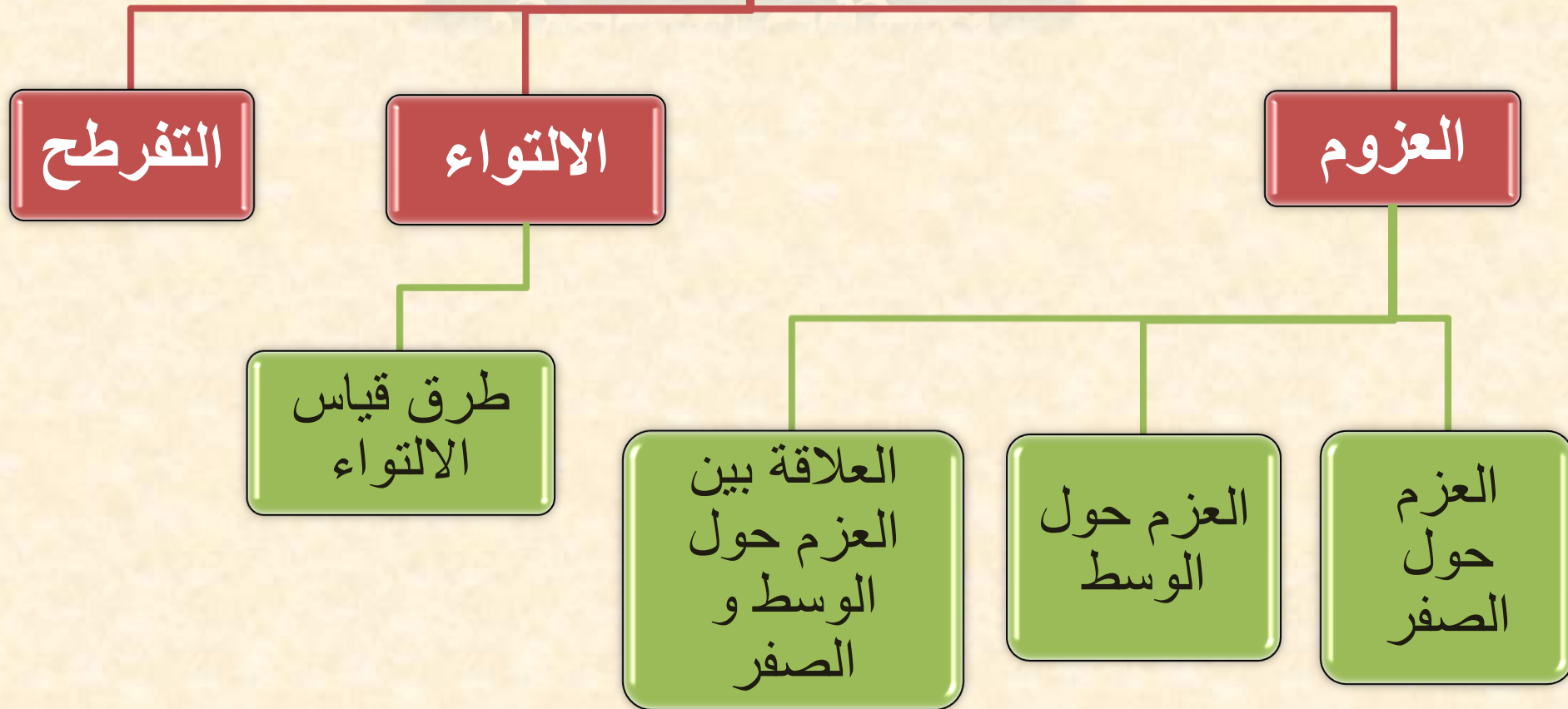


المحاضرة الرابعة
العزوم والالتواء والتفرطح

**MOMENTS - SKEWENESS -
KURTOSIS**

محتويات المحاضرة





بفرض، $X_1, X_2 \dots X_n$ تمثل n قيمة
يمكن أن يأخذها المتغير X فإن العزم
الرأى (حول النقطة C) يعرف كما
يلى:-

$$m_r = \frac{\sum (X_i - C)^r}{n}, r = 1, 2, \dots$$

تقدير من بيانات مبوبة

$$m'_r = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f X^r$$

$$m'_1 = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f_i X_i = \bar{X}$$

$$m'_2 = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f_i X_i^2$$

$$m'_3 = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f_i X_i^3$$

تقدير من بيانات غير مبوبة

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r, \quad r=0,1,2, \dots$$

$$m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad r=1$$

$$m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad r=2$$

$$m'_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3, \quad r=3$$

مثال (١):

أوجد m'_r , $r = 1, 2, 3, 4$ لمجموعة القيم التالية للمتغير X
 الحل : ترتب البيانات في جدول كالتالي: ١٠ ، ٨ ، ٧ ، ٣ ، ٢

X	X^2	X^3	X^4
2	4	8	16
3	9	27	81
7	49	343	2401
8	64	512	4096
10	100	1000	10000
$\Sigma X = 30$	$\Sigma X^2 = 226$	$\Sigma X^3 = 1890$	$\Sigma X^4 = 16594$

$$m'_1 = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{30}{5} = 6 = \bar{X}$$

$$m'_2 = \frac{\Sigma X^2}{n} = \frac{226}{5} = 45.2$$

$$m'_3 = \frac{\Sigma X^3}{n} = \frac{1890}{5} = 378$$

$$m'_4 = \frac{\Sigma X^4}{n} = \frac{16594}{5} = 3318.8$$

مثال (٢):

- إذا كان متغير عدد بذور النبات (X) لعشرة نباتات كما بالجدول التالي:

Class	5-15	15-25	25-35	35-45
f	1	3	4	2

أوجد العزوم m'_r , $r = 1, 2, 3, 4$

الحل

الجدول التالي يوضح الحسابات اللازمة:

Class	X	f	<u>fx</u>	<u>fx²</u>	<u>fx³</u>	<u>fx⁴</u>
5-15	10	1	10	100	1000	10000
15-25	20	3	60	1200	24000	480000
25-35	30	4	120	3600	108000	3240000
35-45	40	2	80	3200	128000	5120000
		$\Sigma f = 10$	$\Sigma fx = 270$	$\Sigma fx^2 = 8100$	$\Sigma fx^3 = 261000$	$\Sigma fx^4 = 8850000$

$$m'_1 = \Sigma fx / n = 270 / 10 = 27$$

$$m'_2 = \Sigma fx^2 / n = 8100 / 10 = 810$$

$$m'_3 = \Sigma fx^3 / n = 261000 / 10 = 26100$$

$$m'_4 = \Sigma fx^4 / n = 8850000 / 10 = 885000$$

ب - العزم حول الوسط

تقدير من بيانات مبوبة

$$m_r = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f (X - \bar{X})^r$$

$$m_1 = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f (X - \bar{X})^1 = 0$$

$$m_2 = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f (X - \bar{X})^2$$

$$m_3 = \frac{1}{\sum f} \sum_{i=1}^n f (X - \bar{X})^3$$

تقدير من بيانات غير مبوبة

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^1 = 0$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2 = S^2$$

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^3$$

مثال (٣) :

لبيانات مثال (١) السابق أوجد العزوم الأربعة حول الوسط الحسابي

.($m_r, r =, 1, 2, 3, 4, \dots$)

$$\bar{X} = 6$$

الحل

X	$(X - \bar{X})$	$(X - \bar{X})^2$	$(X - \bar{X})^3$	$(X - \bar{X})^4$
2	-4	16	-64	256
3	-3	9	-27	81
7	1	1	1	1
8	2	4	8	16
10	4	16	64	256
	$\Sigma(X - \bar{X}) = 0$	$\Sigma(X - \bar{X})^2 = 46$	$\Sigma(X - \bar{X})^3 = 18$	$\Sigma(X - \bar{X})^4 = 610$

$$m_1 = \Sigma (X - \bar{X}) / n = 0/5 = 0$$

$$m_2 = \Sigma (X - \bar{X})^2 / n = 46/5 = 9.2$$

$$m_3 = \Sigma (X - \bar{X})^3 / n = 18/5 = -3.6$$

$$m_4 = \Sigma (X - \bar{X})^4 / n = 610/5 = 122$$

مثال (٤) :

Class	5-15	15-25	25-35	35-45
f	1	3	4	2

لبيانات مثال (٢)

أوجد العزوم mr , $r = 1, 2, 3, 4$

الحل المتوسط الحسابي سبق أن عرفناه $\bar{X}=27$

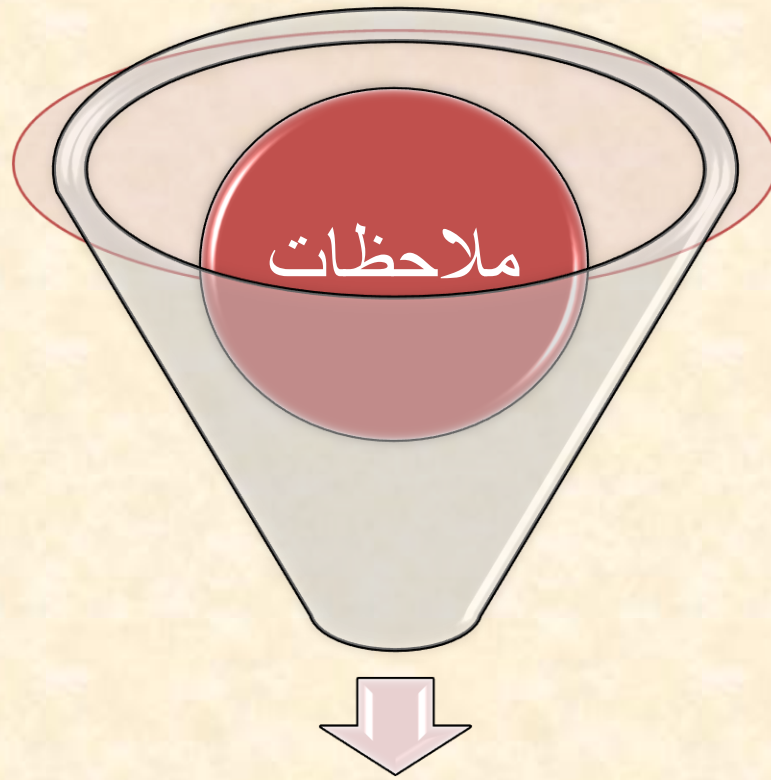
X	f	$X - \bar{X}$	$f(X - \bar{X})$	$(X - \bar{X})^2$	$f(X - \bar{X})^2$	$f(X - \bar{X})^3$	$f(X - \bar{X})^4$
10	1	-17	-17	289	289	-4913	83521
20	3	-7	-21	49	147	-1029	7203
30	4	3	12	9	36	108	324
40	2	13	26	169	338	4394	57122
	$\Sigma f =$ 10		$\Sigma f(X - \bar{X})$ = Zero		$\Sigma f(X - \bar{X})^2$ = 810	$\Sigma f(X - \bar{X})^3 =$ -1440	$\Sigma f(X - \bar{X})^4 = 148170$

$$m_1 = \Sigma (X - \bar{X}) / n = \text{Zero}$$

$$m_2 = \Sigma f (X - \bar{X})^2 / n = 810 / 10 = 81$$

$$m_3 = \Sigma f (X - \bar{X})^3 / n = 1440 / 10 = -144$$

$$m_4 = \Sigma f (X - \bar{X})^4 / n = 148170 / 10 = 14817$$



العزم الاول حول الصفر = الوسط الحسابي

و

ZERO = العزم الاول حول الوسط

و

العزم الثاني حول الوسط = شبيهة التباين

العلاقة بين العزم حول الوسط وحول الصفر

- نظراً للعمليات الحسابية المطولة للحصول على العزوم حول الوسط فيمكن استخدام العلاقات التالية بين العزوم حول الصفر (m'_r) والعزوم حول الوسط (m_r):

$$m_2 = m'_2 - m_1'^2$$

$$m_3 = m'_3 - 3m_1' m'_2 + 2m_1'^3$$

$$m_4 = m'_4 - 4m_1' m'_3 + 6m_1'^2 m'_2 - 3m_1'^4$$

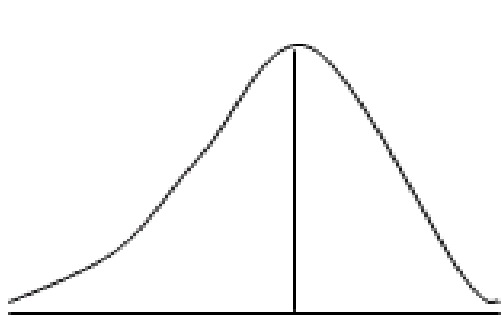
- ويمكن إثبات صحة كل من العلاقات السابقة باستخدام التعاريف الخاصة بالعزوم (حول الصفر) والعزوم (حول الوسط) سابقة الذكر

العلاقة الأولى :

$$\begin{aligned}m_2 &= \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \\&= \frac{1}{n} \sum (X_i^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2) \\&= \frac{1}{n} \left(\sum_i X_i^2 - 2\bar{X} \sum_i X_i + n\bar{X}^2 \right) \\&= \frac{1}{n} \sum_i X_i^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_i X_i^2 - \bar{X}^2 \\&= m'_2 - m_1'^2\end{aligned}$$

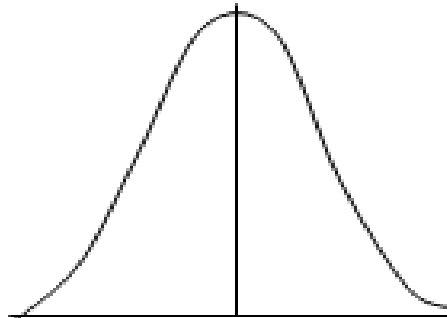
الالتواء

- الالتواء يعرف بأنه درجة تماثل أو البعد عن التماثل للتوزيع .
- فإذا كان المنحنى التكراري لتوزيع ما له ذيل أكبر إلى يمين مركز النهاية العظمى عنه إلى يسارها يسمى التوزيع بأنه ملتوي جهة اليمين أو أن التواءه موجب وإذا كان العكس صحيحاً يقال أنه سالِب الالتواء



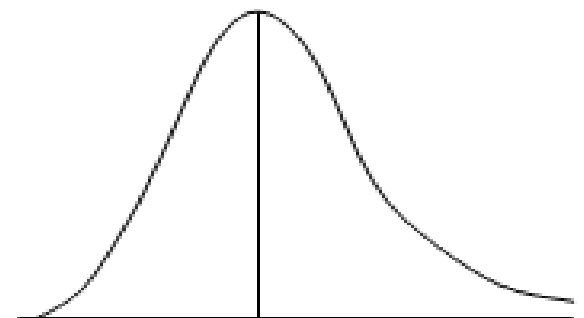
Mean < Median < Mode

جـ



Mean = Median = Mode

ب



Mode < Median < Mean

أ

أ- في التوزيعات موجبة الالتواء (شكل أ) : Mean > Median > Mode

ب- في التوزيعات سالبة الالتواء (شكل جـ) : Mode > Median > Mean

طرق قياس الالتواء

ثانياً: باستخدام مقاييس بيرسون

معامل بيرسون الأول

$$P_1 = \frac{(\text{Mean} - \text{Mode})}{S'}$$

معامل بيرسون الثاني

$$P_2 = \frac{3 (\text{Mean} - \text{Median})}{S'}$$

حيث

$$S' = \sqrt{m_2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})^2}$$

أولاً : باستخدام العزوم

$$a_3 = \frac{m_3}{\left(\sqrt{m_2}\right)^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} = \frac{m_3}{S'^3}$$

a_3 $\begin{cases} > \text{Zero (موجب)} \\ = \text{Zero (معتدل)} \\ < \text{Zero (سالب)} \end{cases}$

مثال ٥ :

عند دراسة توزيع أوزان عجول التسمين بمزرعة لكلية تم الحصول على التقديرات التالية:

$$m_2 = 8.5275, \quad m_3 = -2.6932$$

فأوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم.

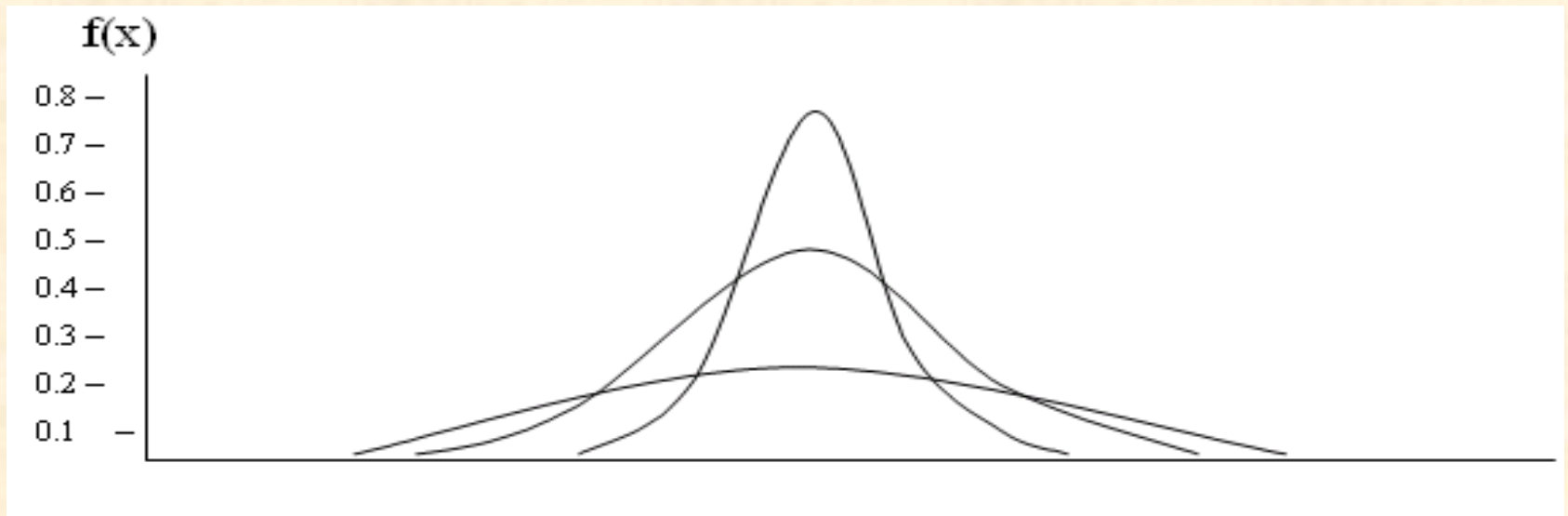
الحل

$$a_3 = \frac{m_3}{\sqrt{(m_2)^3}} = \frac{-2.6932}{(\sqrt{(8.5275)^3})} = -0.14$$

نلاحظ أن التوزيع ذو إلتواء بسيط سالب (إلى اليسار) أى الحيوانات ذات الالوزان الأعلى من المتوسط أكثر تكرارا (المنوال اكبر من الوسيط اكبر من المتوسط).

التفرطح

- التفرطح هو درجة تدبب قمة التوزيع مقارنة بالتوزيع الطبيعي الذي يعتبر وسطا من حيث تفرطحه .
- فالتوزيعات ذات القمة العالية ← مدببة .
- المنحنيات ذات القمة المسطحة نسبيا ← مفرطحه .



مقياس التفرطح

١- العزم الرابع حول الوسط الحسابي

$$a_4 = \frac{m_4}{S^4} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

• فى التوزيع الطبيعى $a_4=3$

$$3 < a_4$$

١- التوزيع مدبباً

$$3 > a_4$$

٢- التوزيع مفرطحاً

وفى بعض الأحيان يعرف التفرطح بالمقياس $(3 - a_4)$ حيث يكون:

- موجباً للتوزيع المفرطح .
- سالباً للتوزيع المدبب .
- صفراً للتوزيع المعتدل .

مثال (١٠):

- إذا كانت العزوم الأربعة الأولى لتوزيع ما هي ١٨.٧٥ و ٠.٧ و ٢.٥ و ٠ اختبر التواء وتفرطح هذا التوزيع.

الحل

$$a_3 = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{0.7}{(\sqrt{2.5})^3} = 0.18$$

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{18.75}{(2.5)^2} = \frac{18.75}{6.25} = 3.0$$

حيث أن $a_4 = 3$ نستنتج أن التوزيع طبيعياً .

مثال (٩) :

- لبيانات مثال (٢) الخاص بمتغير عدد بذور النبات لعشرة نباتات حصلنا على النتائج التالية .

$$m_2 = 81, \quad m_3 = -144, \quad m_4 = 14817$$

أوجد معاملى الالتواء والتفرطح ، وأذكر استنتاجاتك عن التوزيع .

الحل

$$a_3 = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{-144}{(\sqrt{81})} = \frac{-144}{729} = -0.2$$

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{14817}{(81)^2} = \frac{14817}{6561} = 2.25$$

نستنتج أن التوزيع مفرطح وذو التواء بسيط سالب.

مثال (١١) :

- فى توزيع ما حصلنا على النتائج التالية :

$$\bar{X} = 50, \text{ Median} = 53, \text{ CV} = 20\%$$

- أوجد معامل بيرسون للالتواء .

الحل

$$C.V. = \frac{S}{\bar{X}} \cdot 100$$

$$20 = \frac{S}{50} \cdot 100, \quad S = 10$$

$$P_2 = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{S} = \frac{3(50 - 53)}{10} = -0.9$$

مثال (١٢) :

- لعينة عشوائية من ١٠٠ دجاجة حصلنا على النتائج التالية:

$$\sum X = 4000, \quad \sum X^2 = 162500, \quad \text{Median} = 41$$

- أوجد الالتواء.

الحل

الطريقة الأولى:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{4000}{100} = 40$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 - (\sum x)^2 / n}{n - 1}} = \sqrt{\frac{162500 - (4000)^2 / 100}{99}} = 5.0$$

$$P_2 = \frac{3(\bar{X} - \text{Mean})}{S} = \frac{3(40 - 41)}{5} = -0.6$$

الطريقة الثانية : (باستخدام العزوم)

$$m_1 = \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$$

$$m_2 = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{162500}{100} = 1625$$

$$\begin{aligned} S^2 &= m_2 - (m_1)^2 \\ &= 1625 - (40)^2 = 25 \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore P_2 = \frac{3(40 - 41)}{5} = -0.6$$

● شكرا جزيلاً