بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان المفتوحة

برنامج التربية /رياضيات

برنامج الحاسوب

الحسبان(2)

رمز المقرر ورقمه: ريض 201

تأليف المادة العلمية: د.أرباب إبراهيم أرباب

التحكيم العلمي: د. محمد عبد المنعم إسماعيل

المراجعة: أ. محمد حسن الزبير

التصميم التعليمي: أ.آمال حسين محمد أحمد

التنضيد الطباعي :أ. ندى عبد الرحمن الطاهر

التصميم الفني : أ. ندى عبد الرحمن الطاهر، سناء عبد النبي

منشورات جامعة السودان المفتوحة، الطبعة 2005م

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج إي جزء من هذا الكتاب، وبآي وجه من الوجوه إلا بعد الموافقة المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

بسم الله الرحمن الرحيم والحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى اله أجمعين.

نأتي بك عزيزي الدارس إلى مقرر الحسبان (2) بعد دراستك لمقرر الحسبان (1)

وفيه تعرفت على المشتقة الأولى، وأنواع المشتقات، وتطبيقات على المشتقة ، وتعرفت على أهمية علم التفاضل والتكامل، وتطبيقاته الكثيرة في مجال الهندسة،والفيزياء،والاقتصاد وغيره من العلوم. حيث يسر الكثير من الحسابات المعقدة ،وفى هذا المقرر سوف تتعرف على علم التكامل: وهو العملية العكسية للتفاضل، ففي التكامل تكون مشتقة الدالة معروفة ونقوم بإيجاد الدالة نفسها

يحتوى هذا المقرر على أربعة وحدات، وتنقسم كل وحدة إلى أقسام، ففي **الوحدة الأولى** سوف نشرح لك الفترات والتجزئة والمجاميع، ومن معرفة هذه يمكن إيجاد المساحة التي تحصرها دالة (منحنى) في فترة محددة. وذلك بتجزئة هذه الفترة إلى فترات أصغر، وبجمع مساحة هذه الفترات نحصل على المساحة الكلية بالتقريب، التي يحصرها هذا المنحنى، وللجمع عدة طرق أهمها طريقة جمع ريمان، والذي نتطرق له في القسم الثاني من هذه الوحدة.

في الوحدة الثانية. سوف يتم شرح طرق إيجاد التكاملات المختلفة، ومن هذه الطرق كيفية إيجاد التكامل لدالة كثيرة الحدود ، دالة مثلثية ،دالة آسية ،دالة مضروبة في دالة أخرى، التكامل بالأجزاء والقياسي والاختزالي.

وفى الوحدة الثالثة. يتم شرح إيجاد المساحة التى يحصرها منحنى (دالة) مع أحد المحاور، أو مع منحنى أخر، بتطبيق القانون مباشرة.

وفى الوحدة الرابعة والأخيرة. على تطبيقات التكامل في إيجاد طول قوس من منحنى، وإيجاد مساحة سطح يصنعها دوران منحنى حول أحد المحاور، وكذلك حجم ذلك الفراغ (الجامد) الذي يحيط به هذا السطح.

يهدف المقرر إلى تزويد الدارس بالجوانب المهمة، واستخدامات هذا العلم في التطبيقات، الهندسية، والفيزيائية، والاقتصادية ،وسوف تجد الأمثلة المحلولة، وأسئلة التقويم الذاتي، ولها إجابات نموذجية في نهاية الوحدة، وتدريبات عليك القيام بوضع حلول لها، ومراجعتها مع

الإجابات الموجودة، داخل الوحدة وعرضها على مشرفك الأكاديمي، عليك أن تكثر من التمارين والتدريبات حتى تثبت القاعدة وتتأكد من استيعابك لها .

هنيئا لك بهذا المقرر، وسوف تجد المتعة والفائدة منه، أرجو أن توفق في دراستك وان تساهم معنا في نقده وتقيمه وتطويره.

الأهداف العامة للمقرر

بعد فراغك من دراسة هذا المقرر ينبغي لكِ أن تكون قادرا على أن :

- **تَشرح** الفترات والمجاميع.
- **تستخدم** الفترات والتجزئة في إيجاد المساحة التي تحصرها دالة في فترة محددة.
- **تُطبق** طريقة جمع ريمان في جمع مساحة الفترات للحصول على المساحة الكلية التي يحصرها المنحنى أو الدالة .
- **تُعرف** طرق إيجاد التكاملات المختلفة.
- **توجد** التكامل للدالة كثيرة الحدود والدالة المثلثية والآسية واللوغريثمية.
- **توضح** التكامل المحدود واستخداماته.
- **تطبق** التكامل في إيجاد طول القوس في منحنى.
- **تستخدم** التكامل في أيجاد مساحة سطح دوران منحنى حول أحد المحاور وحجم الفراغ الذي يحيط بالسطح.

محتويات المقرر

رقم الوحدة	الموضوع	الصفحة
1	الفترات والمجاميع	1
2	التكامل	27
3	التكامل المحدود	103
4	تطبيقات على التكامل	133


الوحدة الأولى
الفترات والمجاميع

محتويات الوحدة

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	3
تمهيد	3
أهداف الوحدة	3
1. الفترات والتجزئة	4
2. الجمع الريمانى	11
الخلاصة	20
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	20
إجابات التدريبات	21
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	23
مسرد المصطلحات	24
المراجع	25

المقدمة

تمهيد

مرحبا بك في الوحدة الأولى بعنوان الفترات والمجاميع، وتمثل مدخل لمقرر الحسبان(2) وفيها يتم شرح أساسيات علم التكامل وأستخداماتة. قسمت الوحدة إلي قسمين رئيسيين :

القسم الأول: يشرح الفترات والتجزئة، واستخدامها في إيجاد المساحة التى يحصرها منحنى أو دالة والمساحة الكلية بجمع الأجزاء.

القسم الثاني: يشرح طرق الجمع، ومنها طريقة جمع ريمان لحصر المساحة الكلية.

سوف تجد داخل الوحدة الرسوم التوضيحية، والأمثلة المحلولة والتمارين، كذلك أسئلة التقويم الذاتي، لكي تتأكد من استيعابك وتسترجع معلوماتك، وتجد لها إجابات نموذجية في نهاية الوحدة حتى تتأكد من الحل الصحيح، وتأتى التدريبات لتساعدك على ترسيخ الوحدة، والتطبيق المباشر للقانون، عليك بالاهتمام بوضع حلول للتدريبات، وعرضها على مشرفك الأكاديمي ومعاينتها مع الإجابات في نهاية الوحدة،وعليك الاهتمام بهذه الوحدة لأنها سوف تسهل عليك بقية الوحدات، واكثر من التدريبات، نتمنى أن تستفيد منها، وتقدم لنا نقدك وتقيمك الهادف لهذه الوحدة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي منك أن تكون قادرا على أن:

- **تعرف** الفترات وطول الفترة الجزئية
- **تشرح** التجزئة المنتظمة وغير المنتظمة
- **تحسب** المساحة الكلية المحصورة بين الدالة في فترة محددة
- **تستخدم** الجمع الريمانى لإيجاد المساحة التي يحصرها منحنى مع كل من المحورين السيني والصادي
- **تميز** بين خصائص التكامل

عزيزي الدارس، مرحبا بك مرة أخرى في بداية القسم الأول في الوحدة الأولى، وسوف نشرح لك تعريف الفترات والتجزئة، وطول الفترة الجزئية، ونبدأ بتعريف التجزئة.

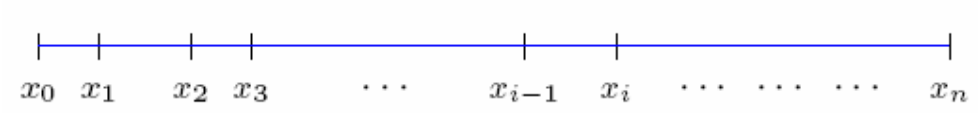
1. الفترات والتجزئة Intervals and Partition

تُعرف التجزئة P للفترة المغلقة $I=[a,b]$ بأنها مجموعة الفترات المغلقة $I_j=[x_{j-1},x_j]$ معرّفة بترتيب الأعداد التالية

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n$$

حيث $a=x_0$ و $b=x_n$.

ونُعرّف الطول $x_j - x_{j-1}$ للفترة I_n بـ Δx_j.



ويمكن أن تكون للفترات أطوال متساوية أو مختلفة. ويوضح الرسم التالي الفترات (I_i) وأطوالها Δx_i:

$$\begin{array}{llll}
1 & I_1=[x_0,x_1] & \Delta x_1 = x_1 - x_0 \\
2 & I_2=[x_1,x_2] & \Delta x_2 = x_2 - x_1 \\
3 & I_3=[x_2,x_3] & \Delta x_3 = x_3 - x_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i & I_i=[x_{i-1},x_i] & \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n & I_n=[x_{n-1},x_n] & \Delta x_n = x_n - x_{n-1}
\end{array}$$

حيث

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

والرسم أعلاه يوضح لك طول الفترة الجزئية رقم i

ثم نأتي بك إلى تعريف التجزئة المنتظمة.تُعرف التجزئة (P) بأنها منتظمة (*Regular*) إذا كانت

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

بحيث أن

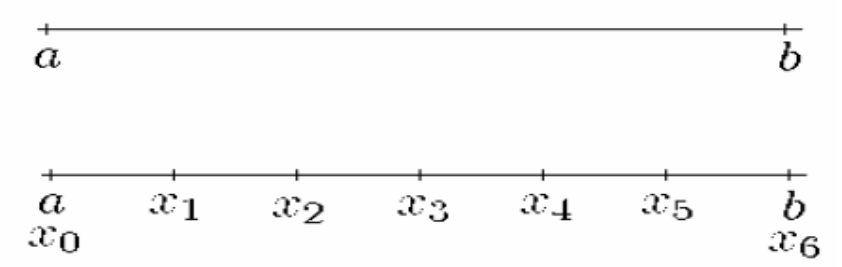
$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_n$$

فإذا أردت تجزئة الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى عدد n من الجزئيات المتساوية في الطول، فإن العرض المشترك لهذه الجزئيات سيكون

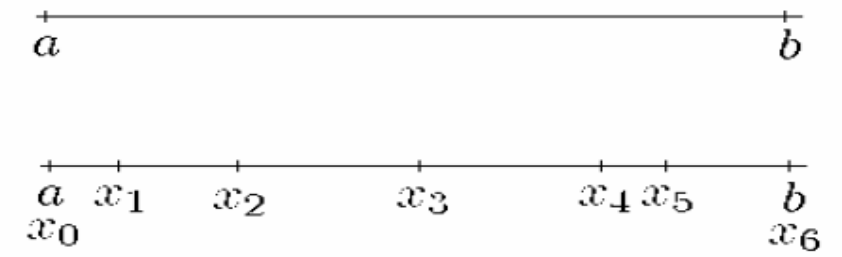
$\left(\frac{b-a}{n}\right)$ الفترات أي

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

ويوضح الرسم أدناه تجزئة الفترة $[a,b]$ إلى أجزاء متساوية.



كذلك تجد الفترة الغير منتظمة وتعرف بأنها الفترة الغير متساوية في أطوالها (كما يوضح لك الرسم أدناه).



ويمكنك أن تختار في الفترة الجزئية $[x_{i-1},x_i]$ نقطة x_i^* عند الأطراف أو عند المنتصف. ففي الفترة الأولى $[x_0,x_1]$ تختار النقطة x_1^* وللفترة الثانية $[x_1,x_2]$ تختار النقطة x_2^*، وهكذا....

- ❖ إذا كانت النقطة x_i^* علي يمين الفترة $[x_{i-1},x_i]$ فإن $x_i^* = x_i$.
- ❖ إذا كانت النقطة x_i^* علي يسار الفترة $[x_{i-1},x_i]$ فإن $x_i^* = x_{i-1}$
- ❖ إذا كانت النقطة x_i^* علي منتصف الفترة $[x_{i-1},x_i]$ فإن $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

ولك أن تأخذ في كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$ مستطيل R_i تكون قاعدته هي عرض الفترة وارتفاعه $f(x_i^*)$ ونرمز لمساحته بالرمز A_i . تُعطي هذه المساحة بالقاعدة

$$A_i = (x_i - x_{i-1})\, f(x_i^*) = \Delta x\, f(x_i^*) = \left(\frac{b-a}{n}\right) f(x_i^*)$$

والآن إذا كتبت مشتقة الدالة $F(x)$ علي الصورة $F'(x) = f(x)$ يمكنك أن نطبق نظرية القيمة المتوسطة علي الدالة $F(x)$ علي الفترة بين $[x_i, x_{i-1}]$، والتي تنص علي انه هنالك نقطة $c \in [x_i, x_{i-1}]$ بحيث أن

$$F'(c) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

أو

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c)\Delta x_i = f(c)\Delta x_i$$

وإذا اخترت $c = x_i^*$ تحصل علي

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x_i$$

ويصبح الجمع

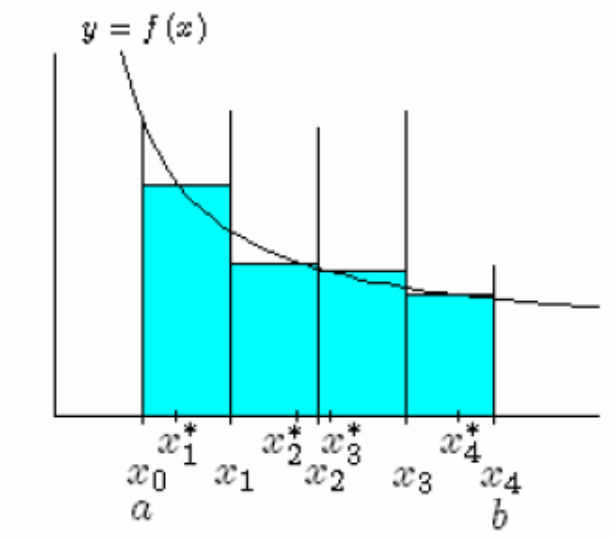
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

لتحصل علي

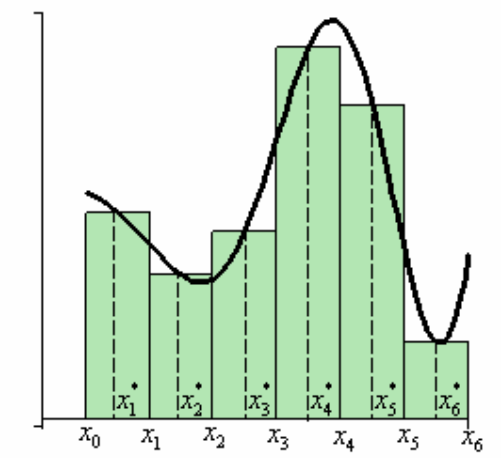
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

حيث $x_0 = a$ و $x_n = b$، والتي تمثل المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$.

وتصبح المساحة المظللة تساوي بالتقريب مجموع مساحات المستطيلات الصغيرة (A_i) إي كما هو موضح في الرسم أدناه



(أ)



الرسم يوضح تقسيم الفترة الي 6 جزئيات متساوية

وهنالك شرطاً يجب تحققه لكي يكون للدالة $f(x)=x$ تكامل في الفترة $[0,b]$ هو أن يكون لأي مقدار صغير ε

$$U_f(P) - L_f(P) < \epsilon$$

حيث

$$U_f(P) = \sum_k M_k(x_k - x_{k-1})$$

هو الجمع العلوي لـ $x_{k-1} \le x \le x_k$ و $M_k = f(x_k)$ هي اكبر قيمة يمكن للدالة أن تأخذها في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$. وتجد أن

$$U_f(P) = \triangle x \sum_k M_k$$

حيث $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. ويكون

$$U_f(P) = \triangle x \sum_k x_k = \triangle x(\frac{b}{n} + \frac{2b}{n} + ... + \frac{nb}{n})$$

وللجمع السفلي للتجزئة P، $L_f(P)$ تجد أن

$$L_f(P) = \triangle x \sum_k x_{k-1} = \triangle x(0 + \frac{b}{n} + \frac{2b}{n} + ... + \frac{(n-1)b}{n})$$

حيث $M_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}$. ومن المعادلتين أعلاه تجد أن

$$U_f(P) = (\frac{b}{n})^2(1 + 2 + ... + n)$$

$$L_f(P) = (\frac{b}{n})^2(1 + 2 + ... + (n-1))$$

ويكون الفرق بينهما هو

$$U_f(P) - L_f(P) = (\frac{b}{n})^2 n = \frac{b^2}{n}$$

ويصبح شرط وجود تكامل الدالة في الفترة $[0, b]$ علي قيمة n هو

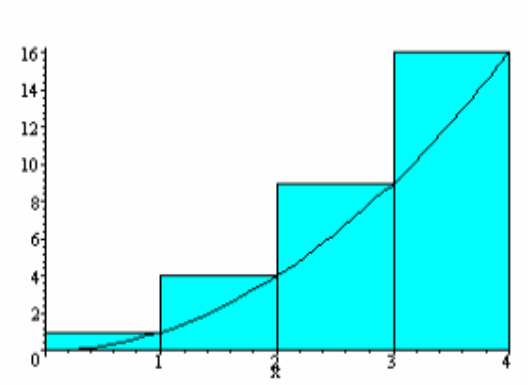
$$U_f(P) - L_f(P) = \frac{b^2}{n} < \epsilon$$

ويمكنك كتابة هذا الشرط علي الصورة

$$n > \frac{b^2}{\epsilon}$$

وتلاحظ انه كلما صغرت ε يكبر عدد التجزئات (n) في الفترة المعطاة.

والآن يمكنك إيجاد المساحة تحت المنحني $f(x) = x^2$ الموضح بالرسم أدناه.



فإذا اخترت النقطة x_i^* علي يمين النقطة x_i تحصل علي $x_1^* = x_1 = 0$ و $x_2^* = x_2 = 1$ و $x_3^* = x_3 = 2$ و $x_4^* = x_4 = 3$. وتكون المساحة المقربة هي

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \\ &\approx \frac{4-0}{4}\left(f(x_1^*)+f(x_2^*)+f(x_3^*)+f(x_4^*)\right) \\ &\approx f(1)+f(2)+f(3)+f(4) \\ &\approx 1+4+9+16 \\ &\approx 30 \end{aligned}$$

مثال:

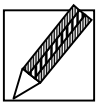
يمكن أن نقسم الفترة [0,4] إلى n قسم لتكون التجزئة علي النحو التالي $P = \{0,0.5,1,3.5,4\}$. وتكون تجزئة الفترة **(Subinterval)** هي [0,0.5],[0.5,1],[1,3.5],[3.5,4].

ففي هذه الحالة تلاحظ أن الفترة غير منتظمة لان تجزئة الفترة غير متساوية في أطوالها.

مثال:

إذا كان $a = 1$ و $b = 10$ و أخذت $a = x_0 = 1$ و $x_1 = 2$، $x_2 = 5$، $x_3 = 9$، $x_4 = b = 10$ فتكون التجزئة $P = \{[1,2],[2,5],[5,9],[9,10]\} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ حيث $I_1 = [1,2]$، $I_2 = [2,5]$، $I_3 = [5,9]$، $I_4 = [9,10]$. ويكون $\Delta x_1 = 2-1 = 1$، $\Delta x_2 = 5-2 = 3$، $\Delta x_3 = 9-5 = 4$، $\Delta x_4 = 10-9 = 1$.

تدريب (1)



1–جزئ الفترة [0,4] إلى 4 أقسام متساوية ومن ثم أوجد الفترات الجزئية.

مثال:

جزئ الفترة [–1,5] إلى 20 تجزئة متساوية، ثم أوجد الفترات الجزئية..

تجد أولاً أن طول الجزء الواحد هو $\Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{5-(-1)}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ ، وتكون نقاط الفترة المجزأة هي

$$x_i = a + i\Delta x = -1 + \frac{3}{10}i$$

ومنه تجد أن

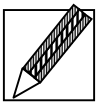
$x_0 = a = -1$,

$x_1 = -1 + \frac{3}{10} = -\frac{7}{10}$ ، $x_2 = -1 + \frac{3}{10} \times 2 = -\frac{2}{5}$ ، $x_3 = -1 + \frac{3}{10} \times 3 = -\frac{1}{10}$ ،.....،

$x_{20} = b = -1 + \frac{3}{10} \times 20 = 5$.

وتكتب نقا ط التجزئة علي الصورة $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots, x_{20}\}$. وتكون الفترات الجزئية هي: $I = [-1, -\frac{7}{10}], [-\frac{7}{10}, -\frac{2}{5}], \cdots, [\frac{47}{10}, 5]$.

تدريب(2)



1– أوجد قيمة $f(n)$ ومن ثم أوجد $\lim_{n\to\infty} f(n)$ ، إذا كان

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 3\left(\frac{i}{n}\right) + 1\right]$$

أسئلة تقويم ذاتي(1)

(1) إذا أردنا تجزئة الفترة [1,4] إلى 6 تقسيمات صغيرة متساوية في الطول، احسب عدد نقاط التجزئة في هذه الحالة.

(2) إذا جزأ شخص فترة الي 20 جزءاً متساوياً وحصل علي قاعدة لتجزئة كل جزء، وذلك علي النحو التالي

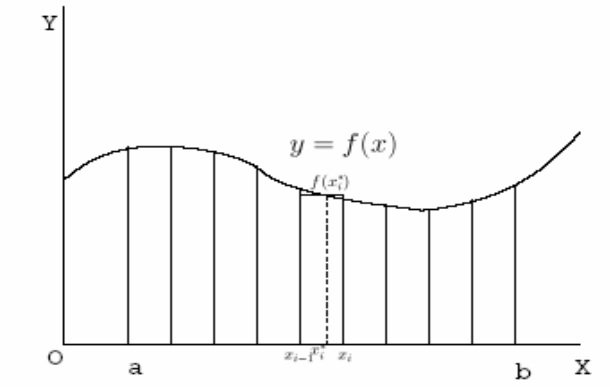
$$x_i = 4 + \frac{4i}{5} \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 20$$

أوجد الفترة التي جزءها هذا الشخص.

(3) إذا أردنا تجزئة الفترة [2,4] إلى 5 تقسيمات صغيرة متساوية في الطول، احسب عدد نقاط التجزئة في هذه الحالة، ثم عرض كل جزء من هذه الفترة (أوجد Δx_i).

2. الجمع الريماني *Riemannian Sum*

يستفاد من الجمع الريماني في إيجاد المساحة التي يحصرها منحني مع المحور السيني أو الصادي. وتعتمد هذه الطريقة الي تقسيم المساحة التي يحصرها المنحني الي مستطيلات صغيرة ومن ثم تكون المساحة الكلية هي مجموع مساحة هذه المستطيلات بالتقريب، كما في الرسم أدناه.



وقبل أن تجري عملية الجمع الريماني تلزمك معرفة بعض الجموع للمتسلسلات، فمثلاً تجد أن

$$\sum_{i=n}^{m} f(i) = f(n) + f(n+1) + f(n+2) + ... + f(m)$$

حيث n الحد الأدنى للجمع و m الحد الأعلى للجمع و i هو دليل **(index)** الجمع. ويُرمز للجمع بعلامة $\sum$

وللجمع الخواص التالية:

(أ)

$$\sum_{i=n}^{m}[f(i)+g(i)] = \sum_{i=n}^{m} f(i) + \sum_{i=n}^{m} g(i)$$

(ب)

$$\sum_{i=n}^{m} cf(i) = c\sum_{i=n}^{m} f(i)$$

(أ)

$$\sum_{i=n}^{m} 1 = (m-n+1)$$

(ب)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ج)

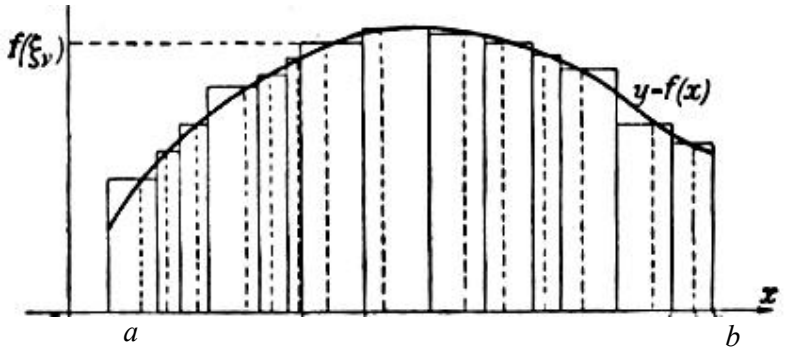
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(د)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

يمكنك إيجاد مساحة المستطيل في الفترة $[a,b]$ بتقسيمها إلى فترات صغيرة متساوية في طولها عددها n. ويكون بالتالي طول كل منها هو $\Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right)$. ومن ثم ترسم مستطيل

عرضه Δx وارتفاعه يساوي قيمة الدالة عند تلك النقطة $f(x_i)$. ومن هذه المقادير تقوم بجمع كل المساحات الصغيرة التي تساوي $f(x_i)\Delta x$ (الطول × العرض) لتحصل علي المساحة الكلية بالتقريب.



الرسم يوضح المساحة التي يحصرها المنحني $y = f(x)$ مع المحور السيني بين النقطتين a و b وهي بالتقريب تساوي مجموع المستطيلات المرسومة التي عرضها متساوي وطول كل منها يساوي $f(x_i)$.

ومن هذا التقسيم تجد أن

$$x_0 = a,,x_1 = a + \Delta x,\ \ldots,\ x_{n-1} = b - \Delta x,\ x_n = b.$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_j = a + j\Delta x$$

وتجد أن

$$L_n(f) = \sum_{i-1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}]\,\Delta x =$$

$$\left[\sum_{i-1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n}$$

والذي يساوي المقدار

$$\left[\sum_{i-1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n}$$

ويُعرف هذا بجمع اليد اليسرى. وكذلك

$$\mathcal{R}_n(f) = \sum_{i-1}^{n} f(x_i)\Delta x = [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\,\Delta x =$$

$$\left[\sum_{i-1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n}$$

والذي يُعرف بجمع اليد اليمني. وذلك تجد أن

$$\mathcal{M}_n(f) = \sum_{i-1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + ,\ (x_i)}{2}\right)\Delta x =$$

$$\left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right]\Delta x =$$

$$\left[\sum_{i-1}^{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n}$$

والذي يُعرفة

إذا كانت $f(x)$ دالة في الفترة المغلقة $[a,b]$، فإن التكامل المحدد من a الي b للدالة f هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

حيث $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ هو الـ].

ويُعرف المجموع

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; T_n \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,\Delta x \;=\; \frac{\Delta x}{2}\left\{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right\}$$

بقاعدة شبه المنحرف (Trapozoidal Sum). ومنه نُعّرف قاعدة سمبسون (Simpson) للجمع علي الصورة

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; S_n \;=\; \frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n \;=\; \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

حيث

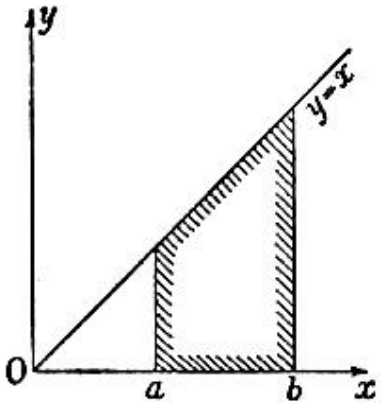
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; M_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x \;=\; \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$$

و

$$T_{2n} = (T_n + M_n)/2$$

مثال:

خـذ الدالـة $f(x) = x$ علـي الفتـرة [1,3]، أوجـد قيمـة التكامـل $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 x\,dx$ بطريقـة الجمع الريماني.



يوضح الرسم أعلاه المساحة المحصورة بين المستقيم $y = x$ والمحور السيني بين النقطتين $x = a$ و $x = b$

بوضـع $a = 1$، $b = 3$ يكـون $\Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{2}{n}$ و $x_i = a + i\Delta x$، أي $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$. ويُعطـي التكامل بالعلاقة التالية

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نجد أن $f(x_i) = x_i = 1 + \frac{2i}{n}$ و $\Delta x = \frac{2}{n}$. ونجد أن $\sum_{i=1}^{n}(1 + \frac{2i}{n})$ ومنها يكون

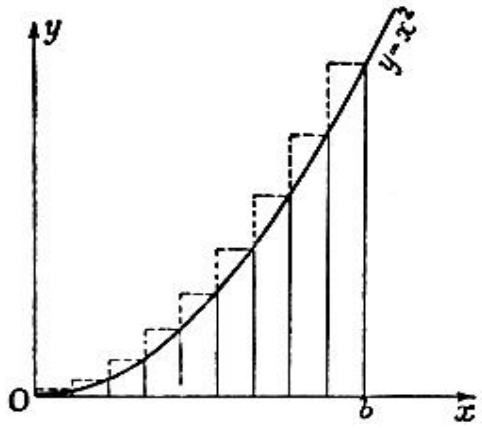
$$\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{2i}{n})\times\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{n}+\frac{4i}{n^2}) = \left(\frac{2n}{n} + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \left(\frac{2n}{n} + \frac{4}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)\right) = 2 + 2(1+\frac{2}{n})$$

وبالتالي يصبح التكامل في الصورة

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} 2 + 2(1+\frac{2}{n}) = 2 + 2 = 4$$

مثال:

خذ الدالة $f(x)=x^2$ علي الفترة [3,5]، أوجد قيمة التكامل $\int_3^5 f(x)\,dx=\int_3^5 x^2\,dx$.



يوضح الرسم أعلاه المساحة المصورة بين المنحني $y=x^2$ والمحور السيني بين النقطتين 0 و b.

بوضع $a=3$ ، $b=5$ يكون $\Delta x=\left(\frac{b-a}{n}\right)=\frac{2}{n}$ ومنها يكون $x_i=a+i\Delta x$ ، أي $x_i=3+\frac{2i}{n}$.

ويُعطي التكامل بالعلاقة التالية

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

تجد أن $f(x_i)=x_i^2=\left(3+\frac{2i}{n}\right)^2=9+\frac{12}{n}i+\frac{4}{n^2}i^2$ و $\Delta x=\frac{2}{n}$. و الآن تجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(3+\frac{2i}{n}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(9+\frac{12}{n}i+\frac{4}{n^2}i^2\right)$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=9\sum_{i=1}^{n}1+\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

ولكن

$$\sum_{i=1}^{n}1=n\ ,\ \sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{n}\ ,\ \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,\ \sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

وبالتعويض تحصل علي

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=9n+\frac{12}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\left(\frac{49}{3}n+8+\frac{2}{3n}\right)$$

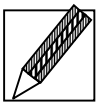
ومنها يصبح التكامل

$$\int_3^5 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\frac{2}{n}\right) = \left[\frac{49}{3}n + 8 + \frac{2}{3n}\right]\times\frac{2}{n}$$

أو

$$\int_3^5 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[(15n+6) + \frac{2}{3n}(2n^2+3n+1)\right]\times\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{49}{3} + \frac{8}{n} + \frac{2}{3n^2}\right) = \frac{98}{3}$$

تدريب(3)



(1) أوجد بالتقريب المساحة التي تحصرها الدالة $f(x) = x^2 - 1$ مع المحور السيني في الفترة [0,2] بطريقة جمع ريمان (***Riemann***).

مثال:

مستخدما طريقة جمع نقطة اليد اليسرى، أوجد $\int_0^1 x^2\,dx$. تلاحظ أن $f(x) = x^2$. تقسم أولا الفترة الي n قسم فيكون $a = x_0 = 0$ و $b = 1$ ومنها تجد أن $\Delta x = \frac{1}{n}$ و $x_i = \frac{i}{n}$. و الآن يصبح الجمع هو

$$\left[\sum_{i-1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n}$$

وبالتعويض عن $a = 0$ و $b = 1$ و $f(x_i) = x_i^2$ تحصل علي

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 1/n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\frac{2n^3-3n^2+n}{6} = \frac{2-3/n+2/n^2}{6}$$

ومنها تجد أن

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n+2/n^2}{6} = \frac{1}{3}$$

وإذا طبقت جمع اليد اليمني ستحصل علي

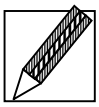
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 1/n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{2+3/n+2/n^2}{6}$$

الذي يُعطي

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3/n+2/n^2}{6} = \frac{1}{3}$$

وتلاحظ أن قيمة التكامل لا تعتمد على أي طريقة استخدمتها، نقطة المنتصف أم اليد اليمني أو اليسرى.

تدريب(4)



1- إذا تم تقريب المساحة التي يصنعها المنحني $y = 2x^2 + 4x$ في الفترة [2,5] بمجموع ريمان بعمل 10 أجزاء منتظمة، أوجد x_7 و Δx_7.

وللتكامل الخواص التالية:

(أ)

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(ب)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(ج) وللدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المتصلتين في الفترة $[a,b]$ نجد أن

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(د)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

متوسط الدالة

يُعطي متوسط قيمة الدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ بالعلاقة

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

أسئلة تقويم ذاتي(2)

(1) أوجد ناتج قيمة الجمع التالية

$$\sum_{i=1}^{n}(5i^3 - 3i + 4)$$

(2) أوجد المساحة التي تحصرها الدالة $f(x) = 2x + 3x^2$ مع المحور السيني في الفترة [2,5] بطريقة جمع ريمان (***Riemann***).

(3) أوجد المساحة التي تحصرها الدالة $f(x) = (2x+1)^2$ مع المحور السيني في الفترة [2,3] بطريقة جمع ريمان (***Riemann***).

(4) أوجد المساحة التي تحصرها الدالة $f(x) = x^3$ مع المحور السيني في الفترة [3,5] بطريقة جمع ريمان (***Riemann***).

(5) أوجد بالتقريب المساحة التي تحصرها الدالة $f(x) = x^2 + 1$ مع المحور السيني في الفترة [0,2] بطريقة جمع ريمان (***Riemann***).

الخلاصة

في نهاية هذه الوحدة دعنا نستعرض معك أهم ما ورد فيها.

بدأت الوحدة بوضع تعريف للفترات والتجزئة، وعرفنا التجزئة p للفترة المغلق $I=[a,b]$ بأنها مجموعة الفترات المغلقة $I_j=\lfloor x_{j-1},x_j\rfloor$

معرفة بترتيب الأعداد $x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n$ حيث $a=x_0,b=x_n$، ثم بينا طول الفترة وعرفناها بأنها $\Delta x_i=x_j-x_{j-1}$ ووجدنا أن الفترات لها أطوال متساوية أو مختلفة فالتجزئة المنتظمة: وهي التجزئة المتساوية في الطول $\Delta x_1=\Delta x_2=...=\Delta x_n$

وعند تجزئة الفترة إلى عدد n من الجزئيات المتساوية في الطول يكون العرض المشترك للجزئيات عبارة b-a/n والفترات التى لها أطوال مختلفة تعرف بالفترة الغير منتظمة، ثم تناولنا في الشرح كيف يمكن أن نتحصل على المساحة المحصورة بين الدالة *f (x)* في الفترة ([a,b] وهى عبارة عن $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a)$، حيث $x_0=a$,$x_n=b$ ومعرفة شرط تكامل الدالة وهى $n>b^2/\varepsilon$ حيث ε مقدار صغير و n عدد الجزئيات و p التجزئة و u الجمع العلوي و L الجمع السفلي ويكون عدد التجزئيات كبيرا عندما يصغر E، وفى القسم الثاني تم شرح الجمع الريمانى، واستخدامه في إيجاد المساحة التى يحصرها منحنى، مع المحور السيني، أو الصادي، والتى تعتمد على تقسيم المساحة التى يحصرها المنحنى إلى مستطيلات صغيرة،ومجموع هذه المستطيلات هي المساحة الكلية.فإذا كانت (f(x دالة في الفترة المغلقة [a ,b] فان التكامل المحدد من a إلى b للدالة f هو $\int_a^b$ وهو الجمع الريمانى للدالة (f(xعلى الفترة [a, b]

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

في الوحدة التالية سنتناول موضوع التكامل، نبدأ بتعريفة، ثم أهميته، وتطبيقاته في المجالات المختلفة. ثم نأتي إلى أنواع التكاملات، للدوال كثيرة الحدود، والتكامل بالتعويض، وتكامل الدوال المثلثية، واللوغريثمية، والتكامل بالأجزاء، وتكامل الدوال الآسية، وبطريقة الكسور الجزئية، والتكاملات القياسية، وقاعدة الاختزال.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

تجـد مباشـرة أن $a=0$ و $b=4$ و $n=4$. وتكـون التجزئـة فـي هـذه الحالـة هـي: $P=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}$. لإيجاد قيمة x_i توجد أولا عرض التجزئة $\Delta x=\frac{4-0}{4}=1$، ومنها تجد أن $x_i=x_0+i\Delta x$. ويكـــون $a=x_0=0$ و $x_4=b=4$،

$x_1=x_0+\Delta x=0+1=1$، $x_2=x_0+2\Delta x=0+2=2$ و $x_3=x_0+3\Delta x=0+3\times1=3$.

وتصبح الفترة هي $P=\{0,1,2,2,3\}$ والفترات الجزئية هي: $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$ (أ)

تدريب (2)

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2-3\left(\frac{i}{n}\right)+1\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-\frac{3}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{n}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{3(n+1)}{2n}+1$$

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{3(n+1)}{2n}+1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^2}{6n^2}+\frac{3n}{6n^2}+\frac{1}{6n^2}-\frac{3n}{2n}+\frac{3}{2n}+1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2n}+1\right]=\frac{1}{3}+0+0-\frac{3}{2}+0+1=-\frac{1}{6}$$

تدريب (3)

$$\Delta x=\frac{2}{200}=\frac{1}{100}$$

$$\sum_{i=1}^{200}\left(\left(\frac{i}{100}\right)^2-\left(\frac{i}{100}\right)\right)\frac{1}{100}=\frac{200\times201\times401}{1000000\times6}-\frac{200\times201}{10000\times2}=2.6867-2.01=0.6767$$

الإجابة الدقيقة لهذا السؤال هي: $\frac{2}{3}$

تدريب (4)

$$\Delta x = \frac{5-2}{10} = 0.3$$

التجزئة منتظمة إذن

$$x_7 = 2 + 7(0.3)$$
$$x_7 = 4.1$$
$$\Delta x_7 = 0.3$$

لأن التجزئة منتظمة

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

التقويم الذاتي(1)

عدد نقاط التجزئة 7 وهي:

1- $p = \{1,1.5,2,2.5,3,3.5,4\}$

2- الفترة هي: $\{4,20\}$

3- عدد نقاط التجزئة 6

عرض كل جزء = 0.4

$\Delta x_i = \frac{2}{5} = 0.4$ عرض كل جزء من الفترة

نقاط التجزئة هي:

$\{2,2.4,2.8,3.2,3.6,4\}$

تقوم ذاتي (2)

1- $\frac{5n^4 + 10n^3 - n^2 + 10n}{4}$

2- 138

3- $36\frac{1}{3}$

4- 136

5- 4.97

مسرد المصطلحات

التجزئة Partition

تعرف التجزئة p للفترة المغلقة$[a, b]$ =1 بأنها مجموعة الفترات المغلقة $[x_{j-1}, x_j]$=$_{1j}$

معرفة بترتيب الأعداد التالية $x_0<x_1<x_2 \quad < {}^{x}{}_{n-1}<x_n$

حيث $a=x_0$ و$b=x_n$

التجزئة المنتظمة Regular partition

تعرف التجزئة (p) بأنها منتظمة إذا كانت $p= \{x_0,x_1,x_2, \ldots ,x_n\}$

$\Delta_{x1}=\Delta_{x2}=\Delta_{x3}= \quad =\Delta_{xn}$

طول الفترة الجزئية Long partition Interval

هو $\Delta_{xi}= x_i-x_{i-1-}$

للفترة الجزئية رقم i

الفترة الغير منتظمة Irregular interval

هي الفترة الغير متساوية في أطوالها.

الجمع الريمانى Riemannian sum

هو تقسيم المساحة التى يحصرها المنحنى مع المحور السيني أو الصادي إلى مستطيلات صغيرة ثم جمع هذه المستطيلات لنتحصل على المساحة الكلية.

المراجع

1. Ayres, Frank and Mendel son, Elliott**,** Schaum, (1999) **Outline of Calculus,** McGraw-Hill

2. G.B, Thomas and R, Finney, (1996) **Calculus and Analytical Geometr**y, Addison- Wesley Publishing Co.

3..R, Ellis and D, Gulick, (1994) **Calculus with Analytic Geometry**, 5th Edition, SCP

4. H,.Anton, I, Bivens, and S, Davis, (2002) **Calculus (Early** transcendental), 7th Edition


الوحدة الثانية
التكامل

محتويات الوحدة

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	29
تمهيد	29
أهداف الوحدة	30
1 . تكامل الدوال كثيرة الحدود	32
2 .التكامل بالتعويض	34
3 . تكامل الدوال المثلثية	35
4. تكامل الدوال اللوغريثمية	38
5. التكامل بالأجزاء	42
6. تكامل الدوال الآسية	47
7.التكامل بطريقة الكسور الجزئية	49
1.7 .إذا كان المقام الكسرى مكرر	51
2.7.القسمة المطولة	53
8 .التكاملات القياسية	57
9 .قاعدة الاختزال	63
10 .التكامل بتعويض الدوال المثلثية	67
الخلاصة	74
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	75
إجابات التدريبات	76
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	96
مسرد المصطلحات	99
المراجع	101

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس

مرحبا بك مرة ثانية وقد انتقلت إلى الوحدة الثانية من المقرر الحسبان (2)

هذه الوحدة بعنوان التكامل: وهو العملية العكسية للتفاضل، وتمثل هذه الوحدة العمود الفقري لهذا المقرر، ولبقية الوحدات التالية ، تبدأ بتعريف التكامل وتبين استخداماته ،وتطبيقاته الكثيرة ففي الاقتصاد يستفاد منه في معرفة سعر الصرف إذا عرفت معدل التغير، وفى الطب في معرفة ضغط مريض إذا عرفت معدل التغير في الضغط ، وفى الهندسة لإيجاد المساحات المختلفة .

قسمت هذه الوحدة إلى عشرة أقسام كل قسم يشرح نوع من التكاملات.

القسم الأول: يبدأ بشرح تكامل الدوال كثيرة الحدود.

القسم الثاني: يوضح استخدام التكامل بالتعويض.

القسم الثالث: يشرح كيفية تكامل المتطابقات المثلثية.

القسم الرابع: يبدأ بوضع حل لتكامل الدوال اللوغريثمية.

القسم الخامس: عن التكامل بالأجزاء، ويشرح تكامل دالتين.

القسم السادس: يشرح الدوال الآسية.

القسم السابع:يوضح التكامل بطريقة الكسور الجزئية، وهى تشرح الدوال الكسريه وكيفيه معاملتها كمجموع لدوال كسرية بسيطة، بطريقتين إذا كان مقام الكسر مكرر، وعن طريق القسمة المطولة.

القسم الثامن: عن التكاملات القياسية.

القسم التاسع : يشرح قاعدة الاختزال وهى طريقة تكامل للتخلص من القوى العالية .

القسم العاشر: التكامل بتعويض الدوال المثلثية.

كل هذه الموضوعات تجدها داخل الوحدة مع الشرح المفصل، بالأمثلة والتمارين، وتوضيح للقوانين وتطبيقاتها، كذلك تجد أسئلة التقويم الذاتي، حتى يسهل عليك استرجاع معلوماتك، وتتأكد من استيعابك الكامل للوحدة، وتربطها مع الوحدة السابقة، ثم تأتى التدريبات لتساعدك على التدريب لحل الكثير من العمليات الرياضية في علم التكامل، عليك بالاهتمام بحلها، وعرضها على مشرفك

الأكاديمي، نتمنى أن تكون وحدة مفيدة، ولك أن تقدم لنا نقدك لها وتقيمك حتى تساعد في تطويرها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس

يتوقع منك بعد دراستك لهذه الوحدة أن تكون قادرا على أن:

- **تعرف** التكامل.
- **تشرح** تطبيقات التكامل المختلفة.
- **تحل** تكامل الدوال كثيرة الحدود.
- **تشرح** خطوات التكامل بالتعويض.
- **توضح** كيفية تكامل الدوال المثلثية واللوغريثمية.
- **توجد** التكامل لدالتين عن طريق التكامل بالأجزاء.
- **تشرح** تكامل الدوال الآسية.
- **تعرف** طريقة تكامل الكسور الجزئية، إذا كان مقام الكسر مكرر، أو عن طريق القسمة المطولة.
- **تستخدم** التكاملات القياسية.
- **تطبق** قاعدة الاختزال لتخفيض القوى العالية.
- **تشرح** التكامل بتعويض الدوال المثلثية.

عزيزى الدارس تذكر عندما تكلمنا عن التفاضل قلنا أن المشتقة الاولى اوالمعامل التفاضلى الاول للدالة $Y = f(x)$ يكتب dy/dx والان يُعّرف التكامل بأنه العملية العكسية للتفاضل.ويُرمز

للتكامل بالرمز $\int$. ونقصد بالتكامل $\int f(x)\,dx$ مجموعة الدوال التي تعتمد على x والتي تكون مشتقتها الأولى(تفاضلها) بالنسبة لـ x هي $f(x)$. وتأتي أهمية التكامل عموما عندما نعلم المعدل الذي تتغير به الدالة، ونود معرفة الدالة نفسها.

فعلي سبيل المثال نجد أن مشتقة الدالة $f(x)=x^3$ هو $\frac{df}{dx}=3x^2\equiv g(x)$. فإذا علمت بمشتقة الدالة $(g(x))$ وتريد أن تحصل علي الدالة $(f(x))$ فإنك تجري بما يُعرف بالتكامل وتكتب ذلك علي الصورة $\int g(x)\,dx=f(x)$. فإذا كانت $g(x)=x^n \quad , \quad n\neq 1$ فإن $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$، حيث C عدد ثابت. فإذا فاضلت ناتج التكامل تحصل علي الدالة المكامَلة (x^n)،وذلك لأن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{n+1}{n+1}x^n=x^n$$

وللتكامل تطبيقات كثيرة في مجال الفيزياء والهندسة والاقتصاد والطب و... الخ. فإذا عرفت معدل التغير في سعر صرف عملة ما وتود أن تحصل علي سعر الصرف للعملة. أو إذا عرفت معدل الزيادة في ضغط مريض و أردت أن تعرف الضغط نفسه. أو عرفت معدل الزيادة في نمو ارتفاع ساق نبات ما و أردت أن تعرف ارتفاع ساق النبات. في كل ذلك يلزمك إجراء التكامل لمعدل التغير لتحصل علي الكمية الأصلية.

ونجد أن هنالك خصائص للتكامل منها:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad \text{(for a constant k)}$$

$$\int (f(x)+g(x))dx \;=\; \int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)+C$$

$$\int (f(x)-g(x))dx \;=\; \int f(x)dx-\int g(x)dx$$

وإذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، أي $f(-x)=f(x)$ فإن

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ومن الخطأ كتابة

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx + g(x)\int f(x)dx \qquad (Wrong)$$

ولا يوجد قانون محدد لإيجاد التكامل للدالة في الصورة (قسمة دالتين)

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$$

ولإيجاد مثل هذا التكامل غالباً ما تستعمل طريقة التكامل بالتجزئة وسيتم شرحه لك في الوحدة القادمة ،ولنبدأ بتكامل الدوال الرياضية المعروفة وهي:

1. تكامل الدوال كثيرة الحدود

تُكتب الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (مثلا) على الصورة العامة

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int 3\,x^2 dx = \int 3\,\frac{x^3}{3}dx = 3\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$$ حيث C ثابت.

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int 3\,dx = \int 3\,x^0 dx = 3\frac{x^1}{1} + C = 3x + C\,.$$

وعموما فإن تكامل أي ثابت a هو

$$\int a\,dx = \int ax^0 dx = a\frac{x^1}{1} + C = a\,x + C\,.$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\begin{aligned}\int (x^3 + x^4)dx &= \int x^3 dx + \int x^4 dx \\ &= \frac{x^4}{4} + C + \frac{x^5}{5} + D \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + K\end{aligned}$$

حيث $K = C + D$.

مثال:

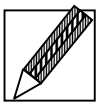
أوجد التكاملات التالية

$$1.\int (2x + 3x^2 + 12x^3 + 7)\ dx = 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^4}{4} + 7x + C = x^2 + x^3 + 3x^4 + 7x + C$$

$$2.\int (5x + 4x^2 + 2x^3 + 8)\ dx = 5\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} + 8x + C = \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + 8x + c$$

$$3.\int (9x + 3x^3 + 2x^6 + 7)\ dx = 9\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^7}{7} + 7x + C = \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{7}x^7 + 7x + C$$

تدريب (1)



أوجد التكاملات الآتية

1- $\int \sqrt{2x}dx$ 2- $\int \sqrt[3]{x}\ dx$

3- $\int (3x + 5)\ dx$ 4- $\int \sqrt{7x - 3}\ dx$

أسئلة تقويم ذاتي (1)



أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (12x^3 + 3x^2 + 4)dx$

(2) $\int (\sqrt[3]{x} + 4x - 7)dx$

(3) $\int (\sqrt{x} + x + 1)dx$

2. التكامل بالتعويض Integration by Substitution

لإيجاد مثل التكامل التالي $\int (ax+b)^n dx$ ، أتبع الخطوات التالية:

أولاً: تضع $y = ax + b$ وثانيا نأتي بـ $dy = a\,dx$ ثالثا يصبح التكامل في الصورة

$$\int (ax+b)^n dx = \int y^n \frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int y^n dy = \frac{1}{a}\frac{y^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

حيث C ثابت التكامل.

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int (3x+4)^5 dx$$

أولاً تضع $y = 3x + 4$ ومنها $dy = 3\,dx$ ، أو $dx = \frac{dy}{3}$ ،ليصبح التكامل في الصورة

$$\int (3x+4)^5 dx = \int y^5 \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int y^5 dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{y^6}{6} + C = \frac{1}{18}y^6 + C = \frac{1}{18}(3x+4)^6 + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int x^8(x^9+1)^2 dx$$

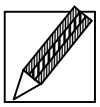
تضع $u = x^9 + 1$ ومنها $du = 9x^8 dx$ ، أو $dx = \frac{du}{9x^8}$ ، ليصبح التكامل في الصورة

$$\begin{aligned}
\int x^8(x^9+1)^2 dx &= \int x^8 u^2 \frac{du}{9x^8} \\
&= \frac{1}{9}\int u^2 du \\
&= \frac{1}{9}.\frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{27}u^3 + C
\end{aligned}$$

وأخيراً تجد أن

$$\int x^8(x^9+1)\,dx = \frac{1}{27}(x^9+1)^3 + C$$

تدريب (2)



أوجد التكاملات الآتية:

1. $\int (x^2-1)^4\, 2x dx$
2. $\int x(2x^2-1)^3\, dx$
3. $\int x(x-3)^5 dx$

أسئلة تقويم ذاتي (2)



أوجد التكاملات التالية:

$$\int (2x+4)^3 dx \quad (1)$$

$$\int x^2(3x+5)^3 dx \quad (2)$$

$$\int x^3(3-5x)^4 dx \quad (3)$$

3. تكامل الدوال المثلثية Trigonometric function

في كتاب الحسبان (1) قمت بإجراء بعض عمليات التفاضل للدوال المثلثية ، الآن سنحاول شرح التكامل بالتفصيل ، ولكي تطبق النظريات الأساسية في تكامل الدوال المثلثية هنالك **بعض القواعد وهى :**

تُعطى المتطابقات المثلثية بـ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$
$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

ويُعطي تكامل

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

و

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sin(ax)\, dx$$

بوضع $y = ax$ فإن $dy = a dx$ ويصبح التكامل في الصورة

$$\int \sin y \frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \sin y \, dy = \frac{1}{a}(-\cos y) + C = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \cos(ax)\, dx$$

بوضع $y = ax$ فإن $dy = a dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int \cos y \frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \cos y \, dy = \frac{1}{a}\sin y + C = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sin(3x + 4) dx$$

تضع أولاً $y = 3x + 4$ ومنها تجد أن $dy = 3\, dx$ وبالتعويض في التكامل أعلاه تحصل علي

$$\int \sin(3x + 4)\, dx = \int \sin y \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int \sin y \, dy = \frac{1}{3}(-\cos y) + C$$

وبالتالي فإن

$$\int \sin(3x + 4) dx = -\frac{1}{3}\cos(3x + 4) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sin(-2x + 5)\, dx$$

أولاً تضع $y = -2x + 5$ ومنها $dy = -2\, dx$ ليصبح التكامل في الصورة

$$\int \sin(-2x+5)\,dx = \int \sin y \left(\frac{dy}{-2}\right) = -\frac{1}{2}\int \sin y\ dy = -\frac{1}{2}(-\cos y) + C$$

$$\int \sin(-2x+5)\,dx = \frac{1}{2}\cos y + C = \frac{1}{2}\cos(-2x+5) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sin^3 x\ dx$$

يمكنك وضع

$$y = \cos x$$

و يكون

$$dy = -\sin x\,dx$$

يمكنك كتابة التكامل أعلاه في الصورة التالية

$$\int \sin^3 x\ dx = \int (\sin x^2)(\sin x)\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\ dx$$

$$\int \sin^3 x\ dx = -\int (1-y^2)\ dy = -y + \frac{y^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

مثال:

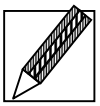
أوجد التكامل التالي

$$\int \sin x\ e^{\cos x} dx$$

بوضع $u = \cos x$ تحصل علي $du = -\sin x\ dx$ ويصبح التكامل

$$\begin{aligned}
\int \sin x\ e^{\cos x} dx &= \int \sin x\ e^{u}.\left(-\frac{du}{\sin x}\right) \\
&= -\int e^{u} du \\
&= -e^{u} + C \\
&= -e^{\cos x} + C
\end{aligned}$$

تدريب (3)



أوجد التكاملات الآتية:

1. $\int \sin x \cos x dx$ 2. $\int \cos 3x dx$ 3. $\int \sec^3 x \tan x dx$

أسئلة تقويم ذاتي(3)



أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x(\cos x)dx$ (2) $\int x^2 \sin(x)dx$ (3) $\int x^2 e^{3x} dx$

4.الدوال اللوغريثمية Logarithmic Function

إذا أردت إيجاد التكامل $\int \frac{1}{x} dx$ باستخدام القانون الذي كتبناه سابقاً $\left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$ ستحصل على

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{1}{0} + C = \infty$$

وتفشل بذلك هذه الطريقة ولكن التكامل الحقيقي يُعطي بـ

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

ويعني ذلك أن $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ حتى تحصل علي الدالة الأصلية $\left(\frac{1}{x}\right)$.

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{3}{5x+6} dx$$

تضع أولاً $y = 5x + 6$ ومنه يكون $dy = 5\ dx$ أو $dx = \frac{dy}{5}$ ليصبح التكامل

$$\int \frac{3}{5x+6} dx = \int \frac{3}{y} \frac{dy}{5} = \frac{3}{5} \int \frac{1}{y} dy = \frac{3}{5} \ln y + C = \frac{3}{5} \ln (5x+6) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$$

تضع أولاً $y = x^2 + 3x$ ومنه يكون $dy = (2x+3)\,dx$ أو $dx = \frac{dy}{(2x+3)}$ ليصبح التكامل

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln y + C = \ln(x^2+3x) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{2+x}{2x+2}\,dx$$

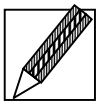
تضع أولاً $y = 2x + 2$ أو $x = \frac{1}{2}(y-2)$ ومنه يكون $dy = 2\,dx$ أو $dx = \frac{dy}{2}$ ليصبح التكامل

$$\int \frac{2+x}{2x+2}\,dx = \int \frac{2+\frac{1}{2}(y-2)}{y}\frac{dy}{2} = \int \frac{\frac{4+(y-2)}{2}}{y}\frac{dy}{2} = \frac{1}{4}\int \frac{4+(y-2)}{y}\,dy$$

$$\int \frac{2+x}{2x+2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2+y}{y}\,dy = \frac{1}{4}\int (\frac{2}{y}+1)\,dy = \frac{1}{4}\int (\frac{2}{y}\,dy + dy) = \frac{1}{4}(2\ln y + y) + C$$

$$\int \frac{2+x}{2x+2}\,dx = \frac{1}{4}[2\ln(2x+2) + (2x+2)] + C$$

تدريب (4)



أوجد التكامل التالي

1- $\int x(\ln x)\,dx$

2- $\int \sin(5x)\cos(5x)\,dx$

3- $\int \frac{x}{1+16x^4}\,dx$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

وبوضع $y = \cos x$ فإن $dy = -\sin x \, dx$ والآن يكون

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dy}{y} = -\ln y + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sec x dx$$

أولاً تعلم أن

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos}{\cos^2 x} = \frac{\cos}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

أو

$$\sec x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1}{2}[\frac{\cos x}{(1-\sin x))} + \frac{\cos x}{(1+\sin x)}]$$

ومنها فإن

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{2}[\frac{\cos x}{(1-\sin x))} + \frac{\cos x}{(1+\sin x)}] \, dx$$

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2}[\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)} dx + \int \frac{\cos x}{(1+\sin x)} dx]$$

والآن لإيجاد

$$\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)} dx$$

تضع $y = 1 - \sin x$ ومنها $dy = -\cos x dx$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)} dx = \int -\frac{dy}{y} = -\ln y + C$$

وبنفس الطريقة لإيجاد التكامل

$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)} dx$$

تضع $y = 1 + \sin x$ ومنها $dy = \cos x\, dx$ وتحصل على

$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)} dx = \int \frac{dy}{y} = \ln y + C .$$

ويصبح التكامل في الصورة

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}[\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)} dx + \int \frac{\cos x}{(1+\sin x)} dx]$$

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x)$$

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)}{(1-\sin x)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$$

$$\int \sec x\, dx = \ln\frac{(1+\sin x)}{\cos x} = \ln(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x})$$

$$\int \sec x\, dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x+1)}}$$

أولاً تضع $u = x + 1$ ومنها $du = dx$ ليصبح التكامل في الصورة

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x+1)}} = \int \frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}$$

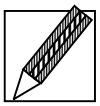
والآن تضع $u = \mathrm{v}^2$ ومنها $du = 2\mathrm{v}\ \mathrm{dv}$ ويصبح التكامل أعلاه

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(u-1)\sqrt{u}} &= \int \frac{2v\, dv}{(v^2-1).v} \\
&= \int \frac{2dv}{(v+1)(v-1)} \\
&= \int \left(\frac{-1}{v+1} + \frac{1}{v-1}\right) dv \\
&= -\log(v+1) + \log(v-1) + C \\
&= \log\left(\frac{v-1}{v+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

حيث استخدمت العلاقة التالية

$$\frac{2}{(v+1)(v-1)} = \frac{-1}{v+1} + \frac{1}{v-1}$$

تدريب (5)



أوجد التكامل التالي

$$1-\int \tan(3x+4)dx$$

$$2-\int \frac{5}{x^2+6x+13}\,dx$$

أسئلة تقويم ذاتي (4)



أوجد التكاملات التالية:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x}dx \quad (1) \qquad \int \tan(2x)dx \quad (2) \qquad \int \frac{3x+6}{x+4}dx \quad (3)$$

5. التكامل بالأجزاء Integration by Parts

لعلك تعلم أنه لأي دالتين u و v أن

$$d(u\ \mathrm{v}) = u\ d\mathrm{v} + \mathrm{v}\ du$$

وبأخذ التكامل للطرفين تحصل على

$$\int d(u\ \mathrm{v}) = \int (u\ d\mathrm{v} + \mathrm{v}\ du)$$

أو

$$u\ \mathrm{v} = \int (u\ d\mathrm{v} + \mathrm{v}\ du)$$

ومنها تجد أن

$$\int u\ d\mathrm{v} = u\ \mathrm{v} - \int \mathrm{v}\ du$$

وللاستذكار: الأول × تكامل الثاني– تكامل الثاني × تفاضل الأول

مثال:

أوجد التكامل التالي

- $\int x\sin x dx$

بوضع $u = x$ و $\mathrm{dv} = \sin x\,\mathrm{dx}$ نجد أن $\mathrm{d}u = dx$ و $\mathrm{v} = -\cos\mathrm{x}$ وبالتعويض نحصل على:

$$\int x\sin x\,dx = x\cos x - \int -\cos x\,dx = x\sin x + \sin x + C$$

- $\int \ln x\,dx$

بوضع $u = \ln x$ و $\mathrm{dv} = \mathrm{dx}$ نجد أن $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}dx$ و $\mathrm{v} = \mathrm{x}$ وبالتعويض نحصل على:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx$$

أو

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

- $\int xe^{2x}dx$

بوضع $u = x$ و $\mathrm{dv} = e^{2x}\mathrm{dx}$ نجد أن $\mathrm{d}u = dx$ و $\mathrm{v} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$ وبالتعويض نحصل على

$$\int xe^{2x}dx = x(\frac{1}{2}e^{2x}) - \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

مثال:

أوجد التكامل الاتى

$$\int (\ln\ x)^2\,dx$$

بوضع $u = \ln x$ و $du = \frac{1}{x}dx$ و $dv = \ln x\,dx$ ومنها نجد أن

$$\mathrm{v} = x\ln x - x$$

(من المثال السابق)

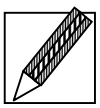
$$\int (\ln\ x)^2 dx = \int (\ln\ x)(\ln\ x)\,dx = \ln x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$\int (\ln\ x)^2 dx = \ln x(x\ln x - x) - \int (\ln\ x - 1)\,dx$$

$$\int (\ln\ x)^2 dx = \ln x(x\ln x - x) - \int (\ln\ x)dx - \int dx$$

$$\int (\ln\ x)^2 dx = \ln x(x\ln x - x) - (x(\ln x) - x) + x$$

تدريب(6)



1) أوجد التكامل التالي

$$\int \sec^2 x \tan^2 x \; dx$$

2) أوجد التكاملات التالية مستخدما القاعدة

$$\int u \; dv = u \; v - \int v \; du$$

(i)

$$\int (3 - 5x) \cos(4x) \; dx$$

(ii)

$$\int (7 - 3x) e^{6x} \; dx$$

(iii)

$$\int (x^3 + 5) \ln(x) \; dx$$

(iv)

$$\int x^2 \cos(4x) \; dx$$

(v)

$$\int e^{2x} \cos(x) \; dx$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int x^3 \ln(3x) \; dx$$

بوضع $y = 3x$ و $dy = 3 \; dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int x^3 \ln(3x)\, dx = \int (\frac{y}{3})^3 \ln y \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int y^3 \ln y\, dy$$

$$\int x^3 \ln(3x)\, dx = \frac{1}{3}\int y^3 \ln y\, dy$$

ولإيجاد التكامل

$$\int y^3 \ln y\, dy$$

نضع $u = y$ و $du = dy$ و $dv = \ln y\, dy$ ومنها $v = y\ln y - y$ وبالتعويض نحصل على

$$\int y^3 \ln y\, dy = y^3(y\ln y - y) - \int 3y^2(y\ln y - y)\, dy$$

$$\int y^3 \ln y\, dy = y^4 \ln y - y^4) - 3\int y^3 \ln y - 3\int y^3\, dy$$

$$\int y^3 \ln y\, dy + 3\int y^3 \ln y\, dy = y^4 \ln y - y^4 + 3\frac{y^4}{4} + C$$

$$4\int y^3 \ln y\, dy = y^4 \ln y - y^4 + 3\frac{y^4}{4} + C$$

$$\int y^3 \ln y\, dy = \frac{1}{4}(y^4 \ln y - \frac{1}{16}y^4 + C)$$

$$\int (3x)^3 \ln(3x)\, d(3x) = \frac{1}{4}((3x)^4 \ln(3x) - \frac{1}{16}(3x)^4 + C)$$

$$81\int x^3 \ln(3x)\, dx = \frac{1}{4}((3x)^4 \ln(3x) - \frac{1}{16}(3x)^4 + C)$$

$$\int x^3 \ln(3x)\, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(3x) - \frac{1}{16}x^4 + C)$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$I = \int \sec^3 x\, dx$$

نكتب التكامل أولاً في الصورة

$$I = \int \sec(x)\sec^2 x\, dx$$

ويمكن أن نحصل علي هذا التكامل بالأجزاء، وذلك بوضع

$$u = \sec x$$

الذي يُعطي

$$dv = \sec^2 x\, dx \quad , \qquad du = (\sec x)(\tan x)\, dx$$

والذي يُعطي بالتكامل المعادلة

$$v = \tan x$$

وبالتعويض في المعادلة العامة $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ نجد أن

$$I = \int \sec^3 x\,dx = (\sec x)\tan x - \int (\tan x)\sec x \tan x\,dx$$

$$I = \int \sec^3 x\,dx = (\sec x)\tan x - \int (\tan^2 x)\sec x\,dx$$

والآن نكتب

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

ليكون التكامل أعلاه في الصورة

$$I = \int \sec^3 x\,dx = (\sec x)\tan x - \int (\sec x)(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$I = (\sec x)\tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\,dx$$

$$I = (\sec x)\tan x - \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

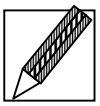
$$I = (\sec x)\tan x - I - \int \sec x\,dx$$

$$2I = (\sec x)\tan x - \int \sec x\,dx$$

$$2I = (\sec x)\tan x - \ln(\sec x + \tan x)$$

$$I = \frac{1}{2}[(\sec x)\tan x - \ln(\sec x + \tan x)]$$

تدريب (7)



1- أوجد التكاملات التالية

1 $\int \sin^{-1} x\,dx$

2 $\int_0^{\infty} e^{-7x}\sin(x)\,dx$

3 $\int x\tan^{-1}(x)\,dx$

4 $\int \sec^2(x)\tan(x)\,dx$

أسئلة **تقويم ذاتي (5)**

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int x\sin(2x)\,dx$ (2) $\int x^2\cos(2x)\,dx$ (3) $\int \ln(x)\,dx$

6. تكامل الدوال الأسية والزائدية

Integration Of Exponential and Hyperbolic Functions

يُعطي $\sinh x$ و $\cosh x$ بـ

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وعليه فإن

$$\int \sinh x dx = \frac{1}{2}[\int (e^x - e^{-x})\,dx] = \frac{1}{2}[\int e^x dx - \int e^{-x} dx]$$

$$\int \sinh x\,dx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

وبالمثل

$$\int \cosh x\,dx = \frac{1}{2}(\int (e^x + e^{-x})\,dx) = \frac{1}{2}(\int e^x dx + \int e^{-x} dx) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \sinh x + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sinh(ax)\,dx$$

وبوضع $y = ax$ ومنها $dy = a\,dx$ يصبح التكامل أعلاه

$$\int \sinh(ax)\,dx = \int \sinh y \frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \sinh y\,dy = \frac{1}{a}\cosh y + C$$

$$\int \sinh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \tanh x dx$$

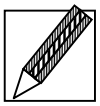
أولاً تكتب التكامل أعلاه في الصورة

$$\int (\tanh x)dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx$$

وبوضع $y = \cosh x$ ومنه تحصل علي $dy = \sinh x\,dx$ وبالتعويض في التكامل أعلاه تجد أن:

$$\int (\tanh x)\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx = \int \frac{dy}{y} = \ln y + C = \ln(\cosh x) + C$$

تدريب(8)



أوجد التكامل التالي

$$\int (\tanh x)dx$$

أسئلة تقويم ذاتي(6)



أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x(\tanh x)\,dx$

(2) $\int x\sin 3x\,dx$

(3) $\int (\coth 6x)\,dx$

7. التكامل بطريقة الكسور الجزئية

Integration by Partial Fractions

وهي طريقة جبرية يمكن النظر إليها بأنها عملية أيجاد المضاعف المشترك الأعظم بالعكس (*reverse*). وتسمح هذه الطريقة بمعاملة الدوال الكسرية (*rational function*) كمجموع لدوال كسرية أخري بسيطة.

مثال:

أوجد الأعداد الحقيقية A و B بحيث أن

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-7}$$

ومن ثم توجد $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-7)} dx$.

بأخذ المضاعف المشترك الأعظم للطرف الأيسر تحصل على

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-7)} = \frac{A(x-7)+B(x-1)}{(x-1)(x-7)} = \frac{(A+B)x-(7A+B)}{(x-1)(x-7)}$$

وبمساواة معامل x والحد المطلق في البسط في الطرفين تحصل على

$$-B-7A=1, A+B=1$$

وبحلهما آنياً تحصل على

$$A=-\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad B=\frac{4}{3}$$

ويكون المقدار أعلاه في الصورة الكسرية التالية

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-7)} = \frac{-1}{3(x-1)} + \frac{4}{3(x-7)}$$

والذي يمكن إيجاد تكامله بسهولة

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-7)} dx = \int \frac{-1}{3(x-1)} dx + \int \frac{4}{3(x-7)} dx$$

وتجد أن

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-7)} dx = -\frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{4}{3}\ln(x-7) + C$$

مثال:

أوجد الأعداد الحقيقية A و B بحيث أن

$$\frac{2-x}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

ومن ثم أوجد

$$\int \frac{2-x}{(x+1)(x-3)} dx$$

بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للطرف الأيسر تحصل على

$$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

أو

$$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(B+A)x+(B-3A)}{(x+1)(x-3)}$$

وبمساواة معامل x والحد المطلق في البسط في الطرفين تحصل على

$$B + A = -1,\ A - 3B = 2$$

وبحلهما آنياً تحصل على

$$A = -\frac{3}{4} \quad \text{و} \quad B = -\frac{1}{4}$$

ويصبح المقدار أعلاه في الصورة التالية

$$\frac{2-x}{(x+1)(x-3)} = \frac{-3}{4(x+1)} + \frac{-1}{4(x-3)}$$

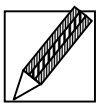
وعليه فإن التكامل أعلاه

$$\int \frac{2-x}{(x+1)(x-3)} dx$$

يصبح في الصورة التالية

$$-\int\left(\frac{3}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-3)}\right)dx = -\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3}$$
$$= -\frac{3}{4}\log|x+1|-\frac{1}{4}\log|x-3|+C$$

تدريب(9)



أوجد التكاملات الآتية:

(1) $\int\frac{x+5}{(x-1)(x-2)}dx$ (2) $\int\frac{5x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

أسئلة تقويم ذاتي(7)



أ وجد التكاملات التالية:

(1) $\int\frac{3x+4}{(x-2)(2x+5)}dx$ (2) $\int\frac{3x-2}{(3x+2)(x-5)}dx$ (3) $\int\frac{x-1}{x(3x+8)}dx$

7.1 إذا كان مقام الكسر مكرر فإننا نكتب الكسر في الصورة

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للطرف الأيسر تحصل على

$$\frac{(6x+7)}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

أو

$$\frac{(6x+7)}{(x+2)^2}=\frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$$

وبمساواة معامل x والحد المطلق في البسط في الطرفين تحصل على

$$A=6,\ 2A+B=7$$

ويكون المقدار أعلاه في الصورة التالية

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

وبحلهما آنياً تحصل على

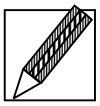
$$A = 6 \quad \text{و} \quad B = -5$$

وعليه فإن التكامل أعلاه يصبح في الصورة

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx &= 6\int \frac{dx}{x+2} dx - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= 6\log|x+2| + \frac{5}{x+2} + C \end{aligned}$$

(حيث $\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int (x+2)^{-2} dx = -(x+2)^{-1} = \frac{-1}{(x+2)}$)

تدريب (10)



أوجد التكامل الآتي:

(1) $\int \frac{x-2}{(x+1)^2} dx$

أسئلة تقويم ذاتي(8)



أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{2x+1}{(x-2)^2} dx$ (2) $\int \frac{7x+3}{(2x+1)^2} dx$ (3) $\int \frac{5x}{(9x+4)^2} dx$

7.2 القسمة المطولةLong Division

عزيزي الدارس، في بعض الأحيان نحتاج إلى إجراء القسمة المطولة حتى تجرى عملية التكامل بطريقة مبسطة وهذ1المثال سوف يشرح لك كيفية الحل

خذ المقدار التالي:

$$\frac{5x^3-10x^2-16x+2}{x^2-2x-3}$$

ثم أكتب الناتج في صورة كسور جزئية.

أستخدم أولاً عملية القسمة المطولة لتحصل على

$$\begin{array}{r|l} & 5x \\ \hline x^2-2x-3 & 5x^3-10x^2-16x+2 \\ & \underline{5x^3-10x^2-15x} \\ \text{remainder} & -x+2 \end{array}$$

ويعني هذا أن حاصل القسمة للمقدار

$$\begin{aligned} \frac{5x^3-10x^2-16x+2}{x^2-2x-3} &= 5x+\frac{2-x}{x^2-2x-3} \\ &= 5x+\frac{2-x}{(x+1)(x-3)} \\ &= 5x-\frac{3}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-3)} \end{aligned}$$

ويمكنك التأكد من صحة ذلك باستخدامك القاعدة السابقة لتحويل المقدار

$$\frac{2-x}{(x+1)(x-3)}$$

إلى الصورة

$$\frac{3}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-3)}$$

ولإيجاد التكامل التالي

$$\int \frac{5x^3-10x^2-16x+2}{x^2-3x-2}dx$$

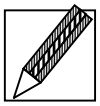
فإن

$$\int \frac{5x^3 - 10x^2 - 16x + 2}{x^2 - 3x - 2} dx = \int 5x dx + \int \frac{3}{4(x+1)} dx - \int \frac{1}{4(x-3)} dx$$

أو

$$\int \frac{5x^3 - 10x^2 - 16x + 2}{x^2 - 3x - 2} dx = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x-3) + C$$

تدريب(11)



أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int 9xe^{5-3x^2}\, dx$ (2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$ (3) $\int e^{6x}\cos(2x)\, dx$

(4) $\int x^3 \sin(x)\, dx$ (5) $\int \cos^2 x \sin^3(x)\, dx$ (6) $\int \sec^2(x)\tan^2(x)\, dx$

(7) $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ (8) $\int \left[(x^2-1)+(x^2+3x)^2\right] dx$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{(x+3)}{(x^2+1)(x-1)} dx$$

أولاً تكتب المقدار

$$\frac{x+3}{(x^2+1)(x-1)}$$

في صورة كسور جزئية على النحو

$$\frac{x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

حيث وضعت في بسط الحد الأول $Ax+B$ لوجود x^2 في مقامه، حيث تكون درجة البسط اقل من درجة المقام بدرجة واحدة.

ويصبح الآن المقدار أعلاه في الصورة

$$\frac{x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

أو

$$\frac{x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(B-A)x+(C-B)}{(x^2+1)(x-1)}$$

وبمساواة معامل x^2 و x والحد المطلق في البسط في الطرفين تحصل على

$$A+C=0,\ B-A=1\ ,\ C-B=3$$

ومنها تحصل على

$$A=-2\ ,\ B=-1\ ,\ C=2$$

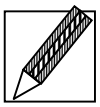
والآن تحصل على

$$\frac{x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-2x-1}{x^2+1} + \frac{2}{x-1}$$

ويصبح التكامل التالي

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{-2x-1}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx &= -\int\frac{2xdx}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1} + 2\int\frac{dx}{x-1} \\ &= -\log(x^2+1) - \tan^{-1}x + 2\log|x-1| + C\end{aligned}$$

تدريب(12)



1- أوجد التكاملات الآتية:

أ- $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

ب- $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

ج- $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

2- أثبت أن:

(أ) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = x+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C$

(ب) $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}dx = \ln(x^2-x+6)+C$

ملحوظة:

(أ) إذا كان في الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ r جذر حقيقي من الرتبة k لـ $Q(x)$، فإن ناتج القسمة يحتوي علي الحدود التالية:

$$\frac{A_1}{(x-r)}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+...+\frac{A_k}{(x-r)^k}$$

(ب) وإذا كان في الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يحتوي $Q(x)$ علي الحد ax^2+bx+c، فإن ناتج القسمة يحتوي على الحدود التالية:

$$\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

حيث $B_1,B_2,B_3,\cdots C_1,C_2,C_3,\cdots$ ثوابت غير معلومة.

تدريب(13)

اثبت أن:

$$\int\frac{3x+11}{x^2-x+6}dx=4\ln(x-3)-\ln(x+2)+C \quad (1)$$

$$\int\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}dx=\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{5}{6}\ln(3x-2)+C \quad (2)$$

$$\int\frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+2\ln(x)-\frac{6}{x}-2\ln(x-3)+C \quad (3)$$

أسئلة تقويم ذاتي(9)

1 أوجد التكاملات التالية

1. $\int\frac{x+5}{(x-1)(x-2)}dx$
2. $\int\frac{x-2}{(x+1)^2}dx$
3. $\int\frac{5x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

8. التكاملات القياسية

لقد سبق أن تعرفت في دراستك السابقة في الحسبان (1)، أن مشتقة الدالة $f(x)=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ هي $\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{x^2+a^2}$، وبالتالي يكون تكامل الدالة $\frac{1}{x^2+a^2}$ هو $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

وبالمثل لبقية الدوال نجد أن :

(أ) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$ .....

(ب) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}+C$ ، $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$

(ج) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+C$ ، $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{a-x}{a+x}|+C$

و

(د) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$ ، $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

(هـ) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$ أعلي $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+|+\sqrt{x^2+a^2}|+C$

(و) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$ ، $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\cos^{-1}\frac{x}{a}+C$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

أولاً تضع $u=\frac{1}{x}$ ومنه يكون $du=-\frac{1}{x^2}dx=-u^2dx$ أو $-\frac{du}{u^2}=dx$ ليصبح التكامل أعلاه

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int u \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2}-a^2}}(-\frac{du}{u^2}) = -\int \frac{1}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}-a^2}}du$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2a^2}}du = -\int \frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{a^2}-u^2}}du = -\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-u^2}}du$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{u}{(\frac{1}{a})} + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{\frac{1}{x}}{(\frac{1}{a})} + C = -\frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{x} + C$$

ويمكنك كتابة التكامل أعلاه في الصورة

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C \quad \text{(اثبت ذلك)}$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

تلاحظ أن هذا التكامل يمكن وضعه علي الصورة القياسية التالية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{2} + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$$

تلاحظ أن هذا التكامل يمكن وضعه علي الصورة القياسية التالية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}} = \sinh\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$$

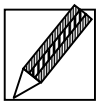
تلاحظ أن هذا التكامل يمكن وضعه علي الصورة القياسية التالية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{9}{2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{9}{2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}}+C$$

حيث نجد أن $a=\sqrt{\frac{9}{2}}$.

تدريب(14)



أوجد التكامل التالي

1- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-2}}$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+25}\,dx$

3- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

أمثلة متنوعة:

(1) أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

بوضع $y = e^x$ فإن $y^2 = e^{2x}$ ومنه نجد أن $dy = e^x dx$ ويصبح التكامل

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1+y^2}dy = \tanh^{-1} y + C$$

$$\therefore \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \tanh^{-1} e^x + C$$

(2) أوجد التكامل التالي

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$$

بوضع $y = \sqrt{x}$ فإن $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ و يصبح التكامل

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = \int y\, e^y (2y\, dy) = 2\int y^2\, e^y\, dy = 2(y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y + C)$$

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = 2(xe^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 2e^{\sqrt{x}} + C)$$

(3) أوجد التكامل التالي

$$\int z(\log z)^2 dz$$

أولاً نضع $u = \log z$ (أو $u = \ln z$) ومنه فإن $z = e^u$ ومنه يكون $du = \frac{1}{z}dz$ ليصبح التكامل

$$\begin{aligned}
\int z(\log z)^2 dz &= \int z^2 u^2 du \\
&= \int u^2 e^{2u} du \\
&= \frac{1}{2}e^{2u}.u^2 - \int \frac{1}{2}e^{2u}.2u\ du \\
&= \frac{u^2 e^{2u}}{2} - \int ue^{2u} du \\
&= \frac{u^2 e^{2u}}{2} - \left(\frac{ue^{2u}}{2} - \int \frac{e^{2u}}{2}.1du\right) \\
&= \frac{u^2 e^{2u}}{2} - \frac{ue^{2u}}{2} + \frac{1}{4}e^{2u} + C \\
&= \frac{e^{2u}}{4}(2u^2 - 2u + 1) + C \\
&= \frac{z^2}{4}\left(2(\log z)^2 - 2\log z + 1\right) + C
\end{aligned}$$

(4) أوجد التكامل التالي

$$\int x^3 \sin(x^2)\, dx$$

بوضع $y = x^2$ فإن $dy = 2x\, dx$ ويصبح التكامل

$$\int x^3 \sin x^2 dx = \int x^3 \sin y \frac{dy}{2x} = \int x^2 \sin y \frac{dy}{2} = \int y \sin y \frac{dy}{2}$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int y \sin y\ dy = \frac{1}{2}(-y\cos y + \sin y + C)$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{2}(-x^2 \cos x^2 + \sin x^2 + C)$$

(5) أوجد التكامل التالي

$$\int \sec^3 x \tan x\, dx$$

بوضع $y = \tan x$ فإن $dy = \sec^2 x\, dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int \sec^2 x \tan x\, dx = \int \sec^2 x\ y\ \frac{dy}{\sec^2 x} = \int y\, dy = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\int \sec^2 x \tan x\, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

(6) أوجد التكامل التالي

$$\int \sec(\tan 4x)\sec^2(4x)\,dx$$

بوضع $y = \tan 4x$ فإن $dy = 4\sec^2 4x\,dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int \sec(\tan\ 4x)\sec^2(4x)\,dx = \int \sec\ y\,\frac{dy}{4} = \frac{1}{4}\int \sec\ y\ dy$$

$$\int \sec(\tan\ 4x)\sec^2(4x)\,dx = \frac{1}{4}(\ln(\sec\ y + \tan\ y) + C$$

$$\int \sec(\tan\ 4x)\sec^2(4x)\,dx = \frac{1}{4}[\ln(\sec(\text{ta n}\,4x) + \tan(\tan\ 4x)] + C$$

(7) أوجد التكامل التالي

$$\int (\sec^3 x)(\tan x)\,dx$$

بوضع $y = \sec x$ فإن $dy = (\sec x)(\tan x)\,dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int \sec^3 x(\tan x)\,dx = \int \sec^2 x(\sec\ x)(\tan x)\,dx$$

$$\int \sec^3 x(\tan x)\,dx = \int y^2\,dy = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C$$

$$\int \sec^3 x(\tan x)\,dx = \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

(8) أوجد التكامل التالي

$$\int e^x \sin x\,dx$$

بوضع $u = \sin x$ فإن $du = \cos x\,dx$ و $dv = e^x dx$ و $v = e^x$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

والآن لإيجاد $\int e^x \cos x dx$ نضع $u = \cos x$ فإن $du = -\sin x\,dx$ و $dv = e^x dx$ و $v = e^x$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

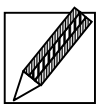
وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x + C)$$

تدريب (15)



(1) أوجد التكامل التالي

$$\int \sin x \, e^{\cos x} dx$$

(2)

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx$$

أسئلة تقويم ذاتي (10)



أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ (2) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{8-x^2}}$ (5) $\int \frac{dx}{(2x^2+3x+5)}$ (6) $\int \frac{dx}{3x^2-12}$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-20}}$ (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2+x}}$

9. قاعدة الاختزال Reduction Formula

سوف نطرح لك سؤالا، عليك أن تحاول أجابته قبل أن تقرأ هذا الشرح ، والسؤال هو ماذا إذا كان التكامل لدرجات عالية من x مضروباً في دالة آسية، أو مثلثية معقداً ؟ والإجابة تكون هو استخدام قاعدة عامة تُعرف بقاعدة الإختزال للتخلص (تخفيض) من قوي x ، كما يشرح لك المثال التالي:

$$\int x^5 \sin x dx \quad , \int x^7 e^x dx$$

فعلى سبيل المثال لإيجاد التكامل

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

بدلالة التكامل الأقل درجة علي الصورة التالية

$$I_{n-1} = \int x^{n-1} e^x dx$$

تستعمل أولاً قاعدة التكامل بالأجزاء للتكامل

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

وذلك بوضع $u = x^n$ ومنه تجد أن $du = nx^{n-1}dx$ وبوضع $dv = e^x dx$ يكون $v = e^x$ ليصبح التكامل في الصورة التالية

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n e^x dx \\ &= x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx \\ &\quad (\text{let } u = e^x \text{ and } v = x^n) \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\ &= x^n e^x - n I_{n-1} \end{aligned}$$

مثال:

أوجد التكامل التالي:

$$\int x^3 e^x dx$$

تستخدم القاعدة أعلاه فإن

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2 \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - I_0) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6I_0 \end{aligned}$$

ولإيجاد I_0 فإن $I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + C$ وعليه فإن التكامل يصبح

$$I_3 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي:

$$\int x^n \cos x \; dx$$

أولاً تستعمل قاعدة التكامل بالأجزاء للتكامل

$$\int x^n \cos x \; dx$$

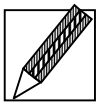
وذلك بوضع $u = x^n$ ومنه تجد أن $du = nx^{n-1}dx$ و $dv = \cos x\, dx$ ومنها $v = \sin x$ ليصبح التكامل في الصورة

$$\begin{aligned} I_n &= x^n \sin x - \int \sin x . n x^{n-1} dx \\ &= x^n \sin x - n x^{n-1} . (-\cos x) + n \int \cos x . (n-1) x^{n-2} dx \\ &= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \; dx \\ &= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) I_{n-2} \end{aligned}$$

حيث

$$I_{n-2} = \int x^{n-2} \cos x \; dx$$

تدريب (16)



(1)أوجد التكامل التالي

$$I_4 = \int x^4 \cos x \; dx$$

(2) أوجد القاعدة العامة للتكامل التالية

$$\int x^n \sin x \; dx$$

ومن ثم أوجد قيمة التكامل

$$\int x^6 \sin x \; dx$$

(3) أوجد التكامل التالي

$$\int x^4 e^{3x} dx$$

قواعد عامة عن الاختزال

(أ)

$$\int \sin^n(x) \; dx = \frac{\sin^{-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-1}(x) \; dx$$

(ب)

$$\int \tan^n(x) \; dx = \frac{\tan^{-1}(x)}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x) \; dx$$

(ج)

$$\int \sec^n(x) \; dx = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) \; dx$$

(د)

$$\int x^n \sin(x) \; dx = -x^n \cos(x) + n \int x^{n-1} \cos(x) \; dx$$

(هـ)

$$\int x^n \cos(x) \; dx = x^n \sin(x) - n \int x^{n-1} \sin(x) \; dx$$

(و)

$$\int x^n e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\ dx$$

(ي)

$$\int (\ln(x))^n\ dx = x(\ln(x))^n - \int (\ln(x))^{n-1}\ dx$$

(ط)

$$\int \sin^n(x)\cos^m(x)\ dx = \frac{\sin^{n-1}(x)\cos^{m+1}(x)}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}(x)\cos^m(x)\ dx$$

أسئلة تقويم ذاتي(11)

أوجد التكاملات الآتية:

$1 - \int x^3 e^x dx$

$2 - \int x^n \sin x dx$

$3 - \int (7-3x)e^{6x} dx$

10. التكامل بتعويض الدوال المثلثية

Integration by Trigonometric Substitution

مثال:

لإيجاد التكامل علي الصورة

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\ dx$$

تضع $x = a\tan\theta$ ومنها $dx = a\sec^2\theta\ d\theta$ ويصبح التكامل في الصورة

$$\int \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta}\ a^2\sec^2\theta\ d\theta = \int a\sqrt{1+\tan^2\theta}\ a^2\sec^2\theta\ d\theta = a^3\int \sec^3\theta\ d\theta$$

ومن قاعدة الاختزال العامة يمكنك إيجاد $\int \sec^3\theta\ d\theta$.

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

تضع $x=\sin\theta$ ومنها $dx=\cos\theta\,d\theta$ ويصبح التكامل

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos\theta\;d\theta=\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\;d\theta=\int \sin\theta\;d\theta=-\cos\theta+C$$

ولكن $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$.

إذاً يصبح التكامل

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\cos\theta+C=-\sqrt{1-x^2}+C$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sin^5 x\,dx$$

يمكنك كتابة هذا التكامل علي الصورة التالية

$$\int \sin^5 x\,dx=\int \sin^4 x\sin x\,dx=\int \left(\sin^2 x\right)^2\sin x\,dx$$

وبالتعويض عن

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad\Rightarrow\quad \sin^2 x=1-\cos^2 x$$

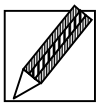
يصبح التكامل في الصورة

$$\int \sin^5 x\,dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x\,dx$$

والآن تعوض $u=\cos x$ لتحصل علي

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x\,dx&=-\int \left(1-u^2\right)^2\,du\\&=-\int 1-2u^2+u^4\,du\\&=-\left(u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right)+c\\&=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c\end{aligned}$$

تدريب(17)



1- أوجد التكامل التالي

$$\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

لعلك تعلم من دراستك في حساب المثلثات أن

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

وبالتعويض عن $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ في التكامل أعلاه تحصل علي

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\cos(2x)\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)\,dx\end{aligned}$$

أو يمكنك وضع التكامل في الصورة

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4}\int 1-\frac{1}{2}\left(1+\cos(4x)\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\right)+c \\ &= \frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin(4x)+c\end{aligned}$$

حيث $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$، أو علي الصورة التالية:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)dx$$

ولكن $\sin^2(2x) = \frac{1}{2}(1-\cos(4x))$ وبالتالي تحصل علي

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int 1-\cos(4x)dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \cos(15x)\cos(4x)dx$$

كما في المثال السابق تجد من علم المثلثات أن

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

وباستعمال العلاقة الأخيرة تضع $\alpha = 15\ ,\ \beta = 4$، تجد أن

$$\int \cos(15x)\cos(4x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(11x)+\cos(19x)dx$$

ومنها يكون $\int \cos(15x)\cos(4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{11}\sin(11x)-\frac{1}{19}\sin(19x)\right)+C$

مثال:

أوجد التكامل التالي

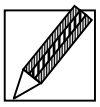
$$\int \sec^9 x \tan^5 x\, dx$$

تكتب أولاً هذا التكامل علي الصورة التالية :

$$\begin{aligned}\int \sec^9 x \tan^5 x\,dx &= \int \sec^8 x \tan^4 x \tan x \sec x\,dx \\ &= \int \sec^8 x \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \tan x \sec x\,dx \\ &= \int u^8 \left(u^2 - 1\right)^2 du \\ &= \int u^{12} - 2u^{10} - u^8\,du \\ &= \frac{1}{13}\sec^{13} x - \frac{2}{11}\sec^{11} x - \frac{1}{9}\sec^9 x + c\end{aligned}$$

حيث وضعت $u = \sec(x)$ واستخدمت المتطابقة $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$.

تدريب(18)



1- أوجد التكامل التالي

$$\int \sec^4 x \tan^6 x\,dx$$

مثال:

أوجد التكامل التالي

$$\int \tan^3 x\,dx$$

تكتب هذا التكامل في الصورة التالية

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan x \tan^2 x\,dx \\ &= \int \tan x \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx\end{aligned}$$

حيث وضعت $u = \tan(x)$ ومنها وجدت أن $du = \sec^2(x)\,dx$.

ويصبح التكامل الآن هو

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln\left|\sec x\right| + c$$

وبالمثل لأي تكامل أس فردي لـ $\tan(x)$ يمكنك إيجاده بسهولة بنفس الطريقة أعلاه، كما في المثال التالي:

$$\int \tan^5 x\,dx = \int \tan^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \tan^3 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^3 x\,dx$$

وذلك باستخدام المتطابقة $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ ثم تضع $u = \tan(x)$ و $du = \sec^2(x)\,dx$.

مثال (8)

أوجد التكامل التالي:

$$\int \sec^3 x\,dx$$

تضع أولاً

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$$
$$du = \sec x \tan x\,dx \qquad v = \tan x$$

ومن ثم تعوضها في التكامل أعلاه لتحصل علي

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \int \sec x \tan^2 x\,dx$$

ولإيجاد التكامل أعلاه تكتبه في الصورة التالية

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

حيث كتبت $\sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ في الحد الثاني في الطرف الأيسر.

وبتحويل الحد الثاني الي الطرف الأيمن تحصل علي

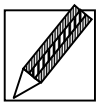
$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|$$

حيث تعلم مما سبق أن $\int \sec(x)\,dx = \ln\left((\sec(x) + \tan(x)\right)$.

ويكون الآن

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|\right) + c$$

تدريب(19)



1- أوجد التكامل التالي

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}dx$$

أسئلة تقويم ذاتي (12)

أوجد التكاملات الآتية:

$$1 - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$2 - \int x \sin^{-3} x^2 \cos x^2 dx$$

$$3 - \int \sin^3 3 dx$$

الخلاصة

لكي تتأكد من تحقيقك لأهداف هذه الوحدة ،نساعدك بوضع ملخص، لاهم ما تم شرحه وتوضيحه ،.بدأت الوحدة بتعريف التكامل: بأنه العملية العكسية للتفاضل، ويرمز له بالرمز ∫ ونقصد بالتكامل مجموعة الدوال التي تعتمد على x ، والتي تكون مشتقتها الأولى بالنسبة ل x هي *f(x)* .، وعند إجراء التكامل للدالة(x)*f* نكتبها على صورة $f(x)$ =g(x) dx∫ إذا كانت

$\int x^n dx = x^{n+1}/n+1 + c$ فإن $g(x) = x^n, n \neq 1$

حيث c عدد ثابت .،وتعرفت على تطبيقات التكامل في المجالات المختلفة في الفيزياء والهندسة والاقتصاد والطب، وشرحنا خصائص التكامل، في حالة جمع دالتين

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

وطرح دالتين

$$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

وضرب دالتين

$$\int (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)+c$$

ولكن في حالة قسمة دالتين لا يوجد قانون، ولكن تستخدم التكامل بالتجزئة، وهى تجزئة الدالة إلى دالتين وتطبق القانون للتكامل بالأجزاء، وتم شرح تكامل الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة مثلا

$\int f(x)dx = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F$ ، وتعرفت على كيفية التكامل بالتعويض مثل الدالة

$\int (ax+b)^n dx$ نتبع خطوات أولا نضع $ax+b$ ومنها نوجد adx ويصبح التكامل

$$\int (ax+b)^n dx = \int y^n dy = y^{n+1}/a(n+1) + c$$

حيثc ثابت التكامل، وتعرفت على كيفية تكامل الدوال المثلثية وهى

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

ثم الدوال اللوغريثمية ، وطريقة التكامل بالأجزاء

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

وكذلك تكامل الدوال الآسية حيث علمنا أن $\int e^x dx = e^x + c$

وكذلك درسنا تكامل الدوال الزائدية ويعطي:

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

ثم أتينا إلى طريقة التكامل بالكسور الجزئية وعرفت بأنها طريقة جبرية لإيجاد المضاعف المشترك الأعظم وتستخدم للدوال الكسرية، والتكاملات القياسية.

وشرحنا قاعدة الاختزال وهى قاعدة تستخدم للتكامل لدرجات عالية من x مضروبا في دالة آسية أو مثلثية، وتعرفنا على القواعد العامة للاختزال، وأخيرا شرحنا التكامل بتعويض الدوال المثلثية

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التي سوف تلي هذه الوحدة، تشرح التكامل المحدود أصله، وخصائصه وتطبيقاته، في كثير من العلوم، في الفيزياء، وكذلك استخداماته في إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحنى، ومستقيم ، أو محور.

إجابات التدريبات

تدريب(1)

1. $\int \sqrt{2}\sqrt{x}dx = \sqrt{2}\int (x)^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} + c$

2. $\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{3}}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

3. $\int (3x+5)dx = \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$

4. ضع y=7x-3 $\Leftarrow\ dy = 7dx\ \Leftarrow\ dx = \frac{dy}{7}$

$$\therefore \int \sqrt{7x-3}dx = \int \frac{y^{\frac{1}{2}}}{7}dy = \frac{1}{7}\int y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{21}{3}} + c$$

$$= \frac{2}{21}y^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{21}(7x-3)^{\frac{3}{2}} + c$$

تدريب(2)

1. نضع $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2xdx$

إذن

$$\int (x^2-1)^4\, 2xdx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}(x^2-1)^5 + c$$

2.

$$\int x(2x^2-1)^3 dx$$

$$u = 2x^2 - 1$$

$$du = 4xdx$$

$$\therefore x(2x^2-1)^3 dx = \frac{(2x^2-1)^3 xdx}{u^3 \frac{1}{4}du} = \frac{1}{4}u^3 du$$

$$= \int x(2x^2-1)^3 dx = \frac{1}{4}\int u^3 du = \frac{1}{16}u^4 + c = \frac{1}{16}(2x^2-1)^4 + c$$

.3

$$\int x(x-3)^5 dx$$

$$u = x-3$$

$$du = dx$$

$$x(x-3)^5 dx = (u+3)u^5 du = (u^6 + 3u^5)du$$

$$\int x(x-3)^5 dx = \int (u^6 + 3u^5)du = \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{2}u^6 + c$$

$$= \frac{1}{7}(x-3)^7 + \frac{1}{2}(x-3)^6 + c$$

تدريب(3)

.1

$$\int \sin x \cos x dx$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x dx$$

$$\therefore \int u du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

.2

$$\int \cos 3x dx$$

$$u = 3x$$

$$du = 3dx$$

$$\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

.3

$$\int \sec^3 x \tan x dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow u^2 = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec x \tan x dx$$

$$\int \sec^3 x \tan x dx = \int \sec^3 x \tan x \frac{du}{\sec x \tan x} = \int \sec^2 x du = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$

$$\int \sec^3 x \tan x \frac{du}{\sec x \tan x}$$

تدريب (4)

1- $\int x(\ln x)\,dx$

بوضع $u = x$ ، $du = dx$ و $dv = \ln x\,dx$ ، $v = x\ln x - x$ ليصبح التكامل

$$\int x\ln x\,dx = x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)dx$$

$$\int x\ln x\,dx = x^2\ln x - x^2 - \int x\ln x\,dx + \frac{x^2}{2} + C$$

أو

$$2\int x\ln x\,dx = x^2\ln x - x^2 + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}(x^2\ln x - x^2 + \frac{x^2}{2} + C) = \frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right) + c$$

2- $\int \sin(5x)\cos(5x)dx$

أفرض أن $y = \sin(5x) \Leftarrow dy = 5\cos 5x$

$$\therefore \int \sin(5x)\cos(5x)dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x)5\cos(5x)dx$$

$$= \frac{1}{5}\int ydy = \frac{y^2}{10} + c = \frac{(\sin(5x))^2}{10} + c$$

3- $\int \frac{x}{1+16x^4}dx$

ضع $u = 4x^2$ $du = 8xdx$

$$\therefore \int \frac{x}{1+16x^4}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{1+16x^4}dx = \frac{1}{8}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{8}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{8}\tan^{-1}(4x^2) + c$$

تدريب (5)

$\int \tan(3x+4)dx$ −1

نكتب أولاً التكامل في الصورة

$$\int \tan(3x+4)dx = \int \frac{\sin(3x+4)}{\cos(3x+4)}dx$$

ثم تضع $y = \cos(3x+4)$ ومنها $dy = 3\sin(3x+4)dx$ وبالتالي فإن

$$\int \tan(3x+4)\,dx = \int \frac{\sin(3x+4)}{\cos(3x+4)}dx = \int \frac{\frac{dy}{3}}{y} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\ln y + C$$

$$\int \tan(3x+4)\,dx = \frac{1}{3}\ln\cos(3x+4) + C$$

$\int \frac{5}{x^2+6x+13}dx$ −2

المقدار $x^2+6x+13 = (x+3)^2 + 4$ بإكمال المربع

ضع y=x+3 $\Leftarrow$ dy=dx

$$\therefore \int \frac{5}{x^2+6x+13}dx = 5\int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2} + c$$

$$= \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{(x+3)}{2} + c$$

تدريب (6)

−1

$$\int \sec^2 x \tan^2 x\ dx$$

بوضع $u = \tan x$ تحصل علي $du = \sec^2 x\ dx$ ويصبح التكامل أعلاه في الصورة

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

−2

-i $\int (3-5x)\cos(4x)dx$

$u = 3-5x \Rightarrow du = -5dx$

$dv = \cos 4xdx \Rightarrow v = \dfrac{\sin 4x}{4}$

$$\int (3-5x)\cos(4x)dx = \frac{1}{4}(3-5x)\sin(4x) + \frac{5}{4}\int \sin(4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}(3-5x)\sin(4x) + \frac{-5}{16}\cos(4x) + c = \frac{1}{4}(3-5x)\sin(4x) - \frac{5}{16}\cos(4x) + c$$

.ii $\int (7-3x)e^{6x}dx$

بوضع $u = 7-3x, dv = e^{6x}$ نحصل على

$$I = \frac{1}{6}(7-3x)e^{6x} + \frac{3}{6}\int e^{6x}dx = \frac{1}{6}(7-3x)e^{6x} + \frac{1}{12}e^{6x} + c$$

.iii $\int (x^3+5)\ln(x)dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \Leftarrow u = \ln(x)$

$dv = x^3 + 5 \Rightarrow v = \dfrac{x^4}{4} + 5x$

$$I = \int \left(\frac{x^4}{4} + 5x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} + 5x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^4}{4} + 5x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} + 5\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 5x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} - 5x + c$$

.iv $\int x^2 \cos(4x)dx$

أفرض أن $du = 2xdx \Leftarrow u = x^2$

$$dv = \cos(4x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}\sin(4x)$$

$$\therefore I = \frac{1}{4}x^2\sin(4x) - \frac{2}{4}\int x\sin(4x)dx$$

بالتجزئة مرة أخرى

$$= \frac{1}{4}x^2\sin(4x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{4}\int\cos(4x)dx\right)$$
$$= \frac{1}{4}x^2\sin(4x) + \frac{1}{8}x\cos(4x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

v. $\int e^{2x}\cos x dx$ تكامل بالتجزئة مرتين:

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}I$$

$$\therefore \frac{5}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\cos x + \sin x)$$
$$\therefore I = \frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x + \sin x) + c$$

$$I = -\frac{1}{7}e^{-7x}\sin x\Big|_0^\infty + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\cos x\Big|_0^\infty - \frac{1}{7}\int_0^\infty e^{-7x}\sin x dx\right)$$
$$I = -\frac{1}{7}(0-0) - \frac{1}{49}(0-1) - \frac{1}{49}I = I + \frac{1}{49}I = 0 + \frac{1}{49}$$
$$\frac{50}{49}I = +\frac{1}{49}$$
$$I = \frac{1}{49}\times\frac{49}{50} = \frac{1}{50}$$

تدريب (7)

.1

$$\int \sin^{-1} x dx$$

بوضع

$$u = \sin^{-1} x$$

ومنها نجد أن

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ونضع كذلك

$$dv = dx$$

ومنها نجد أن

$$v = x$$

وبالتعويض في المعادلة العامة للتكامل بالأجزاء نحصل علي

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

.2

$$I = \int_0^{\infty} e^{-7x} \sin(x) d$$ ضع $$du = \cos dx \Leftarrow u = \sin x$$

$$v = \frac{-1}{7} e^{-7x} \Leftarrow dv = e^{-7x} dx$$

$$I = -\frac{1}{7} e^{-7x} \sin x \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{7} \int_0^{\infty} e^{-7x} \cos x dx$$

بالتجزئة مرة أخرى

3. أفرض أن $\tan^{-1} x = y \Rightarrow x = \tan y \Rightarrow dx = \sec^2 y dy$

$$\therefore I = \int x \tan^{-1}(x) dx = \int y \tan(y) \sec^2(y)) dy$$

نكامل بالتجزئة:

أفرض أن $u = y \Rightarrow du = dy$

$$dv = \sec^2 y \tan y dy \Rightarrow v = \frac{\tan^2 y}{2}$$

$$\int x \tan^{-1}(x) dx = \frac{y}{2} \tan^2 y - \frac{1}{2} \int \tan^2 y dy$$

$$= \frac{y}{2} \tan^2 y - \frac{1}{2} \int (\sec^2 y - 1) dy$$

$$= \frac{y}{2} \tan^2 y - \frac{1}{2} \tan y + \frac{y}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 \tan^{-1}(x) + \tan^{-1} x - x)$$

4 . ضع $y = \tan x \Leftarrow dy = \sec^2 x dx$

$$\therefore \int \sec^2(x) \tan(x) dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

تدريب (8)

$$\int (\tanh x) dx$$

تكتب أولاً هذا التكامل علي الصورة

$$\int (\tanh x) dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx$$

وبوضع $y = \cosh x$ ومنها $dy = \sinh x \, dx$ ويصبح التكامل أعلاه

$$\int \tanh x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{dy}{y} = \ln y + C = \ln(\cosh x) + C$$

تدريب(9)

1. بالكسور الجزئية

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$ وبمساواة المعاملات نجد أن

$$-2A-B=5, A+B=1$$

وبحل المعادلتين A=-6 ، B=7

$$\therefore \int\frac{x+5}{(x-1)(x-2)}=\int\ \frac{-6}{(x-1)}dx+\int\frac{7}{(x-2)}dx$$
$$=-6\ln(x-1)+7\ln(x-2)+c$$

.2

$$\int\frac{5x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx=\frac{A}{(x-3)}+\frac{Bx+c}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+c)(x-3)}{(x^2+1)(x-3)}$$

وبمساواة المعاملات نجد أن:

$$A+B=0$$
$$-3B+c=5$$
$$A-3c=1$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن:

$$c=\frac{1}{5}, B=\frac{-8}{5}, A=\frac{8}{5}$$
$$\therefore \int\frac{5x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{8}{5(x-3)}+\frac{-8x+1}{5(x^2+1)}\right)dx$$
$$=\frac{8}{5}\ln(x-3)-\frac{4}{5}\ln(x^2+1)+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+c$$

تدريب(10)

1- بالكسور الجزئية: $$\frac{x-2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

وبمساواة المعاملات A+B=-2 , A=1 , B=-3

ويكون التكامل كالآتي:

$$\int\frac{x-2}{(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{(x+1)}+\frac{-3}{(x+1)^2}\right)dx=\ln(x+1)+\frac{3}{(x+1)}+c$$

تدريب(11)

(1) ضع

$$dy = -2xe^{5-x^2} \Leftarrow y = e^{5-x^2}$$

$$\therefore \int 9xe^{5-x^2}dx = \frac{-9}{2}\int e^{5-x^2}(-2x)dx = \frac{-9}{2}\int dy = \frac{-9y}{2} = \frac{-9}{2}e^{5-x^2} + c$$

(2) أفرض أن $\frac{x}{3} = \sin y \Leftarrow dx = 3\cos y dy$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{9\sin^2 y}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}dx = 3\int \frac{\sin^2 y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}(3\cos y)dy$$

$$= 9\int \frac{\sin^2 y\cos y}{\cos y}dy = 9\int \sin^2 y dy = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2y)dy = \frac{9}{2}\left(y - \frac{1}{2}\sin 2y\right) + c$$

$$= \frac{9}{2}(y - \sin y\cos y) + c = \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\sqrt{\frac{9-x^2}{3}}\right) + c = \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{9}\sqrt{9-x^2}\right) + c$$

(3) أفرض أن $u = \cos 2x \Leftarrow du = -2\sin 2x dx$ ، $v = \frac{1}{6}e^{6x} \Leftarrow dv = e^{6x}dx$

$$I = \int e^{6x}\cos 2x dx = \frac{1}{6}e^{6x}\cos 2x + \frac{2}{6}\int e^{6x}\sin 2x dx$$

وبالتجزئة مرة أخرى

$$\frac{1}{6}e^{6x}\cos 2x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}e^{6x}\sin 2x - \frac{2}{6}\int e^{6x}\cos 2x dx\right)$$

$$\therefore I = \frac{1}{6}e^{6x}\cos 2x + \frac{1}{18}e^{6x}\sin 2x - \frac{1}{9}I$$

$$\frac{10}{9}I = \frac{1}{18}\left(3e^{6x}\cos 2x + e^{6x}\sin 2x\right)$$

$$\therefore I = \frac{1}{20}\left(3e^{6x}\cos 2x + e^{6x}\sin 2x\right)$$

(4) أفرض أن $u = x^3 \Leftarrow dv = \sin x, du = 3x^2 dx \Leftarrow v = -\cos x$

تكامل بالتجزئة

$$I = \int x^3 \sin x = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x dx$$

نكامل هذا التكامل مرة أخرى بالتجزئة

$$\therefore I = -x^3\cos x + 3\left(x^2\sin x - 2\int x\sin x dx\right)$$

$$I = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\left(-x\cos x + \int conxdx\right)$$

$$I = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + c$$

(5)

$$I = \int \cos^2 x\sin^3 x dx = \int \cos^2 x\sin^2 x\sin x dx$$

$$I = \int \cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx$$

أفرض أن $dy = -\sin x dx \Leftarrow y = \cos x$

$$\therefore I = \int y^2\left(1-y^2\right)\left(-dy\right) = -\int\left(y^2 - y^4\right)dy = -\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right) + c$$

$$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5}\right) + c$$

(6) أفرض أن $du = \sec^2 x dx \Leftarrow u = \tan x$

$$\therefore \int \sec^2 x\tan^2 x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

(7) ضع $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^{-2}}{2}, v = \frac{-1}{2x^2} \Rightarrow dv = \frac{1}{x^2}$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{-1}{x^2}\frac{dx}{2} = \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$$

(8)

$$\int\left[\left(x^2-1\right) + \left(x^2+3x\right)^2\right]dx = \int\left[x^2 - 1 + x^4 + 6x^3 + 9x^2\right]dx = \int\left[x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 1\right]dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - x + c$$

تدريب(12)

1-أ.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

وبمساواة المعاملات

$$A+B+C=0 \rightarrow (1)$$
$$-5A-4B-3C=0 \rightarrow (2)$$
$$6A+3B+2C=1 \rightarrow (3)$$
$$5A+5B+5C=0 \rightarrow 5\times(1)$$
$$-5A-4B-3C=0$$

وبجمع المعادلة(2) $B+2C=0 \rightarrow$ (4)

المعادلة(1) ×6−

$$-6A-6B-6C=0$$
$$6A+3B+2C=1$$

وبجمع المعادلة(3)

$$-3B-4C=1 \rightarrow (5)$$

بحل المعادلتين (4)و(5) ينتج أن:

$$C=\frac{1}{2}, B=-1$$

بالتعويض في (1) نجد أن $A=\frac{1}{2}$

أ.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \int\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{2(x-3)}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\ln(x-2)+\frac{1}{2}\ln(x-3)+c$$

ب.

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)}{x(2x-1)(x+2)}$$

بمساواة المعاملات

$$2A+B+2C=1$$
$$3A+2B-C=2$$
$$-2A=-1, A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{5}, C=\frac{-1}{10}$$
$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx=\int\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{5(2x-1)}-\frac{1}{10(x+2)}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{10}\ln 2x-2-\frac{1}{10}\ln x+c$$

ج.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$
$$\frac{(Ax+B)(X^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

وبمساواة المعاملات

A+C=0 , B+D=0 , 4A+c=0 ,4B+D=1

بحل هذه المعادلات ينتج أن:

$$A=0, B=\frac{1}{3}, C=0, D=\frac{-1}{3}$$
$$\therefore \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\int\left(\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{1}{3(x^2+4)}\right)dx=\frac{1}{3}\tan^{-1}(x)-\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

2- أ. $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$

بالقسمة المطولة نجد أن

$$\therefore \frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}$$

وبالكسور الجزئية ضع

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

وبمساواة المعاملات نجد أن A+B=0 , A-B=1

ومنه ينتج أن $B=-\frac{1}{2}, A=\frac{1}{2}$

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)dx = x+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+c$$

ب. أفرض أن $y = x^2 - x - 6 \Rightarrow dy = (2x-1)dx$

$$\therefore \int \frac{2x-1}{x^2-x-6}dx = \int \frac{dy}{y} = \ln y + c = \ln(x^2-x-6)+c$$

تدريب(13)

$$-1 \quad \frac{3x+11}{x^2-x+6} = \frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

وبمساواة المعاملات

$$A+B=3$$

$$2A-3B=11$$

وبحل المعادلات نجد أن $A=4 \quad , \quad B=-1$

$$\therefore \int \frac{3x+11}{x^2-x+6}dx = \int\left(\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx = 4\ln(x-3)-\ln(x+2)+c$$

-2

$$\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x} = \frac{x^2+4}{x(3x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(3x-2)}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(3x^2+4x-4)+B(x^2+2x)+C(3x^2-2x)}{x(3x-2)(x+2)}$$

بمساواة المعاملات

$$3A+B+3C=1$$

$$+4A+2B-2C=0$$

$$-4A=4$$

$$C=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{2}, A=-1$$

$$\therefore \int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}dx = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{5}{2(3x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)dx$$

$$= -\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{5}{6}\ln(3x-2)+c$$

(3) $\dfrac{x^4+5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}$

بالقسمة المطولة

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^3-3x^2 \overline{)\,x^4-5x^3+6x^2-18} \\ \underline{x^4-3x^3} \\ -2x^3+6x^2-18 \\ \underline{-2x^3+6x^2} \\ -18 \end{array}$$

بالكسور الجزئية

$$\frac{-18}{x^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-3)}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}$$

وبمساواة المعاملات

A+C=0

-3A+B=0

-3B=-18

بحل المعادلات C=-2 , A=2 , B=6

$$\therefore \int\frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}=\int\left(x-2+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{2}{x-3}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+2\ln x-\frac{6}{x}-2\ln(x-3)+c$$

تدريب (14)

1- $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4x-2}}$

نكتب أولاً المقدار x^2+4x-3 في صورة مربع كامل علي النحو

$$x^2+4x-3=(x+2)^2-7$$

ثم نضع $y=x+2$ ومنه نجد أن $dy=dx$ ليصبح المقدار في الصورة $x^2+4x-3=y^2-7$ والتكامل في الصورة

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-7}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{y}{\sqrt{7}} + C$$

أو

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-3}} = \cosh^{-1}\frac{(x+2)}{\sqrt{7}} + C$$

$$-2 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+25}dx$$

يمكن وضع هذا التكامل في الصورة القياسية

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+5^2}dx = \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{5}\pi = \frac{\pi}{5}$$

$$-3 \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

أفرض أن $u^2 = x+1 \Leftarrow 2udu = dx$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2udu}{\left(u^2-1\right)u} = 2\int \frac{du}{u^2-1} = 2\int \frac{du}{(u-1)(u+1)}$$

وبالكسور الجزئية

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+B(u-1)}{u^2-1}$$

وبمساواة المعاملات نجد أن

$$A - B = 1, A + B = 0$$

وبحل المعادلتين نجد أن $B = -\frac{1}{2}, A = \frac{1}{2}$

$$\therefore \int \frac{du}{u^2-1} = \int\left(\frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)}\right)du = \frac{1}{2}\ln(u-1) - \ln(u+1) + c = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + c_1$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right) + c_2$$

تدريب(15)

(1) أوجد التكامل التالي

$$\int \sin x\, e^{\cos x} dx$$

وبوضع $u = \cos x$ فإن $du = -\sin x\, dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\begin{aligned}\int \sin x\, e^{\cos x} dx &= \int \sin x\, e^{u} \cdot \left(-\frac{du}{\sin x}\right) \\ &= -\int e^{u} du \\ &= -e^{u} + C \\ &= -e^{\cos x} + C\end{aligned}$$

(2) أوجد التكامل التالي

$$\int \sec^2 x \tan x\ dx$$

وبوضع $u = \sec x$ فإن $du = \sec x \tan x\, dx$ يصبح التكامل في الصورة

$$\int u\ du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$$

تدريب (16)

$$I_4 = \int x^4 \cos x\ dx$$

من القاعدة أعلاه نجد أن

$$\begin{aligned}I_4 &= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 4.3I_2 \\ &= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2I_0) \\ &= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x \cos x + 24 \int \cos x\ dx \\ &= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x \cos x + 24 \sin x + C\end{aligned}$$

$I_n = \int x^n \sin x dx$ −2

ضع $dv = \sin x dx \Leftarrow v = -\cos x, du = nx^{n-1}dx \Leftarrow u = x^n$

$$I_n = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x dx$$

$$= -x^n \cos x + n\left(x^{n-1} \sin x - n - 1\int x^{n-2} \sin x dx\right) = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

$$I_6 = \int x^6 \sin x dx = -x^6 \cos x + 6x^5 \sin x - 30I_4$$

$$I_4 = -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x - 12I_2$$

$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2I_0$$

$$I_0 = \int \sin x dx = -\cos x$$

وبالتالي يكون

$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x$$

ويكون

$$I_4 = -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x + 12x^2 \cos x - 24x \sin x - 24\cos x$$

$$I_6 = -x^6 \cos x + 6x^5 \sin x + 30x^4 \cos x - 120x^3 \sin x - 360x^2 \cos x + 720x \sin x + 720\cos x$$

$I = \int x^4 e^{3x} dx$ −3

ضع $dv = e^{3x}dx \Leftarrow u = x^4, v = \frac{1}{3}e^{3x} \Leftarrow du = 4x^3 dx$

$$I = \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}\int x^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{3}{3}\int x^2 e^{3x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{9}x^3 e^{3x} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{9}x^3 e^{3x} + \frac{4}{9}x^2 e^{3x} - \frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}x e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{9}x^3 e^{3x} + \frac{4}{9}x^2 e^{3x} - \frac{8}{27}x e^{3x} + \frac{8}{81}e^{3x} + c$$

تدريب (17)

$$\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$$

نكتب أولاً هذا التكامل علي الصورة

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^6 x \left(1-\sin^2 x\right) \cos x \, dx \\ &= \int u^6 \left(1-u^2\right) du \\ &= \int u^6 - u^8 \, du \\ &= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + c\end{aligned}$$

حيث عوضنا عن $u = \sin x$.

تدريب (18)

$$\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$$

نكتب هذا التكامل في الصورة التالية

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx &= \int \sec^2 x \tan^6 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \left(\tan^2 x + 1\right) \tan^6 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \left(u^2 + 1\right) u^6 \, du \\ &= \int u^8 + u^6 \, du \\ &= \frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + c\end{aligned}$$

حيث وضعنا $u = \tan(x)$ ومنها وجدنا أن $du = \sec^2(x)\, dx$.

تدريب (19)

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx$$

نكتب أولاً هذا التكامل في الصورة

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} \sin x\, dx \\ &= \int \frac{\left(\sin^2 x\right)^3}{\cos^4 x} \sin x\, dx \\ &= \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^3}{\cos^4 x} \sin x\, dx\end{aligned}$$

ثم تضع $u = \cos(x)$ لتحصل علي

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx &= -\int \frac{\left(1-u^2\right)^3}{u^4} du \\ &= -\int u^{-4} - 3u^{-2} + 3 - u^2\, du \\ &= -\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{u} + 3u - \frac{1}{3}u^3\right) + c \\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3\cos x} - 3\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c\end{aligned}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي(1)

$= 3x^4 + x^3 + 4x + c$ −1

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 2x^2 - 7x + c$ −2

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + x + c$ −3

تقويم ذاتي(2)

$= \frac{(2x+4)^4}{8} + c$ **−1**

$= \frac{(3x+5)^6}{162} - \frac{2}{27}(3x+5)^5 + \frac{25}{108}(3x+5)^4 + c$ −2

$= \frac{-u^5}{100} + c = \frac{-(3-5x^4)^5}{100} + c$ −3

تقويم ذاتي(3)

$= x\sin x + \cos x + c$ .1

$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$ .2

$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}$ .3

تقويم ذاتي(4)

$= \ln(x^2 + 5x) + c$ −1

$= -\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\ln y + c = -\frac{1}{2}\ln\cos 2x + c$ −2

$= -3y - \ln(6y) + c = -3(x+4) - \ln 6(x+4) + c$ −3

تقويم ذاتي(5)

1. $= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

2. $= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

3. $= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$

تقويم ذاتي(6)

1- $= \frac{y\tanh^2 y}{2} - \frac{y}{2} + \frac{\tanh y}{2} + c = \frac{\tanh^{-1} x \cdot x^2}{2} - \frac{\tanh^{-1} x}{2} + \frac{x}{2} + c$

2- $= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c$

3- $= \frac{1}{6}\ln \sinh 6x + c$

تقويم ذاتي(7)

1. $= \frac{10}{9}\ln(x-2) + \frac{7}{18}\ln(2x+5) + c$

2. $= \frac{12}{51}\ln(3x+2) + \frac{13}{17}\ln(x-5) + c$

3. $= -\frac{1}{8}\ln x + \frac{11}{24}\ln(3x+8) + c$

تقويم ذاتي(8)

1. $= 2\ln(x-2) - \frac{5}{(x-2)} + c$

2. $= \frac{7}{4}\ln(2x+1) + \frac{1}{4(2x+1)} + c$

3. $= \frac{5}{81}\ln(9x+4) + \frac{20}{81(9x+4)} + c$

تقويم ذاتي(9)

1. $= -6\ln(x-1) + 7\ln(x-2) + c$

2. $= \ln x + 1 + \frac{3}{x+1} + c$

3. $= -\frac{4}{5}\ln(x^2+1) + \frac{1}{5}\tan^{-1} x + \frac{8}{5}\ln(x-3) + c$

تقويم ذاتي(10)

1. $= \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
2. $= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c$
3. $= \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$
4. $= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}}\right| + c$
5. $= \frac{2}{\sqrt{31}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}}\right) + c$
6. $= \frac{1}{6}\coth^{-1}\frac{x}{2} + c$
7. $= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + c$
8. $= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{65}}\right) + c$

تقويم ذاتي(11)

1. $x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$
2. $x^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$
3. $\frac{1}{6}(7-3x)e^{6x} + \frac{1}{12}e^{6x} + c$

تقويم ذاتي(12)

1. $= \tan x + c$
2. $= \frac{1}{8}\sin^4 x^2 + c$
3. $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

مسرد المصطلحات

التكامل Integration

هو العملية العكسية للتفاضل ويرمز للتكامل بالرمز ∫ ويقصد بالتكامل $\int f(x)\,dx$ مجموعة الدوال التى تعتمد على x وتكون مستقتها الأولى بالنسبة ل x هي $f(x)$

الدالة كثيرة الحدود Polynomial Function

هي الدالة التى تكون في صورة a_0 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+$

وتكون أسس x أعداد صحيحة موجبة و $a_n\neq 0$

التكامل بالتعويض Integration by Substitution

هو تكامل $\int (ax)^n d_x$ الذي توضع فيه $y=ax$ ومنها $d_y=a\,dx$

ليصبح التكامل في صورة $\int (ax)n\,dx = 1$

تكامل الدوال المثلثية Integration Of Trigonometric function

هو تكامل الدوال التى تدرس الجيب وجيب التمام ويعطى تكامل $\int \sin x\,dx = -\cos x+c$

$\int \text{Cos } x\,dx=\sin$

الدوال اللوغرثمية Logarithmic Function

هي الدوال العكسية للدوال الآسية وتكتب $y=\log_e x=\text{In}x$ وتستخدم فيها اللوغريتمات

ويكون تكاملها $\int \log_e x = \text{In}x+c$

التكامل بالأجزاء Integration by Parts

هو تكامل دالتين u و v ويكون ناتج التكامل $\int d(u\,v)=\int (u\,dv+v\,du)$

تكامل الدوال الآسية والزائدية Integration Of Exponential and Hyperbolic Function

هو تكامل الدوال التي تكون في صورة ye^x لكل قيم x الحقيقية

التكامل بطريقة الكسور الجزئية Integration by Partial Fractions

هي عملية جبرية لإيجاد المضاعف المشترك الأعظم ويستخدم لمعاملة الدوال الكسرية كمجموع لدوال كسرية بسيطة

قاعدة الاختزال Reduction Formula

هي قاعدة تستخدم للتكامل لدرجات عالية منx مضروبا في دالة آسية أو مثلثية وبها يمكن تخفيض أو التخلص من قوى x

المراجع

1. Ayres, Frank and Mendel son, Elliott**,** Schaum, (1999) **Outline of Calculus,** McGraw-Hill
2. G.B, Thomas and R, Finney, (1996) **Calculus and Analytical Geometr**y, Addison- Wesley Publishing Co.
3. .R, Ellis and D, Gulick, (1994) **Calculus with Analytic Geometry**, 5th Edition, SCP
4. H, .Anton, I, Bivens, and S, Davis, (2002) **Calculus (Early** transcendental), 7^{th} Edition


الوحدة الثالثة
التكامل المحدود

محتويات الوحدة

الموضوع	رقم الصفحة
المقدمة	105
تمهيد	105
أهداف الوحدة	105
1.اصل التكامل المحدود	106
2. المساحة المحصورة بين منحنين	109
الخلاصة	122
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	123
إجابات التدريبات	124
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	130
مسرد المصطلحات	131
المراجع	132

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس

ندخل بك إلى الوحدة الثالثة، وهى ذات أهمية في علم الحسبان، وتوضح لك طرق استخدام التكامل في إيجاد المساحة التي يحصرها منحنى مع المحور السيني، أو الصادي، أو مع مستقيم أو منحنيين، ومنها تتعرف على أهمية علم الحسبان وفوائده، التي تساعد وتختصر كثير من المسائل المعقدة وتحاول تبسيطها.

قسمت الوحدة إلى قسمين: بدأ **القسم الأول** بتعريف عن التكامل المحدود، وأصله ثم تحديد خصائصه، في **القسم الثاني** نشرح تطبيقات التكامل المحدود، في إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحنى و مستقيم أو محور.

تجد داخل الوحدة الأمثلة التي وضعت لها حلول، ثم أسئلة التقويم الذاتي، والتي تساعدك على تركيز القوانين والتأكد من الاستيعاب، وسوف تجد لها إجابات في نهاية الوحدة، كذلك التدريبات التي تفيدك في تطبيق القوانين، والتدريب على حلول كثير من المسائل التي تواجهك، عليك أن تكثر من التمارين، وترجع إلى المراجع حتى تستفيد، نأمل أن تكون وحدة مفيدة، عليك بتقديم اقتراحاتك ونقدك البناء نتمنى لك الفائدة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يجب أن تكون قادرا على أن:

- **تعرف** التكامل المحدود.
- **تشرح** خصائص التكامل المحدود.
- **تستخدم** التكامل المحدود في إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحنى ومستقيم أو محور.
- **تطبق** قوانين التكامل المحدود في الفيزياء، وفى العلوم الأخرى.

1. أصل التكامل المحدود

لقد شرحنا لك في الوحدة الأولى كيفية إيجاد المساحة التي يحصرها منحني $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ عن طريقة جمع ريمان، حيث وجدت أن المساحة التي يحصرها المنحني $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ مع المحور السيني هي $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. والآن يمكنك أن تحصل علي هذه المساحة مباشرة باستخدام التكامل المحدود. فإذا كانت $F(x) = \int f(x)\,dx$ فإن التكامل المحدود يُعرّف على النحو التالي

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

أو

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

أو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b$$

وتمثل قيمة هذا التكامل، من الناحية الهندسية، المساحة التي يحصرها المنحني بين النقطتين $x = a$ **و** $x = b$. **ولمجموع تكاملين** $F(x) + G(x)$ **نجد أن**

$$(F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b$$

وللتكامل المحدود الخصائص التالية:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن
4. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{2a} f(x)\,dx$ إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن

وهنا نذكرك بالدالة الفردية وهي الدالة التي فيها f(-x) =-f(x) والدالة الزوجية وهي الدالة التي تكون فيها f(-x)=f(x) والتى شرحناها لك في الحسبان (1)

وتجد أن تطبيقات التكامل المحدود كثيرة جداً، ويكاد لا يخلو علم من العلوم من استخداماته. ففي الفيزياء تجد أن الشغل المبذول (W) لتحريك جسم من النقطة a إلى النقطة b تحت تأثير قوة F ، يُعطي بالمعادلة $W = \int_a^b F\,dx$.

مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي $\int_1^3 (x + 2x^2)\,dx$ بالقانون مباشرة. تجد أن $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\frac{x3}{3}$ ومنها تجد أن $F(3) = \frac{3^2}{2} + 2\frac{3^3}{3} = \frac{9}{2} + 18 = \frac{45}{2}$ و $F(3) = \frac{1^2}{2} + 2\frac{1^3}{3} = \frac{7}{6}$ وتصبح بالتالي قيمة التكامل $\int_1^3 (x + 2x^2)\,dx = F(3) - F(1) = \frac{45}{2} - \frac{7}{6} = \frac{135-7}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$. ناقصاً قيمة ناتج التكامل بالقيمة السفلي.

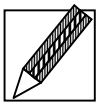
مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي $\int_2^{-1} (3x^2 + 4x^3)\,dx$ بالقانون مباشرة.

تكتب هذا التكامل على الصورة

$$\int_2^{-1} (3x^2 + 4x^3)\,dx = \left(3\frac{x^2}{3} + 4\frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^{-1} = \left((-1)^2 + (-1)^4\right) - \left((2)^2 + (2)^4\right) = -18$$

تدريب(1)



(1) أوجد الشغل اللازم بذله لتحريك جسم من النقطة $x = 0$ إلى النقطة $x = 3$ تحت تأثير القوة $F = \sin(\pi x) + \cos(\frac{\pi}{3}x)$.

(2) أوجد التكامل $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي $\int_1^2 (3-4x)^3\ dx$ بالقانون مباشرة.

بوضع $y = 3-4x$ ومنها $dy = -4dx$ أو $dx = -\frac{dy}{4}$، تكتب هذا التكامل على الصورة التالية

$$\int y^3 \frac{dy}{-4} = -\frac{1}{4}\int y^3\ dy = -\frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{(3-4x)^4}{-4}\right)$$

وبالتالي يصبح التكامل علي الصورة

$$\int_1^2 (3-4x)^3\ dx = \frac{(3-4x)^4}{4\times(-4)}\Bigg|_1^2 = \frac{(3-4(2))^4}{-4\times 4} - \frac{(3-4(1))^4}{-4\times 4} = \frac{(-5)^4}{-16} - \frac{(-1)^4}{-16} = -\frac{624}{16}$$

مثال:

أوجد الشغل اللازم بذلة لتحريك جسم تحت تأثير القوة $F = 2x+3x^2$ من النقطة $x=2$ إلى النقطة $x=4$.

أولاً يُعطي الشغل W بالمعادلة $W = \int_a^b F\,dx$ وبالتالي يكون

$$W = \int_2^4 (2x+3x^2)\,dx = \left(x^2+x^3\right)\Big|_2^4 = \left(4^2+4^3\right) - \left(2^2+2^3\right) = 68$$

مثال:

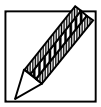
أوجد التكامل المحدود التالي

$$\int_0^2 (x+x^2)\,dx$$

يُعطي هذا التكامل بـ

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+x^2)\,dx &= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{3}\right) \\ &= 2+\frac{8}{3} \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

تدريب(2)



(1) أوجد المسافة التي يقطعها جسم بين اللحظتين $t = 1\ \text{sec}$ و $t = 3\ \text{sec}$، إذا كانت سرعته $\left(\frac{m}{\text{sec}}\right)$ $\text{v} = 2 + 4t + 3t^2$، علماً بان $\text{v} = \frac{\text{dx}}{\text{dt}}$، أو $\int \text{v}\ dt$.

(2)استخدم جمع ريمان لإيجاد التكامل المحدود للمنحني $f(x) = x^2$ في الفترة [2,3] ثم قارن ذلك بالتكامل مباشرة للمنحني، أي $\int_a^b f(x)\ dx$.

(3) أوجد التكامل $\int_0^1 (x^2 - x)\, dx$

أسئلة تقويم ذاتي(1)



(1) أوجد التكاملات التالية بالقانون مباشرة

(1) $\int_0^2 (2x+3)^3 dx$ (2) $\int_2^3 \sqrt{4x+5}\ dx$ (3) $\int_1^4 \frac{(2x+9)}{(x^2+9x+2)}\ dx$

(4) $\int_0^{\infty} e^{3x}\ dx$ (5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(x^2+4)}\ dx$

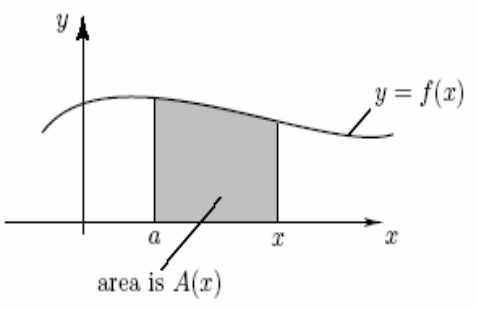
2. المساحة المحصورة بين منحنيين

تذكر عندما تكلمنا عن تطبيقات التكامل قلنا أن أهم تطبيقات التكامل المحدود هو إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحني ومستقيم، أو محور. ونحصل علي هذه المساحات بناءاً علي الشكل الهندسي للمنحني و الخط المستقيم، و ذلك علي النحو التالي:

- إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتان مستمرتان في الفترة $a \le x \le b$ فإن المساحة المحصورة (A) بينهما تُعطي بالتكامل المحدود على النحو التالي

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

من هذا الرسم تستطيع أن توضح المساحة المحصورة بين المنحني $y = f(x)$ والمحور السيني بين $x = a$ و $x = b$.



وتُعطي للمساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ والمحور السيني

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

(لأن معادلة المحور السيني $g(x) = y = 0$)

نذكرك ببعض النقاط التى لها أهمية في هذا الجزء منها :

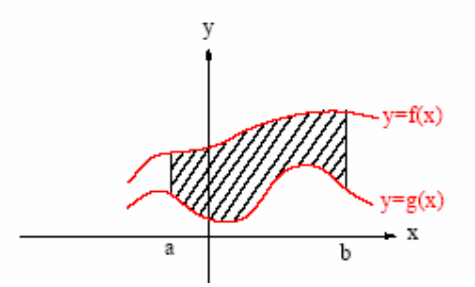
1. إذا كانت $f(x)$ دالة غير سالبة فإن المقدار

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

يمثل المساحة المحصورة فوق الحور السيني مع المنحني $f(x)$.

2. إذا كانت $f(y)$ و $g(y)$ دالتان مستمرتان في الفترة $c \le y \le d$ فإن المساحة المحصورة (A) بينهما تُعطي بالتكامل المحدود على النحو التالي

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

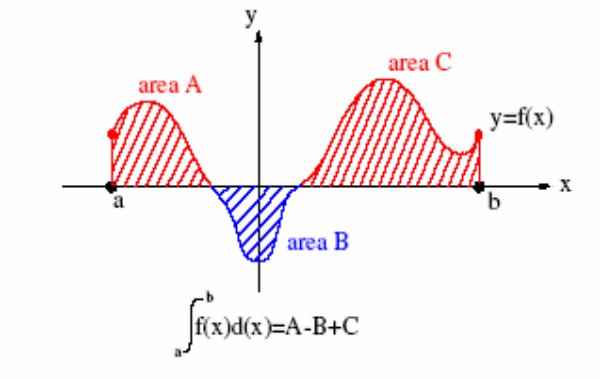


3. وتُعطي للمساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الصادي

$$f(y)\ \ A = \int_c^d f(y)\,dy$$

(لأن معادلة المحور الصادي $g(y) = x = 0$)

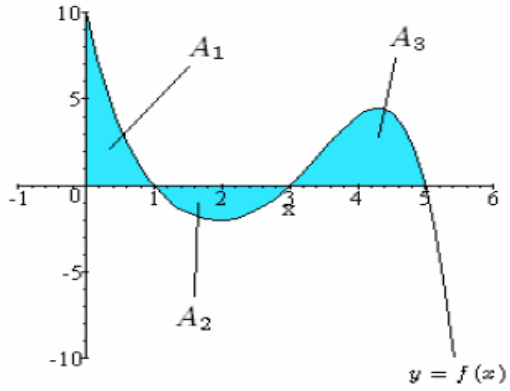
يمكنك أن تلاحظ أن المساحة تحت المنحني أدناه تأخذ الشكل



حيث

$$\int_a^b f(x)\,dx = A - B + C$$

4. ولإيجاد المساحة المحصورة بين منحني ومحور لابد من معرفة النقاط التي يقطع عندها المنحني المحور. فإذا كانت هنالك مساحة واقعة اسفل المنحني و أخرى اعلي المنحني، كما في الرسم أدناه



تكون المساحة الكلية (المظللة) علي النحو التالي

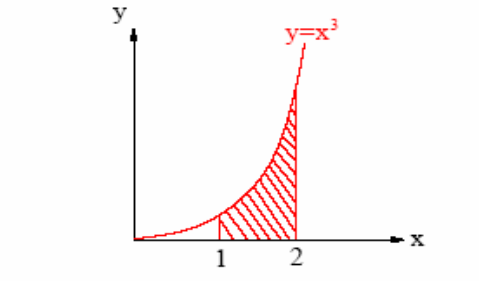
$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

أنظر إلى الرسم لتتعرف على مساحة الأشكال المظللة والتى تمثل المساحة الكلية

$$\int_0^5 f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

مثال:

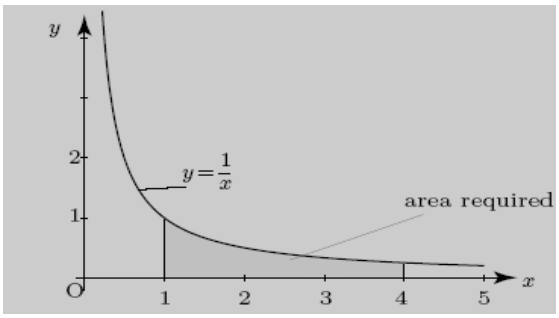
أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمحور السيني بين $x = 1$ و $x = 2$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(x^4)\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{15}{4}$$

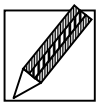
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمحور السيني بين $x = 1$ و $x = 4$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln x\,|_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 = 1.386$$

تدريب(3)



(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x(x-1)(x-2)$ والمحور السيني.

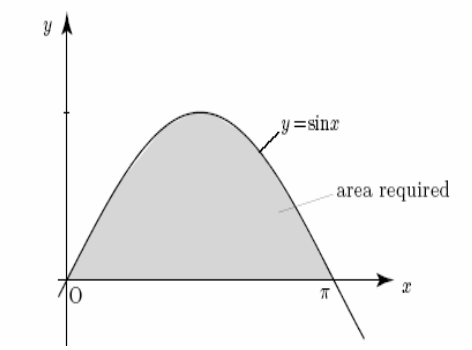
(2) أوجد التكامل التالي : $\int_1^5 (3x+5)\,dx$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sin x$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = \pi$.

تعطي المساحة (المنطقة المظللة) بـ

$$A = \int_a^b \sin x \, dx = \int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \,|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$



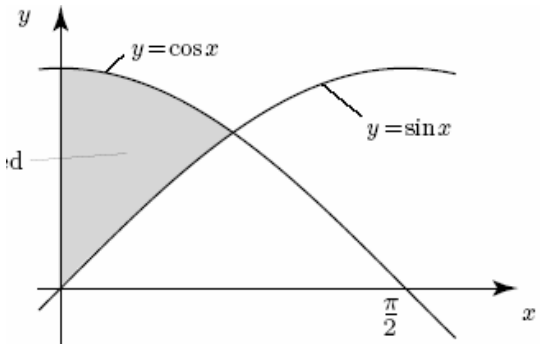
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sin x$ المنحني $y = \cos x$ بين $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{4}$

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = \frac{\pi}{4}$. تُعطي المساحة (المنطقة المظللة) بـ

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x]\, dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{4}} + \cos x|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$A = 0.414$$



تدريب(4)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = 2 - x^2$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = 2$.

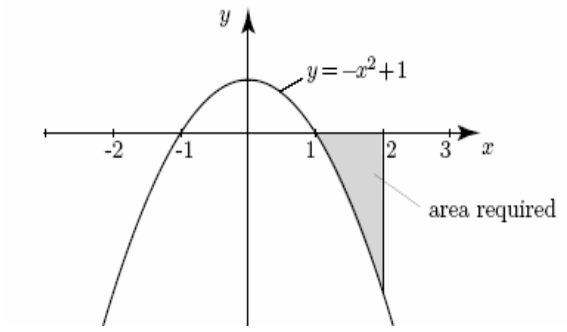
(2) أوجد التكامل التالي: $\int_0^3 \frac{5e^{2x}}{7 + 9e^2 x} dx$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = -x^2 + 1$ المنحني والمحور السيني، بين $x = 1$ و $x = 2$.

تُعطي معادلة المحور السيني بـ $y = 0$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = 1, -1$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم) هي



$$A = \int_1^2 (-x^2 + 1)\, dx = (-\frac{x^3}{3} + x)\,|_1^2 = (-\frac{2^3}{3} + 2) - (-\frac{1^3}{3} + 1) = -\frac{4}{3}$$

وتعنى الإشارة السالبة أن المساحة تقع أسفل المحور السيني.

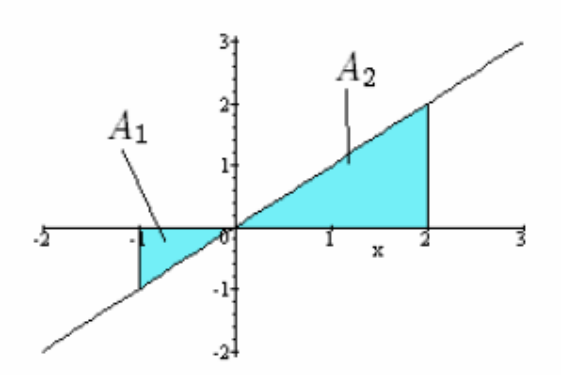
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المستقيم $y = x$ والمحور السيني بين $x = -1$ و $x = 2$.

تلاحظ أن المستقيم يقطع المحور السيني عند النقطة $x = 0$ وبالتالي لابد من كتابة المساحة المحصورة علي النحو التالي

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{0}^{2} x\,dx = -A_1 + A_2$$

حيث A_1 و A_2 هما المساحتان المظللتان في الرسم أدناه



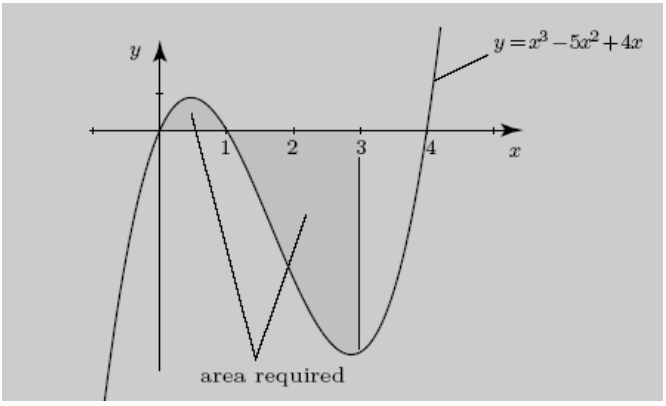
تدريب(5)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = e^x$ والمحور الصادي و المستقيم $x = 2$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^3 - 5x^2 + 4x$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = 3$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = 0, 1$ وفي الفترة $0 < x < 3$ تكون المساحة المحصورة هي مجموعة المساحتين (كما موضحة بالرسم) هي:



ومن خصائص التكامل المحدود نجد أن $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

وعليه فإن

$$\int_0^1 (x^3-5x^2+4x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right)-(0)=\frac{7}{12}$$

و

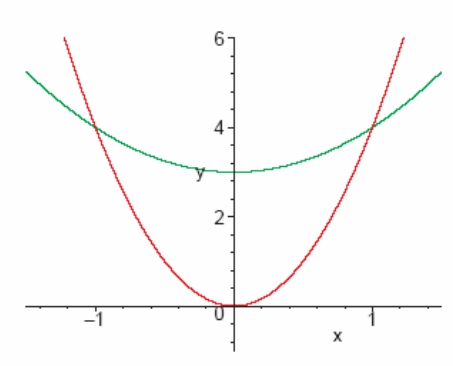
$$\begin{aligned}\int_1^3 (x^3-5x^2+4x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_1^3\\ &= \left(\frac{81}{4}-\frac{135}{3}+18\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right)=-\frac{22}{3}\end{aligned}$$

وتصبح المساحة الكلية $\frac{7}{12}+\frac{22}{3}=\frac{95}{12}$ (حيث كتبت المساحة بالقيمة (المطلقة) الموجبة).

مثال:

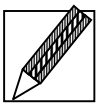
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2+3$ و $y=4x^2$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x=1,-1$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم) هي:



$$A=\int_{-1}^{1}\left[(x^2+3)-4x^2\right]dx=(\frac{x^3}{3}+3x-4\frac{x^3}{3})\,|_{-1}^{1}=(\frac{1^3}{3}+3-4\frac{1}{3})-(\frac{(-1)^3}{3}-3-4\frac{(-1)^3}{3})=4$$

تدريب(6)

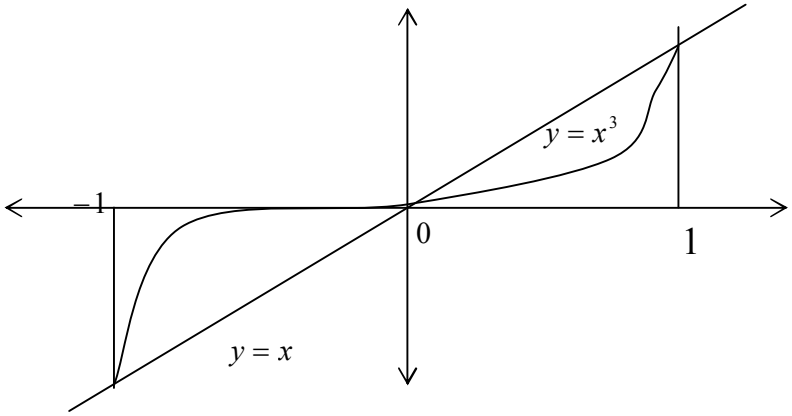


(1) أوجد المساحة المحصورة بين المحور الصادي والمنحني $x=y^2$ بين $y=-1$ و $y=1$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y=x^3$ والمستقيم $y=x$.

أولاً تجد أن المستقيم يتقاطع مع المنحني عند $x=0,1,-1$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم) هي



$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^{0}(x-x^3)dx+\int_0^1(x^3-x)dx$$

$$A=\left|\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)|_0^1\right|$$

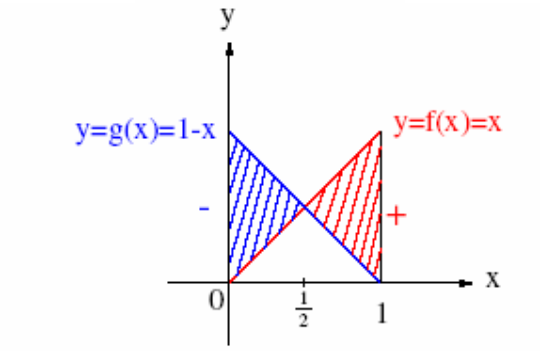
$$A=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المستقيمين $y=x$ و $y=1-x$ بين $x=0$ و $x=1$.

أولاً تجد أن المستقيمين يتقاطعان عند $x=\frac{1}{2}$، وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم أدناه) هي

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$$



وبالتعويض مباشرة ستحصل علي القيمة

$$\int_0^1 [x-(1-x)]=\int_0^1(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_0^1=1-1-0+0=0$$

ولكن في الحقيقة تجد أن المساحة الفعلية المحصورة هي

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}[g(x)-f(x)]dx &+ \int_{\frac{1}{2}}^1[f(x)-g(x)]dx\\ &= \left[x-x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^1\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0+0+1-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

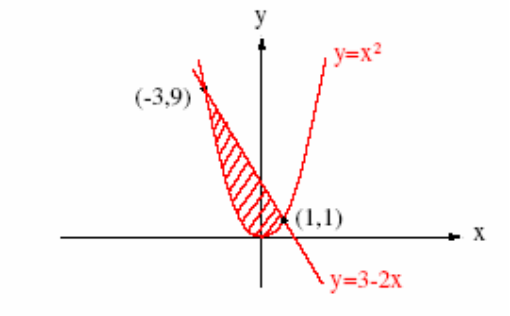
حيث $g(x)=1-x$ و $f(x)=x$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2$ والمستقيم $y = 3 - 2x$.

أولاً تجد أن المستقيم يتقاطع مع المنحني عند $x = 1, -3$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم أدناه) هي

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$



حيث $g(x) = 3 - 2x$ و $f(x) = x^2$ وتُعطي بـ

$$\int_{-3}^{1} ((3 - 2x) - x^2)dx$$

$$\int_{-3}^{1} ((3 - 2x)) - x^2)\, dx = (3x - 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$$

تدريب(7)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2$ والمستقيم $y = x$.

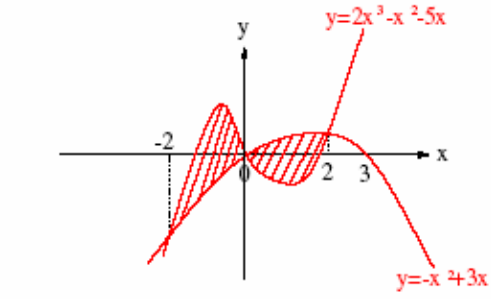
(2) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 - 4$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = 3$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = -x^2 + 3x$ و $y = 2x^3 - x^2 - 5x$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = 0, 2, -2$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم أدناه) هي:

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$



ومن الرسم أعلاه تلاحظ أن المساحة بين المنحنيين هي

$$\int_{-2}^{0}[g(x)-f(x)]+\int_{0}^{2}[f(x)-g(x)]$$

حيث $g(x)=2x^3-x^2-5x$ و $f(x)=-x^2+3x$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}[(2x^3-x^2-5x) &- (-x^2+3x)]dx+\int_0^2[(-x^2+3x)-\\ &(2x^3-x^2-5x)]dx\\ &= \int_{-2}^{0}(2x^3-8x)dx+\int_0^2(8x-2x^3)dx\\ &= \left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{-2}^{0}+\left[4x^2-\frac{x^4}{2}\right]_0^2\\ &= 0-0-\frac{16}{2}+4.4+4.4-\frac{16}{2}-0+0\\ &= 16\end{aligned}$$

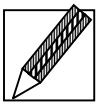
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $x=-y^2+4y$ والمستقيم $x=y-4$.

أولاً تجد أن المنحني والخط المستقيم يتقاطعان عند $y=4\,,-1$ وعليه تكون المساحة المحصورة هي (بوضع: $f(y)=y-4$ و $g(y)=-y^2+4y$)

$$\int_{-1}^{4}[f(y)-g(y)]dy=\int_{-1}^{4}(y-4)\,dy-\int_{-1}^{4}(-y^2+4y)\,dy=\int_{-1}^{4}(y^2-3y-4)\,dy=-\frac{225}{6}$$

تدريب(8)



(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = 1 - x^2$ و $y = 1 - \sqrt{x}$.

(2) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 - 6y - x = 0$ والمستقيم $x - 2y + 7 = 0$.

أسئلة تقويم ذاتي(2)



(1) أوجد التكاملات التالية

(أ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 25}$ (ب) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-5x^2} dx$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-5)^{\frac{4}{3}}}$ (د) $\int_{-\infty}^{0} e^{5x} dx$

(2) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 2$.

(3) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2$ والمنحني $x = y^2$.

(4) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $x = y^2$ والمستقيم $x - 2y = 3$.

(5) أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني والمنحني $y = x^3$ بين $x = -1$ و $x = 1$.

الخلاصة

بعد دراستك لهذه الوحدة لابد أن تكون قد حققت الأهداف من دراستك للوحدة، إذا كانت الإجابة بنعم فلك التهنئة، وإذا كانت بلا فيجب عليك الرجوع لها مرة ثانية، وسوف نساعدك بوضع خلاصة لاهم ما تم شرحه.

شرحنا لك اصل التكامل: وعرفناه ب $\int f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]$

ووجدنا أن هذا التكامل يوضح المساحة المحصورة بين المنحنى ونقطتين (a) (b) ثم عرفنا خصائص التكامل وهى.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن $\int_a^b f(x)dx = 0$

إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^b f(x)dx$

بعد ذلك تعرفت على تطبيقات التكامل المحدود في الفيزياء،وجدنا أن الشغل المبذول W لتحريك جسم من النقطة a إلى b تحت تأثير قوة F يعطى بالمعادلة

$$W = \int F(x)dx$$

وشرحنا تطبيق التكامل في إيجاد المساحة التى تنحصر بين منحنيين، أو منحنى ومستقيم،أو محور فإذا كانت f (x) و g (x) دالتان مستمرتان في الفترة $a \le x \le b$ فان المساحة المحصورة (A) تكون

$$A = \int [f(x) - g(x)]$$

وإذا كان المنحنى $f(x)$ مع المحور السيني فان المساحة تكون

$$A = \int f(x)dx$$

لان معادلة المحور السيني g (x)= Y =0

والمساحة المحصورة بين المنحنى $f(y)$ والمحور الصادي تكون معادلة المساحة

$$A = \int f(y)dy$$

لان معادلة المحور الصادي= g (y) = x =0

ثم شرحنا لك كيفية إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ومحور، ولابد أن نعرف نقاط تقاطع المنحنى مع المحور، إذا كانت المساحة اسفل المنحنى،أو أعلى المنحنى، فإذا كانت اسفل المنحنى تكون الإشارة سالبة

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التى تلي هذه الوحدة، سوف تشرح لك تطبيقات التكامل، في إيجاد أطوال ومساحات وحجم الأشكال الهندسية المختلفة، مثل طول القوس وتشرح المعادلات الوسيطية، ومساحة السطح الدوراني والحجوم الدورانية.

إجابات التدريبات

تدريب(1)

1-

$$w=\int_0^3\left(\sin\pi x+\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}x\int_0^3$$
$$=\left(-\frac{1}{\pi}\cos3\pi+\frac{3}{\pi}\sin\pi\right)-\left(-\frac{1}{\pi}\cos0+\frac{3}{\pi}\sin0\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{\pi}(-1)+0\right)-\left(-\frac{1}{\pi}(1)+0\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

2- $\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\overset{\pi}{1}=-(-1-1)==2$

تدريب(2)

1-

$$x=\int_1^3\left(2+4t+3t^2\right)dt=2t+2t^2+t^3\int_1^3$$
$$=(6+18+27)-(2+2+1)=51-5=46m$$

2- نجزئ الفترة بحيث

$$\Delta x=\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n}$$

$$f(x_i) = \left(2 + \frac{i}{n}\right)^2 \quad \therefore \quad x_i = 2 + \frac{i}{n}$$

$$f(x_i) = 4 + 4\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_2^3 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(4 + \frac{4i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} \left(4n + \frac{2n(n+1)}{n} + \frac{n(n+1)(2n+2)}{6n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(4 + 2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$= 4 + 2 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + 0 = 6\frac{1}{3}$$

$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$$

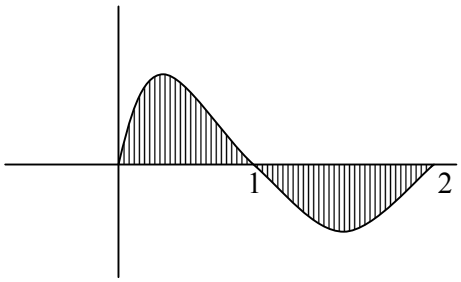
نفس النتيجة

-3

$$\int_0^1 (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0 - 0\right)$$

$$= \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

تدريب(3)

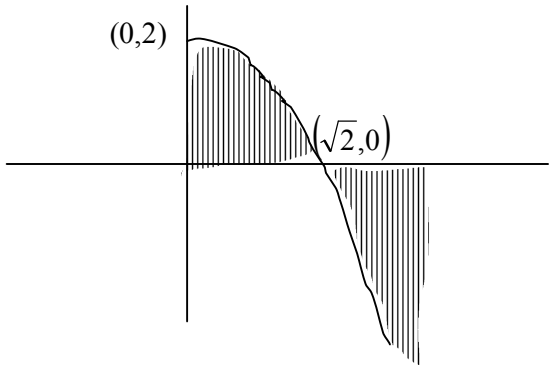


1. من الرسم أعلاه يتضح أن المساحة هي:

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_0^1 \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_0^1$$
$$= \left(\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0\right) - \left((4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^5 (3x + 5)dx = \frac{3x^2}{2} + 5x\Big|_1^5 \left(\frac{75}{2} + 25\right) - \left(\frac{3}{2} + 5\right) = \frac{125 - 13}{2} = \frac{112}{2} = 56 \qquad .2$$

تدريب(4)



1. وتكون المساحة هي:

$$\int_0^2 (2 - x^2)dx = \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2)dx - \int_{\sqrt{2}}^2 (2 - x^2)dx$$
$$= 2x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2$$
$$= \left(\left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - 0\right) - \left(\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{12 - 8 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4 + 8\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2} - 4}{3}$$

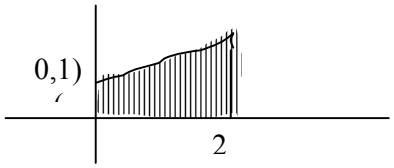
.2

$$\int_0^3 \frac{5e^{2x}}{7+9e^{2x}}dx = \frac{5}{18}\int_0^3 \frac{18e^{2x}}{7+9e^{2x}}dx$$

$$= \frac{5}{18}\ln\left(7+9e^{2x}\right)\Big|_0^3 = \frac{5}{18}\left[\ln\left(7+e^6\right)-\ln(7+9)\right]$$

$$= \frac{5}{18}\ln\left(\frac{\left(7+e^6\right)}{16}\right)$$

تدريب(5)

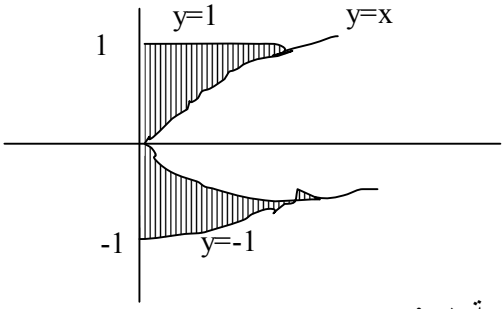


بما أن $y = e^x > 0$

إذن المساحة هي:

$$\int_0^2 e^x dx = e^x\int_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

تدريب(6)

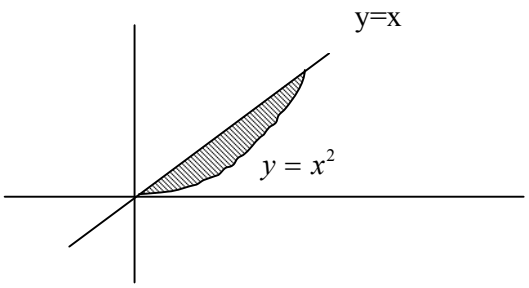


1. من الرسم المساحة هي:

$$\int_{-1}^1 y^2 dy = \frac{y^3}{3}\int_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

تدريب(7)

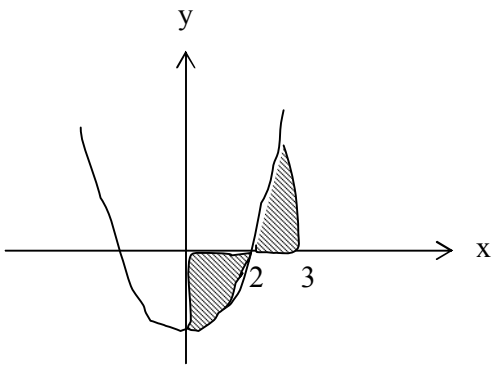
.1



بحل المعادلة $x^2 = x$ نجد أن نقاط التقاطع هي عند x=0، x=1 تكون المساحة هي:

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0-0) = \frac{1}{6}$$

.2



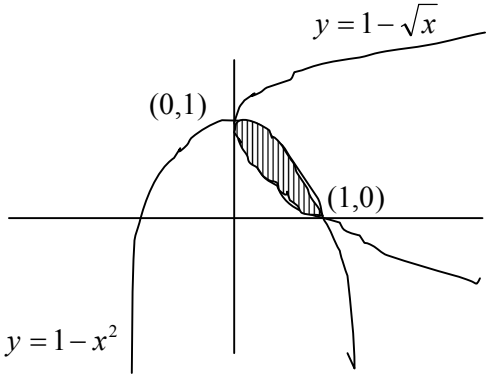
هي:

$$-\int_0^2 (x^2 - 4)dx + \int_2^3 (x^2 - 4)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\Big|_0^2\right) + \frac{x^3}{3} - 4x\ \Big|_2^3 \left(\frac{-8}{3} + 8\right) + \left[(9-12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right] = 7\frac{2}{3}$$

تدريب(8)

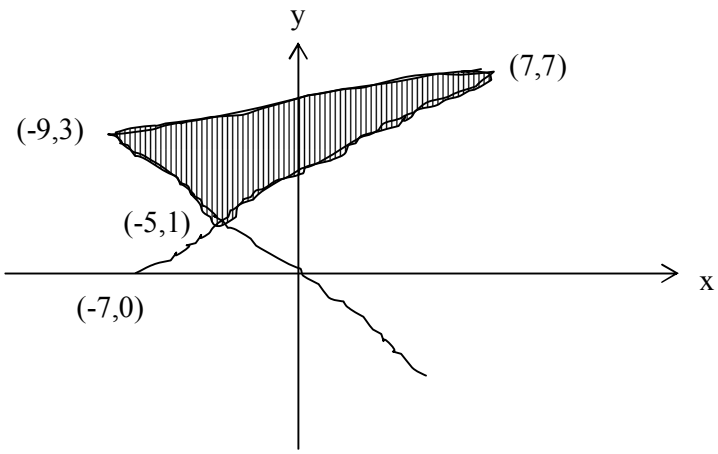
.1



بحل المعادلة $1-x^2=1-\sqrt{x}$ نجد أن نقاط التقاطع تكون عند x=0، x=1 وتكون المساحة هي:

$$\int_0^1 \left(1-x^2-1+\sqrt{x}\right)dx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-0=\frac{1}{3}$$

.2



وتكون المساحة هي:

$$A=\int_1^7 \left((2y-7)-\left(y^2-6y\right)\right)dy=\int_1^7 \left(-y^2+8y-7\right)dy=-\frac{y^3}{3}+4y^2-7y\Big|_1^7$$

$$=\left(\frac{-343}{3}+196-49\right)-\left(-\frac{1}{3}+4-7\right)=36$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي(1)

1. $= 290$

2. $= \frac{1}{6}\left[\left(\sqrt{17}\right)^3 - \left(\sqrt{13}\right)^3\right] = \frac{1}{6}17\sqrt{17} - 13\sqrt{13}$

3. $= \ln\frac{9}{2}$

4. $= \infty$

5. $= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\pi}{8}$

تقويم ذاتي(2)

(1)

(أ) $= \frac{\pi}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

(ب) $= 0$

(ج) $= 0$

(د) $= \frac{1}{5}$

(2) $= \frac{2}{3}$

(3) $= \frac{1}{3}$

(4) $= \frac{32}{3}$

(5) $= \frac{1}{2}$

مسرد المصطلحات

التكامل المحدود The Definite Integral

هو تكامل $\int_a^b (x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$ وتمثل قيمة التكامل من الناحية الهندسية المساحة التى يحصرها المنحنى بين النقطتين x=a و x=b

الدالة المستمرة Continuous Function

هي الدالة التى تكون f(a) قيمة منتهية وتكون النهاية اليمنى =النهاية اليسرى للدالة عند x=a وان تساوى كل من النهايتين f (a)

المراجع

1. Ayres, Frank and Mendel son, Elliott**,** Schaum, (1999) **Outline of Calculus,** McGraw-Hill

2. G.B, Thomas and R, Finney, (1996) **Calculus and Analytical Geometr**y, Addison- Wesley Publishing Co.

3..R, Ellis and D, Gulick, (1994) **Calculus with Analytic Geometry**, 5th Edition, SCP

4. H,.Anton, I, Bivens, and S, Davis, (2002) **Calculus (Early** transcendental), 7th Edition


الوحدة الرابعة
تطبيقات على التكامل

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	135
تمهيد	135
أهداف الوحدة	136
1. طول القوس	137
2. المعادلات الوسيطية	140
3.مساحة السطح الدوراني	142
4.الحجوم الدورانية	145
الخلاصة	155
إجابات التدريبات	156
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	160
مسرد المصطلحات	161
المراجع	162

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس

لقد وصلت إلى نهاية المقرر، وهى الوحدة الرابعة عن تطبيقات التكامل، بعد أن تعرفت على كيفية استخدام التكامل المحدود،وتطبيقاته في العلوم المختلفة، مثلا في علم الفيزياء لإيجاد الشغل، وفى الهندسة لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى، ومحور،وبين منحنيين، نأتي بك إلى تطبيقات التكامل لنتعرف على كيفية الاستفادة منها، في إيجاد أطوال ومساحات وحجوم الأشكال الهندسية المختلفة.

تبدأ الوحدة بشرح **القسم الأول** عن كيفية إيجاد طول القوس لمنحنى بين نقطتين

وفى **القسم الثاني** يشرح المعادلات الوسيطية واستخدامها في معادلة الدائرة ومعادلة القطع الناقص.

ثم يأتي **القسم الثالث** ليشرح مساحة السطح الدوراني لدائرة ومنحنى ومستقيم

القسم الرابع والأخير عن الحجوم الدورانية للمخروط والكرة ودوران منحنى

تجد داخل الوحدة أمثلة كثيرة لتدعم لك الشرح وأشكال ورسومات هندسية لتوضيح الشرح، كذلك تجد في نهاية كل قسم أسئلة تقويم ذاتي عليك بوضع حلول لها ومطابقتها مع الإجابات في نهاية الوحدة، تأتى التدريبات لكي تتأكد من استيعابك للوحدة فعليك بالاهتمام بها ووضع حلول لها وعرضها على مشرفك الأكاديمي، ولك أن تتأكد من إجاباتك مع إجابات التدريبات في نهاية الوحدة، عليك أن تزيد من التمارين من المراجع وتستفيد من التعيينات التى تقدمها لك جامعتك المفتوحة

أتمني أن تكون سعيد ومستفيد من دراستك لمادة الحسبان (2) نأمل أن تقدم لنا نقدك ومقترحاتك حتى نستفيد منها

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس ينبغي منك بعد أن تكمل دراسة هذه الوحدة أن تكون قادرا على أن :

- **تعرف** تطبيقات التكامل
- **توجد** طول القوس لمعادلة منحنى
- **تستخدم** المعادلات الوسيطية لكتابة معادلة الدائرة وطول القوس
- **تحل** معادلة المنحنى لا يجاد مساحة السطح الدوراني
- **تشرح** كيفية إيجاد الحجوم الدورانية للأشكال الهندسية المختلفة

الآن عزيزي الدارس، لقد وصلت إلى نهاية المقرر، وهى الوحدة الرابعة، وتشرح لك كيفية استخدام التكامل، للاستفادة منه في إيجاد أطوال، ومساحات، و حجوم الأشكال الهندسية المختلفة، واليك الأمثلة التالية:

1. طول القوس Arc Length

إذا كانت $y = f(x)$ هي معادلة منحني مشتقته الأولى موجودة ومعّرفة، فإن طول القوس للمنحني بين النقطتين $a \le x \le b$ يُعطي بالمعادلة

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

وإذا كانت $x = f(y)$ هي معادلة منحني مشتقته الأولى موجودة ومعّرفة، فإن طول القوس للمنحني $f(y)$ بين النقطتين $c \le x \le d$ يُعطي بالمعادلة

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

ولإيجاد طول القوس نحتاج في بعض الأحيان معرفة التكاملين التاليين

$$\int \sqrt{\frac{ax+b}{x}}\, dx = 2\sqrt{ax+b} - 2\sqrt{-b}\, \tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right)$$

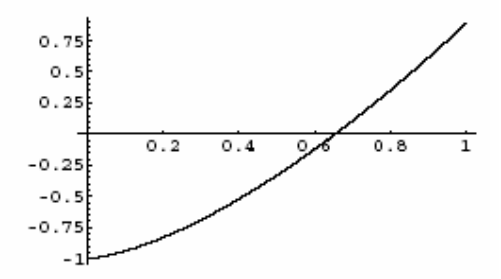
مثال:

أوجد طول المنحني

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$$

بين $x = 0$ و $x = 1$.

يمكنك أن ترسم هذا المنحني على النحو التالي



ولإيجاد طول المنحنى توجد أولاً $\frac{dy}{dx}$ على النحو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{2}\sqrt{x} = 2\sqrt{2x}$$

ومنه يكون

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 8x.$$

ليصبح طول المنحني L

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}.\frac{1}{8}(1+8x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{13}{6}\end{aligned}$$

مثال:

أوجد طول القوس من المنحني $y = 1-\sqrt{x}$ بين $x = 0$ و $x = 4$.

يُعطي طول القوس من المنحني بالمعادلة

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

تجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ومنها يكون طول القوس

$$\int_0^4 \sqrt{1+\frac{1}{4}x^{-1}}\,dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx$$

مثال:

أوجد طول القوس من المنحني $y=\sqrt{9-x^2}$ في المدى $-2 \le x \le 2$.

يُعطي طول القوس من المنحني بالمعادلة

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

وتجد أن $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ وبالتالي يكون

$$L=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\,dx=3\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=3\sin^{-1}\frac{x}{3}\Big|_{-2}^{2}=0.15\pi$$

تدريب(1)

أوجد طول القوس من المنحني $x=y^{\frac{3}{2}}$ في المدى $0 \le y \le 8$.

أسئلة تقويم ذاتي (1)

(1) أوجد طول القوس من المنحني $y=\sqrt{9-x^2}$ في الفترة $1 \le x \le 3$.

(2) أوجد طول القوس من المنحني $y=\ln(\sin x)$ بين $x=1$ و $x=3$.

(3) أوجد طول القوس من المنحني

$$y=\sqrt{x}+1$$

بين $x=1$ و $x=3$.

2. المعادلات الوسيطية Parametric Equation

كما سبق وذكرنا في مقرر الحسبان (1) عن المتغير الوسيط وهو المتغير الثالث فإذا كانت كل من x,y معطاة بدلالة متغير ثابت مثلا t فهو الوسيط، يمكنك استخدامه في تحديد المنحنى بدلالة المتغير الوسيط كما يتم توضيحه وشرحه في الأمثلة ويكون تحديد المنحنى في بعض الأحيان بدلالة متغير (وسيط) يربط بينه وبين x من جهة و بينه وبين yمن جهة أخري، وذلك بدلاً عن كتابة $y = f(x)$ مباشرة. فعلي سبيل المثال، يمكن كتابة معادلة الدائرة بالمعادلة الوسيطية

$$x = r\cos t \quad y = r\sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

وتُكتب معادلة القطع الناقص (***ellipse***) بالمعادلة الوسيطية

$$x = a\cos t \quad y = b\sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

إذا كان الوسيط هو t فإنك تكتب $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$ ويكون بالتالي طول القوس

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2}\, dx$$

أو

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2}\, \frac{dx}{dt} dt = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

إذاً

$$L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

ويُعطى طول القوس في هذه الحالة (بوضع $t = \theta$) بـ

$$L = \int_{\theta=a}^{\theta=b} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

مثال:

أوجد طول القوس للدائرة (المحيط) التي نصف قطرها r.

يمكنك استخدام التعريف أعلاه لإيجاد طول القوس وذلك باستخدام المعادلة الوسيطية.

توجد أولاً $\frac{dx}{d\theta}$ و $\frac{dy}{d\theta}$ من المعادلة الوسيطية $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

وتعوض الناتج في معادلة طول القوس أعلاه

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$$

حيث

$$x = r\cos t \quad , \quad y = r\sin t$$

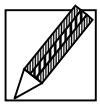
والآن تجد أن محيط الدائرة هو

$$L = \int_{\theta=a}^{2\pi} r\sqrt{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}\, d\theta = \int_{\theta=a}^{2\pi} r\, d\theta$$

$$L = r\int_{\theta=a}^{2\pi} d\theta = r(\theta)|_0^{2\pi} = 2\pi\, r$$

حيث استخدمت المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

تدريب (2)



أوجد طول القوس للمنحني الذي يُعطي بالمعادلة الوسيطية

$x = 2t + 1$ و $y = t^2 - 3t$.

أسئلة تقويم ذاتي (2)



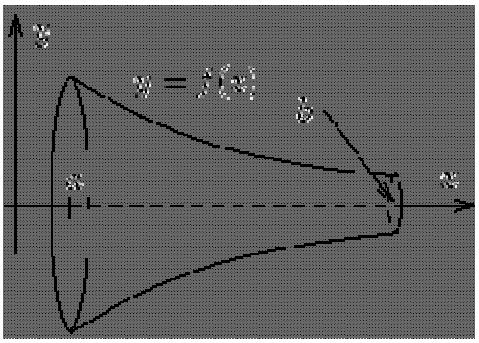
أوجد طول القوس من المنحني الذي يُعطي بالمعادلتين الوسيطتين التاليتين

(1) $x = t^2 + 3$ و $y = 3t + 3t^2$ بين $t = 1$ و $t = 4$.

(2) $x = \sin\theta$ و $y = \cos\theta + 2$ بين $\theta = 0$ و $\theta = \pi$.

3. مساحة السطح الدوراني Surface of Revolution

أنظر إلى الشكل آلاتي تجد انه إذا دار منحني معادلته $y = f(x)$ حول المحور السيني،



فإن مساحة السطح المتولدة في الفترة $a \le x \le b$ بالدوران تُعطي بالتكامل التالي

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

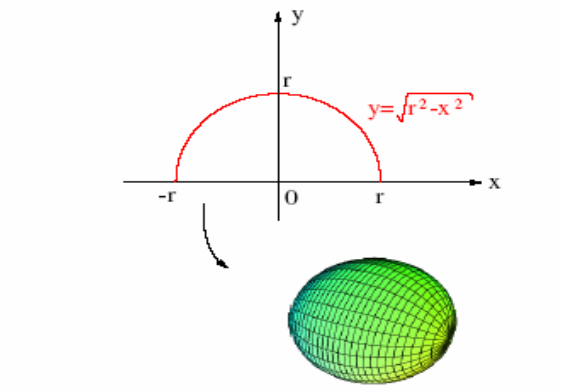
مثال:

أوجد مساحة السطح الدوراني عندما تدور دائرة حول المحور السيني.

تُعطي معادلة الدائرة بالمعادلة

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

و بدورانها حول المحول السيني تُنتِج الكرة، كما في الرسم المجاور



توجد أولاً

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x.\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\end{aligned}$$

ومنه فإن

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2}$$

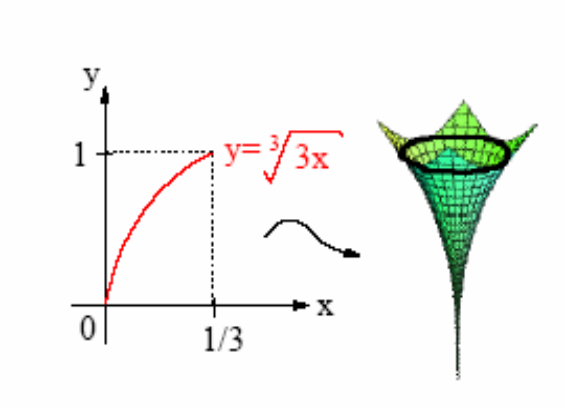
ويكون السطح الدوراني

$$\begin{aligned}S &= 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\ &= 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx \\ &= 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2+x^2}dx \\ &= 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx \\ &= 2\pi\,[rx]_{-r}^{r} \\ &= 2\pi.2r^2 \\ &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

مثال:

أوجد مساحة السطح الدوراني عندما يدور المنحني $y=(3x)^{\frac{1}{3}}$ حول المحور الصادي بين $x=0$ و $x=\frac{1}{3}$.

عند دوران المنحني حول المحور الصادي تحصل علي الشكل:



عند $x=\frac{1}{3}$ فإن $y=1$ وعند $x=0$ فإن $y=0$ وعليه تكون حدود التكامل $0\le y\le 1$.

توجد أولاً $\frac{dy}{dx}$ ومنها $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ على النحو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=(y^2)^2=y^4$$

وتصبح مساحة السطح الدوراني

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$

$$S=\frac{2\pi}{3}\int_0^1 y^3\sqrt{1+y^4}dy$$

لإيجاد التكامل

$$\int y^3\sqrt{1+y^4}\,dy$$

تضع $u=y^4$ و منها $du=4y^3dy$ ليصبح التكامل

$$\int\sqrt{1+u}\,\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int\sqrt{1+u}\,du=\frac{1}{4}\frac{(1+u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}(1+u)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}(1+y^4)^{\frac{3}{2}}$$

والآن تجد

$$S=\frac{2\pi}{3\times 6}\left[(1+y^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right]=\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

تدريب(3)

أوجد مساحة السطح الدوراني عندما يدور المستقيم $y = 2$ حول المحور السيني بين $x = 0$ و $x = 2$.

أسئلة تقويم ذاتي(3)

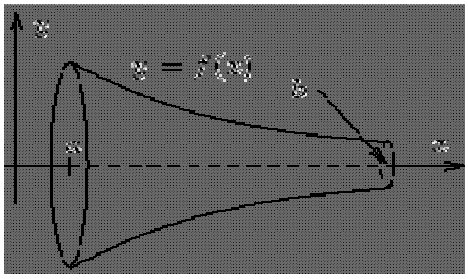
(1) أوجد مساحة السطح المتولد من دوران المنحني $y = \sqrt{x+1}$ حول المحور السيني بين $x = 1$ و $x = 3$.

(2) أوجد مساحة السطح المتولد من دوران المنحني $x = \sqrt{y+2}$ حول المحور الصادي بين $y = 2$ و $y = 7$.

(3) أوجد مساحة السطح المتولد من دوران المنحني $9x^2 + 4y^2 = 36$ حول المحور الصادي بين $x = 2$ و $x = 3$.

4. الحجوم الدوراني Volume of Revolution

إذا أدرت المنحني $f(x)$ حول المحور السيني في الفترة $a \le x \le b$ ستحصل على ما يُعرف بالسطح الدوراني (***solid of revolution***) كما موضح بالرسم أدناه. وتريد هنا أن تحصل على قاعدة لإيجاد حجم هذا المجسم (***solid***) الذي يُحدد بهذا السطح.



أولاً: تقوم بتقسيم هذا الحجم إلي شرائح دائرية صغيرة

ثانياً: توجد حجم كل شريحة صغيرة من مجموعة هذه الشرائح. تلاحظ أن كل شريحة تُمثِل أسطوانة نصف قطرها y وسمكها δx وعليه فإن حجم هذه الاسطوانة يكون

$$\delta V = \pi\ y^2\ \delta x$$

ثالثاً: لإيجاد الحجم الكلى للمجسم فإنك تجمع كل هذه الحجوم، أي

$$V = \sum_i \delta V_i = \sum_i \pi\ y^2\ \delta x_i$$

رابعاً: أن هذه الشرائح متراصة فإنك بدلاً عن الجمع ($\sum_i$) تستعمل التكامل حيث تستعمل dx بدلاً عن δx_i لتحصل علي

$$V = \int_a^b \pi\ y^2\ dx$$

إذا دار المنحني حول المحور الصادي في الفترة $c \le y \le d$ ستحصل على الحجم

$$V = \int_c^d \pi\ x^2\ dy$$

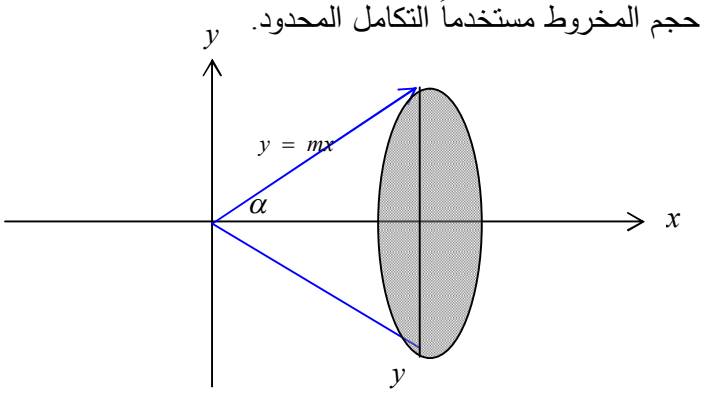
ويُعطي الحجم المحصور بين منحنيين عند دورانهما حول المحور السيني في الفترة $a \le x \le b$ بالمعادلة

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\ dx$$

ويُعطي الحجم المحصور بين منحنيين عند دورانهما حول المحور الصادي في الفترة $c \le y \le d$ **بالمعادلة** $V = \pi \int_c^d (f(y)^2 - g(y)^2)\ dy$

مثال:

أوجد حجم المخروط مستخدماً التكامل المحدود.



أولاً: ينتج المخروط من دوران الخط المستقيم $y = m\,x$ ، حيث $m = \tan\alpha$ ،حول المحور السيني كما في الرسم أعلاه

$$V = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^h (mx)^2\, dx$$

$$V = \pi\, m^2\, \frac{x^3}{3}|_0^h = \frac{1}{3}\pi\, m^2 h^3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, m^2 h^3$$

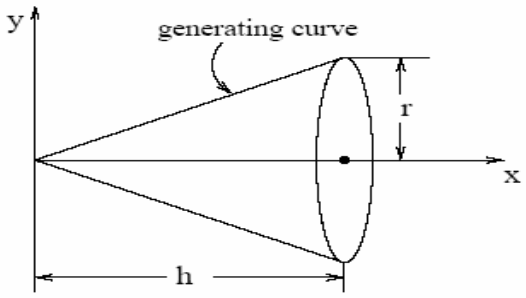
وإذا كان نصف قطر قاعدة المخروط هو R فإن $m = \tan\alpha = \frac{R}{h}$

وبالتالي يكون حجم المخروط

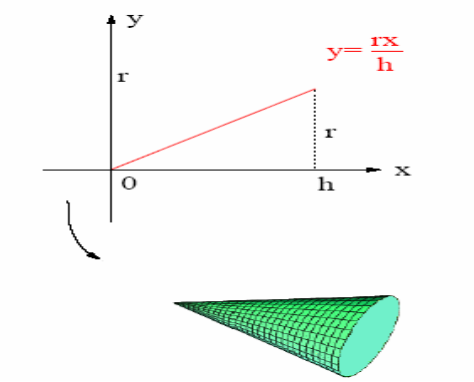
$$V = \frac{1}{3}\pi\, (\frac{R}{h})^2 h^3 = \frac{1}{3}\pi\, R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, R^2 h$$

أي أن: حجم المخروط = $\frac{1}{3}$مساحة القاعدة × الارتفاع العمودي



أو



مثال:

أوجد حجم الكرة مستخدما التكامل المحدود أعلاه.

أولاً ينتج حجم الكرة من دوران نصف الدائرة في المدى $(r,-r)$ حول محور السيني، كما في الرسم أدناه. تُعطي معادلة الدائرة التي نصف قطرها r بالمعادلة

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ومنها تجد أن $y^2 = r^2 - x^2$ وبالتالي يُعطي حجم الكرة بـ

$$V = \int_a^b \pi\ y^2\ dx = \pi \int_{-r}^{r}\ y^2\ dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\ dx = \pi\ (r^2 x - \frac{x^3}{3})\ |_{-r}^{r}$$

$$V = \pi\ [(r^2 r - \frac{r^3}{3}) - (r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3})] = \pi\ [\frac{2}{3} r^3 + \frac{2}{3} r^3] = \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

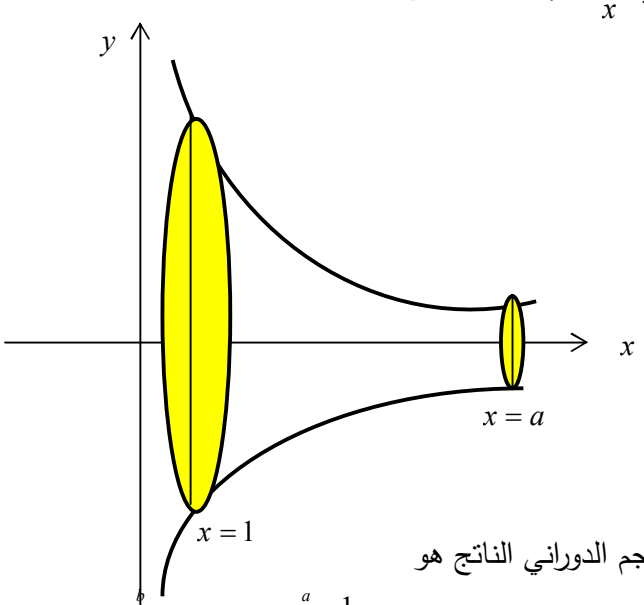
$$V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

هل لاحظت انك تحصلت على حجم الكرة المعروف $\left(V = \frac{4}{3}\pi\ r^3\right)$.

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران المنحني $y=\frac{1}{x}$ حول المحور السيني بين النقطتين $1 \le x \le a$

برسم المنحني $y=\frac{1}{x}$ تحصل على الشكل



ويكون الحجم الدوراني الناتج هو

$$V=\int_a^b \pi\ y^2\ dx=\pi\int_1^a (\frac{1}{x})^2\ dx$$

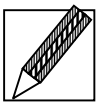
$$V=\pi\int_1^a (\frac{1}{x})^2\ dx=\pi\int_1^a x^{-2}\ dx$$

$$V==\pi\frac{x^{-1}}{-1}|_1^a$$

$$V=-\pi(\frac{1}{a}-1)=\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

ونلاحظ انه عندما تؤول $a\to\infty$ فإن الحجم V يؤول إلى مقدار معّرف، أي $V\to\pi$!

تدريب(4)

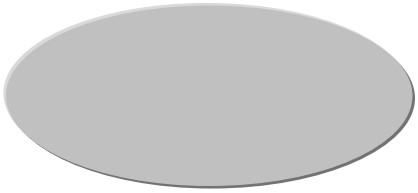


أوجد الحجم الناتج من دوران القطع المكافي $y^2=4x$ حول المحور السيني بين النقطتين $0 \le x \le 4$.

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران القطع الناقص $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ حول محوره الرئيسي (***major axis***).

أولاً تحدد المحور الرئيسي بـ $-a\le x\le a$، و أرسم القطع الناقص أعلاه تحصل على الشكل التالي:



ويكون الحجم الدوراني الناتج هو

$$V=\int_a^b \pi\ y^2\ dx=\pi\int_{-a}^{a}\left(b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2\right)dx$$

$$V=\pi\left(b^2x-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$V=\pi\left(b^2a-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{a^3}{3}\right)-\left(b^2(-a)-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{(-a)^3}{3}\right)\Bigg|$$

$$V=\frac{4}{3}\pi b^2a$$

وهو حجم المجسم البيضاوي (***ellipsoid***)، أي $V=\frac{4}{3}\pi b^2a$. وبإمكانك التأكد من صحة القانون من القانون الرياضي

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران القطع الناقص $x^2+y^2=16$ حول محوره الرئيسي (***major axis***).

أولاً حدد المحور الرئيسي بـ $-4\le x\le 4$ ويكون الحجم الدوراني الناتج هو

$$V=\frac{4}{3}\pi b^2a$$

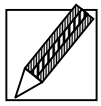
حيث $a=b=4$ والذي يُعطي المقدار $V=\frac{64\pi}{3}$.

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمين $y = 2x$ و $x = 3$ والمحور السيني **(*x- axis*)** حول المحور الصادي.

تلاحظ أن دوران المستقيم $y = 2x$ ينتج مخروطاً ارتفاعه 3 وحدات ونصف قطر قاعدته 6 وحدات، وبالتالي فإن الحجم الدوراني الناتج هو $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi (6)^2 (3) = 36\pi$.

تدريب(5)



1- أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y = \sin x$ و $0 \le x \le \pi$ والمحور السيني **(*x- axis*)** حول المحور السيني.

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y = 2 - x^2$ حول المحور السيني.

تلاحظ أنه عند $y = 0$ فإن $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ أي $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ وهي تمثل حدود التكامل.

ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة

$$V = \int_a^b \pi\ y^2\ dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} (4 - 4x^2 + x^4)\, dx$$

$$V = \pi(4x - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5})_{-1}^{1} = \frac{43}{15}\pi$$

$$V = \frac{43}{15}\pi$$

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيم $y = x$ و $x = 1$ و $x = 2$ والمحور السيني حول المحور الصادي.

تلاحظ أنه عند $y = 1$ فإن $y = \sqrt{1}, 2$ أو $1 \le y \le 2$ وهي تمثل حدود التكامل.

ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة

$$V = \int_c^d \pi\, x^2\, dy = \pi \int_1^2 y^2 dy = \pi \frac{y^3}{3}|_1^2$$

$$V = \frac{\pi}{3}(2^3 - 1^3)$$

$$V = \frac{7}{3}\pi$$

مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني بين $y = x^2$ و المستقيمين $x = -2$ و $x = -3$ حول المحور السيني.

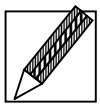
في هذه الحالة فإن حدود التكامل هي $-3 \le x \le -2$. ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة

$$V = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_{-3}^{-2} (x^2)^2 dx = \pi \int_{-3}^{-2} x^4\, dx$$

$$V = \pi \frac{x^5}{5}|_{-3}^{-2} = \frac{\pi}{5}[(-2)^5 - (-3)^5]$$

$$V = \frac{211}{5}\pi$$

تدريب(6)



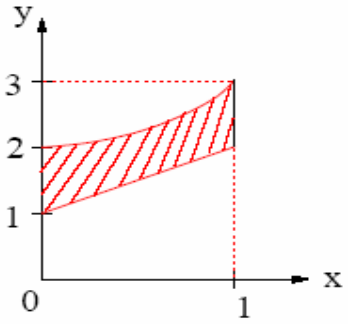
أوجد الحجم المتولد بالمنحني $y = x^2$ عندما

(1) يدور حول المحور السيني بين $x = 0$ و $x = 3$.

(2) يدور حول المحور الصادي بين $x = 0$ و $x = 2$.

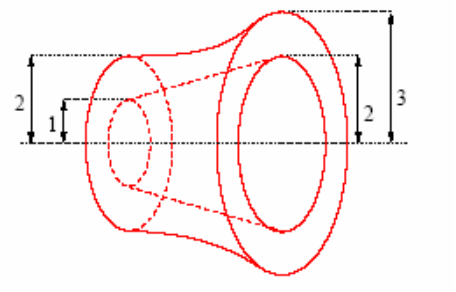
مثال:

أوجد الحجم الناتج مع المحور السيني للمنطقة بين بالمنحني $y = x^2 + 2$ والمستقيم $y = x + 1$ من $x = 0$ إلى $x = 1$. يمكنك أن ترسم المنحني والمستقيم على النحو



ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة $V = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$

والحجم الناتج يمكن تصوره على شكل غلاف، كما في الرسم أدناه



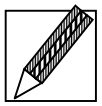
ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة

$$V = \pi \int_0^1 (f(x)^2 - g(x)^2)dx = \pi \int_0^1 ((x^2+2)^2 - (x+1)^2)dx$$

والذي يساوي المقدار التالي

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 - 2x - 1)dx \\
&= \pi \int_0^1 (x^4 + 3x^2 - 2x + 3)dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 + 3 \right]_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} + 1 - 1 + 3 \right) \\
&= \frac{16\pi}{5}
\end{aligned}
$$

تدريب(7)



أوجد حجم القطعة المتولد بين المستقيمين المتعامدين $x = 1$ و $y = 2$ للدائرة $x^2 + y^2 = 9$ التي تدور حول قطرها المنطبق مع المحور السيني مرة ومع المحور الصادي مرة أخرى.

أسئلة تقويم ذاتي (4)



1.أوجد حجم السطح المتولد من دوران المنحني $y = \sqrt[3]{x}$ حول المحور الصادي في الفترة $1 \le y \le 2$.

2.أوجد حجم السطح المتولد من دوران المنحني $y = \sqrt{9 - x^2}$ حول المحور السيني في الفترة $-2 \le x \le 2$.

3.أوجد حجم السطح المتولد من دوران المنحني $4y^2 - 9x^2 = 36$ حول المحور السيني في الفترة $2 \le x \le 3$.

الخلاصة

في نهاية هذه الوحدة نأتي بك لنستعرض أهم ما ورد فيها

شرحت الوحدة تطبيقات التكامل المختلفة، بدأت بتطبيق التكامل لإيجاد طول القوس في معادلة منحنى، ثم كيفية استخدام المعادلات الوسيطية في كتابة معادلة الدائرة لتصبح

$$x=r\cos t$$
$$Y= r\sin t \qquad 0\le t\le 2\pi$$

ومعادلة القطع الناقص تكتب

$$X=a\cos t$$
$$Y= b\sin t \quad 0\le t\le 2\pi$$

بعد ذلك شرحنا لك استخدام التكامل في إيجاد مساحة السطح الدوراني لمنحنى وتكون مساحة السطح الدوراني لمنحنى معادلته $Y=f(x)$ عندما يدور حول المحور السيني في الفترة

$$a\le x\le b$$
$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

تحدثنا عن استخدام التكامل لإيجاد الحجوم الدورانية، فإذا دار منحنيين حول المحور السيني في الفترة $a\le x\le b$

نستخدم المعادلة

$$V=\pi\int_a^b \left|\,(f(x))^2-(g(x))^2\right|dx$$

والمعادلة

$$V=\pi\int_c^d \left|\,(f(y))^2-(g(y))^2\right|dy$$

عندما يكون الدوران حول المحور الصادي في الفترة $c\le y\le d$

إجابات التدريبات

تدريب (1)

طول القوس من المنحني $x = y^{\frac{3}{2}}$ في المدى $0 \le y \le 8$.

يُعطي طول القوس من المنحني بالمعادلة

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

وبالتعويض تجد أن $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$ ومنها يكون طول القوس

$$L = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4} y}\, dy = \int_0^8 \left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3 \times \frac{9}{4}} \left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^8 = \frac{8}{27}(\sqrt{6859} - 1)$$

تدريب (2)

طول القوس للمنحني الذي يُعطي بالمعادلة الوسيطية $x = \sqrt{3}t + 1$ و $y = t^2 - t$.

وهنا نذكرك بقانون دالة الدالة وهو إذا كانت Y معطاة بدلالة U و U معطاة بدلالة X نقول أن Y دالة في X. من قانون دالة الدالة تجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$. وتجد أن $\frac{dy}{dt} = 2t - 1$ و $\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}$ أو $dx = 2\,dt$ ومنها تجد أن طول القوس

$$L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{\sqrt{3}^2 + (2t-1)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{3 + \left(4t^2 - 4t + 1\right)} dt$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{\left(4t^2 - 4t + 4\right)} dt = 2\int_0^2 \sqrt{\left(t^2 - t + 1\right)} dt$$

$$L = 2\int_0^2 \sqrt{\left(t^2 - t + 1\right)} dt = 2\int_0^2 \sqrt{\left((t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)} dt$$

وبوضع $u = t - \frac{1}{2}$ يكون $du = dt$ ويصبح التكامل في الصورة

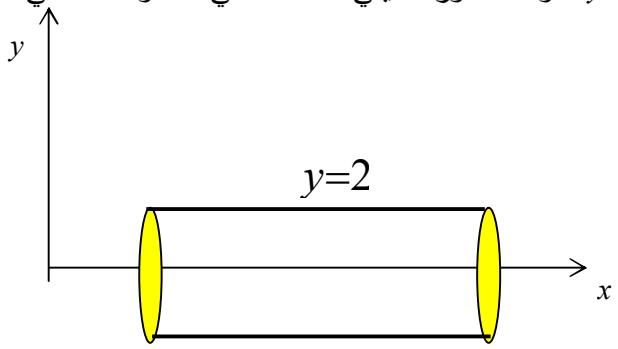
$$L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}\, du$$

هـل لاحظـت انــه يمكنـك الرجــوع إليــه والتأكـد مــن صــحته،وهو يـشبه التكامـل القياســي $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ حيث $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

تدريب(3)

مساحة السطح الدوراني عندما يدور المستقيم $y = 2$ حول المحور السيني بين $x = 0$ و $x = 2$.

إذا دار المستقيم $y = 2$ حول المحور السيني تحصل علي اسطوانة كما في الرسم أدناه.



تُعطي مساحة السطح الدوراني بدوران المستقيم حول المحور السيني بالمعادلة

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

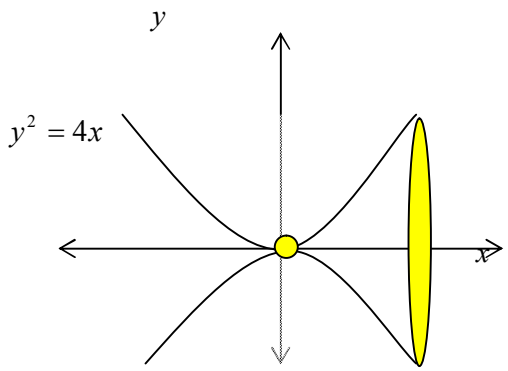
وبالتعويض عن $y = 2$ تكون $\frac{dy}{dx} = 0$ ومنها تجد أن

$$S = 2\pi \int_0^2 2\sqrt{1+0}\, dx = 4\pi \int_0^2 dx = 4\pi x\Big|_0^2 = 8\pi$$

تدريب(4)

الحجم الناتج من دوران القطع المكافي $y^2 = 4x$ حول المحور السيني بين النقطتين $0 \le x \le 4$.

أرسم المنحني $y^2 = 4x$ تحصل على الشكل التالي



ويكون الحجم الدوراني الناتج هو

$$V = \int_a^b \pi\ y^2\ dx = \pi \int_0^4 4x\ dx$$

$$V == \pi(4\frac{x^2}{2})\Big|_0^4 = 2\pi(4)^2$$

$$V = 32\pi$$

تدريب(5)

الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y = \sin x$ و $0 \le x \le \pi$ والمحور السيني (***x- axis***) حول المحور السيني.

يُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة التالية

$$V = \int_a^b \pi\ y^2\ dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\ dx = \pi(\frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx)$$

$$V = \frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)\,|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\left[(\pi - \sin 2\pi) - (0-0)\right] = \frac{1}{2}\pi^2$$

$$V = \frac{1}{2}\pi^2$$

تدريب(6)

الحجم المتولد بالمنحني $y = x^2$ عندما

(1) يدور حول المحور السيني بين $x = 0$ و $x = 3$.

(2) يدور حول المحور الصادي بين $x = 0$ و $x = 2$.

1- ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة

$$V = \int_a^b \pi\ y^2\ dx = \pi \int_0^3 (x^2)^2\, dx = \pi \int_0^3 x^4\, dx$$

$$V = \pi \frac{x^5}{5} |_0^3 = \frac{\pi}{5}[3^5 - 0^5]$$

$$V = \frac{243}{5}\pi$$

2- في هذه الحالة تصبح حدود التكامل $x = 0$ و $x = 2$ على النحو $y = 0$ و $y = 4$.

ويُعطي الحجم الدوراني الناتج بالمعادلة

$$V = \int_c^d \pi\ x^2\ dy = \pi \int_0^4 y\, dy = \pi \frac{y^2}{2} |_0^4$$

$$V = \frac{\pi}{2}[4^2 - 0^2] = \frac{\pi}{2} \cdot 16 = 8\pi$$

$$V = 8\pi$$

تدريب(7)

حجم القطعة المتولد بين المستقيمين المتعامدين $x = 1$ و $y = 2$ للدائرة $x^2 + y^2 = 9$ التي تدور حول قطرها المنطبق مع المحور السيني مرة ومع المحور الصادي مرة أخرى.

(1) إذا دارت الدائرة حول المحور الصادي، فإن الحجم الدوراني المتولد يكون عبارة عن قرص سمكه 2 وحدة ونصف قطره 1 وحدة ويكون بالتالي حجمه هو $V = \pi R^2 h = \pi(1)^2(2) = 2\pi$ وحدة مكعبة.

(2) إذا دارت الدائرة حول المحور السيني فإن الحجم الدوراني المتولد هو عبارة عن اسطوانة نصف قطره 2 وحدة و ارتفاعها 1 وحدة ويكون بالتالي حجمها هو $V = \pi R^2 h = \pi(2)^2(1) = 4\pi$ وحدة مكعبة.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي(1)

1. $= \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{3}\ \Big|_1^3 = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

2. $= \ln\left(\frac{\cos c(1)+\cot(1)}{\cos c(3)+\cot(3)}\right)$

3. $\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx = 2\left(x\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right|\right)$

تقويم ذاتي(2)

1. $= L = \sqrt{10}\left(\left(t+\frac{9}{20}\right)\sqrt{\frac{9}{400}+\left(t+\frac{9}{20}\right)^2} + \ln\left|\left(t+\frac{9}{20}\right)+\sqrt{\frac{9}{400}+\left(t+\frac{9}{20}\right)^2}\right|\right)^4$

عوض حدود التكامل وهي 1، 4

2. $L = \int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \theta\Big|_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$

تقويم ذاتي(3)

1. $= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-27\right)$

2. $= \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{16}^{36} = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-17\sqrt{17}\right)$

3. $= 4\pi + \frac{18\pi}{5}\sqrt{5}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 18\pi\sqrt{5}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{9}\right)$

تقويم ذاتي(4)

1. $= \frac{\pi}{7}(127)$

2. $= \frac{92}{3}\pi$

3. $= \frac{93\pi}{4}$

مسرد المصطلحات

طول القوس Arc Length

هو إيجاد طول القوس لمعادلة منحنى مشتقته الأولى موجودة ومعرفة ويكون طول القوس بين النقطتين $a \le x \le b$ يعطى بالمعادلة $L = \int_a^b$

المعادلات الوسيطية Parametric Equation

هي معادلات فيها يتم تحديد المنحنى بدلالة متغير (وسيط) يربط بينه وبين x من جهة وبينه وبين y من جهة أخرى

المراجع

1. Ayres, Frank and Mendel son, Elliott**,** Schaum, (1999) **Outline of Calculus,** McGraw-Hill

2 G.B, Thomas and R, Finney, (1996) **Calculus and Analytical Geometr**y, Addison- Wesley Publishing Co.

3.R, Ellis and D, Gulick, (1994) **Calculus with Analytic Geometry**, 5th Edition, SCP

4 H,.Anton, I, Bivens, and S, Davis, (2002) **Calculus (Early** transcendental), 7th Edition