول المحور الأصغر $RR' = 2b = 2x2 = 4 \Leftarrow$

البعد البؤري $F_1F_1 = 2c = 2x4 = 8 \Leftarrow$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Leftarrow$

تدريب (2):

لاحظ أن محور القطع الأكبر ينطبق على محور x إذن معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وكما نلاحظ في الشكل (19) فإن: $F_1F_2 = 8, c = 4$

محيط المثلث NF_1F_2 = $F_1F_2 + NF_1 + NF_2$

$$8 + NF_1 + NF_2 = 24$$

$$NF_1 + NF_2 = 24 - 8 = 16$$

ومن تعريف القطع الناقص: $NF_1 + NF_2 = 2a$

$$2a = 16$$

$$a = 8$$

لكن:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48$$

إذن المعادلة: $\frac{x^2}{64}=\frac{y^2}{48}=1$

تدريب (3):

احداثيات المركز $\left(\left(\frac{3+3}{2}\right),\left(\frac{-4+2}{2}\right)\right)$

$$=(3,-1)$$

$$2a=10\Rightarrow a=5$$

$$2b=6\Rightarrow b=3$$

المعادلة: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

تدريب (4):

نكمل المربع في x وفي y

$$(x^2+6x)+(4y^2-8y)=-9$$

$$(x^2+6x)+(4(y^2-2y))=-9$$

$$(x^2+6x+9)+4(y^2-2y+1)=-9+9+4$$

$$(x+3)^2+4(y-1)^2=4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

احداثيات الرأس $M(-3,1)$

بما أن البسط a^2 يحتوي على x إذن المحور الأكبر يوازي محور x

طول المحور الأكبر: $2a=4$

$b^2=1\Rightarrow b=1$ الأصغر

طول المحور الأصغر: $2b=2$

إحداثيات الرأسين: $(-5,1),(-1,1)$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

احداثيات البؤرتين: $\left(-3-\sqrt{3},1\right),\left(-3+\sqrt{3},1\right)$

معادلة المحور الأكبر: $y = k \Rightarrow y = 1$

معادلة المحور الأصغر: $x = h \Rightarrow x = -3$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تدريب (5):

ميل المماس: $\frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$

$$\Rightarrow \frac{(-16)\left(\frac{\sqrt{75}}{2}\right)}{(25)(2)} = \frac{(-8)\left(\sqrt{75}\right)}{(2)(25)}$$

$$= \frac{(-4)\sqrt{25}\sqrt{3}}{\sqrt{25}\sqrt{25}} = \frac{-4\sqrt{3}}{5}$$

ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{5}{4\sqrt{3}} = \frac{-1}{\frac{-4\sqrt{3}}{5}}$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث m ميل المماس

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4\sqrt{3}}\left(x - \frac{\sqrt{75}}{2}\right)$$

$$y-2=\frac{5}{4\sqrt{3}}\left(x-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow y-2=\frac{5}{4\sqrt{3}}x-\frac{25}{8}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5}{4\sqrt{3}}x-\frac{25}{8}+2$$

مسرد المصطلحات

- **القطع الناقص The Ellipse:**

هو المحل الهندسي للنقطة (x, y) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي كمية ثابتة أو هو القطع الذي اختلافه المركزي أصغر من واحد صحيح.

- **ميل المنحنى عند نقطة (x_1, y_1) Slope of a curve ate a point:**

هو ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x_1, y_1) وهو نفسه المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ عند النقطة $(x_1, f(x)_1)$.

- **مستقيم عامودي على منحنى عند نقطة Normal Line to acurve at appoint:**

هو مستقيم يعامد المماس عند تلك النقطة وميله سالب مقلوب ميل المماس.

الوحدة الرابعة

القطع الزائد



محتويات الوحـدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	
تمهيد	
اهداف الوحدة	
1. تعريف القطع الزائد وعناصره	
2. المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل	
3. إيجاد عناصر القطع الزائد	
4. إشتقاق المعادلات بصورة عامة	
5. إيجاد العناصر من المعادلة العامة	
6.معادلة المماس والعمودي على المماس	
الخلاصة	
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	
إجابات التدريبات	
إجابات اسئلة التقويم الذاتي	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

مقدمة

تمهيد

نقدم إليك عزيزي الدارس الوحدة الرابعة من مقرر 161 رياضيات (1) الهندسة التحليلة وهي بعنوان " القطع الزائد ".

إن القطع الزائد هو أحد القطوع المخروطية والتي تنتج من خلال قطع مخروط بسطح مستو ، وكغيره من القطوع فهو ذو اهمية كبيرة في علم الرياضيات ويرتبط ايضاً بعلوم أخرى كعلم الفيزياء والفلك وغيرها من العلوم.

وسف نتعرف في هذه الوحدة على تعريف القطع الزائد وعناصره مثل البؤرتين والرأسين ومحاور التماثل ومعادلة القطع الزائد بالصورة القياسية والصورة العامة ومعادلة المماس للقطع الزائد ومعادلة العمودي على المماس والرسم البياني لمنحنى القطع والاختلاف المركزي.

اهلاً بك مرة اخرى في هذه الوحدة ، نرجو أن تستمع بدراستها أن تساهم في تقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن

1. **تعرف** القطع الزائد .
2. **تشتق** معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .
3. **تشتق** معادلة القطع الزائد الذي مكزه M(h, k) .
4. **تجد** خصائص القطع الزائد
5. **تعرف** الاختلاف المركزي للقطع الزائد .
6. **تؤسم** منحنى القطع الزائد .
7. **تجد** معادلة المماس عند نقطة للقطع الزائد .
8. **تجد** معادلة العمودي على المماس عند نقطة للقطع الزائد .
9. **تشرح** مفهوم المحل الهندسي للقطع الزائد .

1. تعريف القطع الزائد وعناصره

سنتعرف في هذه الوحدة على نوع اخر من القطوع المخروطية وهو القطع الزائد.
حيث سنتناول في هذا البند تعريف وعناصر القطع الزائد .

لتكن F1 (-5, 0) , F2 (5, 0) نقطتين في المستوى الديكارتي نعينهما في المستوى ولنأخذ النقاط التالية :

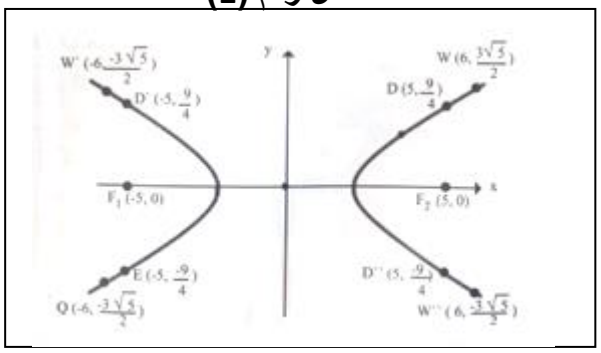
$$D\left(5,\frac{9}{4}\right), W\left(6,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right), D'\left(-5,\frac{9}{4}\right), W'\left(-6,\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)\right)$$

$$D''\left(5,\frac{-9}{4}\right), W''\left(6,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right), E\left(-5,\frac{-5}{4}\right)$$

$$Q\left(-6,\frac{-\sqrt[3]{5}}{2}\right)$$

ثم نعين هذه النقطة في المستوى الاحداثي ونصل بينهما بخط منحن ممهد متصل فنحصل على المنحنى الموضح في الشكل (1) .

الشكل رقم (1)



وبحساب الفرق المطلق لبعدي النقطة $D(5,\frac{9}{4})$ عن النقطتين F_1,F_2 نجد أن:

$$|D\,F_1 - DF_2| = \left|\sqrt{(5+5)^2+(\frac{9}{4})^2} - \sqrt{(\frac{9}{4})^2}\right| = 8$$

ونلاحظ أيضاً أن الفرق المطلق لبعدي النقطة $W\left(6,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$ عن النقطتين F_1,F_2 يساوي:

$$\left|\sqrt{(6+5)^2+(\frac{\sqrt[3]{5}}{2})}\sqrt{(6-5)^2+(\frac{3\sqrt{5^2}}{2})}\right|$$

$$= \left|\sqrt{\frac{529}{4}} - \sqrt{\frac{49}{4}}\right|$$

$$= \left|\frac{23}{3} - \frac{7}{2}\right| = \left|\frac{16}{2}\right| = 8$$

ويكون هذا صحيحاً لبقية النقط الواقعة على المنحنى كما في الشكل (1) .

وبشكل عام: لتكن F_1 , F_2 نقطتين في المستوى الديكارتي ، تامسافة بينهما 2c وليكن 2a عدداً حقيقياً موجباً حيث 2c >2a وإذا كانت N (x, y) أي نقطة في المستوى الديكارتي تتحرك بحيث إن الفؤق المطلق بين بعديهما عن النقطتين F_1 ,F_2 يكون دائماً ، مساوياً للعدد الثابت 2a ، فإنها ترسم منحنياً هو المحل الهندسي لها ، يسمى قطعاً زائداً وبناءً عليه فإن:

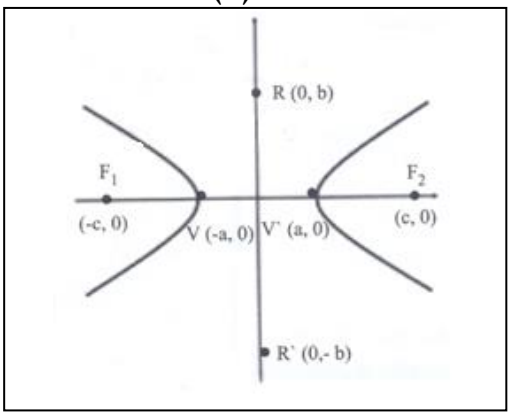
تعريف (1)

القطع الزائد هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية N(x, y) والتي تتحرك بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي N(x, y) عن نقطتين ثابتين F_1,F_2 (تسميان البؤرتين) يساوي مقدار ثابت.

*** عناصر القطع الزائد:**

بالنظر إلى الشكل (2) نلاحظ الخصائص التالية للقطع الزائد وهي:

الشكل (2)



(1) للقطع الزائد محوران للتماثل هما:

a) المستقيم المار بالبؤرتين F_1,F_2 والمركز O يسمى المحور البؤري أو المحور القاطع.

b) المستقيم العمودي على المحور القاطع والمار بالمركز O ويسمى المحور المرافق.

(2) مركز القطع الزائد هو النقطة O.

(3) رأسا القطع الزائد هما النقطتان v, v'.

(4) يسمى البعد بين البؤرتين (F_1 F_2) البعد البؤري ويساوي 2c.

(5) نصف البعد البؤري هو المسافة بين البؤرة والمركز ويساوي c.

(6) البعد بين الرأسين (v v') = طول المحور القاطع ويساوي 2a .

(7) طول القطعة المستقيمة (R R') = طول المحور المرافق ويساوي 2b.

تعريف (2):

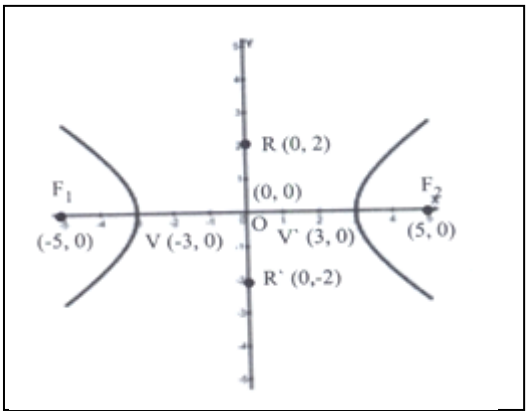
الاختلاف المركزي للقطع الزائد هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع ويرمز له بالرمز e $e = \frac{c}{a}$

وبما أن c > a إذن $\frac{c}{a}$ 1 أي الاختلاف المركزي في القطع الزائد اطبر من واحد صحيح .

مثال (1):

أوجد العناصر الأساية للقطع الزائد في الشكل (3)

الشكل (3)



الحل:

(1) طول المحور القاطع (v v'): vv' =2a = 2x3 = 6

(2) طول المحور المرافق (R R') : R R'= 2b = 2x2 = 4

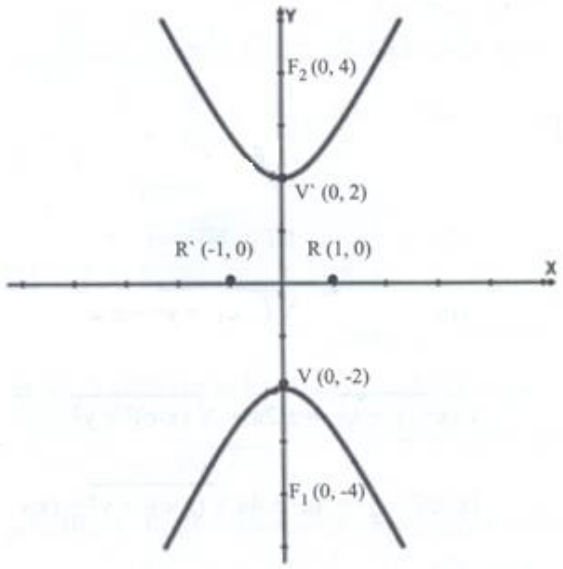
(3) البعد البؤري $(F_1\ F_2)$: $F1\ F2 = 2c = 2x5 = 10$

(4) الاختلاف المركزي (e): $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

تدريب (1)

أوجد طول المحور القاطع و المرافق والبعد البؤري والاختلاف المركزي للقطع المرسوم في الشكل (4):

الشكل (4)



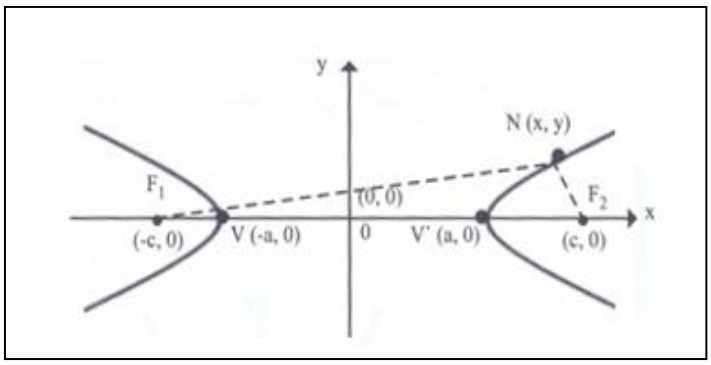
2. المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل

في هذا البند سوف نشتق المعادلةالقياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور x أو محور y.

أولاً: القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محوره x.

لنأخذ القطع الزائد في الشكل (5).

الشكل (5)



ونطبق تعريف القطع الزائد:

أي أن: $|NF_1 - NF_2| = 2a$

$NF_1 - NF_2 = \pm 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

أو: $$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2} + (x-c)^2 + y^2$$

وبفك الأقواس والاختصار:

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

وبتبسيط المعادلة :

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

وبتربيع الطرفين :

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2\,cx + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 - 2a^2\,cx + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 = a^4 - 2a^2\,cx + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 = a^4 + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 - c^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^4 - a^2\,c^2$$

$$x^2\,(a^2 - c^2) + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (a2 – c2) نجد:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

وبما أن a < c من تعريف القطع الزائد وان كلاً من العددين a وc موجب فإن المتباينة a < c لا تتغير بتربيع طرفيها أي أن a2 < c2 أي a2 – c2 < 0 .

وإذا عرفنا المقدارالثابت b بالشكل $-b = a2 - c2$

فإننا نستطيع كتابة المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

بالصورة :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

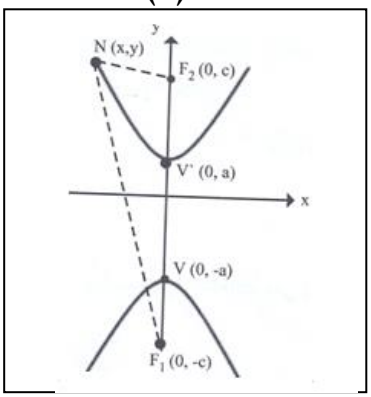
حيث a , b عددان حقيقيان موجبان .

ويطلق على العلاقة (1) الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور x حيث أن :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ثانياً: وإذا كانت البؤرتان للقطع الزائد هما F1(0, -c) , F2 (0, c) فيكون المحور القاطع منطبقاً على محور y كما في الشكل (6) .

الشكل (6)



وبالأسلوب السابق نفسه في إيجاد معادلة القطع تحصل على معادلة اخرى قياسية للقطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{....(2)}$$

حيث a , b عددان حقيقيان موجبان ، $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

ويطلق على العلاقة (2) الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور y .

ملاحظات:

(1) a2 دائماً مقام الكسر الأول والمتغير الموجود في البسط الذي مقامه a2 يكون دائماً هو المحور القاطع أو يكون المحور القاطع يوازيه .

(2) من المعادلة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

أي أن :

$x^2 - y^2 = a^2$ .....*

ويسمى القطع الزائد الذي معادلته على صورة المعادلة (*) القطع الزائد متساوي الاضلاع.

(3) قيمة cتعطى دائماً بالعلاقة : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (2):

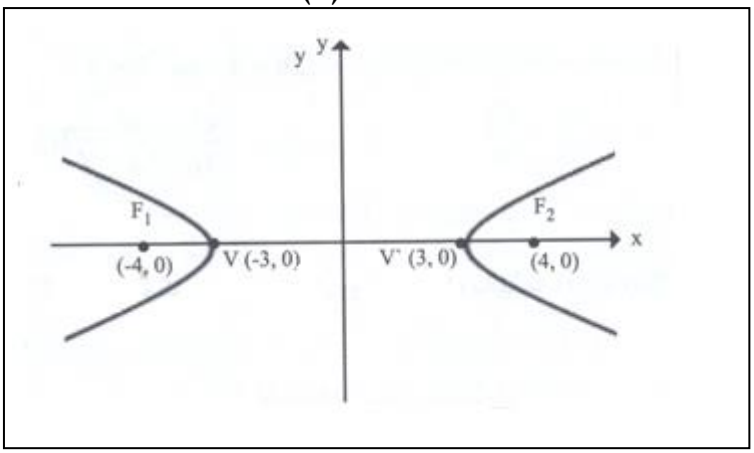
أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (±4 , 0) ويتقاطع مع محور x عند x = ±3

الحل :

بما أن البؤرتين تقعان على محور x ، إذن محوره القاطع ينطبق على محور x ، ومركزه (0,0) انظر الشكل (7) .

لاحظ أن: C = 4 , a =3

الشكل (7)



ومن العلاقة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

$b = \pm\sqrt{7}$

إذن معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وبتعويض قيم a^2 , b^2 نجد أن :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

مثال (3):

أوجد معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع ينطبق على محور x ومركزه نقطة الأصل وطول محوره القاطع (8) والمرافق (4)

الحل:

المعادلة هي : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

طول المحور القاطع : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

طول المحور المرافق : $2b = 4 \Rightarrow b = 4$

إذن المعادلة هي : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

مثال (4):

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر منحناه بالنقطة (2,3) وطول محوره المرافق $(2,\sqrt{3})$ ثم ارسم منحناه.

الحل : (يوجد حلان)

أولاً: نفرض أن محوره القاطع ينطبق على محور x ومعادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

طول المحور المرافق $2b = 2\sqrt{3} \Leftarrow$

$b = \sqrt{3}$

إذن تصبح المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

وبما أن منحناه يمر بالنقطة (2,3) إذن تحقق معادلته :

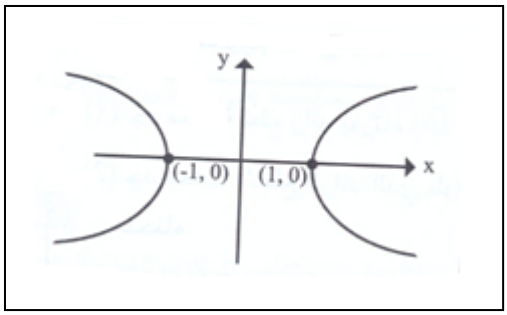
$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{3} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a^2} - 3 = 1$$

$$\frac{4}{a^2} = 4 \Rightarrow \boxed{a^2 = 1}$$

إذن تصبح المعادلة :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

انظر الشكل (8)



ثانياً: نفرض أن محوره القاطع ينطبق على محور x

ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

طول المحور المرافق $2b = 2\sqrt{3} \Leftarrow b = \sqrt{3} \Leftarrow$

إذن تصبح المعادلة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{3} = 1$

وبما أن منحناه يمر بالنقطة (2,3) إذن فهي تحقق معادلته :

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = 1 + \frac{4}{3}$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{7}{3}$$

بالضرب التبادلي: $7\ a^2 = 27$

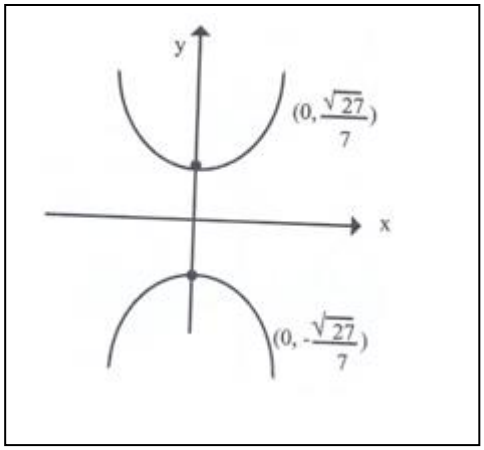
$$a^2 = \frac{27}{7}$$

إذن تصبح المعادلة :

$$\frac{y^2}{\frac{27}{7}} - \frac{x^2}{3} = 1$$

إي أن : $$\frac{7y^2}{27} - \frac{x^2}{3} = 1$$

انظر الشكل (9)



تدريب (2)

جد معادلة قطع زائد بؤرتاه (7±,0) وطول محوره القاطع (8) وحدات .

أسئلة تقويم ذاتي

(1) جد معادلة قطع زائد بؤرتاه (±0,6) ويتقاطع مع محور y عند y = ±4 .

(2) جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه ($\pm\sqrt{8}$, 0) ثم ارسم منحناه .

(3) جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه (2,0) ويمر منحناه بالنقطة (2,3) .

3. إيجاد عناصر القطع الزائد

في هذا البند سوف نتعلم كيف نجد عناصر القطع الزائد الذي معادلته على الصورة (1) أو (2) والامثلة التالية توضح ذلك :

مثال (5):

أوجد بؤرتي ورأسي وطولي المحورين القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

ثم ارسم المنحنى البياني له

الحل:

احداثيات المركز (0,0)

الأول = $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

وبما ان البسط الذي مقامه a2 يحتوي على المتغير x ورأس القطع هو نقطة الأصل اذن المحور القاطع ينطبق على محور x إذن احداثيات الرأسين (0, ±2)

طول المحور القاطع $\Leftarrow 2a = 2x\ 2 = 4$

ومعادلته y = 0

الثاني = $b2 = 1 \Rightarrow b = 1$

ولكن : $\Leftarrow \sqrt{5} = c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$

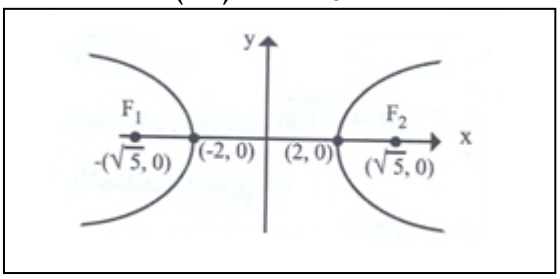
إذن احداثيات البؤرتين $(\pm\sqrt{5}, 0)$

طول المحور المرافق $\Leftarrow 2b = 2x1 = 2$

ومعادلته $x = 0$

الاختلاف المركزي $\Leftarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

انظر الشكل (10)



مثال (6):

أوجد بؤرتي ورأسي وطولي المحورين القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد .

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{25} = 1$$

الحل:

احداثيات المركز (0,0)

الأول = $a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

وبما أن بسط a2 يحتوي على المتغير y إذن المحور القاطع ينطبق على محور y .

إذن احداثيات الرأسين $(0,\pm9)$

وطول المحور القاطع $\Leftarrow 2a = 2 \times 9 = 18$

ومعادلته $x = 0$

الثاني = $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

طول المحور المرافق $\Leftarrow$ $2b = 2 \times 5 = 10$

ومعادلته $y = 0$

لكن : $c^2 = a^2 + b^2 = 81 + 25 = 106$

$c = \sqrt{106}$

إحداثيات البؤرتين $(0, \pm\sqrt{106})$

الاختلاف المركزي $\Leftarrow$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{106}}{9} > 1$$

مثال (7):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الزائد:

$4x^2 - 16y^2 = 64$

نكتب المعادلة بالصورة القياسية:

نقسم جميع الحدود على 64 فنحصل على :

$$\frac{x^2}{\frac{64}{4}} - \frac{y^2}{\frac{64}{16}} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

احداثيات الرأس $(0,0)$

$a = 4 \Rightarrow a2 = 16$ = الأول

وبما أن بسط a2 يحتوي على المتغير x إذن المحور القاطع ينطبق على محور x إذن الرأسان $(\pm 4, 0)$

طول المحور القاطع : $2a = 2\ (4) = 8$

ومعادلته $y = 0$

$b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$ =

طول المحور المرافق$2b = 2\ (2) = 4$

ومعادلته : $x = 0$

ولكن : $c2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$

$c = \sqrt{20}$

إذن احداثيات البؤرتين $(\pm\sqrt{20}, 0)$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{4} > 1$$

تدريب (3)



اكتب المعادلة التالية بالصورة القياسية:

$2x^2 - 4y^2 = 8$

أسئلة تقويم ذاتي



1- جد احداثيات المركز والرأسين والبؤرتين ومعادلة كل من المحورين القاطع والمرافق وطولهما للقطع الزائد :

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$$

2- جد إحداثيات المركز والرأسين والبؤرتين ومعادلة كل من المحورين القاطع والمرافق وطولهما للقطع الزائد:

$16\,x2 - 9\,y2 = 144$

3- احسب طول المحور القاطع للقطع الزائد:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$$

4- إذا كانت : $9\,x2 - 25\,y2 + 225 = 0$ تمثل معادلة قطع زائد وكانت N (x, y) نقطة واقعة عليه فجد الفرق المطلق بين بعدي النقطة N عن بؤرتي هذا القطع .

4. إشتقاق المعادلات بصورة عامة

في هذا البند سوف نشتق معادلات عامة للقطع الزائد الذي مركزه M(h, k) ومحوره القاطع يوازي محور x او يوازي محور y.

أولاً: إذا كان محوره القاطع يوازي محور x .

وفي هذه الحالة نجري إنسحاب للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور x وستكون معادلته كما نعرف بالنسبة للمحاور ' y ' x الجديدة هي:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ldots (*)$$

ومن علاقة الانسحاب:

$$x' = x - m$$
$$y' = y - n$$

نطبق هذه العلاقة على المحاور الجديدة ' y ' x والتي مركزها M (h, k) فينتج أن :

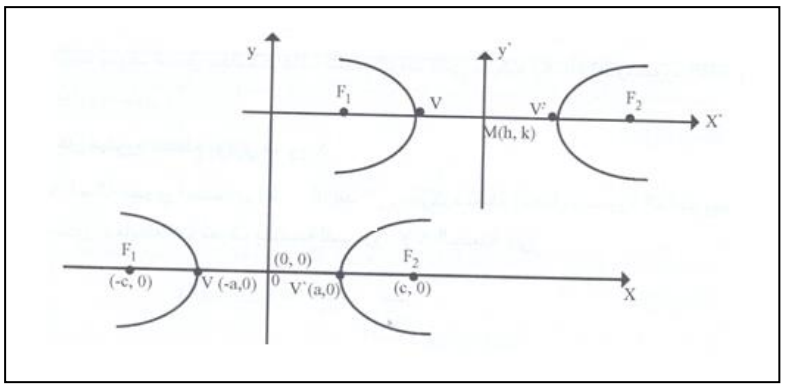
$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

نعوض قيم ' x , ' y في المعادلة (*) فينتج أن :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots (1)$$

وتسمى العلاقة (1) معادلة قطع زائد مركزه M (h, k) ومحوره القاطع يوازي محور x (انظر الشكل (11)) .

الشكل (11)



ملاحظات:

من خلال الشكل (11) نستطيع كتابة الملاحظات التالية :

1- المحور القاطع يوازي محور x وطوله 2a ومعادلته y = k.

2- المحور المرافق يوازي محور y ومعادلته x = h .

3- احداثيات البؤرتين: $F_1(-c + h, k)$ $F_2(c + h, k)$

4- احداثيات الرأسين: $V(-a + h, k)$, $V'(a + h, k)$

ثانياً: إذا كان محوره القاطع يوازي محور y

وفي هذه الحالة نجري انسحاب للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع ينطبق على محور y ، وستكون معادلته كما نعرف بالنسبة للمحاور x ' ، y ' الجديدة هي:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1 \quad \text{.....(**)}$$

وبالتعويض بقيم $x' = x - h$

$y' = y - k$

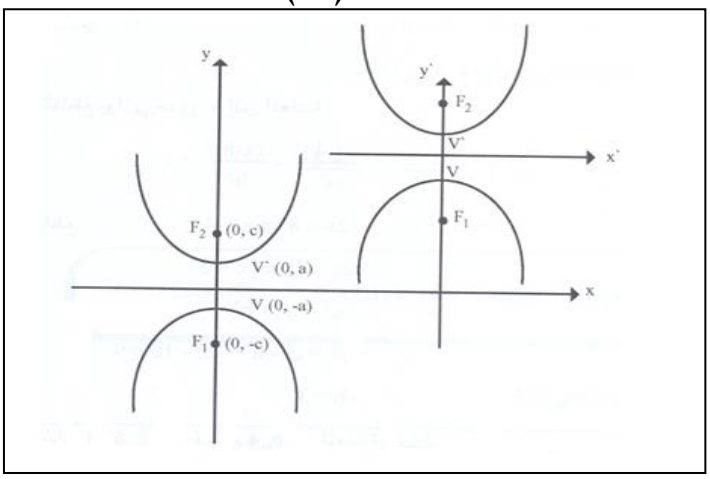
في المعادلة (**) نحصل على :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{.....(2)'}$$

تسمى العلاقة (2)' معادلة ....

M (h , k) ومحوره يوازي محور y انظر الشكل (12) .

الشكل (12)



ملاحظات :

وبالنظر الى الشكل (12) نستطيع كتابة الملاحظات التالية :

1) المحور القاطع يوازي محور y وطوله 2a ومعادلته x =h .

2) المحور المرافق يوازي محور x وطوله 2b ومعادلته y = k .

3) احداثيات البؤرتين : $F_1 (h , -c +k)$

$F_2(h, c +k)$

4) احداثيات الرأسين :

$V(h , -a + k)$

$V'(h , a+ k)$

مثال (8):

أوجد معادلة قطع زائد محوره القاطع مواز لمحور y ومركزه النقطة (1, 2−) وطول محوره القاطع (8) والبعد البؤري له يساوي (10) .

الحل:

بما أن المحور القاطع يوازي محور y غذن المعادلة :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

طول المحور القاطع : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

البعد البؤري: $2c = 10 \Rightarrow c = 5$

ومن العلاقة: $c2 = a2 + b2$

$B2 = c2 - a2 = 25 - 16 = 9$

$b = 3$

وبتعويض احداثيات المركز (1 , 2−) وقيم a, b في المعادلة نجد أن :

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

مثال (9):

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (4− ,7) وطول محوره القاطع (8)

الحل :

بما أن البؤرة والمركز على مستقيم يوازي محور x ومركزه (4− , 2) إذن المعادلة :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

طول المحور القاطع : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$C = 7 - 2 = 5$

$b2 = c2 - a2$

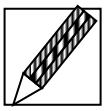
$= 25 - 16 = 9$

وبتعويض احداثيات المركز وقيم a , b في المعادلة :

نجد أن :

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

تدريب (4)



أوجد معادلة قطع زائد بؤرتاه (2, 5) , (2, 1-) ورأساه (2, 0) , (2, 4)

أسئلة تقويم ذاتي

1- جد معادلة قطع زائد مركزه (3, 2) وإحدى بؤرتيه (3 , 8) والبعد بين رأسيه بمقدار (6) عن البعد بين بؤريته .

2- جد معادلة قطع زائد بؤرتاه (1,0) , (1, 6) ورأساه (1, 1) , (1, 5)

3- جد معادلة قطع زائد إحدى بؤرتيه (4, 3) ومركزه (4-, 3) وطول محوره القاطع (10).

5. إيجاد العناصر من المعادلة العامة

في هذا البند سوف نجد عناصر القطع الزائد والذي معادلته معطاه بالصورة العامة والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال (10):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الزائد

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

ثم ارسم منحناه .

الحل:

إحداثيات المركز M(-1,1)

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ = الأول

وبما أن بسط a2 يحتوي على المتغير x إذن المحور القاطع يوازي محور x احداثيات الرأسين V(-3,1) = V (-2 + (-1) , 1) = V (-a + h, k)

V' (a +h, k) = V (2+(-1), 1) = V(1,1)

طول المحور القاطع : $2a = 2 \times 2 = 4$

ومعادلته : $Y = k \Rightarrow y = 1$

الثاني = $b2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

ومن العلاقة : $c^2 = a^2 + b^2$

$= 4 + 2 = 6$

$c = \sqrt{6}$

إذن احداثيات البؤرتين :

$F_1 (-c + h, k) = F_1 (-\sqrt{6} + (-1), 1) = F_1 (-\sqrt{6} - 1, 1)$

$F_2 (c + h, k) = F_2 (\sqrt{6} + (-1), 1) = F_2 (\sqrt{6} - 1, 1)$

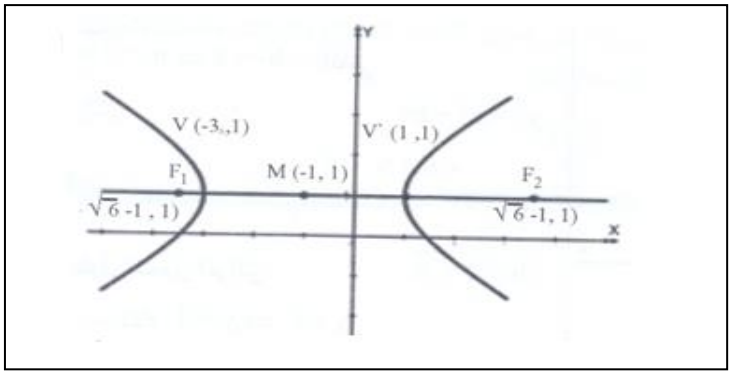
طول المحور المرافق: $2b = 2 x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

معادلته : $x = h \Rightarrow x = -1$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ورسمة المنحنى كما في الشكل (13)

الشكل (13)



مثال (11):

أوجد العناصر الأساسية للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(y-1)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1$$

ثم ارسم منحناه:

الحل:

احداثيات المركز $M(h , k) = M (2, 1)$

الاول $= a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8}$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير y إذن المحولر القاطع يوازي محور y.

طول المحور القاطع : $2a = 2\sqrt{8}$

ومعادلته : $x = h \Rightarrow x = 2$

احداثيات الرأسين :

$$V (h,-a +k) = (2, -\sqrt{8} +1)$$
$$V' (h, a + k) = (2,\sqrt{8} +1)$$

الثاني $= b^2 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8}$

ولكن : $c^2 = a^2 + b^2$

$$= 8 + 8 = 16$$
$$C = 4$$

طول المحور المرافق : $2b = 2\sqrt{8}$

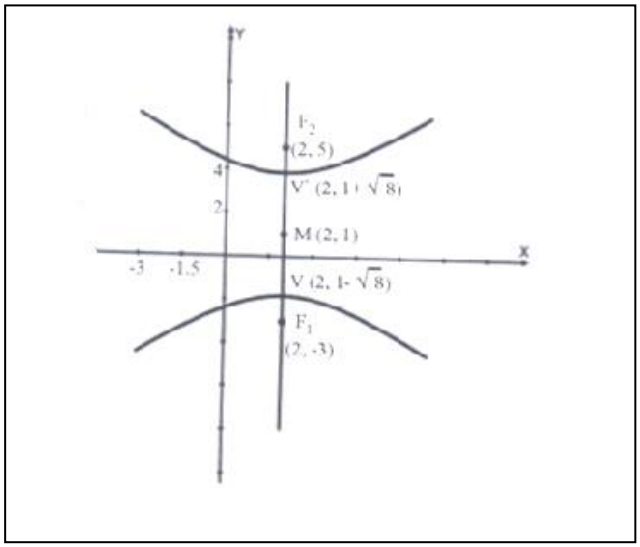
ومعادلته : $y = 1 \Rightarrow y = k$

احداثيات البؤرتين :

$$F_1 (h, -c +k) = (2, -4 +1) = (2,-3)$$
$$F_2 (h, c+ k) = (2, 4+1) = (2,5)$$

ومنحنى القطع كما في الشكل (14).

الشكل (14)



تدريب (5)

عين نوع المنحنى الممثل بالمعادلة : 9 x2 – 16 y2 – 36 y = 124

ثم اوجد عناصره الأساسية ، ثم ارسم منحناه

أسئلة تقويم ذاتي

1- اوجد المركز واحداثيات الرأسين والبؤرتين وطول المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(x-2)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

2- أوجد احداثيات البؤرتين والرأسين والمركز وطول المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(y-5)^2}{81} - \frac{(x+4)^2}{64} = 1$$

6. معادلة المماس والعمودي على المماس

في هذا البند سوف نتعرف على معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1,y_1) .

وإن معادلة هذا المماس تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

وميل هذا المماس يعطى بالعلاقة التالية :

$$m_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

حيث m1: ميل المماس :

وميل العمودي على المماس عند النقطة (x_1 ,y_1) = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$

أي :

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

حيث m2 ميل العمودي على المماس .

مثال (12):

أوجد معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد : $x^2 - 9y^2 = 9$ عند النقطة $(5,\frac{4}{3})$

الحل:

النقطة $(5,\frac{4}{3})$ تقع على منحنى القطع لأنها تحقق معادلته .

نقسم جميع الاطراف على (9)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$$

ومعادلة المماس هي :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

وبالتعريف بقيمة (x_1 , y_1) وقيم b , a نجد :

$$\frac{5x}{9} - \frac{\frac{4}{3}y}{1} = 1$$

$$\frac{4}{3}y = \frac{5}{9}x - 1$$

$$y = \frac{5}{12}x - \frac{3}{4}$$

ميل المماس:

$$m_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

إذن العمودي:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{\frac{-1}{5}}{12} = \frac{-12}{5}$$

إذن معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = m_2 (x - x_1)$$

$$y - \frac{4}{3} = \frac{-12}{5} - (x - 5)$$

$$y - \frac{4}{3} = \frac{-12}{5} - x + 5$$

$$y = \frac{-12}{5}\ x + 12 + \frac{4}{3}$$

أسئلة تقويم ذاتي



إذا كانت $x2 - 4\ y2 = 16$

تمثل معادلة قطع زائد أوجد .

1) ميل المماس لمنحنى القطع الزائد عند النقطة $(\sqrt{32},2)$.
2) أوجد معادلة المماس لمنحنى القطع الزائد عند النقطة $(\sqrt{32},2)$.
3) أوجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(\sqrt{32},2)$.

الخلاصة

عزيزي الدارس، مع نهاية هذه الوحدة دعنا نستعرض معاً أهم النقاط التي وردت فيها:

1) تعريف القطع الزائد : وهو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية N (x ,y) بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي N(x ,y) عن نقطتين ثابتين F_1 , F_2 يساوي مقداراً ثابتاً .

2) الاختلاف المركزي : وهو بالنسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع ويرمز له بالرمز e حيث $e = \frac{c}{a}$

3) المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وهي :

A) محورهالقاطع ينطبق على محور x ومعادلته : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

B) محوره القاطع ينطبق على محور y ومعادلته : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

4) المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h , k) وهما :

A) محوره القاطع الذي يوازي محور xومعادلته : $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

B) محوره القاطع يوازي محور yومعادلته :$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

5) إيجاد عناصر القطع وهي احادثيات المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهما والاختلاف المركزي ورسم منحنى القطع .

6- إيجاد معادلة المماس لمنحنى القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1 , y_1) وهي :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

7) إيجاد معادلة العمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد عند نفس النقطة (x_1,y_1) وهي : $y - y_1 = m_2 (x - x_1)$

حيث m2 ميل العمودي وتساوي $\frac{-1}{m_1}$، جيث m1 ميل المماس

وتعطى بالعلاقة : $m_1 = \frac{b_1 x_1}{a^2 y_2}$

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس، نستعرض في الوحدة الاخيرة تعميماً للوحدات الاربعة الأول، حيث نتناول المعادلة العامة من الدرجة الثانية" وكيف نحدد أي قطع تمثل تلك المعدلة، وكيفية رسمها في الفضاء الثلاثي ضمن المحاور الديكاريتة او الكروية. إنها وحدة ممتعة بحق، أرجو أن تجدها سهلة ومشوقة .

إجابات التدريبات

تدريب (1)

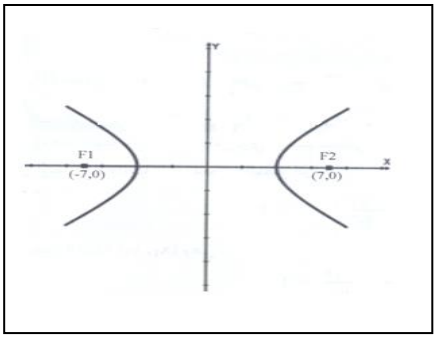
طول المحور القاطع : $2a = 2\ (2) = 4$

طول المحور المرافق : $2b = 2\ (1) = 2$

البعد البؤري : $2c = 2\ (4) = 8$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

تدريب (2) انظر الشكل



نلاحظ أن $c = 7$

طول المحور القاطع =8 اي $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

لكن $c^2 = a^2 + b^2$

$b2 = c2 - a2 = 49 - 16 = 33 \Rightarrow b = \sqrt{33}$

المعادلة :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$$

تدريب (3)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

تدريب (4)

احداثيات المركز = $(2,2) = (\frac{4+0}{2}, \frac{2+2}{2})$

$a = 4 - 2 = 2$

$c = 5 - 2 = 3$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

إذن المعادلة هي :

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

تدريب (5)

$9\,x^2 - 36x - 16\,y^2 + 32\,y = 124$

$9\,(x^2 - 4x) - 16\,(y^2 - 2y) = 124$

$9\,(x^2 - 4x + 4) - 16\,(y^2 - 2y + 1) = 124 + 36 - 16$

$9\,(x-2)^2 - 16\,(y-1)^2 = 144$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

معادلة قطع زائد مركزه (2,1)

الأول = $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

وبما أن بسط a^2 يحتوي على المتغير x ، إذن المحور القاطع يوازي محور x ،

طول المحور القاطع $\Leftarrow 2a = 2\,(4) = 8$

ومعادلته : $y = 1$

الثاني = $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

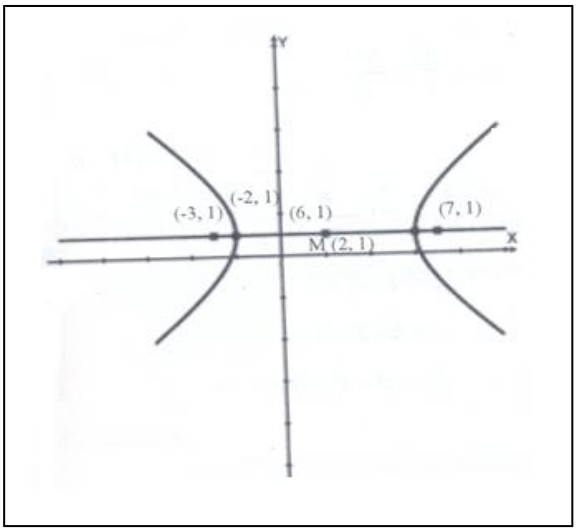
$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow$ **c = 5**

ومعادلته : $x = 2$

احداثيات الرأسين : $(6\ ,\ 1)$, $(-2,\ 1)$

احداثيات البؤرتين :(1 , 3−) (1 , 7)

منحناه كما في الشكل:



مسرد المصطلحات

*** قطع زائد Hyperbola**

هو المحل الهندسي للنقطة N(x ,y) المتحركة في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق لبعديهما عن نقطتين ثابتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً .

*** الاختلاف المركزي Eccentricity**

وهي نسبة تحدد نوع القطع المخروطي و كما يلي :

e = 1 للقطع المكافئ ، e >1 للقطع الزائد ، 1 > e > 0 للناقص

*** إنسحاب المحاور Translation pf Axes**

هو تحويل هندسي للمحاور للحصول على نظام جديد x’ y’ من النظام القديم x y بحيث تكون x’=x – m

y’ = y – n ، حيث (m , n) احداثيات مركز النظام x’ y’ عن انساحاب النظام x y .

المراجع العربيّة والاجنبيّة

المراجع العربية:

1- عوض عدنان؛ وعزام، مفيد ؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، أحمد ، الهندسة الاحداثية، عمان: جامعة القدس المفتوحة، ط 2 ، 2003 .

2- نصير، عبدالمجيد؛ والناشف، بسام، الحسبان: التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، عمان: دار البشير 1989م.

3- سمور، خالد الرياضيات والهندسة التحليلية، عمان: دار الفكر ، ط 1، 1999م.

المراجع الاجنبية:

- Silverman R. A, Calculus with Analytic Geometry , New Jersey: Prentice – Hall,1985. – Stokowski , E. W , Calculus with Analytic Geometry Prindle , Weberand Schmidt, rded . 1984.

- Salas S. I , Calculus; one and Several Variables . Wiley , 1980.


الوحدة الخامسة
المعادلة العامة من الدرجة
الثانية والفضاء الثلاثي

محتويات الوحـدة

الموضــوع	الصفحة
المقدمة	
تمهيــد	
اهداف الوحدة	
1. تدوير المحاور	
2. المعادلة العامة من الدرجة الثانية	
1.2. تمييز القطوع المخروطية	
3. حذف الحد x y	
4. الفضاء الثلاثي (نظام الإحداثيات الديكارتية)	
5. الإحداثيات الأسطوانية	
6. العلاقة بين الإحداثيات الاسطوانية والديكارتية	
1.6. التحويل من نظام اسطواني إلى نظام ديكارتي	
2.6. التحويل من نظام كارتيزي إلى نظام اسطواني	
7. الإحداثيات الكورية	
8. العلاقة بين الإحداثيات الكورية والإحداثيات الأسطوانية	
1.8. التحويل من نظام كوري إلى اسطواني	
2.8 التحويل من نظام اسطواني إلى كروي	
الخلاصة	
إجابات التدريبات	
مسرد المصطلحات	
المراجع	

المقدمة

تمهيد

نقدم إليك عزيزي الدارس الوحدة الخامسة من مقرر 161 رياضيات (1) الهندسة التحليلية وهي بعنوان "المعادلة من الدرجة الثانية والفضاء الثلاثي"، لما لهذان الموضوعان من أهمية كبيرة في الرياضيات ، حيث تستخدم المعادلة العامة لتمييز القطوع المخروطية، ويستخدم الفضاء الثلاثي في تمثيل النقاط والمعادلات في الفضاء.

وسوف نتعرف في هذه الوحدة على تدوير المحاور والمعادلة العامة من الدرجة الثانية وحذف الحد x y والفضاء الثلاثي والاحداثيات الاسطوانية والكروية والعلاقة بين الاحداثيات الاسطوانية والديكارتية وبين الاسطوانية والكروية.

ستحتاج في هذه الوحدة إلى شئ من التخيل وخصوصاً عند الحديث عن الاحداثيات الاسطوانية والاحداثيات الكروية ، وهذا امر مفيد للغاية ذلك أن العالم الذي نعيش فيه هو عالم ثلاثي الابعاد من حيث المكان، وستجد أن هذه الوحدة ذات صلة وثيقة بمعارفك السابقة واحتياجاتك المعرفية في المستقبل.

نأمل أن تكون وحدة ممتعة لك، كما نرجو المساهمة في نقدها وتطويرها.

ونتمنى لك التوفيق.

أهداف الوحدة



عزيزي الداس، بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن :

1- **تشتق** علاقة لتدوير المحاور .

2- **تميز** القطوع المخروطية من المعادلة العامة .

3- **تحذف** الحد x y .

4- **تعرّف** الاحداثيات الديكارتية وتعين نقطة في الفضاء الديكارتي .

5- **تعرّف** الاحداثيات الاسطوانية وعلاقتها بالدسكارتية .

6- **تحوّل** نقاط من نظام اسطواني إلى ديكارتي وبالعكس .

7- **تعرّف** نظام الاحداثيات الكروية وعلاقتها بالاسطوانية .

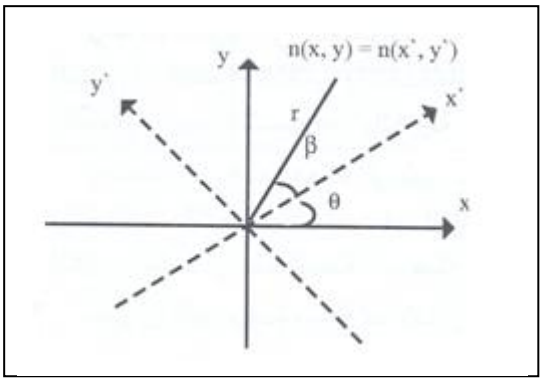
8- **تحول** نقاط من نظام كروي إلى نظام اسطوانى .

1. تدوير المحاور

في هذا البند سوف نعرف نظاماً ديكارتياً ينتج بتثبيت نقطة الأصل وتدوير المحور x والمحور y حول نقطة الأصل إلى وضع جديد (أو بزاوية مقدارها θ) يصبحان فيه x ‘, y ‘) وكل تحويل من هذا النوع يسمى بتدوير المحاور.

والأن سوف نشرح تدوير المحاور كما هو موضح في الشكل (1) .

الشكل (1)



إذا دورنا محور x ومحور y بزاوية مقدارها θ حول

نقطة الأصل فإن النقطة n (x, y) في النظام x,yتصبح

n (x ‘,y ‘) في النظام x ‘, y ‘ونريد إيجاد العلاقة بين

الاحداثيات(x ‘, y ‘) والاحداثيات (x, y)

نلاحظ أن :

$$x = r\cos(\theta + \beta)$$

$$y = r\sin(\theta + \beta)$$

$$\ldots x' = r\cos\beta \ldots\ (1)$$

$$y' = r\sin\beta \qquad \ldots\ldots(2)$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية :

$$\cos(\theta + \beta) = \cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta$$

$$\sin(\theta + \beta) = \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta$$

إذن :

$x = r\cos(\theta + \beta) = (\cos\theta)\ r\ \cos\beta - (\sin\theta)\ r\ \sin\beta$ .....(3)

$y = r\sin(\theta + \beta) = (\sin\theta) r\ \cos\beta + (\cos\theta)\ r\ \sin\beta$ .....(4)

والأن عوض (1) , (2) في (3) , (4) لنجد أن :

$x = \cos\theta.\ x' - \sin\theta\ .y'$

$y = \sin\theta\ .x' + \cos\theta\ .y'$

وبعبارة أخرى :

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

حيث θ زاوية الدوران

.....(*)

مثال (1):

إذا دار المحوران x y بزاوية مقدارها $30°$ وكان الاحداثيان للنقطة n في النظام x y هما (2, 7-) فما احداثياها في النظام ' x ,' y .

الحل:

نستخدم العلاقة (*)

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

$7 = x'(\cos 30°) - y'(\sin 30°)$

$7 = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right)$

$7 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \dots\dots\dots(1)$

والأن $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

$-2 = x'(\sin 30) + y'(\cos 30)$

$$-2 = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \ldots\ldots\ldots(2)$$

نحل المعادلتين (1) , (2) وكما يلي:

نجد قيمة ' yبدلالة 'xمن المعادلة (1)

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - 7$$

بضرب المعادلة في العدد (2) نجد :

$y' = \sqrt{3}x' - 14$ .....(3)

عوض (3) في المعادلة (2)

$$-2 = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}x' - 14)$$

$$-2 = \frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}x' - 7\sqrt{3}$$

$-2 = 2x - 7\sqrt{3}$

$2x' = 7\sqrt{7} - 2$

$$x' = \frac{7\sqrt{3}}{2} - 1$$

عوض قيمة ' x في المعادلة (3) تجد :

$$y' = \sqrt{3}\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} - 1\right) - 14$$

$$= \frac{21}{2} - \sqrt{3} - 14 = \frac{-7}{2} - \sqrt{3}$$

اذن الاحداثيات الجديدة هي :

$$n\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{-7}{2} - \sqrt{3}\right)$$

تدريب (1)



إذا دار محور x , y بزاوية مقدارها $30°$ جد x’ , y’ للنقاط التالية في محور x y :

(A) (2,-3) (B) (1, -3)

2. المعادلة العامة من الدرجة الثانية

إن الصورة العامة للمعادلة التربيعية من الدرجة الثانية هي :

$$Ax^2 + Bxy^2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots..(4)$$

حيث A , C لا يساويان الصفر معاً $A, B, C, D, E, F, \in R$

2.1 تمييز القطوع المخروطية

من المعادلة العامة عند القيام باختيار الثوابت (A , B , C , D , E ,F) قد يكون بيان المعادلة (4) دائرة أو قطعاً مكافئاً أو ناقصاً أو زائداً أو خطين مستقيمين متقاطعين أو متوازيين أو نقطة أو مجموعة خالية .

والسؤال الذي ينشأ الأن هو:

إذا أخذنا المعادلة التربيعية العامة (4) فكيف نصنف المنحنى الذي تمثله هذه المعادلة؟؟

وللأجابة عن السؤال سنفرض أولاً أن B=0 ونضع نظرية بدون برهان تساعدنا في التصنيف المطلوب، ثم نأخذ الحالة التي تكون فيها $B \neq 0$ ونستعمل دوران المحاور بزاوية مناسبة لحذف الحد الذي يحتوي x y ومن ثم نستخدم الاسلوب الأول في تصنيف القطوع .

نظرية:

إن المعادلة : $A x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ تمثل :

(1) قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين : إذا كانت اشارة حاصل ضرب A , C سالبة أي إذا كان $(AC < 0)$.

(2) قطعاً ناقصاً أو نقطة ، أو مجموعة خالية ، إذا كانت $A \neq C$ وإشارة حاصل ضرب A , C موجبة أي كان $AC > 0 , A \neq 0$) .

(3) دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية إذا كانت $(A = C , A \neq 0)$.

(4) قطعاً مكافئاً أو خطين متوازيين أو خطاً واحداً أو مجموعة خالية إذا كانت $(AC = 0)$ ولم يكن كل من A , C صفراً في آن واحد . وحتى تكون المعادلة ممثلة لقطع مكافئ يجب أن تكون : $(A = 0 , C \neq 0 , E \neq 0)$ أو $(A = 0 , C \neq 0 , D \neq 0)$

ولتوضيح هذه النظرية نأخذ الأمثلة التالية:

مثال (2):

ماذا تمثل المعادلة : $y^2 - 8y + 8x + 8 = 0$

الحل:

لاحظ أن : $A = 0 , C = 1 , D = -8 , E = -8 , F = 8$ وبما أن $AC = 0$ وليس كلاهما صفراً فإن المعادلة تمثل قطعاًمكافئاً وذلك لأن ($A = 0 , C\neq0 , D \neq 0$).

مثال (3):

ماذا تمثل المعادلة : $7x^2 - 9y^2 - 14x - 54y - 137 = 0$

الحل:

لاحظ أن : $A = 7 , C = -9 , D = 14 , E = -54 , F - - 137$

وأن : $AC = (7)(-9) = -63 < 0$

ل هذا فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين ، ومن أجل أن ننفي أنها تمثل خطين متقاطعين يجب أن نكمل المربعات ونكتب المعادلة على الصورة :

$$r^2 (x-h)^2 + m^2(y-k)^2 = L$$

حيث$m, r , L \neq 0$اعداد حقيقية ، وبإكمال المربع للمعادلة :

$$7x^2 - 9y^2 - 14x - 54y - 137 = 0$$

نحصل على المعادلة :

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{7} = 1$$

وهذه المعادلة على الصورة :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

فهي معادلة قطع زائد محوره القاطع يوازي محور x ومركزه M(1, -3)

مثال (4):

ماذا تمثل المعادلة : $25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$

الحل :

لاحظ أن : $A = 25 , C = 16 , D = -100 , E = -32 , F = -284$

وأن: $AC = (25)(6) = 400 > 0$

وأن: $A \neq C$

فإن هذه المعادلة تكثل قطعاً ناقصاً او نقطة أو مجموعة خالية ، وحتى ننفي أن تكون نقطة أو مجموعة خالية يجب أن نكمل المربعات ونثبت أن المعادلة على الصورة :

$$r^2 (x-h)^2 - m^2(y-k)^2 = L$$

حيث$m, r , L \neq 0$أعداد حقيقية .

وبإكمال المربع للمعادلة :

$$25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$$

لنحصل على:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

فهي معادلة قطع ناقص محوره الأكبر يوازي محور y ومركزه$M (2,1)$

مثال (5):

ماذا تمثل المعادلة : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

الحل :

لاحظ أن : $A = 1 , C = 1 , D = -4 , E = -6 , F = -12$

وأن $A = C$

ولهذا فإن المعادلة تمثل دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية ، ولإستبعاد كونها تمثل نقطة أو مجموعة خالية يجب أن نكمل المربع في كل من x , y ونضع المعادلة على الصيغة :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = L$$

حيث $L > 0$

وبإكمال المربع للمعادلة $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

نحصل على : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

وهذه المعادلة من الصورة القياسية :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

فهي معادلة دائرة مركزها M (2 ,3) ونصف قطرها 5 .

تدريب (2)



صنف المعادلة : $16x^2 - y^2 - 32y - 6y - 57 = 0$

السؤال الذي ينشأ الآن: كيف نعالج تصنيف منحنى المعادلة التربيعية العامة عندما $B \neq 0$ للأجابة عن هذا السؤال ندرس البند التالي:

3. حذف الحد x y

في هذا البند سوف نجيب عن السؤال الاخير ، وهو كيف نصنف المعادلة العامة إذا كان $B \neq 0$ والإجابة عن هذا السؤال هو حذف الحد x y .

إن تدوير المحاور الذي درسناه في هذا البند الأول من هذه الوحدة سيساعدنا في تبسيط معادلات من الدرجة الثانية وذلك بحذف الحد x y ، وبالعودة إلى المعادلة العامة من الدرجة الثانية:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots(4)$$
$$A , B , C , D , E , F , \in , R , B \neq 0$$

ولحذف الحد x y في المعالدلة 4 نستخدم علاقة تدوير المحاور :

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

وبتعويض قيمة x y من علاقة تدوير المحاور في المعادلة (4) نجد أن :

$$A[x'\cos\theta - y'\sin\theta]2 + B[x'\cos\theta - y'\sin\theta][x'\sin\theta + y'\cos\theta]$$
$$+ C[x'\sin\theta + y'\cos\theta]2 + D[x'\cos\theta - y'\sin\theta]$$
$$+ E[x'\sin\theta + y'\cos\theta] + F = 0$$

ولكن الذي نريده هو حذف الحد الذي يحوي‘y ‘ x وبالتالي نأخذ فقط معامل الحد الذي يحوي على‘ y ,‘ xهو :

$$-2\,A\cos\theta\sin\theta + B\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\cos\theta\sin\theta$$
$$= -A\sin 2\theta + B\cos 2\theta + C\sin 2\theta$$
$$= (C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta$$

وحتى نحذف الحد ‘ y , ‘ xيجب أن يكون معامله يساوي صفراً أي أن :

$$= (C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

أي أن :

$$= (A-C)\sin 2\theta = B\cos 2\theta$$

وهنا يوجد حالتان :

أولاً : إذا كانت $A = C$وعندها نحصل على :

$$B\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + n\,\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n\,\frac{\pi}{2}$$

إذن لحذف‘ y ‘ xوإذا كانت$A = C$نضع بدل$\theta = \frac{\pi}{4}$(اخترنا$n = 0$) .

ثانياً : $A \neq C$ وعندها نحصل على :

$$(A-C)\sin 2\theta = B\cos 2\theta$$

نقسم الطرفين على$\cos 2\theta$ فنحصل على :

$$(A-C)\tan 2\theta = B$$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$$

ولإيجاد الزاويةθ نأخذ معكوس الظل للطرفين$(\tan^{-1})$:

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right) + n\,\pi$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right) + \frac{1}{2}n\,\pi$$

إذن لحذف الحد ' y ' x وإذا كانت $A \neq C$ بدل θ :

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

(اخترنا n=0)

مثال (6):

صنف المعادلة : xy=2 وارسم المنحنى الذي تمثله .

الحل:

لتصنيف المعادلة (1)..... xy =2 نلجأ إلى حذف الحد xy وفي هذه الحالة A = C = 0

إذن نختار :

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

ومن علاقة الدوران :

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \ldots\ldots (2)$$

والأن :

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

$$y = \frac{1}{2}(x' + y') \ldots\ldots (3)$$

نعوض (2) , (3) لنجد أن :

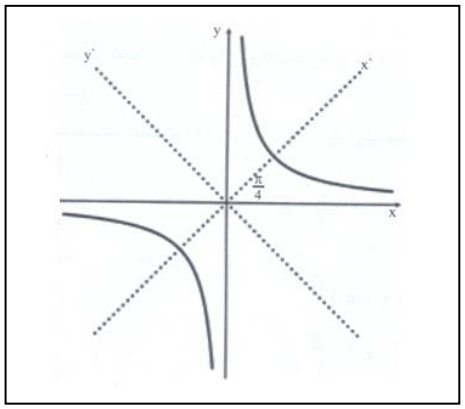
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y').\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') = 2$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2 = 2$$

$$x'^2 - y'^2 = 4$$

وهي معادلة قطع زائد في المستوى‘ y ‘ x

أنظر الشكل (2)



مثال (7):

صنف المعادلة:

$$11\,x^2 + \frac{12}{\sqrt{3}}xy + 7y^2 = 1$$

وارسم المنحنى الذي تمثله المعادلة :

الحل:

$$11\,x^2 + \frac{12}{\sqrt{3}}xy + 7y^2 = 1 \ldots..(1)$$

نلاحظ أن:

$A = 11$, $B = \frac{12}{\sqrt{3}}$, $C = 7$

وبما أن: $A \neq C$ نأخذ :

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{12}{\sqrt{3}}}{11-7}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{12}{\sqrt{3}\ .(4)}$$

$$= \frac{1}{2}\ \tan^{-1}\ \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}(60°) = 30° = \frac{\pi}{6}$$

وباستخدام معادلة الدوران:

$$x' = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$x = x'\cos\frac{\pi}{6} - y'\sin\frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

إذن:

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \ldots\ldots (2)$$

$$y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \ldots\ldots (3)$$

نعوض (2) , (3) في (1) لنجد أن:

$$11[\frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y')]^2 + \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') .\frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') + 7[\frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y')]^2$$

وبتبسيط المعادلة نجد أن:

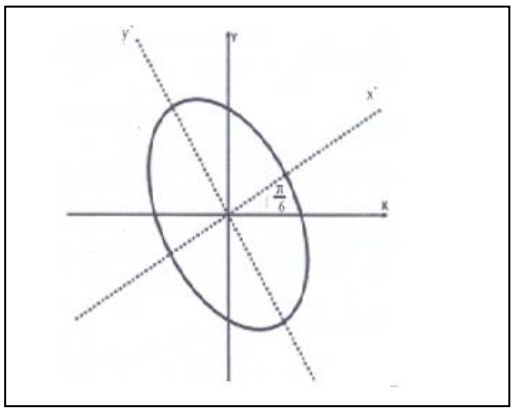
$$13\ x'^2 + 5y'^2 - 2\sqrt{3}x'\ y' + 2\sqrt{3}x'\ y' = 1$$

$$13\ x\ '2 + 5\ y\ '2 = 1$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{13}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص انظر الشكل (3) في المستوى' y ' x.

الشكل (3)



تدريب (3)

جد زاوية الدوران θ التي تحذف الحد ' y ' x من المعادلة التربيعية المناظرة للمعادلة $xy=1$

أسئلة تقويم ذاتي

* صنف منحنى المعادلات التالية :

1) $11\,x^2 + 10\sqrt{3}\,x\,y + y^2 = 4$
2) $x^2 - 2y^2 + x + y = 0$

* صنف محنى كل من المعادلات التالية :

3) $x^2 + 4x - y + 1 = 0$
4) $y^2 + 2y - x - 1 = 0$
5) $9\,x^2 + 4y^2 + 18\,x = 8y + 23$
6) $4x^2 - y^2 - 16x + 10y - 17 = 0$
7) $y^2 - 9x^2 - 8y + 36x - 29 = 0$
8) $5x^2 + 5\,y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$

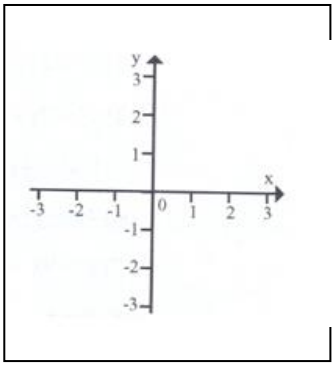
* إذا دار محورا x , y بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{6}$ جد ' x , ' y للنقطة (2,3) في محور x y .

4. الفضاء الثلاثي (نظام الاحداثيات الديكارتية)

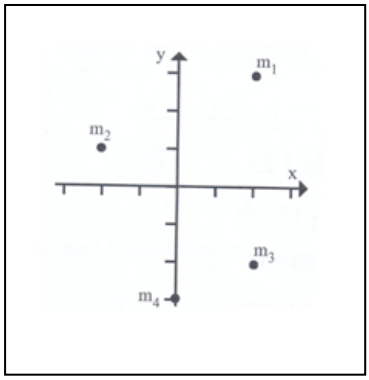
سبق و أن درسنا في الوحدة الأولى نظام الاحداثيات الديكارتية في المستوى المكون من محورين متعامدين متقاطعين في نقطة تسمى نقطة الأصل (0) ، ويسمى الخط الافقي محور x والخط الرأسي محور y الشكل (4)

وعلمت أن كل نقطة في المستوى تمثل بزوج مرتب واحد (a , b) يسمى العدد a الاحداثي x للنقطة ، ويسمى العدد b الاحداثي y للنقطة .

الشكل (4)



الشكل (5)

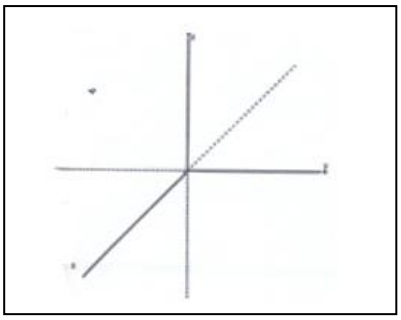


كذلك فإن كل زوج مرتب (a , b) يمثل نقطة واحدة فقط في المستوى وهي تقاطع المستقيمين x=a, y=b ففي الشكل (5) احداثيات النقاط m_4, m_3, m_2, m_1 هي (0, -3) (2, 3) (-2, 1) , (2 , -2) , على الترتيب.

إن نظام الاحداثيات الديكارتية يمكن تعميمه لتمثيل النقاط في الفضاء باستخدام ثلاثة مستقيمات متعامدة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى نقطة الأصل (O)، وتسمى هذه المستقيمات بالمحاور، وهي محور x، محور y، محور z، الشكل (6).

وفي العادة نرسم محوري x , y في مستوى افقي، ومحور z، عمودي على هذا المستوى .

الشكل (6)

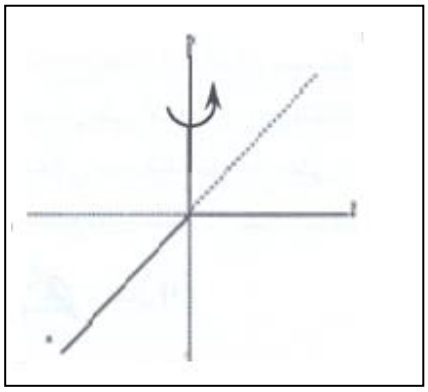


أما ترتيب هذه المحاور ، فينتج حسب قاعدة اليد اليمنىالتي تنص على : افتح اصابع اليد اليمنى، بحيث يكون الابهام عمودياًعلى الأصابع الأربعة تشير إلى محور x ، فإذا ضُمت الاربعة

باتجاه المحور y فإن الابهام سيشير إلى اتجاهz الموجب.

في الشكل (7) تمثل الخطوط المتصلة الأجزاء الموجبة من

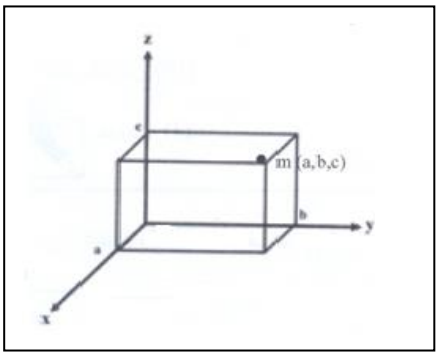
الشكل (7)



المحاور والخطوط المنقطة الأجزاء السالبة منها إن كل زوج من المحاور يحدد مستوى يسمى مستوى الاحداثي فمستويات الاحداثي هي مستوى x y، مستوى y z مستوى x z وهذه المستويات تقسم في الفضاء إلى ثمانية أجزاء، كل جزء منها يسمى ثمناً والثمن المحصور بالأجزاء الموجبة من المحاور يسمى الثمن الأول أما باقي الاثمان فلا يوجد لها ترتيب معين.

والآن لتكن m نقطة في الفضاء، ارسم من هذه النقطة ثلاثة مستويات موازية لمستويات الأحداثي، أو معامدة لمحاور

الشكل (8)



الاحداثيات ، ولتكن نقاط تقاطع هذه المستويات مع محورx، محور y، محور z، هي على الترتيب c , b , a فتكون احداثيات النقطة m هي الثلاثي (a , b , c) الشكل (8). أي أن كل نقطة في الفضاء تمثل بثلاثي مرتب واحد فقط، والعكس صحيح أيضاً، فكل ثلاثي مرتب (a , b , c) يمثل نقطة واحدة في الفضاء. ولتحديد هذه النقطة نعين الاعداد c , b , a على محاور الاحداثيات z , y , x على الترتيب ومن كل مقطة نرسم مستوى عمودي على المحور ، فتكون نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المطلوبة.

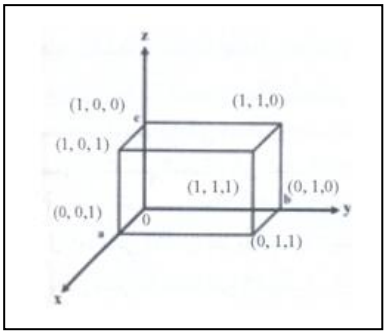
لاحظ أن احداثيات نقطة الاصل (0) هي (0 , 0 ,0) واحداثيات النقاط على محاور z , y , x هي على الصورة (a, 0, 0) , (0, b, 0) , (0, 0, c) على الترتيب وفي الثمن الأول تكون احداثيات النقاط موجبة .

مثال (8):

الشكل (9) يمثل احداثيات رؤوس مكعب ، طول ضلعه وحدة واحدة ، و يقع أحد رؤوسه على نقطة الأصل وسطوحه موازية لمستويات الاحداثي ويقع في الثمن الأول .

يمكنك إيجاد احداثيات نقطة في الفضاء مثل m بطريقة

الشكل (9)



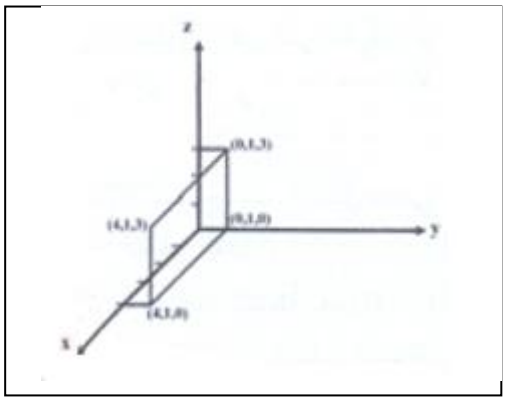
أخرى بإيجاد احداثيات مسقط النقطة على مستوى x y فتحصل على الاحداثيين x , y للنقطة m أمّا الاحداثي z فيكون احداثي مسقط النقطة m على محور z وبعكس الخطوات تستطيع تعيين نقطة إذا علمت احداثياتها.

مثال (9):

عين النقطة (3, 1, 4) في نظام الاحداثيات الديكارتية .

الحل : انظر الشكل (10)

الشكل (10)



تدريب (4)



عين النقطة (3−, 3−, 2) في نظام الاحداثيات الديكارتية.

أسئلة تقويم ذاتي



1) عين النقاط التالية في نظام الاحداثيات الديكارتية .

(3−, 1, 0) , (0, 0, 2−) , (2, 2, 1−) , (2, 1, 1)

2) جد المسافة بين (2, 3−, 1) ومستويات الاحداثي .

3) ارسم متوازي مستطيلات يقع في الثمن الأول ، واوجهه توازي مستويات الاحداثي وأحد رؤوسه

عند النقطة (0, 1, 1) وطول ضلعه الموازي لمحور x يساوي (3) وطول الضلع الموازي لمحور y يساوي (5) ، وطول الضلع الموازي

5. الاحداثيات الاسطوانية

تذكر أنه يمكننا تعيين أية نقطة في الفضاء الديكارتي باستخدام ثلاثة متغيرات , z , y x منسوبة إلى ثلاثة محاور أحداثية متعامدة، وسنرى الآن كيف يمكن تعيين أية نقطة في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية ذات المتغيرات الثلاثة θ , r , z, حيث المتغير z هو ذاته المتغير z في نظام الاحداثيات الديكارتية والاحداثي r هو الطول الذي نريده والاحداثي θ هو الزاوية .

ملاحظة : سنفرض أن θ , r , z, محصورة في الفترات التالية :

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z \in (-\infty, \infty)$$

مثال (10):

عين النقطة n (3 , 45° , 4) في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية .

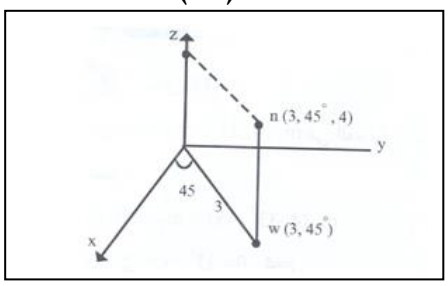
الحل :

$$n\ (3\ ,\ 45°\ ,\ 4) = n\ (\ r\ ,\theta,\ z)$$

إذن: $r = 3\ ,\theta = 45°\ ,\ z = 4$

1. نعين في المستوى x y زاوية مقدارها 45° باتجاه عكس عقارب الساعة ابتداءً من محور x.

الشكل (11)



2. نحدد الطول 3 وحدة (قيمة r) على المستقيم لذي يحدد الزاوية $45°$ مع محور x .

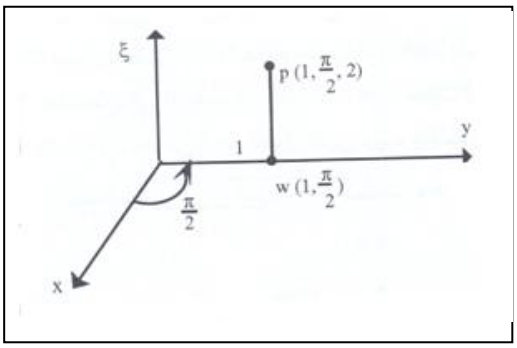
3. قيم العمود wn على المستوى xy من النقطة $w(3, 45)°$ بمقدار 4 وحدات وفي الاتجاه الموجب لمحور z.

4. فتكون النقطة$(3 , 45 °, 4)$ nهي النقطة المطلوبة كما واضح في الشكل (11).

مثال (11) :

عين النقطة $p\ (1, \frac{\pi}{2}, 2)$, في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية

الشكل (12)



الحل:

$$P\ (1 , \pi , 2) = p\ (r , \theta , z)$$

إذن: $r = 1 , \theta = \frac{\pi}{2}, z = 2$

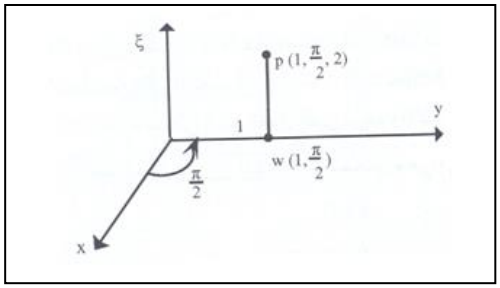
1. عين في المستوى xy زاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ باتجاه عكس عقارب الساعة ابتداءً من محور x.

2. نحدد الطول (قيمة r) على المستقيم الذي يحدد الزاوية $\frac{\pi}{2}$ مع محور x .

3. نقيم العمود wp على المستوى xy من النقطة $w(1,\frac{\pi}{2})$ بمقدار وحدتين وفي الاتجاه الموجب لمحور z .

4. تكون النقطة p ($1,\frac{\pi}{2}$, 2) هي النقطة المطلوبة كما واضح في الشكل (12) .

الشكل (12)



تدريب (5)



مثال (12)

عين النقطة (-5 , 33° , 4) m2 في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية.

الحل:

$$m2\ (4\ ,33°\ ,\ -5) = m2\ (\ r\ ,\ \theta,\ z)$$

إذن : $r = 4\ ,\theta = 33°,\ z = -5$

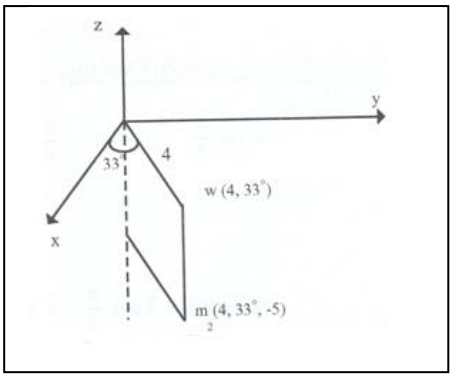
1. نعين في المستوىxy باتجاه زاوية مقدارها(33°) باتجاه عكس عقارب الساعة ابتداء من محور x.

2. نحدد الطول 4 (قيمةr) على المستقيم الذي يحدد الزاوية 33° مع محور x .

3. نقيم العمود wm_2 على المستوى xy من النقطة $w(4,33)$ بمقدار 5 وحدات وفي الاتجاه السالب لمحور z.

4. تكون النقطة $m_2(4,33^0$ و $-5)$ هي النقطة المطلوبة كما في الشكل (13).

الشكل (13)



6. العلاقة بين الاحداثيات الاسطوانية الديكارتية

6.1 التحويل من النظام الاسطواني إلى النظام الديكارتي

للتحويل من نظام الاحداثيات الاسطوانية إلى نظام الاحداثيات الديكارتي نستخدم العلاقات التالية:

1. $x = r\cos\theta$
2. $y = r\sin\theta$
3. $z = z$

مثال (13):

حول احداثيات النقاط التالية من نظام الاحداثيات الاسطوانية إلى نظام الاحداثيات الديكارتي .

(a) $(2 , \frac{\pi}{2} , -3)$, (b) $(6 , \frac{\pi}{6} ,7)$

الحل :

بالنسبة للنقطة الحل :

بالنسبة للنقطة (a)

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2(0) = 0$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2(1) = 2$$

$$z = -3$$

إذن النقطة في النظام الديكارتي هي : $(-3, 2, 0)$

بالنسبة للنقطة (b) :

$$x = r\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$y = r\sin\theta = 6\sin\frac{\pi}{6} = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$Z = 7$$

إذن النقطة في النظام الديكارتي هي : $(3\sqrt{3}, 3, 7)$

تدريب (5)



حوّل احداثيات النقطة $Q(1, \frac{\pi}{2}, 2)$ إلى الاحداثيات الديكارتية .

6.2 التحويل من النظام الديكارتي إلى النظام الاسطواني

للتحويل من نظام الاحداثيات الديكارتية إلى نظام الاحداثيات الاسطوانية نستخدم العلاقات التالية :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad -1$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad -2$$

$$z = z \quad -3$$

مثال (14):

حول احداثيات النقط التالية من نظام الاحداثيات الديكارتية إلى نظام الاحداثيات الاسطوانية .

(a) (1, 1 , 4) (b) (2, -2 , 4)

الحل :

بالنسبة للنقطة (a)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z = z \Rightarrow z = 4$$

إذن النقطة في الاحداثات الاسطوانية هي :

$$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 4)$$

بالنسبة للنقطة (b)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1} -1 = \frac{-\pi}{4}$$

$$z = z \Rightarrow z = 4$$

إذن احداثيات النقطة في النظام الاسطواني هي :

$$(2\sqrt{2}, \frac{-\pi}{2}, 4)$$

أسئلة تقويم ذاتي

1- عين النقطتين التاليتين في الفضاء باستخدام الاحداثيات الاسطوانية :

$E_1 (3 , 70° , 8)$ (A)

$E_2 (10 , \pi , 6)$ (B)

2- حول النقطة التالية إلى النظام الديكارتي .

$(1 , \frac{\pi}{3} , 3)$

3- حول النقطتين التاليتين من احداثيات ديكارتية إلى احداثيات اسطوانية.

$m_1 (-4 , 4 , -2)$, $m_2 (-5 , -12 , 0)$

7. الاحداثيات الكروية

أي نقطة في الفضاء يعبر عنها في نظام الاحداثيات الكروية باستخدام الثلاثي n(p , θ,ϕ) حيث ترمز p لبعد النقطة n عن نقطة الأصل O وترمز θ لقياس الزاوية كما في الاحداثيات الاسطوانية وأما $\emptyset$فترمز لقياس الزاوية on و oz في إتجاه عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل (14) ولتعيين أي نقطة في الفضاء n (p , θ,ϕ)نتبع الخطوات التالية :

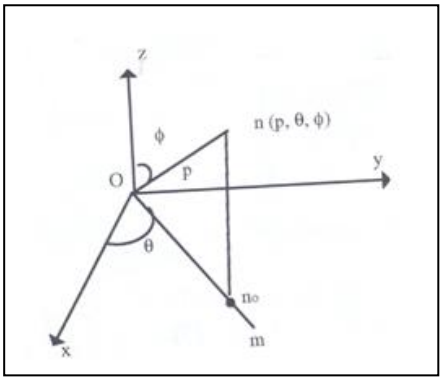
1- ارسم خطاً من نقطة الأصل O بحيث يحصر بينه وبين محور xزاوية موجبة مقدارها θ (عكس عقارب الساعة) .

2- ارسم خطاً في المستوى zom من النقطة o بحيث يحصر بينه وبين محور z زاوية مقدارها ϕ(عكس عقارب الساعة)

3- على الخط الأخير عين نقطة تبعد بمقدار p عن نقطة الأصل . سمّ هذه النقطة n وتكون $\Phi n (p , \theta)$, النقطة المطلوبة .

لاحظ أنه إذا كانت no هي مسقط النقطة n

الشكل (14)



على المستوى xy فإنها تقع على المستقيم om الواقع فيه. من الشكل يمكن استنتاج أن النقطة no تبعد عن نقطة الأصل بمقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ وهذا يساوي قيمة r .

وفي الاحداثيات الكروية سنعتبر أن قيمة p تنحصر في الفترة $[0, \infty]$ وأن:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

مثال (15):

عين النقطة $n\,(4\,,\,60^\circ\,,\,60^\circ)$ في نظام الاحداثيات الكروية .

الحل:

$$n\,(p\,,\,\theta\,,\,\phi) = n\,(4\,,\,60^\circ\,,\,60^\circ)$$

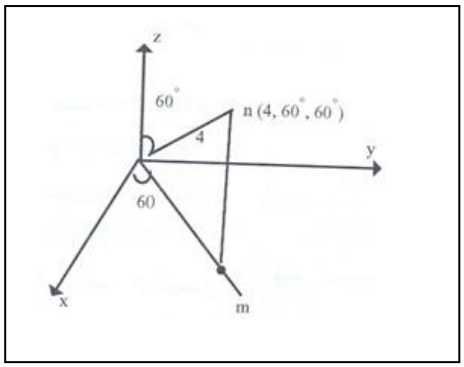
إذن :

$$p = 4\,,\theta = 60^\circ\,,\,\phi = 60^\circ$$

1. ارسم خطاً من نقطة الأصل O بحيث يحصر بينه وبين محور x زاوية موجبة مقدارها 60° (عكس عقارب الساعة).
2. ارسم خطاً في المستوى zom من النقطة O بحيث يحصر بينه وبين محور z زاوية مقدارها (60°) (مع عقارب الساعة).

3. على الخط الاخير عين نقطة تبعد بمقدار (4) عن نقطة الأصل لتحصل على المقطة ($60°$, $60°$, 4) n كما في الشكل (15).

الشكل (15)



تدريب (7)

عين النقطة ($30°$, $45°$, 3) m في نظام الاحداثيات الكروية .

8. العلاقة بين الاحداثيات الكروية والاسطوانية

8.1 التحويل من نظام الاحداثيات الاسطوانية إلى نظام الاحداثيات الكروية .

للتحويل من إحداثيات اسطوانية إلى احداثيات كروية نستخدم العلاقة التالية :

1- $P = \sqrt{r^2 + z^2}$

2- $\theta = \theta$

3- $\phi = \tan^{-1}\frac{r}{z}$

مثال (16):

حوّل احداثيات النقطة $(2\sqrt{3}\ ,\frac{\pi}{2}\ ,2)$ من احداثيات اسطوانية إلى احداثيات كروية .

الحل :

$$r = 2\ ,\theta = \frac{\pi}{3}\ ,z = 2\sqrt{3}$$

$$P = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\theta = \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{r}{z} = \tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

إذن احداثيات النقطة $(2\sqrt{3}\ ,\frac{\pi}{2}\ ,2)$ بالاحداثيات الكروية هي : $(4\ ,\frac{\pi}{3}\ ,\frac{\pi}{6})$

8.2 التحويل من احداثيات كروية إلى اسطوانية

للتحويل من نظام الاحداثيات الكروية إلى نظام الاحداثيات الاسطوانية نستخدم العلاقات التالية:

$r = p\sin\theta$ (1)

$\theta = \ \theta$ (2)

$z = p\cos\theta$ (3)

مثال (17):

حول احداثيات النقطة $(2\ ,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ من نظام الاحداثيات الكروية إلى نظام الاحداثيات الاسطوانية .

الحل :

$$p = 2\ ,\theta = \frac{\pi}{3}\ ,\phi = \frac{\pi}{4}$$

$$r = p \sin\phi = 2 \sin\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = p \cos\phi = 2 \cos\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

إذن النقطة في الاحداثيات الاسطوانية هي: $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{2})$

أسئلة تقويم ذاتي

1- عين النقطة $w(5, 80°, 40°)$ باستخدام الاحداثيات الكروية .

2- حول النقاط من النظام الكروي إلى النظام الاسطواني .

(a) $(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

(b) $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$

3- حول النقاط التالية من النظام الاسطواني إلى النظام الكروي .

(c) $(\sqrt{2}, -45°, 1)$

(d) $(4, \sqrt{10}, 108.4°, 3)$

الخلاصة

عزيز الدارس، مع نهاية هذه الوحدة ، وهذا المقرر ، دعنا نستعرض أهم ما ورد في هذه الوحدة الأخيرة من نقاط .

1) تدوير المحاور حيث

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

θ زاوية الدوران .

2)تمييز القطوع المخروطية من المعادلة العامة ودرسنا نظرية حول ذلك تقول :

إذا كانت المعادلة التربيعية : $Ax2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$

فإن المعادلة تمثل :

* قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين إذا كانت $Ac < 0$

* قطعاً ناقصاً أو نقطة أو مجموعة إذا كانت $A \neq 0 , AC > 0 , A \neq C$

* دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية إذا كانت $(A \neq 0 , A = C)$

* قطع مكافئ أو خطين متوازيين أو خطاً واحداً أو مجموعة خالية إذا كانت $AC = 0$ولم يكن كل منA , C صفراً في آن واحد .

3) حذف الحدxyباستخدام تدوير المحاور من المعادلة التربيعية وذلك لتبسيطها وتصنيفها.

4) عرفنا الفضاء الثلاثي وكيف نعين نقطة على الصورة (a , b, c)في الفضاء الديكارتي.

5) عرفنا الاحداثيات الاسطوانية (r , θ ,z) وكانت العلاقة بين الاحداثيات الاسطوانية والكارتيزيةهي :

$$x = r\cos\theta \ , y = r\sin\theta \ , z = z \ , r = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

6) عرفنا الاحداثيات الكروية (ϕ , θ, p)وكانت العلاقة بين الاحداثيات الكروية والاسطوانية هي:

$$r = p \sin\phi \, , \theta = \theta \, , z = p \cos\phi \, , p = \sqrt{r^2 + z^2} \, , \phi = \tan^{-1}\frac{r}{z}$$

إجابات التدريبات

تدريب (1)

(A) $(\sqrt{3}-\frac{3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2}-1)$

(B) $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})$

تدريب (2)

لاحظ أن : A = 16 , C = -1 , D = -32 , E = -6 , F = -57

وأن : AC = -16 < 0 ، ولهذا فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً أو خطين متقاطعين ومن أجل أو ننفي أنها تمثل خطين متقاطعين يجب أن نكمل المربعات ونكتب المعادلة على الصورة

r2 (x-h)2 + m2 (y-k)2 = L

حيث $m , r , L \neq 0$ أعداد حقيقية. ونترك لك التأكد منه وتستنتج أن المعادلة تمثل قطعاً زائداً .

تدريب (3)

لاحظ أن : A = 0 , B = 1 , C = 0 , E = 0 , F = -1

وبما أن A = C = 0 نأخذ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ومن علاقة تدوير المحاور نجد أن :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

وتصبح صورة المعادلة xy = 1 هي :

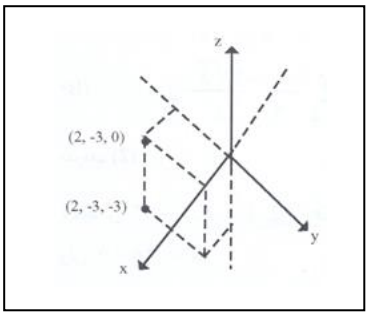
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y').\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = 1$$

أي أن : x2 – y2 = 2

أي : $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$ وهذه معادلة قطع ناقص.

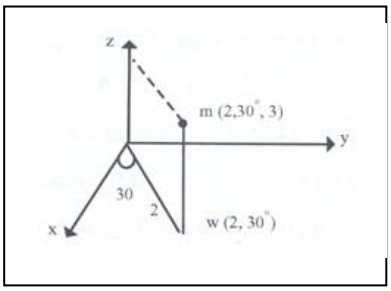
تدريب (4)

انظر الرسم المجاور



تدريب (5)

انظر الرسم المجاور



تدريب (6)

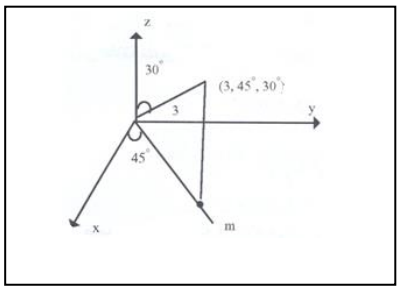
$$x = r\cos\theta = (1)\cos\frac{\pi}{2} = (1)(0) = 0$$

$$y = r\sin\theta = (1)\sin\frac{\pi}{2} = (1)(1) = 1$$

$$z = 2$$

إذن النقطة (2 , 1 , 0)

تدريب (7)



مسرد المصطلحات

* دوران المحاورRotation of Axes

هو تحويل هندسي للمحاور للحصول على نظام جديد x’ y’ من النظام القديم xyعن طريق دوران المحاور حول نقطة الاصل بزاوية قياسها qضد عقارب الساعة وتكون:

$$x' = x \cos q + y \sin q$$
$$y' = -x \sin q + y \cos q$$

*** نظام الاحداثيات الديكارتية (الكارتيزية)Cartesion Coordinates**

نظام احداثي للتمثيل في الفضاء تستخدم فيه الاحداثيات (x , y , z) التي تقاس على المحاور الاحداثية x, y , z المتعامدة مثنى مثنى ويستخدم النظام للتعبير عن النقط وتمثيل المعادلات في الفضاء.

*** نظام الاحداثيات الاسطوانية *Cylindrical Coordinates***

نظام احداثي للتمثيل في الفضاء تستخدم فيه الاحداثيات (r , q , z) للتعبير عن النقط وتمثيل المعادلات في الفضاء.

*** نظام الاحداثيات الكروية Spherical Coordinates**

نظام احداثي للتمثيل في الفضاء تستخدم فيه الاحداثيات (p , q , f) للتعبير عن النقط وتمثيل المعادلات في الفضاء.

المراجع العربيّة والاجنبيّة

المراجع العربيّة

1- عوض عدنان؛ وعزام ، مفيد؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، أحمد، الهندسة الإحداثية. عمان: جامعة المستقبل المفتوحة، ط2، 2003 .

2- نصير ، عبدالمجيد ؛ والناشف ، بسام ، الحسبان : التفاضل والتكامل والهندسة التحليليّة . عمان: دار البشير، 1989 .

3- سمور ، خالد ، الرياضيات والهندسة التحليليّة . عمان : دار الفكر ، ط1 ، 1999 .

المراجع الاجنبيّة

- Silverman R.A , Calculus with Analytic Geometry . New Jersey : Prentice – Hall , 1985.

-Swokowski , E.W . ,**Calculus with Analytic Geometry**. Prindle ,Weberand Schmidt ,3 rded

1984 .

-Salas S.I. ,**Calculus ; one and Several Varaiables**. Wiley , 1980 .