دوال متعددة المتغيرات

الفضاء R^n

هو المجموعة $R^n = \{(x_1 x_2, \cdots, x_n) : x_1, x_2 \cdots, x_n \in R\}$

R هي مجموعة الاعداد الحقيقية

الدالة في R^n

لتكن DCR^n اذا كان للمتغير u عدد حقيقي يقابل كل $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in D$ فاننا نقول ان u دالة حقيقية معرفة في D أو u دالة حقيقية في المتغيرات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ونكتب

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

f هذا رمز للدالة ويمكن ان يكون اى حرف h,g, واحياناً نكتب $u = u(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ يسمي بنطاق تعريف الدالة u

مثال:

$$u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 \geq x_3^2\}$$

u دالة في المتغيرات x_1, x_2, x_3 ملاحظة يمكن التعبير عن الدالة في المثال السابق

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$$

أمثلة:

أوجد مجال تعريف الدوال التالية

1. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
2. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$
3. $z = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}$

الحل:

1. $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad y = 0$

$\therefore$ مجال تعريف z هو $R^2 - \{(0,0)\}$

2. $1 - (x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$

$\therefore$ مجال تعريف z هو جميع النقاط الواقعة علي الدائرة وفي داخل الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها الوحدة ((الدائرة $x^2 + y^2 = 1$))

3. مجال تعريف z هو جميع النقاط الواقعة داخل الدائرة $x^2 + y^2 < 1$

سنركز في معظم دراستنا علي الدالة في متغيرين أو ثلاثة متغيرات ثم نعمم النتيج لدوال في اى عدد من المتغيرات

النهايات:

نقول ان الدالة $u = f(x, y) = l$ لها نهاية عندما تؤول $(x, y) \to (a, b)$

ونكتب $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$

اذا اقتربت $f(x, y)$ الي L كلما اقتربت النقطة (x, y) من (a, b) باى مسار أو اتجاة عليه يمكن كتابة

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b}(x, y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a}(x, y)\right) = l$$

مثال:

ناقش وجود النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

نفترض اقتراب (x, y) من $(0,0)$ عن طريق الخط $y = mx$ اذا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

$\therefore$ تختلف النهاية باختلاف الميل $\therefore$ هذة النهاية غير موجودة

بطريقة اخرى

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0} + 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y\to 0} = -1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

الاتصال:

نقول ان الدالة $u = f(x, y)$ دالة متصلة عند (a, b) اذا كان

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x, y) = f(a, b)$$

مثال:

ناقش اتصال الدالة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y-1} & (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=\infty\neq f(0,1)=0$

$\therefore f(x,y)$ غير متصلة عند $(0,1)$

بصورة عامة نقول أن الدالة $u=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ متصلة عند $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ اذا كان

$\lim_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(a_1,\cdots,a_n)} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

الاشتقاق

لناخذ $u=f(x,y)$ كدالة في متغيرين x,y اذا تغيرت (x,y) الي $(x+\Delta x,y)$ فانه يحدث تغير جزئى لـ u بالنسبة لـ x يرمز له بـ $\Delta_x u$ يعطي

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

واذا تغيرت $(x,y)\leftarrow(x,y+\Delta y)$ فأن التغير الجزئي لـ u بالنسبة لـ y يعطي بـ Δy

$$\Delta_y u=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

يعرف الاشتقاق الجزئى لـ u بالنسبة لـ x بالنهاية

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f\frac{(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

ولـ u بالنسبة لـ y بـ

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

ويرمز لها علي الترتيب بـ

$$\frac{\partial u}{\partial x},f_x,u_x \;\&\; \frac{\partial u}{\partial y},f_y,u_y$$

وتسمى هذة الطريقة المفصلة لايجاد التفاضل الجزئى بالتفاضل الجزئى من المبادئ الاولية أو بتعريف المشتقة

أمثلة:

أوجد f_y,f_x للدالة الاتية من المبادئ الاولية اذا كان

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2$$

$$f_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)y+y^2-(3x^2-2xy+y^2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^{-2}-2xy-2\Delta xy+y^2-3x^2+2xy-y^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta x+3\Delta x^{-2}-2y\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x-2y)=6x-2y$$

$\therefore f_x=6x-2y$

$$f_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{3x^2-2x(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2-(3x^2-2xy+y^2)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{3x^2-2xy-2x\Delta y+y^2+2y\Delta y+\Delta y^{-2}-3x^2+2xy-y^2}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y}(-2x+2y+\Delta y)=-2x+2y$$

$\therefore f_y=2y-2x$

ملحوظة:

عند ايجاد $\frac{\partial u}{\partial x}$ نفاضل كما لو كان u دالة في x فقط ((بالنظر لـ y كثابت))

مثال:

1- أوجد f_y,f_x للدالة

$$f(x,y)=3x^3-4x^2y+3xy^2+7x-8y$$

$$f_x=9x^2-8xy+3y^2+7$$

$$f_y=-4x^2+6xy-8$$

2- اذا كان $f(x,y,z)=x^2y+yz^2+z^3$ اثبت ان

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=3f(x,y,z)$$

$$f_x(x,y,z)=2xy$$

$$f_y(x,y,z)=x^2+z^2$$

$$f_z(x,y,z)=2yz+3z^2$$

$$\therefore xf_x+yf_y+zf_z=x(2xy)+y(x^2+z^2)+z(2yz+3z^2)$$

$$=2x^2y+x^2y+yz^2+2yz^2+3z^3$$

$$=3(x^2y+yz^2+z^3)$$

$$=3f(x,y,z)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3- أوجد f_x ، f_y اذا كان

$$f(x,y)=\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$f_x=\frac{(x^2+y^2)6xy-3x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{6x^3y+6xy^3-6x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{6xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{(x^2+y^2)3x^2-3x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4+3x^2y^2-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4-3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

4- أوجد $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ اذا كان

(i) $u(x,y)=x^2e^{xy}$

(ii) $u(x,y)=y\sin(x^2+y^2)$

(iii) $u(x,y)=x^4y^3+e^{5x+4y}$

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^2e^{xy}+e^{xy}(2x)=xe^{xy}(2+xy)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3e^{xy}$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\cos(x^2+y^2)2x=2xy\cos(x^2+y^2)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y^2\cos(x^2+y^2)+\sin(x^2+y^2)$

$=\sin(x^2+y^2)+2y^2\cos(x^2+y^2)$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3y^3+5e^{5x+4y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2x^4+4e^{5x+4y}$

5- جد $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ اذا كان

(i) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ (ii) $u(x,y)=\tan^{-1}y/x$

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2}$ $\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$ $\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

6- اذا كان

$$Z=e^{ax+by}f(ax-by)$$

أثبت أن

$$b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=2abZ$$

a,b ثابت f اى دالة في متغيرين

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ae^{ax+by}f(ax-by)+e^{ax+by}f'(ax-by)(a)$$

$$=ae^{ax+by}[f(ax-by)+f'(ax-by)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=be^{ax+by}f(ax-by)+e^{ax+by}f'(ax-by)(-b)$$

$$=be^{ax+by}[f(ax-by)-f'(ax-by)]$$

$$b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=2abe^{ax+by}f(ax-by)=2abz$$

7- اذا كان $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

جد $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ ، $\frac{\partial r}{\partial x}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}y/x$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\frac{y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-r\sin\theta}{r^2}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{r}$$

تمرين:

في المثال السابق جد $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ ، $\frac{\partial r}{\partial y}$

8- اذا كان

$$u=e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$$

$$v=e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اثبت ان

$$(i)\ \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\qquad,\qquad (ii)\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\left(\cos\theta\ e^{r\cos\theta}\right)\cos(r\sin\theta)+e^{r\cos\theta}\left(-\sin(r\sin\theta)\sin\theta\right)$$

$$=e^{r\cos\theta}\left[\cos\theta\cos(r\sin\theta)-\sin\theta\sin(r\sin\theta)\right]$$

$$=e^{r\cos\theta}\cos(\theta+r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\left(-r\sin\theta\ e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)+e^{r\cos\theta}\left(r\cos\theta\cos(r\sin\theta)\right)\right)$$

$$=r\,e^{r\cos\theta}\left[\cos\theta\cos(r\sin\theta)-\sin\theta\sin(r\sin\theta)\right]$$

$$=r\,e^{r\cos\theta}\cos(\theta+r\sin\theta)=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

الاشتقاق بمراتب عليا

يمكن تعريف الاشتقاق بمراتب عليا بصورة تكرارية مثلاً اذا كانت $u=f(x,y)$ فانه يمكن تعريف المشتقات الجزئية الثانية كما يلي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

لمعظم الدوال المتعارف عليها

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

أمثلة :

1- اذا كان $z=f(x+ct)+g(x-ct)$

أثبت أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x+ct)+g'(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x+ct)+g''(x-ct)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=f'(x+ct)(c)+g'(x-ct)(-c)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=f''(x+ct)(c^2)+g''(x-ct)(c)^2=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

2- اذا كان $u=x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\frac{x}{y}$

أثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)-\left[2y\tan^{-1}\frac{x}{y}+\frac{y^2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=\frac{x^3}{x^2+y^2}-2y\tan^{-1}\frac{x}{y}+\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\right]-2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x-2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-2y\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}=1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

تمرين:

اذا كان $v=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

أثبت أن

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$ (معادلة لابلاس)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدوال المتجانسة :

نقول ان u دالة متجانسة في y,x ذات رتبة n اذا وجدت دالة f بحيث

$$u = x^n f\left(y/x\right)$$

مثال:

$$u = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n$$
$$= x^n \left[a_0 + a_1 \tfrac{y}{x} + a_2 \left(\tfrac{y}{x}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\tfrac{y}{x}\right)^n\right]$$
$$= x^n f\left(y/x\right)$$
$$= x^n f(t)$$

حيث $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$

u دالة متجانسة ذات رتبة n

مثال:

$$u = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{1 + \left(y/x\right)^2}{1/x - y/x^2} = x\frac{1 + \left(y/x\right)^2}{1 - y/x} = xf\left(y/x\right)$$

u دالة متجانسة ذات رتبة 1

مثال :

$$u = \sin y/x$$

دالة متجانسة ذات رتبة 0

يمكن تعميم التعريف لاي عدد من المتغيرات فنقول ان u دالة متجانسة في المتغيرات $x_n, \cdots, x_2, x_1$ ذات رتبة P اذا وجدت f بحيث

$$u = x_1^p f\left(x_2/x_1 + x_3/x_1, \cdots x_n/x_1\right)$$

نتيجة :

اذا كانت u دالة متجانسة ذات رتبه n في المتغيرات y , x فانه لكل λ يمكن كتابة u علي الصورة

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y)$$

الاثبات

$$u(x, y) = x^n f\left(y/x\right)$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^n f\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$
$$= \lambda^n \left(x^n f\left(y/x\right)\right) = \lambda^n u(x, y)$$

بصورة عامة اذا كانت u دالة متجانسة ذات رتبه P في المتغيرات $x_n, \cdots, x_1$ فان $\forall \lambda$

$$u(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^p u(x_1, \cdots, x_n)$$
$$u(x, y) = x^n f\left(y/x\right)$$
$$u(x_1, \cdots, x_n) = x_1^p f\left(\tfrac{x_2}{x_1}, \tfrac{x_3}{x_1}, \cdots, \tfrac{x_n}{x_1}\right)$$

مبرهنة أويلـــر :

لتكن u دالة متجانسة ذات رتبه n في المتغيرات y,x عليه فان

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

الاثبات

$$u = x^n f\left(y/x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1} f\left(y/x\right) + x^n f'\left(y/x\right)\left(-y/x^2\right)$$
$$= nx^{n-1} f\left(y/x\right) - yx^{n-2} f'\left(y/x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^n f'\left(y/x\right)\frac{1}{x} = x^{n-1} f'\left(y/x\right)$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(nx^{n-1} f\left(y/x\right) - yx^{n-2} f'\left(y/x\right)\right) + y\left(x^{n-1} f'\left(y/x\right)\right)$$
$$= nx^n f\left(y/x\right) - yx^{n-1} f\left(y/x\right) + yx^{n-1} f\left(y/x\right)$$
$$= n\left(x^n f\left(y/x\right)\right) = nu$$

نتيجة مباشرة :

اذا كانت u دالة متجانسة ذات رتبه n في المتغيرين y , x فان

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

الاثبات (تمرين)

مثال:

تحقق من مبرهنة أويلر للدالة

$$f(x, y) = 4x^4 - 3x^2 y^2 + y^3 x$$

الحل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$f(x,y)=x^4\left[4-3\left(\tfrac{y}{x}\right)^2+\left(\tfrac{y}{x}\right)^3\right]$$

$\therefore f$ دالة متجانسة ذات رتبه 4

$$\frac{\partial f}{\partial x}=16x^3-6xy^2+y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-6x^2y+3y^2x$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=x\left[16x^3-6xy^2+y^3\right]+y\left[-6x^2y+3y^2x\right]$$

$$16x^4-12x^2y^2+4y^3x=4\left(4x^4-3x^2y^2+y^3x\right)=4f(x,y)$$

تعميم :

يمكن تعميم مبرهنه أويلر لدالة في اكثر من متغيرين فاذا كانت u دالة متجانسة ذات رتبه p في $x_1,\cdots,x_n$ فان

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=pu$$

مثال:

اذا كانت $u=\sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$

اثبت ان $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$$u=x^0\left[\sin^{-1}\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$\therefore u$ دالة متجانسة ذات رتبه 0 عليه بتطبيق مبرهنه أويلر نحصل على

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0u=0$$

مثال:

اذا كانت $u=\ln\frac{x^2+y^2}{x+y}$

فاثبت ان $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$

الحل :

نفرض $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

$$=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}}=x\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Z دالة متجانسة ذات رتبه I

بتطبيق أويلر

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z\quad\text{_____(1)}$$

لكن $z=e^u$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^u\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^u\frac{\partial u}{\partial y}$$

بالتعويض z في (1)

$$x\left(e^u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+y\left(e^u\frac{\partial u}{\partial y}\right)=e^u$$

بالقسمة علي e^u نحصل على

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$$

مثال:

اذا كان $u=\sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

أثبت أن $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan u$

الحل :

$$z=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{2}}\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\therefore z$ متجانسة ذات رتبه $\frac{1}{2}$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}z$$

لكن $z=\sin u$ اذن

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos u\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$x\left(\cos u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+y\left(\cos u\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\sin u$$

$\therefore$ بالقسمة على $\cos u\ (\cos u\neq 0)$ فان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\tfrac{1}{2}\tan u$$

تمرين:

1. اذا كان $\sin u=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$ أثبت أن

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3\tan u$$

2. اذا كان $z=x\phi\left(y/x\right)+\psi\left(y/x\right)$ أثبت أن

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y^2}=0$$

3. اذا كان $u=\tan^{-1}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ أثبت أن

(i) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u$

(ii) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\sin 4u-\sin 2u$

4- أذا كانت

$$u=\cos^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

أثبت أن

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\cot u=0$$

5- أذا كانت

$$u=\tan^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

أثبت أن

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4}\sin 2u$$

6- اذا كانت

$$u=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

أثبت أن

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

7- اذا كانت

$$z=\sec^{-1}\frac{x^3+y^3}{x+y}$$

أثبت أن

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2\cot z$$

الدوال التوافقيـــة :

لتكن u دالة في متغيرين x , y نقول u دالة توافقية اذا كانت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

مثال :

$$u=\tan^{-1}y/x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(y/x\right)^2}\left(-y/x^2\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(y/x\right)^2}\,y/x=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\times 0-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$\therefore$ u دالة توافقية

تمرين :

تحقق من أن الدوال الاتية توافقية

$(a)\ u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

$(b)\ u(x,y)=\ln\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}$

$(c)\ u(x,y)=\cos x\sinh y+\sin x\cosh y$

$(d)\ u(x,y)=e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x$

بصفة عامة :

نقول ان u دالة توافقية في $x_n,\cdots,x_1$ اذا كان $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$

التفاضل التام (الكلي):

لتكن $u(x,y)$ دالة في متغيرين x , y نقول ان du تفاضل تام اذا كان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

يعمم لأي عدد من المتغيرات $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

مثال :

1) اذا كان $u = f(x,y) = x^2y - 3y$

أوجد du

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 3$$

$$du = 2xydx + (x^2 - 3)dy$$

2) اذا كان $u = x^2e^{y/x}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2\left(\frac{-y}{x^2}\right)\ e^{y/x} + e^{y/x}.2x = \left(2xe^{y/x} - ye^{y/x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}x^2e^{y/x} = xe^{y/x}$$

$$du = \left(2xe^{y/x} - ye^{y/x}\right)dx + xe^{y/x}dy$$

ملاحظـات :

1. اذا كانت $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ مقداراً ثابتاً فان $df = 0$
2. اذا كان $p(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$pdx + Qdy$

هو التفاضل للدالة $f(x,y)$ اذا وفقط اذا كان

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ويسمي $pdx + Qdy$ التفاضل التام

3. ويكون

$p(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

أو

$pdx + Qdy + Rdz$

هو التفاضل للدالة $f(x,y,z)$ اذا وفقط اذا كان

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

ويسمي $pdx + Qdy + Rdz$ التفاضل التام

مثال :

بين أن $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$

يمكن كتابتها علي صورة تفاضل تام للدالة $\phi(x,y)$ واوجد الدالة

الحل :-

نفرض أن

$$(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 + 4xy + 6y^2)dy = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2y - 2y^2 \text{ ——— (i)}$$

اذن

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3 - 4xy + 6y^2 \text{ ___ (ii)}$$

من (i) بالتكامل بالنسبة لـx وجعل y ثابت

$$\phi = x^3y - 2xy^2 + f(y)$$

حيث $f(y)$ هي مقدار ثابت التكامل وبالتعويض في (ii) ينتج ان

$$x^3 - 4xy + f'(y) = x^3 - 4xy + 6y^2$$

ومنها

$$f'(y) = 6y^2 \quad \text{أي ان}$$

$$f(y) = 2y^3 + c$$

∴ الدالة المطلوبه هي

$$\phi = x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + c$$

حيث c ثابت اختياري

تمرين:

أوجد التفاضل التام (الكلي) للدوال الاتية

(a) $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$

(b) $w = y\tan x^2 - 2xy$

(c) $w = x\cos y - y\sin x$

(d) $w = xe^{2y} + e^{-y}$

(e) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

(f) $w = \frac{xyz}{x + y + z}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تفاضل الدوال المؤلفة (المركبة):

لتكن $z=f(x,y)$ حيث $y=h(r,s)$ و $x=g(r,s)$ بحيث ان z هي دالة r , s فان

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

يعمم ذلك اذا كانت

$x_n=f_n(r_1,\cdots,r_p)$ حيث $f(x_1,\cdots x_n)$

و $x_1=f(r_1,\cdots,r_p)$ فان

$$\frac{\partial z}{\partial r_k}=\frac{\partial z}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial r_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial r_k}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial r_k}$$

K=1,2,...,p

واذا كانت $x_1,x_2\cdots x_n$ تعتمد على متغير واحد s فان

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds}$$

الدوال

مثال :

اذا كانت $y=\rho\sin\phi$, $x=\rho\cos\phi$

$$T=x^3-xy+y^3$$

اوجد (i) $\frac{\partial T}{\partial\rho}$ (ii) $\frac{\partial T}{\partial\phi}$

$$(i)\quad \frac{\partial T}{\partial\rho}=\frac{\partial T}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial T}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\rho}=(3x^2-y)(\cos\phi)+(3y^2-x)(\sin\phi)$$

$$(ii)\quad \frac{\partial T}{\partial\phi}=\frac{\partial T}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\phi}+\frac{\partial T}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\phi}=(3x^2-y)(-\rho\sin\phi)+(3y^2-x)(\rho\cos\phi)$$

تمرين :

1. اذا كانت $u=z\sin{}^{y}\!/_{x}$ حيث $z=2r^2-3s^2$
و $x=3r^2+2s$, $y=4r-2s^3$

أوجد (i) $\frac{\partial u}{\partial r}$ (ii) $\frac{\partial u}{\partial s}$

مثال :

اذا كان $u=\sin\frac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=t^2$ أوجد $\frac{du}{dt}$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$=\left(\tfrac{1}{y}\cos\tfrac{x}{y}\right)e^t+\left(-\tfrac{x}{y^2}\cos\tfrac{x}{y}\right)2t$$

$$=\frac{e^t}{t^2}\cos\frac{e^t}{t^2}-2\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$$

$$=\frac{e^t}{t^2}\cos\frac{e^t}{t^2}\left[1-\frac{2}{t}\right]$$

تمرين :

1. اذا كان $u=f(x,y)$ وكان $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$
عبر عن $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ بدلالة θ,r

2. اذا كان z دالة x , y وكان $x=e^u+e^{-v}$, $y=e^{-u}+e^v$
أثبت ان $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$

3. اذا كانت f دالة في x , y و. $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$ أثبت ان
$$\frac{\partial f}{\partial x}=u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}$$

4. $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$
أثبت ان

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2$$

5. اذا كان $u=f(r,s,t)$ & $s=\frac{y}{z}$, $r=\frac{x}{y}$, $t=\frac{z}{x}$
أثبت ان

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

6- اوجد $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ اذا كان

(a) $w = u\sin v\,;\, u = x^2 + y^2;\, v = xy$

(b) $w = uv + v^2\,;\, u = x\sin y + y^2;\, v = y\sin x$

(c) $w = u^2 + 2uv\,;\, u = x\ln y;\, v = 2x + y$

الاشتقاق الضمني:

لنفرض ان y دالة ضمنية في x معرفة بالعلاقة $f(x,y) = c$

ضع $z = f(x,y)$

$\therefore dz = 0$ لكل (x,y) ولكن

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

بقسمة الطرفين علي dx

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

مثال :

جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $\sin(x^2 + y^2) = 1$

$$f = \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{\cos(x^2+y^2)(2x)}{\cos(x^2+y^2)(2y)} = -\frac{x}{y}$$

مثال :

اذا كان $u = (\ln xy)x$ حيث $x^3 + y^3 + 3xy = 1$

جد $\frac{du}{dx}$

ضع $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy$$

بالقسمة علي dx

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln xy + \frac{x}{xy}.y = 1 + \ln xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{xy}.x = \frac{x}{y}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \ln xy + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

ولكن $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

$$= -\frac{3x^2+3y}{3y^2+3x} = -\frac{x^2+y}{y^2+x}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \ln xy - \frac{x}{y}\frac{x^2+y}{y^2+x}$$

مثال :

اذا كان $f(x,y) = 0\,,\, \phi(y,z) = 0$

أثبت ان

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$d\phi = 0 \quad , \quad df = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 _____ (i)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = 0 _____ (ii)$$

من (ii)

$$dy = -\frac{\partial \phi}{\partial z} / \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

بالتعويض في (i)

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi/\partial z}{\partial \phi/\partial y}dz\right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial \phi}{\partial z}dz = 0$$

بقسمة الطرفين علي dx نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial \phi}{\partial z}.\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اليعقوبيـــة JACOBEAN

تعريف :

لتكن u &v دالتين في المتغيرين x, y تعرف يعقوبية u& v بالنسبة لـ x , y بالمحددة

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

مثال:

أحسب $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ اذا كان $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

تعميم

تعرف يعقوبية $y_1,\cdots,y_n$ بالنسبة لـ $x_n,\cdots,x_1$ ويرمز لها

$$\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=\left|\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right|$$

مثال:

أوجد $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ اذا كان

$$x=r\sin\theta\cos\phi\quad ,y=r\sin\theta\sin\phi\quad ,z=r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\cos\theta\begin{vmatrix}r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}+r\sin\theta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}$$

$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}+r^2\sin^2\theta\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin\theta\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]=r^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$$

نتيجة :-اذا كان u , v دالتين في x , y فان

$$\frac{\partial(u.v)}{\partial(x,y)}.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

البرهان

$$\frac{\partial u}{\partial u}=1=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial u}=0=\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}=0=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial v}=1=\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

نتيجة :

اذا كان u ,v دالتين في r , s وكانت r , s دالتين في x , y فان

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}.\frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}$$

الاثبات :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}.\frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s}\\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s}\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعميم :-

يمكن تعميم النتائج السابقة الي

1. $\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}\times\frac{\partial(x_1\cdots x_n)}{\partial(y_1\cdots y_n)}=1$
2. $\frac{\partial(u_1\cdots u_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}=\frac{\partial(u_1\cdots u_n)}{\partial(r_1\cdots r_n)}\times\frac{\partial(r_1\cdots r_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}$

تمرين :

1. اذا كان $y_1=\frac{x_2x_3}{x_1}$ ، $y_2=\frac{x_3x_1}{x_2}$ ، $y_3=\frac{x_1x_2}{x_3}$

أثبت ان

$$\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=4$$

2. اذا كان $uvw=z$ ، $uv=x+z$ ، $u=x+y+z$

أثبت ان

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=u^2v$$

مثال :

لتكن u , v دالتين ضمنيتين في x , y بالعلاقتين

$$f(x,y,u,v)=0 \qquad G(x,y,u,v)$$

وضح كيف يمكن ايجاد

$$\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dv}{dx}\ \&\ \frac{du}{dy}\cdot\frac{du}{dx}$$

التغير التام بالنسبة لـ x =0 اذن

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}\quad\text{_____(i)}$$

الان y لم تتغير

كذلك التغير التام لـG بالنسبة لـx يساوي صفر

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\quad\text{_____(ii)}$$

من (i) و (ii) نحصل علي

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{du}{dx}\\ \frac{dv}{dx}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}$$

باستخدام كرايمر

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\partial(f,G)/\partial(x,v)}{\partial(f,G)/\partial(u,v)}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\partial(f,G)/\partial(u,x)}{\partial(f,G)/\partial(u,v)}$$

بالمثل يمكن الحصول علي

$$\frac{du}{dy}=-\frac{\partial(f,G)/\partial(y,v)}{\partial(f,G)/\partial(u,v)}\ ,\ \frac{dv}{dy}=-\frac{\partial(f,G)/\partial(u,y)}{\partial(f,G)/\partial(u,v)}$$

مثال:

أوجد $\frac{dv}{dy},\frac{du}{dx}$ اذا كان

$$u^2-3vu+x-4y^2=0$$
$$\ln v-2u\cos x+yv=0$$

$$f(x,y,u,v)=u^2-3vu+x-4y^2$$
$$G(x,y,u,v)=\ln v-2u\cos x+yv$$
$$\frac{du}{dx}=-\frac{\partial(f,G)/\partial(x,v)}{\partial(f,G)/\partial(u,v)}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{\partial f}{\partial u}=2u-3v \qquad \frac{\partial f}{\partial v}=-3u$$
$$\frac{\partial G}{\partial u}=-2\cos x \qquad \frac{\partial G}{\partial v}=\frac{1}{v}+y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial G}{\partial x}=2u\sin x$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -3u\\ 2u\sin x & \frac{1}{v}+y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u-3v & -3u\\ -2\cos x & \frac{1}{v}+y\end{vmatrix}}=\frac{\left[\left(\frac{1}{v}+y+6u^2\sin x\right)\right]}{2\frac{u}{v}+2uy-3-3yv-6u\cos x}.$$

مبرهنة تيلر لدالة في متغيرين

لنفرض ان $f(x,y)$ دالة قابلة للاشتقاق جزئياً لاي رتبة بالنسبة لـ x , y عند وفي جوار النقطة (a , b)
من مبرهنة تيلر لدالة في متغير واحد فان

$$f(a+h,b+k)=f(a,b+k)+hf_x(a,b+k)+\frac{h^2}{2!}f_{xx}(a,b+k)+\cdots(1)$$

ايضاً

$$f(a,b+k)=f(a,b)+k\,f_y(a,b)+\frac{k^2}{2}f_{yy}(a,b)+\cdots\cdots(2)$$
$$f_x(a,b+k)=f_x(a,b)+k\,f_{xy}(a,b)+\frac{k^2}{2}f_{xyy}(a,b)+\cdots\cdots(3)$$
$$f_{xx}(a,b+k)=f_{xx}(a,b)+kf_{xxy}(a,b)+\cdots\cdots\cdots(4)$$

عوض (2) و(3) & (4) في (1)

$$f(a+h,b+k)=\left[f(a,b)+k\,f_y(a,b)+\frac{k^2}{2}f_{yy}(a,b)+\cdots\right]$$
$$+h\left[f_x(a,b)+k\,f_{xy}(a,b)+\frac{k^2}{2}f_{xyy}(a,b)+\cdots\cdots\right]+\frac{h^2}{2}\left[f_{xx}(a,b)+kf_{xxy}(a,b)+\cdots\right]$$
$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(hf_x(a,b)+k\,f_y(a,b)k\,f_y(a,b)\right)+\frac{h^2}{2}f_{xx}(a,b)+hkf_{xy}(a,b)$$
$$+\frac{k^2}{2}f_{yy}(a,b)+\cdots$$
$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\,f_x(a,b)+kf_y(a,b)\right)+\left(\frac{h^2}{2}f_{xx}(a,b)+hkf_{xy}(a,b)\right)$$
$$+\frac{k^2}{2}f_{yy}(a,b)+\cdots\cdots$$

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\,f_x(a,b)+kf_y(a,b)\right)+\tfrac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(a,b)+hkf_{xy}(a,b)\right)$$

بوضع $+k^2f_{yy}(a,b)+\cdots\cdots$

$$D_y=\frac{\partial}{\partial y}\quad,\quad D_x=\frac{\partial}{\partial x}$$

بالتالي

$$D_xD_y=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\quad,\quad D^2x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

يمكن كتابة

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(hD_x+kD_y\right)f(a,b)+\tfrac{1}{2}\left(hD_x+kD_y\right)^2f(a,b)+\cdots$$

يمكن اثبات ان

$$f(a+h,b+k)=\left[\sum_{J=0}^{\infty}\left[\frac{\left(hD_x+kD_y\right)^J}{J!}\right]\right]f(a,b)$$

مثال :
جد مفكوك تيلر للدالة

$$f(x,y)=e^x\ln(1+y)$$

الي الرتبة الثانية حول (0 , 0)
الحل :

$$f(0,0)=e^0\ln 1=0 \qquad f_x(x,y)=e^x\ln(1+y)$$
$$f_x(0,0)=0$$
$$f_y(x,y)=\frac{e^x}{1+y} \qquad f_y(0,0)=1$$
$$f_{xx}(x,y)=e^x\ln(1+y)\rightarrow f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{xy}(x,y)=\frac{e^x}{1+y}\rightarrow f_{xy}(0,0)=1$$
$$f_{yy}(x,y)=\frac{-e^x}{(1+y)^2}\rightarrow f_{yy}(0,0)=-1$$
$$\therefore f(0+h,0+k)=f(0,0)+\left(hf_x(0,0)+k\,f_y(0,0)\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)+\cdots\right)$$
$$f(h,k)=0+\left(h(0)+k(1)\right)+\tfrac{1}{2}\left(h^2(0)+2hk(1)+k^2(-1)+\cdots\right)$$
$$f(h,k)=k+hk-\frac{k^2}{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بكتابة $x=h$ & $y=k$

$$f(x,y)=e^x\ln(1+y)=y+xy-\frac{y^2}{2}$$

ينظر له كتقريب للدالة $e^x\ln(1+y)$ بواسطة قوي x , y الي الدرجة الثانية

تعميم :

لتكن $u=f(x_1\cdots x_n)$ عرف D بـ

$$D=h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}+\cdots+h_nD_{x_n}$$

عليه فان

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2,\cdots,a_n+h_n)=\left(\sum_{j=0}\frac{D^j}{j!}\right)f(a_1,\cdots,a_n)$$

النهايات القصوي (العظمى ، الصغرى)

تعريف :

نقول ان للدالة $f(x,y)$ لها نهاية عظمى عند (a,b) اذا كان

$$f(a+h,b+k)\prec f(a,b)$$

لكل قيم h & k الصغيره (موجبة او سالبة)

وان لها نهاية صغرى عند (a , b) اذا كان

$$f(a+h,b+k)\succ f(a,b)$$

لكل قيم h & k الصغيره (موجبة او سالبة)

عرف Δ بـ

$$\Delta=f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

اذا لم تتغير اشارة Δ لقيم h & k الصغيرة (موجبة أو سالبة) فان $f(a,b)$ قيمة قصوى (عظمى أو صغرى)

اذا كان $\Delta\succ 0$ فان $f(a,b)$ صغرى

اذا كان $\Delta\prec 0$ فان $f(a,b)$ عظمى

الان لنفرض ان للدالة $f(x,y)$ قيمة قصوى عند (a,b) باستخدام مفكوك تيلر

$$\Delta=f(a+h,b+k)-f(a,b)=$$

$$hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)+\cdots\right)$$

لقيم k & h الصغيرة جداً يمكن تجاهل الحدود من المشتقات الثانية الي اعلي ونحصل علي

$$sign\Delta=sign\left(hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\right)$$

بوضع h=0 فان اشارة Δ تعتمد علي اشارة k مما يحتم ان تكون $f_y(a,b)=0$

بالمثل بوضع k=0 نحصل علي $f_x(a,b)=0$

∴ بالضرورة لتكون $f(a,b)$ قيمة قصوى يجب ان تتحقق الشرطان

(i) $f_x(a,b)=0$ (ii) $f_y(a,b)=0$

باعتماد هذا الشرط الضروري فان

$$\Delta=\tfrac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)\right)+\cdots$$

الان ضع

$$r=f_{xx}(a,b)\qquad s=f_{xy}(a,b)$$
$$t=f_{yy}(a,b)$$

بتجاهل الحدود العليا فان

$$sign\Delta=sign(h^2r+2hks+k^2t)$$

الان

$$h^2r+2hks+k^2t=\tfrac{1}{r}(h^2r^2+2hkrs+k^2tr)$$
$$=\tfrac{1}{r}\left[(hr+ks)^2+k^2tr-k^2s^2\right]$$
$$=\tfrac{1}{r}\left[(hr+ks)^2+k^2(tr-s^2)\right]$$

اذا كان $tr-s^2\succ 0$

وكانت $r\succ 0$ فان $\Delta\succ 0$

واذا كان $tr-s^2\succ 0$ وكانت $r\prec 0$ فان $\Delta\prec 0$

وصلنا الي الآتي :

مبرهنة :

لتكن $f(x,y)$ دالة قابلة للاشتقاق جزئياً عند (a , b) الي الرتبة الثانية واذا كانت

1. $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$
2. $f_{yy}(a,b)f_{xx}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2\succ 0$

فان $f(a,b)$ قيمة قصوى للدالة $f(x,y)$

إضافة لذلك

واذا كانت $f_{xx}(a,b)\succ 0$ فان $f(a,b)$ قيمة صغرى

واذا كانت $f_{xx}(a,b)\prec 0$ فان $f(a,b)$ قيمة عظمى

تمرين :

ناقش القيم القصوى للدالة $f(x,y)=x^4-y^4-2x^2+4xy-2y^2$

$$f_x=4x^3-4x+4y=0\quad_____(i)$$
$$f_y=4y^3+4x-4y=0\quad_____(ii)$$

بالجمع

$$4(x^3+y^3)=0$$

الان $x=-y$

بالتعويض في (i)

$$4x^3-4x-4x=0\Rightarrow x^3-2x=0$$
$$x(x^2-2)=0\qquad x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$$

بالمقابل

$$y=0,-\sqrt{2},\sqrt{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(0,0)$

قصوى

$f_{xx}=12x^2-4 \qquad f_{yy}=12y^2-4$

$f_{xy}=4$

$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$f_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=24-4=20$

$f_{yy}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=24-4=20$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=400-16\succ 0$

$\therefore (\sqrt{2},-\sqrt{2})$ نهاية صغرى بالمثل فان $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ نهاية صغرى

$f_{xx}(0,0)=-4\prec 0$

$f_{yy}(0,0)=-4\prec 0$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=16-16=0$

هذا ليس كافياً للبت في $(0,0)$

نناقش قيم الدالة بالقرب من $(0,0)$ ضع $y=0$

$f=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)$

اذا كان f سالبة بالقرب من $(0,0)$ في اتجاه $y=0$ بينما $f(0,0)=0$ بالاقتراب من الصفر $(0,0)$ عن طريق الخط $y=x$

$f=x^4+x^4-2x^2-2x^2+4x^2=2x^4$

$\therefore$ بالقرب من $(0,0)$ في هذا الاتجاه فان f دوماً موجبة

$\therefore$ $(0,0)$ ليست نقطة قصوى

(تسمى $(0,0)$ بالنقطة السرجية)

مثال :

ناقش القيم القصوى للدالة $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y=20$

$f_x=3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$f_y=3y^2-12=0 \Rightarrow y=\pm 2$

النقاط هي $(1,2),(-1,2),(1,-2),(-1,-2)$

$f_{xx}=6x \quad , \quad f_{yy}=6y \quad , \quad f_{xy}=0$

$f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=36xy$

عند $(1,2)$ $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2\succ 0$ نهاية قصوى

$\because f_{xx}\succ 0$ نهاية صغرى

$(-1,2)$ $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2\prec 0$ ليست توجد نهاية قصوى

$(1,-2)$ $f_{xx}f_{yy}\prec 0$ ليست توجد نهاية قصوى

$(-1,-2)$ $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2\succ 0$ نهاية قصوى

نهاية عظمى $f_{xx}\prec 0$

النهايات القصوى المشروطة

طريقة مضروبات لاجرانج :-

لايجاد القيم القصوي للدالة $z=f(x,y)$

تحت الشرط $\psi(x,y)=0$

نتبع الخطوات التالية

1. نكون دالة لاجرانج

$G(x,y)=f(x,y)+\lambda\psi(x,y)$

حيث λ مضروب لاجرانج

2. الشرط الضروري لكي يكون للدالة $z=f(x,y)$ قيمة قصوى

$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial y}=0$

أي ان

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \psi}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \psi}{\partial y}=0\\ \psi(x,y)=0\end{aligned}\right\} \quad (i)$$

(1) نظام معادلات في المجاهيل λ,x,y

3. نوجد d^2G

$$\Rightarrow d^2G=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 G$$

$$\Rightarrow d^2G=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}d^2x+2\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}d^2y$$

تحت الشرط

$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy=0$$

و

$$d^2x+d^2y\neq 0$$

اذا كان $d^2G\prec 0$.

توجد نهاية عظمى مشروطة $f(x,y)$

اذا كان $d^2G\prec 0$

توجد نهاية صغرى مشروطة $f(x,y)$

مثال :

ناقش القيم القصوى للدالة $f(x,y)=6-4x-3y$

تحت الشرط $x^2+y^2=1$

الحل :

1- نكون دالة لاجرانج

$G(x,y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الشرط $\psi(x,y)=x^2+y^2-1=0$

نوجد قيم y,x,λ التي تحقق

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \psi}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$

$$x^2+y^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ -4+2\lambda x=0 \quad __(i)\Rightarrow x=\frac{2}{\lambda}$$

$$-3+2\lambda y=0 \quad __(ii)\Rightarrow y=\frac{3}{2\lambda}$$

$$x^2+y^2-1=0 \quad __(iii)$$

بتعويض x , y في (iii)

$$\frac{4}{\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}-1=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{25}{\lambda^2}=4\Rightarrow\lambda^2=\pm\frac{5}{2}$$

في حالة $\lambda=\frac{5}{2}$

$$x=\tfrac{4}{5}$$

$$y=\tfrac{3}{5}$$

3- نوجد d^2G

$$d^2G=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}d^2x+2\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}dy^2$$

حيث $G(x,y)=6-4x-3y+\frac{5}{2}(x^2+y^2-1)$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=-4+5x\Rightarrow\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=5$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=-3+5y\Rightarrow\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=5$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}=0$$

$$d^2G=5d^2x+0+5d^2y$$

$$d^2G=5(d^2x+d^2y)$$

بما ان

$$d^2x+d^2y\neq 0$$

$$\therefore\ d^2G\succ 0$$

$\therefore$ النقطة $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ تمثل نهاية صغرى مشروطة

بالمثل في حالة $\lambda=-\frac{5}{2}$

تمرين :

ناقش القيم القصوى للدالة $f(x,y)=6-4x-3y$

تحت الشرط $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

تمارين

1- أوجد مفكوك تيلر للدوال الاتية

(أ) $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ حول النقطة $(1,1)$

(ب) $f(x,y)=\sin x\sin y$ حول النقطة $(0,0)$

(ج) $f(x,y)=\frac{y^2}{x^3}$

للقوي $x-1$ و $y+1$ الي حدود الدرجة الثانية

(د) $f(x,y)=e^x\tan^{-1}y$

حول النقطة $(1,1)$ حتي حدود من الدرجة الثانية في $x-1$ و $y-1$

2- ناقش القيم القصوى للدوال الاتية

$(a)\ f(x,y)=1+x^2+3y^2$

$(b)\ f(x,y)=-x^2-y^2+2x+4y+5$

$(c)\ f(x,y)=2x^3-24xy+16y^2$

$(d)\ f(x,y)=x^2+y^3-3xy$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تطبيقات هندسية

تعريف الانحدار :

لتكن $f(x,y,z)$ دالة في متغيرين الموضع (x,y,z) ((في الفراغ)) إنحدار الدالة f وهو المتجه

$$\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

حيث $i,j \& k$ متجهات وحدة في اتجاه ox,oy,oz ويرمز له بـ ∇f ونقول $(delf)$ ونكتب ايضاً grad (f)

مثال :

جد ∇f عند $(1,2-1)$ حيث

$$f(x,y,z)=4x^3z-y^2$$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$
$$=\left(12x^2z\right)i+(-2y)j+\left(4x^3\right)k$$
$$\nabla f\Big|_{(1,2,-1)}=-12i+4j+4k$$

المشتقة الاتجاهيـة :

لتكن $u=f(x,y,z)$ دالة في نقطة الموضع $p(x_1,y_1,z_1)$ و $\hat{a}=a_1i+a_2j+a_2k$ متجه وحدة في الفراغ ومعدل تغير الدالة f عند (x,y,z) في اتجاه $\hat{a}$ يسمي بالمشتقة الاتجاهية لـ f عند $p(x_1,y_1,z_1)$ في اتجاه $\hat{a}$

مثال :

ما هي المشتقة الاتجاهية للدالة $u=xyz$ عند $(1,2,3)$ في اتجاه $i-j+k$

$$\nabla f=yzi+zxj+xyk$$
$$\nabla f\Big|_{(1,2,3)}=6i+3j+2k$$
$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}i-\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k$$

المشتقة الاتجاهية لـ f عند $(1,2,3)$ فى اتجاه $i-j+k$

$$\hat{a}\nabla f\Big|_{(1,2,3)}=\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

2- أوجد المشتقة الاتجاهية للدالة $u=2x^3y-3y^2z$

عند $p(1,2,-1)$ في اتجاه النقطة $Q(3,-1,5)$

عند p $\nabla u=6x^2yi+\left(2x^3-6yz\right)j-3y^2k$

$$=12i+14j-12k$$

المتجة من p الي G

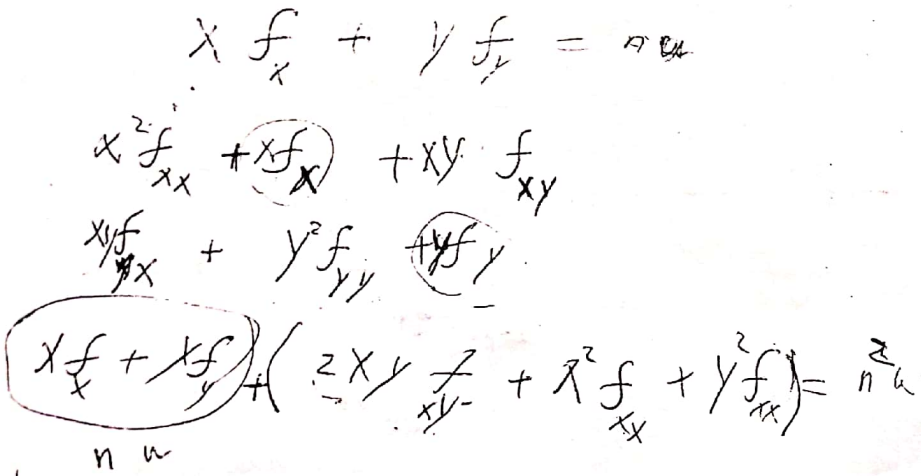
$$=(3-1)i+(-1-2)j+(5-(-1))k$$
$$=2i-3j+6k$$

وحدة المتجة من p الي Q

$$\hat{a}=\frac{2i-3j+6k}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(6)^2}}=\frac{2i-3j+6k}{7}$$

المشتقة الاتجاهية عند p

$$\hat{a}\nabla u=(12i+14j-12k)\left(\frac{2i-3j+6k}{7}\right)=-\frac{90}{7}$$

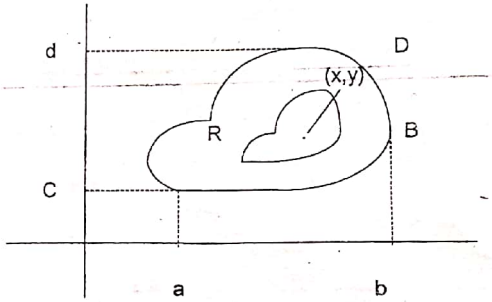


الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التكاملات المتعددة MULTIPLE INTEGRALS

التكاملات الثنائية (المزدوجة) DOUBLE INTEGRALS

لنفرض ان الدالة $f(x,y)$ معرفة في المنطقة المحددة المغلقة R من المستوي الاحداثي x-y
الان نقوم بتقسيم R جزئياً الي n منطقة فرعية



ΔR_k مساحة كل منها ΔA_k حيث $k = 1,2,\cdots n$

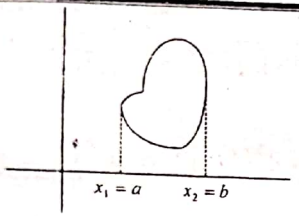
بافتراض النقطة (x_k, y_R) نقطة من المنطقة الفرعية ΔR_k وباخذ عدد لانهائي من المناطق الفرعية بحيث $n \to \infty$ $\Delta A_k \to 0$ فاننا نعرف التكامل الثنائي كالآتي

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_K$$

وتسمي بالتكامل المزدوج للدالة $f(x,y)$ علي المنطقة R

حساب التكامل الثنائي :

اذا كانت المنطقة R بحيث أن اي خطوط موازية لمحور y نقابل حدود R في نقطتين علي الاكثر كما في الشكل ففي هذه الحالة يمكن حساب التكامل باختيار المناطق ΔR_k لمستطيلات وذلك بانشاء شبكة خطوط موازي لمحور x , y بمعني ان $dA = dydx$



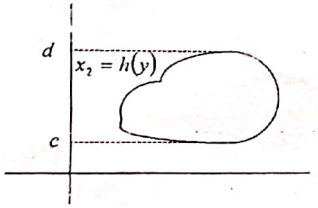
بالتالي

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dydx$$

$$\int_{x-0}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

حيث تجرى التكامل الداخلي (بين الاقواس) أولاً (بأعتبار x ثابتاً) ومن ثم نكامل الناتج بالنسبة لـ x
لذا يسمي تكامل مكرر لانة عبارة عن ناتج تكاملين احاديين متتابعين .

واذا كانت R بحيث أن اي خطوط موازية لمحور x تقابل حدود R من نقطتين علي الاكثر كما في الشكل ففي هذة الحالة وبإتباع نفس الاسلوب السابق نصل الى



$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{d}\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d\left[\int_{h_1}^{h_2} f(x,y)dx\right]dy$$

وكما سبق نجري التكامل الداخلي أولاً بالنسبة لـ x بإعتبار y ثابت ثم تكامل الناتج بالنسبة لـy

- الفرق بين التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ والتكامل الثنائي هو التكامل $\int_a^b\int f(x)dx$ والمكاملة دالة مستمرة $f(x,y)$ معرفة عند جميع نقاط منطقة محددة مغلقة R مساحتها A
- عموماً اذا كانت التكامل الثنائي موجوداً فأن الصورتين السابقتين تعطيات نفس النتائج اي ان

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(x,y)dydx$$

وتسمى هذه الصورة بتبادل رتبة التكامل للصورة الاخري ونطبق الصيغة المناسبة

- إذا كانت R ليست علي اي من الشكلين السابقين فنقسم R إلي مناطق جزئية $R_1, R_2 \cdots$ على اي من الشكلين السابقين ويكون التكامل الثنائي عبارة عن مجموعة التكاملات الثنائية على $R_1, R_2, \cdots R_n$

خصائص التكامل :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف التكامل الثنائي يمكن استنتاج الخصائص التاليه

1) $\iint_R hf(x,y)dA = h\iint_R f(x,y)dA$

حيث h ثابت

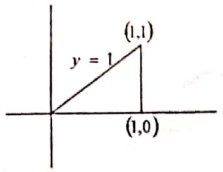
2) $\iint_R (f \pm g)dA = \iint_R fdA \pm \iint_R gdA$

حيث f,g دوال مستمرة في x , y

3) $\iint_R (x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA + (x,y)dA$

أمثلـــة :-

احسب $\int_0^1 \int_x^1 (x+y)dydx$



$x \le y \le 1$

$0 \le x \le 1$

$$\int_0^1 \int_x^1 (x+y)dydx = \int_0^1 \left[\int_x^1 (x+y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

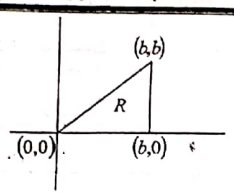
احسب $\iint_R (x,y)dA$

حيث A هو المثلث الذي رؤوسه (0,0) و (b,0) و (b,b)

بأعتبار R منطقة من النوع

معادلة المستقيم المار بـ (0,0) و(b,h)

$$x = \frac{b}{h}y$$



$$\frac{b}{n}y \le x \le b \quad \Leftarrow$$

$$0 \le y \le h$$

$$\therefore \iint_R f(x,y) = \int_0^n \int_{\frac{b}{n}y}^{b} 1dxdy = \tfrac{1}{2}bh$$

2- بأعتبار R منطقة من النوع الاول

$$0 \le y \le \tfrac{h}{b}x$$

$$0 \le x \le h$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^h \int_{\frac{h}{b}}^{\frac{h}{b}} 1dydx = \tfrac{1}{2}hb$$

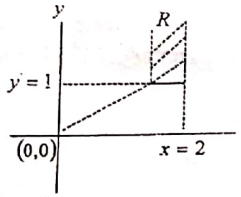
3- (أ) ارسم شكل تخطيطاً للمنطقة R في المستوي xy المحددة بالمقادير

$y = x^2 , x = 2 , y = 1$

(ب) وضح المعني الفيزيائي $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$

(ج) ومن ثم أوجد قيمة التكامل

(أ)الرسم موضح



(ب) $x^2 + y^2$ مربع المسافة من النقطة (x,y) الي $(0,0)$

$$\Rightarrow \iint_R (x^2 + y^2)dxdy$$

هو عبارة عن عزم القصور الذاتي القطبي (اي عزم القصور الذاتي بالنسبة لنقطة الاصل)

(ج) عند حساب التكامل نجد ان

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{x^2} (x^2 + y^2)dydx = \int_{y=1}^{4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2} (x^2 + y^2)dxdy = \frac{1006}{105}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التكامـــلات الثلاثيـــــة TRIPLE INTEGRALS

كل النتائج الخاصة بالتكاملات الثنائية يمكن تعميمها بسهولة للمناطق في ثلاثة ابعاد . حيث اننا اذا اعتبرنا ان $f(x,y,z)$ معرفة في منطقة R مقفلة ثلاثية الابعاد وتم تقسيمها جزئياً الي n منطقة جزئية حجم كلهما منها Δv_k $k = 1,2\cdots n$ وبفرض ان (x_k, y_k, z_k) نقطة ما في كل منطقة جزئية فأننا نعرف التكامل الثلاثي للدالة كالاتي (نفس الافتراض السابق $(n \to \infty)$ مما يعني $\Delta v_k \to 0$

$$\iiint_R f(x,y,z)dr = \lim \sum_{k=1}^{n} (x_k, y_k, z_k)\Delta v_k$$

اذا تم تقسيم المنطقة لمستويات موازية لمستويات xz, yz, xy فأننا نحصل علي مناطق جزئية في شكل متوزيات مستطيلات حيث $dr = dxdydz$ وفي هذة الحالة يمكن التعبير عنه بالتكامل . الثلاثي علي $R_{h_2(x,y)}$ كتكامل مكرر علي الشكل

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\left[\int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dy\right]dydx$$

وكما سبق نجري التكاملات الداخلية اولاً كما يمكن اجراؤه بأي ترتيب . حسب المسالة

$dxdydz$ او $dzdxdy$ أو $dydxdz$ ... etc

ويمكن كل هذا لأي عدد من الابعاد

أمثلـــة :

١- أوجد $\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x^3y^2zdzdydx$

$$= \int_0^1\int_0^x\left[\int_0^{xy} x^3y^2zdz\right]dydx = \int_0^1\left[\int_0^x \tfrac{1}{2}x^5y^4dy\right]dx$$

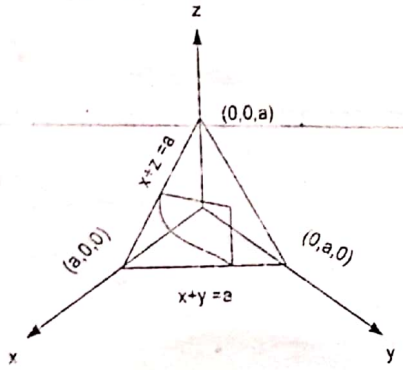
$$= \int_0^1 x^5y^5dx = \int_0^1 \tfrac{1}{10}x^{10}dx = \frac{1}{110}$$

2- (أ) ارسم شكلاً تخطيطاً للمنطقة R في الابعاد الثلاثية المحددة بـ

$x+y+z=a \quad , x=0 \, , y=0 \, , z=0$

(ب) اعط تفسيراً فيزيائياً للمقدار

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$



(ج) أوجد قيمة التكامل

(أ) الرسم موضح

(ب) كما سبق

$x^2+y^2+z^2$ هي مربع المسافة بين (x,y,z) $(0,0,0)$ وبالتالي فالتكامل الثلاثي يمثل عزم القصور الذاتي القطبي (عزم القصور الذاتي بالنسبة لنقطة الاصل)

(ج) حساب التكامل

$$\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{ax-y}(x^2+y^2+z^2)dzdydx = \frac{a^2}{20}$$

بأي ترتيب كان

تطبيقات التكاملات المتعددة :

1- ايجاد المساحة باستخدام التكامل الثنائي توجد المساحة وفقاً للقانون (عند $f(x,y)=1$)

$$A = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx$$

او

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dxdy$$

مثال :

باستخدام التكامل الثنائي أوجد المساحة المحصورة بين $y = x$ و $y = 4x - x^2$

$$A = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx$$

لايجاد حدود التكامل

$$y = x$$

$$\Rightarrow x = 4x - x^2 \Rightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = 3$$

$$A\int_0^3\int_x^{4x-x^2} dydx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

2- ايجاد الحجم باستخدام التكامل الثنائي :

نوجد الحجم وفقاً للقانون

$$v = \int_{x_1}^{x}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} zdydx$$

مثال :

باستخدام التكامل الثنائي أوجد حجم الجسم المحدد بالسطوح

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$$

$$v = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} zdydx$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{1-y}{b} - \frac{z}{c} \Rightarrow x = a\left[\frac{1-y}{b} - \frac{z}{c}\right]$$

حدود بالتكامل

$$x \Big|_{y=z=0} = a \Rightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0$$

$$\frac{y}{b} = 1 = \frac{x}{a} - \frac{x}{c} \Rightarrow \frac{y}{b}\Big|_{z=0} = 1 - \frac{x}{a} \Rightarrow y = b\left(-\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow g_1(x) = 0\ ,\ g_2(x) = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

الدالة $f(x,y)$ او $z = f(x,y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$

وحدة مكعبة $\therefore v = \int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)dydx = \frac{5}{12}abc$

ايجاد الحجوم باستخدام التكامل الثلاثي :

نوجد الحجم وفقاً للقاعدة (عند $f(x,y,z) = 1$)

$$v = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1}^{g_2(x)}\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dzdydx$$

مثال:

باستخدام التكامل الثلاثي أوجد حجم المنطقة المحددة بالمستويات

$$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0 \qquad 6x + 4y + 3z = 12$$

$$v = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1}^{g_2(x)}\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dzdydx$$

حدود التكامل

$$6x + 4y + 3z = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 - 4y - 3z}{6}$$

$$x \Big|_{y=z=0} = 2 \Rightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0$$

$$y = \frac{12 - 6x - 3z}{4}$$

$$y\Big|_{z=0} = \frac{12-6x}{x} \Rightarrow g_1(x) = 0\ ,\ g_2(x) = \frac{12-6x}{4}$$

$$z = \frac{12-6x-4y}{3} \Rightarrow h_1(x,y) = 0\ ,\ h_2(x,y) = \frac{12-6x-4y}{3}$$

بالتعويض في القانون أعلاه

$$v = \int_0^2\int_0^{\frac{12-6x}{4}}\int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} dzdydx = \int_0^2\left[\int_0^{\frac{12-6x}{4}}\int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} dz\right]dydx$$

$$= \int_0^2\left[\int_0^{\frac{12-6x}{4}} \tfrac{1}{3}(12 - 6x - 4y)dy\right]dx = \int_0^2 \tfrac{1}{2}(12 - 12x + 3x^2)dx$$

$= 4$ وحدة مكعبة

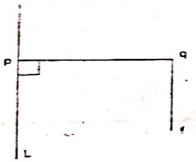
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القطوع المخروطية CONIC SECTIONS

تعريف :

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لنقطة q تتحرك في مستوي بحيث تظل نسبة بعدها من نقطة ثابتة f الي بعدها من مستقيم ثابت L تظل عدد ثابتاً e

$q\,f = q\,p = e$



f تسمي البؤرة

L الدليل

E المميز

$e = 1 \Leftarrow$ يسمي القطع المخروطي قطع مكافئ (مكافئة) parabola

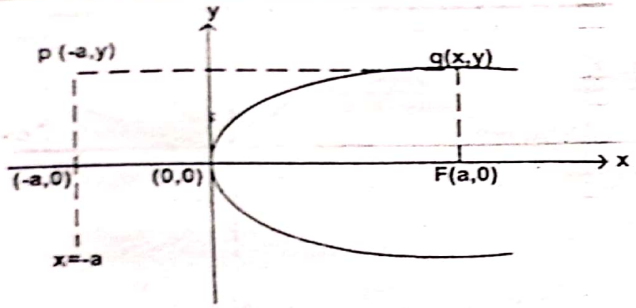
$e \prec 1 \Leftarrow$ يسمي القطع المخروطي قطع ناقص (ناقصة) Ellipse

$e \succ 1 \Leftarrow$ يسمي القطع المخروطي قطع زائد (زائد) Hyperbola

1- القطع المكافئ:

هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك علي المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوياً لبعدها من مستقيم ثابت (.الدليل) L ويسمي المستقيم المار بالبؤرة والعمودي علي الدليل بمحور القطع المكافئ

المعادلة القياسية :



هي معادلة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل (0,0) وبؤرته (a,0) حيث $a \succ 0$ ودليله المستقيم $x = -a$ ومفتوح لليمين حيث تاخذ الشكل

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

الاثبات

من الشكل وفقاً لتعريف القطع المكافئ

Pq=fq

من قانون البعد بين نقطتين

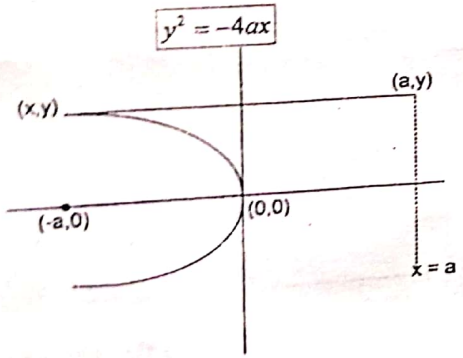
$$(x+a)^2 + (y-y)^2 = (x-a)^2 + (y-0)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4ax}$$

وبالمثل يمكن الحصول علي الاشكال الاخري التاليه

i. معادلة القطع المكافئ الذي راسه (0,0) وبؤرته $(-a,0)$ ودليله a= ومفتوح لليسار

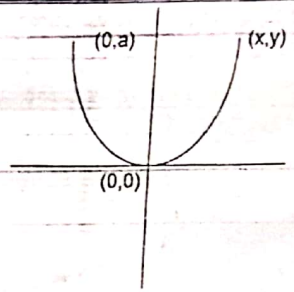


ii. معادلة القطع المكافئ الذي راسه (0,0) وبؤرة $(0,a)$ودليله y =-a ومقعر لأعلى $a \succ 0$ هي

$$\boxed{x^2 = 4ay}$$

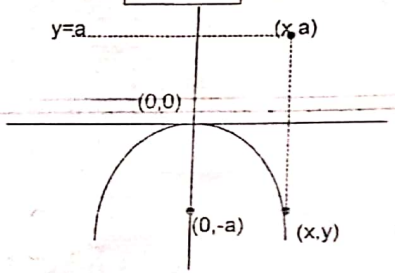
المحور مطابق لمحور y

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



iii. معادلة القطع المكافئ الذي راسه (0,0) وبؤرتة $(0,-a)$ ودليله y = a ومقعر لاسفل $a \succ 0$ هي

$$\boxed{x^2 = -4ay}$$



ملاحظة: النسبة $\frac{fq}{pq}$ تسمي الاختلاف المركزي وهي تساوي

1- للقطع المكافئ حسب التعريف

لان $fq = pq$

اي e =1

أمثلة :

1- أوجد احداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ

$y^2 = 12x$

الحل: نقارن بالصورة القياسية $y^2 = 4ax$

لنجد ان a=3

$\therefore$ البؤرة $(3,0)$, $(a,0)$

ومعادلة الدليل $x = -3$, $x = -a$

2- أوجد احداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ

$y^2 = -20x$

الحل: نقارن بالصورة

$y^2 = -4ax$

نجد ان a=5

البؤرة $(-5,0)$, $(-a,0)$

ومعادلة الدليل $x = a \Rightarrow x = 5$

3- أوجد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان بؤرتة $(-3,0)$ وراسه $(0,0)$ ثم أوجد معادلة الدليل

الحل :

المعادلة القياسية هي $x^2 = -4ay$

لان البؤرة واقعة على القسم السالب من محور الصادات والفتحة نحو الصادات السالبة (لاسفل)

$f(0,-a) = (0,-3)$

a=3

$\therefore$ المعادلة $x^2 = -12y$

معادلة الدليل y=3

4- قطع مكافئ راسه عند نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(-7,3)$ متماثل حول محور y أوجد معادلته

الحل:

$x^2 = 4ay$

$\therefore$ $(-7,3)$ تحقق المعادلة

$\Rightarrow 9 = 4 \times 7a \Rightarrow a = \frac{9}{28}$

$\therefore$ المعادلة

$x^2 = 4\frac{9}{28}y$

$x^2 = \frac{9}{7}y$

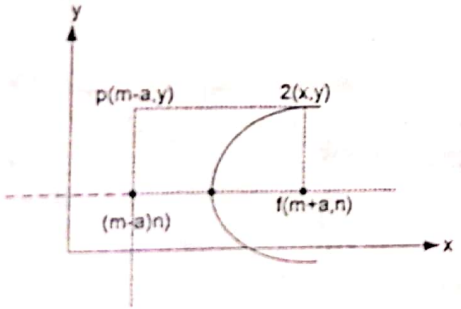
معادلة القطع المكافئ الذي راسه النقطة (m,n) وليست نقطة الاصل :-

- المعادلة العامة للقطع المكافئ راسه (m,n) ومحوره يوازي محور x (عمودي على y) وبعده البؤرى a وعلى اليمين راس المكافئ هي

$(y-n)^2 = 4a(x-m)$

لاحظ عند $(m,n) = (0,0)$ نحصل على المعادلة القياسية

في السابق يكون المحور هذا هو المحورين (محور المكافئة)



$y = n$

بنفس الطريقة السابقة

ومن التعريف $pq = fq$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومن قانون البعد بين نقطتين

$$[x-(m-a)]^2+[y-y]^2=[x-(m+a)]^2+(y-n)^2$$

ومنها نحصل

البؤرة $\equiv (m+a,n)$

$$\boxed{(y-n)^2=4a(x-m)}$$

الدليل $x=-a+m \equiv$

المحور $y=n \equiv$

وبالمثل يمكن الحصول علي المعادلات التالية

- معادلة القطع المكافئ راسه (m,n) ومحوره يوازي محور x (عمودي علي y) وبعده البؤري a وعلي يسار الراس هي

الفتحة نحو السينات السالب $\boxed{(y-n)^2=-4a(x-m)}$

البؤرة $\equiv (-m+a,n)$

الدليل $x=a+m \equiv$

المحور $y=n \equiv$

- معادلة القطع المكافئ راسه (m,n) ومحوره يوازي محور y (عمودي علي x) مقعر لأعلي

الفتحة نحو الصادات الموجب $\boxed{(x-m)^2=4a(y-n)}$

البؤرة $\equiv (m,a+n)$

الدليل $y=a-m \equiv$

المحور $x=m \equiv$

- معادلة القطع المكافئ راسه (m,n) ومحوره يوازي محور y (عمودي علي x) مقعر لاسفل

$$\boxed{(x-m)^2=-4a(y-n)}$$

البؤرة $\equiv (m,a-n)$

الدليل $y=a+m \equiv$

المحور $x=m \equiv$

ملاحظة:-

بعد البؤرة عن الرأس = بعد الرأس عن الدليل

امثلة:

1) اوجد احداثيات البؤرة والراس ومعادلة الدليل والمحور للقطع المكافئ

$$x^2-6x-y+4=0$$

الحل:

$$x^2-6x=y-4$$

$$x^2-6x+9=y-4+9$$

$$(x-3)^2=y+5$$

نقارن بالصورة $(x-m)^2=4a(y-n)$

نجد ان

احداثيات الراس $(m,n)=(3,-5)$

وكذلك $a=\frac{1}{4}=0.25 \Leftarrow 4a=1$

$\therefore$ البؤرة هي $(m,n+a) \Leftarrow (3,-4.75)$

معادلة الدليل $y=n-a, y=-5.25$

معادلة المحور $x=m \Leftarrow x=3$

2) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط $(2,3),(-1,6),(1,0)$

الحل:

معادلة القطع الذي محوره عمودي علي x أو موازي لمحور y

$$(x-m)^2=4a(y-n)$$

بالتعويض عن النقاط الثلاث والحل الاني نحصل علي

$$a=\frac{1}{8}, m=\frac{3}{4}, n=-\frac{1}{8}$$

$\therefore$ المعادلة

$$(x-\tfrac{3}{4})^2=4(\tfrac{1}{8})(y+\tfrac{1}{8})$$

أو

$$x^2-\tfrac{3}{2}x=\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}$$

تمارين:

1. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2,4)$ ودليله $x=-1$
2. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(5,7)$ ودليله $x=-7$
3. حدد عناصر القطع التالي

$$x^2+y=4x$$

4. أوجد راس وبؤرة القطع الممثل بالمعادلة

$$y^2+2y-2x+4=0$$

كذلك أوجد معادلتة و دليله و ارسمة

5. ضع المعادلة $2y^2-4y=3x+4$ في الصورة القياسية ثم استنتج صفات القطع المكافئ الذي تمثله
6. أوجد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان راسه $(2,3)$ وان منحني القطع يمر من النقطة $(4,-1)$ اذا كان محور تناظره يوازي الصادات
7. أوجد معادلة قطع مكافئ اذا علمت ان راسه $(-1,4)$ ودليله المستقيم الذي معادلته $2x-10=0$
8. أوجد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية
   i. البؤرة $(-2,4)$ الرأس $(-4,4)$
   ii. البؤرة $(3,1)$ الدليل $x=6$

ملاحظـات:

1. المحور يدل اتجاه فتحة القطع
   I. اذا كان المحور يوازي محور السينات فان الفتحة نحو السينات
   II. اذا كان المحور يوازي محور الصادات فان الفتحة نحو الصادات
2. المسافة بين البؤرة والدليل تساوي $2a$
3. معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي الصادات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$y = bx^2 + cx + d$$

حيث $b \neq 0$

عند $b \succ 0$ تكون الفتحة نحو الصادات الموجبة

$b \prec 0$ تكون الفتحة نحو الصادات السالبة

4. معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي السينات

$$x = by^2 + cy + d$$

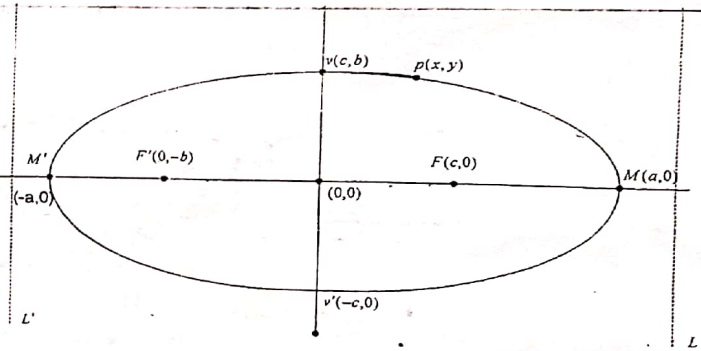
حيث $b \neq 0$

$b \succ 0$ تكون الفتحة نحو السينات الموجبة

$b \prec 0$ تكون الفتحة نحو السينات السالبة

القطع الناقص :

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط $p(x, y)$ بحيث يكون مجموع بعدي $p(x, y)$ عن نقطتين ثابتين (تسميان بالبؤرتين) يكون ثابتا



$f', f \equiv$ البؤرتان

$m', m \equiv$ راسا القطع الناقص

$mm' \equiv$ المحور الاكبر وطوله = 2a // محور x)

$VV' \equiv$ المحور الاصغر وطوله =2b (// محور y)

$L', L \equiv$ الدليلان ومعادلاتهما $x = \pm \frac{a}{e}$

نقطة تقاطع المحورين الاكبر والاصغر $\equiv$ مركز القطع الناقص

ملحوظة:-

عندما تنطبق البؤرتان أي ان c=0 أو a=b نحصل علي دائرة

المعادلة القياسية:-

معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وبؤرتيه $(\pm c, 0)$ هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a \succ b \succ 0$

البرهان

من تعريف القطع الناقص

$pf + pf' = 2a$ (ثابت)

من قوانين البعد بين نقطتين

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

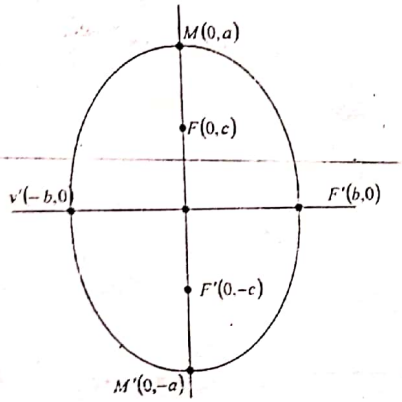
والتي منها نحصل في النهاية علي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مع ملاحظة ان $c^2 = a^2 - b^2$

بالمثل يمكن اثبات ان معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وبؤرتيه $(0, \pm c)$ هي

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad a \succ b \succ 0$$



ملاحظة :- الاختلاف المركزي (e)

$c \prec a$

$e \prec 1$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

ومنها نستنتج ان

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

أمثلة:-

1. أوجد دليلي وبؤرتي ومعامل الاختلاف المركزي للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{8} + y^2 = 1$$

$a^2 = 8 \qquad b^2 = 1$

$\therefore b^2 = a^2(1 - e^2)$

الاختلاف المركزي

$$e = \sqrt{7/8}$$

$\therefore$ البؤرتان $(\pm c, 0)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$c = ea \Rightarrow \sqrt{8}\left(\sqrt{7/8}\right) = \sqrt{7}$$
$$\Rightarrow (\pm\sqrt{7}, 0)$$

معادلة الدليلين

$$x = \pm\frac{a}{e}$$
$$x = \pm\frac{8}{\sqrt{7}}$$

2. أعد حل المثال السابق اذا كانت المعادلة

$$x^2 + \frac{y^2}{8} = 1$$

كما سبق نجد ان الاختلاف المركزي

$$e = \sqrt{7}/8$$

البؤرتان $(0, \pm\sqrt{7})$

معادلتا الدليلين $y = \pm\frac{8}{\sqrt{7}}$

3. أوجد معادلة الناقصة بؤرتاها $(\pm 2, 0)$ ومحور الاصغر $= 6$

$b = 3 \quad \& \quad c = 2$

$\therefore a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 13$

$\therefore$ المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

المعادلة العامة للقطع الناقص مركزه (x_0, y_0)

- المعادلة العامة للقطع الناقص الذي مركزه (x_0, y_0) ومحورة الاكبر موازي لمحور x هي

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

أحداثيات البؤرة

$$f_1 = (c + x_0, y_0) \quad , \quad f_2 = (-c + x_0, y_0)$$

نهايتا المحور الكبير

$$M = (a + x_0, y_0) \quad , \quad M' = (-a + x_0, y_0)$$

نهايتا المحور الصغير

$$V = (x_0, y_0 + b)$$
$$V' = (x_0, -b + y_0)$$

- كذلك المعادلة العامة للقطع الناقص الذي مركزه (x_0, y_0) ومحوره الاكبر موازي لمحور y هي

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

احداثا البؤرة

$$f_1 = (x_0, c + y_0) \qquad f_2 = (x_0, -c + y_0)$$

نهايتا المحور الكبير

$$M = (x_0, b + y_0) \qquad M' = (x_0, -b + y_0)$$

نهايتا المحور الصغير

$$V = (b + x_0, y_0) \qquad V' = (-b + x_0, y_0)$$

أمثلة:

1. حدد صفات القطع التالي

$$ax^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$$

الحل:

نكتب المعادلة علي الصورة

$$a(x^2 + 2x) + 25(y^2 - uy) = 116$$

نكمل الي مربع كامل كلا من المقدارين بين الاقواس

$$a(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 4) = 116 + 9 + 100$$
$$= a(x^2 + 1)^2 + 25(y - 2)^2 = 225$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

قطع ناقص محورة الاكبر موازي محور x

$$a = 5 \quad , \quad b = 3$$
$$\Rightarrow c = 4$$

احداثيات المركز $(-1,2) \Leftarrow (x_0, y_0)$

البؤرتان $(-5,2), (3,2)$

رأسا القطع $(-6,2), (4,2)$

2. أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركز $(3, 3)$ واحدي بؤرتيه $(3, 1)$ وطول محوره الاكبر 6

قطع ناقص محوره الاكبر يوازي محور الصادات

$$\frac{(y-3)^2}{a^2} + \frac{(x-3)^2}{b^2} = 1$$
$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$
$$c = 2$$
$$b = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ معادلة القطع

$$\frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(x-3)}{5} = 1$$

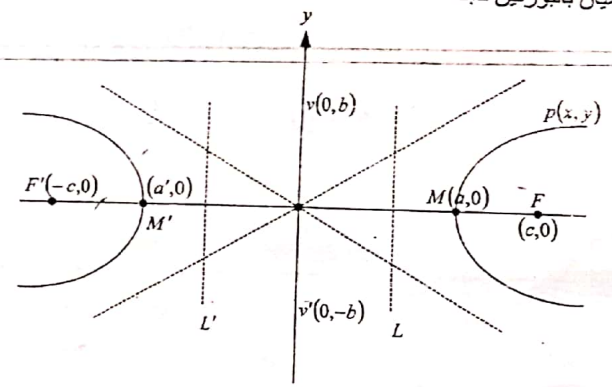
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مرين :

1. أوجد معادلة قطع ناقص اذا علمت ان معادلتي محوريه $x = -5 \ , y = 3$ وان احدي نهايتي المحور الاصغر $(-5,0)$ وطول المحور الاكبر 12 وحدة قياس
2. أوجد معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الكبير $(3,0), (-3,0)$ والبعد بين بؤرتيه 4 وحدات
3. أوجد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(2,4), (-4,4)$ وطول محوره الاصغر 8 وحدات مع رسم القطع.

القطع الزائد :

هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك علي مستوي الاحداثيات بحيث يكون الفرق (المطلق) بين بعديها عن نقطتي ثابتين تسميان بالبؤرتين ثابتاً



$MM' \equiv$ الراسين

$MM' = 2a \equiv$ المحور المستعرض العرض (القاطع)

$VV' = 2b \equiv$ المحور المرافق

$f', f \equiv$ البؤرتان $(\pm c,0) = (\pm ae,0)$

$L', L \equiv$ الدليلان ومعادلاتهما $x = \pm a$

نقطة تقاطع محورة الزائد $\equiv$ مركز الزائدة

المعادلة القياسية :

معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وبؤرتيه $(\pm c,0)$ هي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الاختلاف المركزي

$$\equiv e = \frac{c}{a}$$

$e > 1 \Leftarrow c = a$

حيث $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

الاثبات

$$\therefore |pf - pf'| = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ومنها نحصل علي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مع ملاحظة ان

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالمثل لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وبؤرتيه $(0,\pm c)$ هي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مثال:-

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل واحداثيات طرفي محوره المرافق $(0,\pm 3)$ وطول محوره المستعرض 8 وكذلك احسب الاختلاف المركزي

الحل :

$$b = 3$$

طول المستعرض $= 8 \Leftarrow a = 4$

$\therefore$ المعادلة $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore$ احداثيات طرفي المحور المستعرض

$$(\pm 4, c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$$

المعادلة العامة للقطع الزائد الذي مركزه (x_0, y_0) :-

- المعادلة العامة للقطع الزائد الذي مركزه (x_0, y_0) ومحوره المستعرض موازي لمحور x هي

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

البؤرتان $= (\pm c + x_0, y_0)$ الراسان $= (\pm a + x_0, y_0)$

- كذلك معادلة القطع الزائد الذي مركزه (x_0, y_0) ومحوره المستعرض موازي لمحور y هي

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

البؤرتان $= (x_0, \pm c + y_0)$ الرأسان $= (x_0, \pm a + y_0)$

أمثلة:-

1. اذكر صفات القطع التالي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$ay^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$$

الحل:

نكتب المعادلة علي الصورة

$$9(y^2 - 2y) - 16(x^2 + 4x) = 199$$

مكمل المقدارين داخل الاقواس الي مربع كامل

$$9(y^2 - 2y + 1) - 16(x^2 + 4x + x) = 199 + 9 - 64$$

$$\Rightarrow 9(y-1)^2 - 16(x+2)^2 = 144$$

أو

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

هذا قطع زائد بؤرتاه علي محور y

$$a = 4, b = 3, c = 5$$

احداثيات المركز $(-2,1)$

البؤرتان $(-2,6), (-2,-4)$

راس القطع $(-2,5) (-2,-3)$

2. أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (2,5) واحدي بؤرتيه (9,5) وطول محوره القاطع 6 وحدات

الحل:

احداثيات المركز (2,5)

البؤرة $(c + x_0, y_0) = (9,5)$

$$\Rightarrow c + x_0 = 9$$

$$c + 2 = 9 \Rightarrow c = 7$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

ولكن $c^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow 49 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 40$$

المحور القاطع يوازي محور السينات

∴ المعادلة هي

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{40} = 1$$

معادلة الدرجة الثانية والقطوع المخروطية

يمكن كتابة معادلة الدرجة الثانية علي الصورة

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

المميز $= b^2 - 4ac$

1. اذا كان المميز $(b^2 - 4ac) =$ صفراً فان المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً
2. اذا كان $(b^2 - 4ac) < 0$ فان المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً
3. اذا كان $(b^2 - 4ac) > 0$ فان المعادلة تمثل قطعاً زائداً

أمثلة:

حدد نوع القطوع المخروطية التالية

i. $xy + x - 2y + 7 = 0$

ii. $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y = 139$

الحل :-

$$b^2 - 4ac$$

$$(1)^2 - 4x.x. > 0$$

∴ المعادلة تمثل قطعاً زائداً

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 * 4 * 1 = 0$$

المعادلة تمثل قطعا مكافئاً

تمارين:

1. أوجد عناصر القطوع التاليه (المراكز – البؤرة – الرؤوس – الادالة) ثم ارسم منحنياتها (ان وجدت)

i. $x^2 - y^2 + 4x + 4y - 84 = 0$

ii. $2x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 17 = 0$

iii. $x^2 + 2y^2 + 8y - 8x - 84 = 0$

iv. $x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

v. $x^2 - 2y^2 - 4y + 3 = 0$

vi. $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$

vii. $x^2 - 6x - 4y + 16 = 0$

2. أوجد معادلة القطوع المخروطية وذلك ضمن الشروط المعينة

i. قطع مكافئ راسه $(-1,2)$ ومعادلة دليله $x = -3$

ii. قطع ناقص راساه $(3,2), (-5,2)$ وبؤرتاه $(2,2), (-4,2)$

iii. قطع زائد رأساه $(-1,-3), (-1,5)$ ويمر بالنقطة $(-3,-5)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner