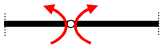
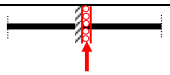
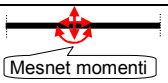
BÖLÜM 6

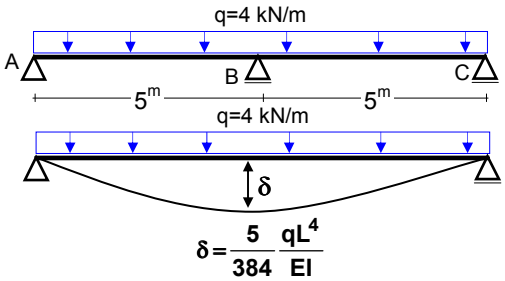
6.1. KUVVET METODU

Hiperstatik sistemlerin kuvvet metoduyla çözümü, adından da anlaşılacağı gibi sistemdeki hiperstatik bilinmeyenlerin kuvvet olarak seçilmesiyle yapılan bir çözümdür. Bu hiperstatik bilinmeyenler verilen hiperstatik sistemin izostatik hale gelmesi için belli kurallar dahilinde sistemden kaldırılan mesnet tepki kuvveti-kuvvetleri veya kesit tesiri-tesirleridir. Bu şekilde elde edilen sisteme **izostatik esas sistem** adı verilir. Bir mesnetten veya çubuktan kaldırılması muhtemel mesnet tepkileri ve kesit tesirleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Seçilen izostatik esas sisteme hiperstatik bilinmeyenlerin gerçek değerleri uygulandığı zaman bu sistemin şekil değiştirmesi hiperstatik sistemin şekil değiştirmesine eşit olur.

NOKTA / ADIM	ANKASTRE MESNET	SABİT/KAYICI MESNET	ÇUBUK
İLK DURUM			
1. DURUM			
2.DURUM			
3.DURUM			

Hiperstatik bilinmeyenlerin kabul edildiği mesnetlerde bazı sınır şartları vardır ve bunlar önceden bilinmektedir. Ankastre bir mesnette dönüş açısı, yatay ve düşey deplasmanın sıfır olduğu, sabit mesnette yatay ve düşey deplasmanların sıfır olduğu kayıcı mesnette ise sadece düşey deplasmanın sıfır olduğu bilinmektedir. Bunların bilinmesi sistemin çözümünü kolaylaştırdığı aşağıdaki örnekte görülmektedir.

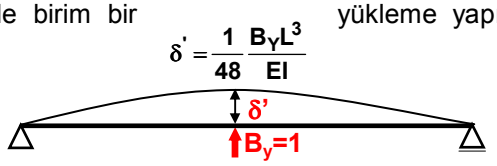
ÖRNEK 1: Şekilde yüklemesi verilen birinci dereceden hiperstatik mütemadi kirişin (M) moment alanının kuvvet metoduna göre çiziniz.



B mesnedi kaldırılınca tek açıklıklı kiriş olur. Bunun ortasındaki deplasmanı önceden hesaplanmıştı (Örnek 1.9).

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{384}\frac{4\times10^4}{EI} = \frac{520.83}{EI}$$

B mesnedine B_y yönünde birim bir yükleme yapılır ise ve bundan dolayı oluşan deplasman elde edilir.

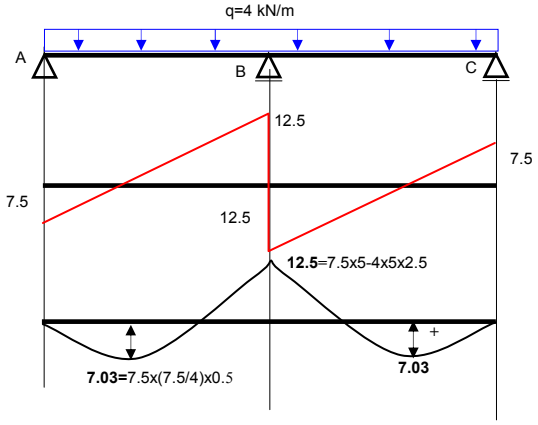


B mesnedinin özelliğinden dolayı düşey deplasmanın sıfır olması gerekir. Yani **δ - δ'=0** olmalı çünkü yükten dolayı olan deplasman ile B_y den dolayı oluşan deplasman ters yönlüdür.

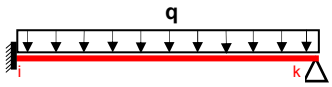
$$\delta = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{384}\frac{4x10^4}{EI} = \frac{520.83}{EI} \qquad \delta' = \frac{1}{48}\frac{B_y L^3}{EI} = \frac{1}{48}\frac{B_y x10^3}{EI} = \frac{B_y 20.83}{EI}$$

deplasmanlar yukarıda hesaplandıktan sonra $\delta - \delta' = \frac{520.83}{EI} - \frac{B_y 20.83}{EI} = 0$ $\qquad B_y = 25kN$

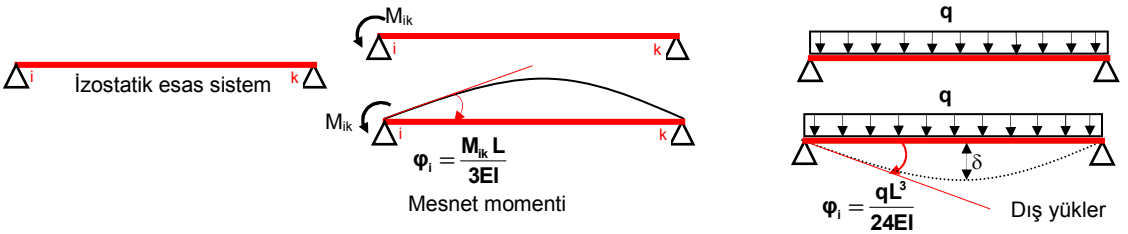
olarak hesaplanır. Buna göre sistemin moment alanı aşağıdaki şekilde çizilir.



ÖRNEK 2: Aşağıda verilen birinci dereceden hiperstatik sistemin çözümü. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kirişte **i** mesnedindeki dönüş açısının sıfır olması koşulundan yararlanarak sistemi kuvvet yöntemine göre çözümü yapılacaktır. (Bu sistemdeki mesnet momentinin de (ankastrelik) $\mathbf{M_A = \frac{qI^2}{8}}$ olduğunun ispatı yapılmış olacaktır.)



İlk önce sistemi A mesnedindeki moment değeri kaldırılarak sistem aşağıdaki şekilde izostatik hale getirilir. Sistemin A noktasındaki dönüş açısı bir momentten birde yayılı yükten dolayı oluşan 2 dönüş açısının toplamının sıfır olması koşulundan çözülür.

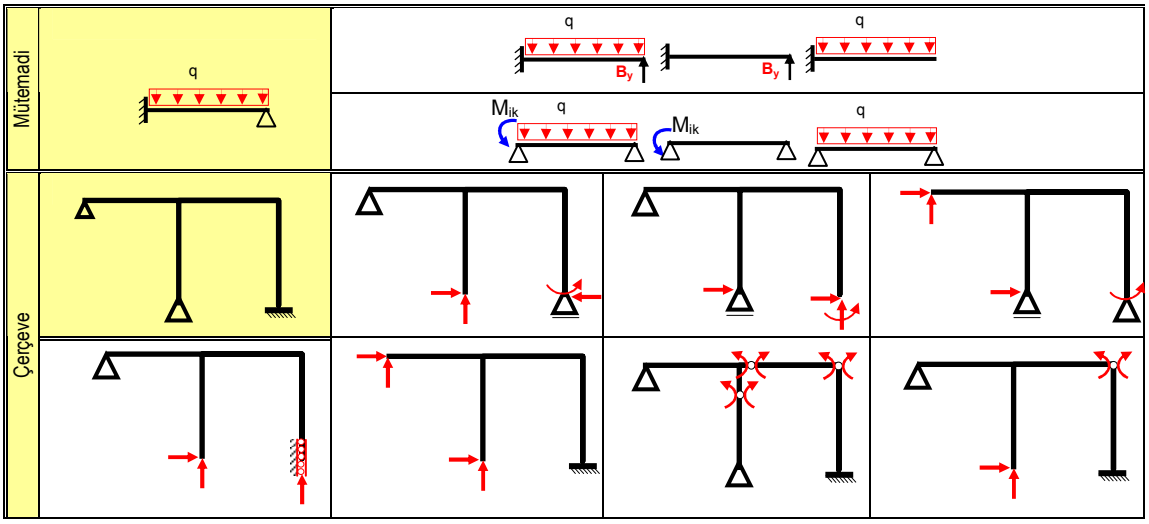


$$\varphi_M + \varphi_q = 0 \qquad \frac{qI^3}{24EI} - \frac{M_A I}{3EI} = 0 \qquad M_A = \frac{qI^2}{8}$$

Çözüm sonucunda görüldüğü gibi ankatrelik momenti aynen elde edilmiş olmaktadır.

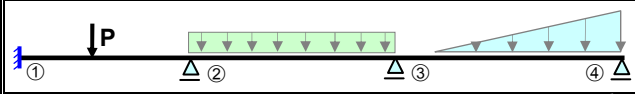
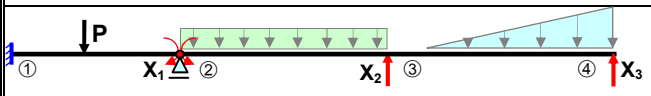
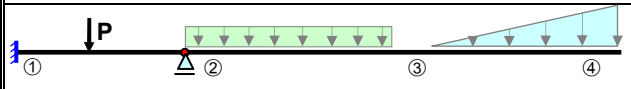
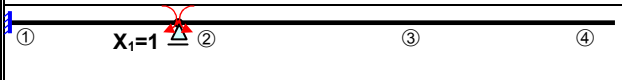
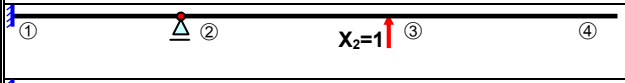
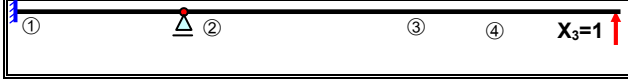
Eğer hiperstatik bilinmeyen simetrik yükleme ve simetrik bir sistemde tam orta noktadaki bir çubuğun orta noktasındaki kesit tesirleri seçilmiş ise buradaki dönmenin de sıfır olacağı önceden bilinmesi

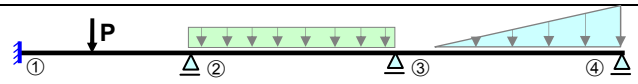
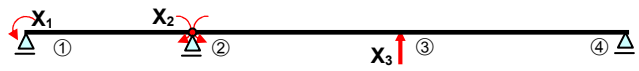
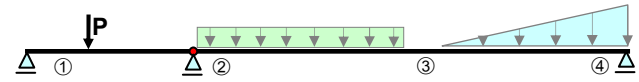
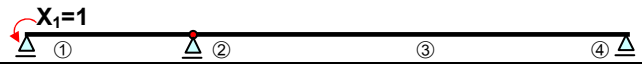
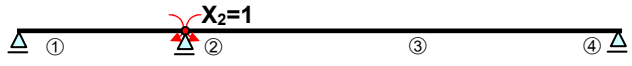
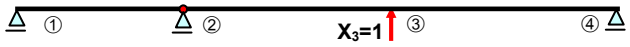
çözüme bazı kolaylıklar getirecektir. Kuvvet metodunda çözümü kolaylaştıracak diğer bir konuda izostatik esas sistem seçimidir. İzostatik esas sistem mümkün olduğunca hiperstatik bilinmeyenlerden ve dış yüklerden oluşan moment alanlarının daha az bölgelerde olacak şekilde seçilmesi işlemlerin daha kolay yapılması bakımından önem taşımaktadır. Aşağıda çeşitli hiperstatik sistemlerin değişik izostatik halleri görülmektedir.



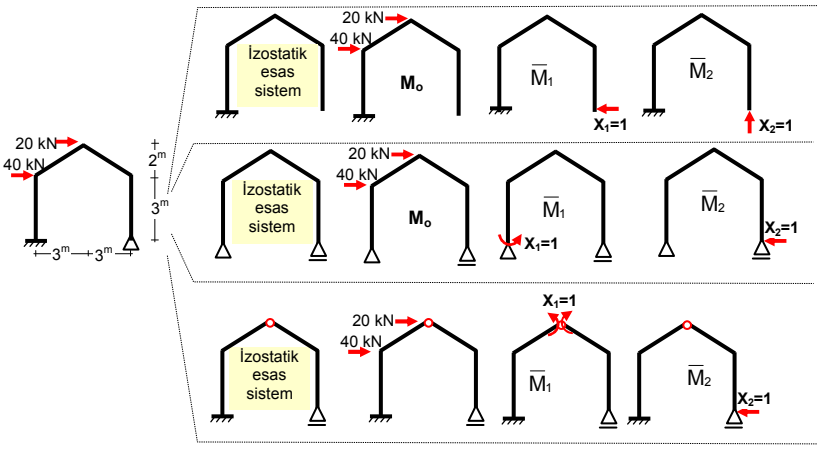
İzostatik esas sistem sayısını daha da çoğaltmak mümkündür. Bunlardan birisi seçilerek dış yükler ve hiperstatik bilinmeyenler uygulanarak moment alanları elde edilir. Bu moment alanları kendi aralarında çarpılarak süreklilik denklemleri elde edilir. Bu süreklilik denklemleri çözülerek hiperstatik bilinmeyenlerin gerçek değeri bulunur ve sistemin kesit tesirleri alanları olan kesme kuvveti, moment ve eksenel kuvvet diyagramları elde edilir.

ÖRNEK 3: Şekilde verilen mütemadi kirişin ve çerçevenin değişik hiperstatik bilinmeyenlerini seçerek izostatik esas sistemini belirleyiniz.

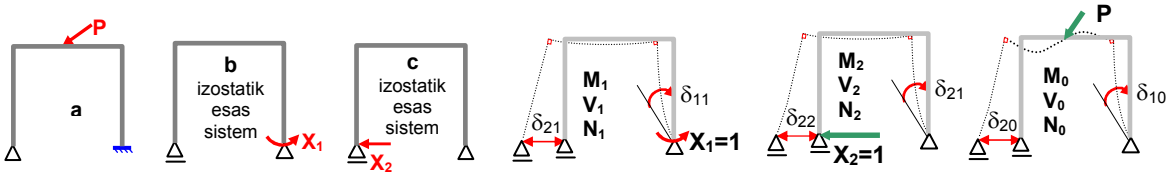
SİSTEM	Açıklama
	**Hiperstatik Sistem**
	İzostatik Esas Sistem
	İzostatik Esas Sistem Ve Dış Yükleme [M_o]
	İzostatik Esas Sistem Ve 1. Hiperstatik Bilinmeyen [M_1]
	İzostatik Esas Sistem Ve 2. Hiperstatik Bilinmeyen [M_2]
	İzostatik Esas Sistem Ve 3. Hiperstatik Bilinmeyen [M_3]

SİSTEM	Açıklama
	Hiperstatik Sistem
	İzostatik Esas Sistem
	İzostatik Esas Sistem Ve Dış Yükleme [M_o]
	İzostatik Esas Sistem Ve 1. Hiperstatik Bilinmeyen [M_1]
	İzostatik Esas Sistem Ve 2. Hiperstatik Bilinmeyen [M_2]
	İzostatik Esas Sistem Ve 3. Hiperstatik Bilinmeyen [M_3]

Şekilde verilen çerçevenin eşdeğer esas sistemini ve hiperstatik bilinmeyenlerini seçiniz.



Şekilde verilen ikinci derecen hiperstatik sistemi kuvvet yöntemine göre çözmek için çeşitli izostatik esas sistemleri seçmek mümkündür. Bu izostatik esas sistemde hipersatatik bilinmeyenler birim olarak şekildeki gibi uygulanmış ve şekil değiştirmeleri belirlenmiştir.



δ_{11}: Birinci hiperstatik bilinmeyenin oluşturduğu şekil değiştirme

δ_{21}: İkinci hiperstatik bilinmeyenin birinci hiperstatik bilinmeyen noktasında oluşturduğu şekil değiştirmeyi göstermektedir. Yani **birinci indis** yeri, **ikinci indis** bu yerdeki şekil değiştirmeye sebep olan yüklemeyi göstermektedir.

Verilen hiperstatik sistemlerin KUVVET Metoduyla çözümünde izlenecek yol;

1. Verilen hiperstatik sistemin izostatik esas sistemi seçilerek hiperstatik bilinmeyenler işaretlenir.
2. Seçilen izostatik esas sistem üzerinde verilen dış yüklerden dolayı oluşan moment alanı çizilir. **(M_o)**
3. Birinci hiperstatik bilinmeyen olarak kabul edilenin (Birim moment veya birim kuvvet) izostatik esas sistem üzerinde moment alanı çizilir. **($\overline{M}_1$)**
4. İkinci hiperstatik bilinmeyen olarak kabul edilenin (Birim moment veya birim kuvvet) izostatik esas sistem üzerinde moment alanı çizilir. **($\overline{M}_2$)**
5. Üçüncü hiperstatik bilinmeyen olarak kabul edilenin (Birim moment veya birim kuvvet) izostatik esas sistem üzerinde moment alanı çizilir. **($\overline{M}_3$).** Sistemde kaç tane hiperstatik bilinmeyen seçilmiş ise o kadar birim momentten veya birim kuvvetten oluşan moment alanları eşdeğer sistem üzerine çizilir.
6. $\overline{M}_i$ $\overline{Q}_i$ $\overline{N}_i$ Birim yüklemelerden oluşan kesit tesirleri
7. M_o Q_o N_o Dış yüklerden oluşan kesit tesirleri
8. Virtüel iş yönteminde; $1.\delta = \int \frac{M\overline{M}}{EI} dl + \int \overline{N}\alpha t\, dl + \int \frac{\overline{M}\,\alpha t\, dl}{d} - \sum \overline{C}c - \sum \overline{M}\varphi$

$$1.\delta = \int \frac{(M_o + \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3)\,\overline{M}}{EI} dl + \int \overline{N}\alpha t\, dl + \int \frac{\overline{M}\,\alpha t\, dl}{d} - \sum \overline{C}c - \sum \overline{M}\varphi$$

$$1.\delta = \int \frac{M_o\,\overline{M}_1}{EI} dl + X_1 \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_1}{EI} dl + X_2 \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_2}{EI} dl + X_3 \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_3}{EI} dl + \int \overline{N}_1 \alpha t\, dl + \int \frac{\overline{M}_1\,\alpha \Delta t\, dl}{d} - \sum \overline{C}c - \sum \overline{M}\varphi$$

Buradan; $\delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_1}{EI} dl$ $\delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_2}{EI} dl$ $\delta_{30} = \delta_{03} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_o}{EI} dl$

1 $\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dl$ $\delta_{12} = \int \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_2}{EI} dl$ $\delta_{23} = \int \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_3}{EI} dl$ $\delta_{10} = \int \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_o}{EI} dl$ $\delta_{1t} = \int \frac{\overline{M}_1\,\alpha\,\Delta t}{d} dl + \int \overline{N}_1\,\alpha\, t\, dl$

$$1.\delta = \int \frac{M_o\,\overline{M}_3}{EI} dl + X_1 \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_1}{EI} dl + X_2 \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_2}{EI} dl + X_3 \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_3}{EI} dl + \int \overline{N}_3\,\alpha t\, dl + \int \frac{\overline{M}_3\,\alpha\,\Delta t\, dl}{d} - \sum \overline{C}c - \sum \overline{M}\varphi$$

$$1.\delta = \int \frac{M_o\,\overline{M}_2}{EI} dl + X_1 \frac{\overline{M}_2\,\overline{M}_1}{EI} dl + X_2 \frac{\overline{M}_2\,\overline{M}_2}{EI} dl + X_3 \frac{\overline{M}_2\,\overline{M}_3}{EI} dl + \int \overline{N}_2\,\alpha t\, dl + \int \frac{\overline{M}_2\,\alpha t\, dl}{d} - \sum \overline{C}c - \sum \overline{M}\varphi$$

2 $\delta_{22} = \int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} dl$ $\delta_{12} = \int \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_2}{EI} dl$ $\delta_{23} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_2}{EI} dl$ $\delta_{20} = \int \frac{\overline{M}_2\,\overline{M}_o}{EI} dl$ $\delta_{2t} = \int \frac{\overline{M}_2\,\alpha\,\Delta t}{d} dl + \int \overline{N}_2\,\alpha\, t\, dl$

3 $\delta_{33} = \int \frac{\overline{M}_3^2}{EI} dl$ $\delta_{31} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_1}{EI} dl$ $\delta_{32} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_2}{EI} dl$ $\delta_{30} = \int \frac{\overline{M}_3\,\overline{M}_o}{EI} dl$ $\delta_{3t} = \int \frac{\overline{M}_3\,\alpha\,\Delta t}{d} dl + \int \overline{N}_3\,\alpha\, t\, dl$

Bu deplasmanların fiziksel anlamları örneğin, $\delta_{13} = \int \frac{\bar{M}_3 \bar{M}_1}{EI} dl$ birinci hiperstatik bilinmeyene yapılan birim yüklemeden dolayı üçüncü hiperstatik bilinmeyen noktasında meydana gelen deplasmandır. Diğerleri de benzer şekilde oluşan deplasmanları göstermektedir.

$\sum \bar{C}_i c$ **mesnet çökmelerinin ve** $\sum \bar{M}_1$ **mesnet dönmelerinin** yaptığı işi göstermektedir.

Denklemler (1,2,3) düzenlenirse;

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \ldots\ldots + \delta_{1n} X_n + \delta_{10} + \delta_{1t} = \sum \bar{C}_1 c + \sum \bar{M}_1 \varphi$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \ldots\ldots + \delta_{2n} X_n + \delta_{20} + \delta_{2t} = \sum \bar{C}_2 c + \sum M_2 \varphi$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \ldots\ldots + \delta_{3n} X_n + \delta_{30} + \delta_{3t} = \sum \bar{C}_3 c + \sum \bar{M}_3 \varphi$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \ldots\ldots + \delta_{nn} X_n + \delta_{n0} + \delta_{nt} = \sum \bar{C}_n c + \sum \bar{M}_n \varphi$$

Bu ifadeye **GENEL SÜREKLİLİK DENKLEMLERİ** denir

9. Genel süreklilik denklemlerinin çözümünden hiperstatik bilinmeyenler **(X_1, X_2, X_3 ..X_n)** bulunur. Bu hiperstatik bilinmeyenler başlangıçta birim dönme kabul edildiyse moment, birim kuvvet kabul edildiyse kuvvet cinsinden bulunur.

10. 9'da bulunan hiperstatik bilinmeyenler **Süperpozisyon denklemlerinde** yerine yazılarak

$$M = M_o + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3$$

$$Q = Q_o + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3$$

$$N = N_o + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3$$

bağıntılarından kesit tesirleri bulunur.

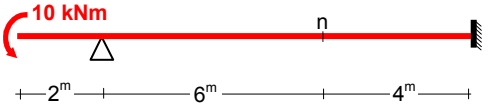
11. Kontrol için kapalı süreklilik denklemi

$$\int \frac{M(\text{sonuç moment alanı}) \quad \bar{M}(\text{herhangibir birim yükleme})}{EI} dl = 0$$

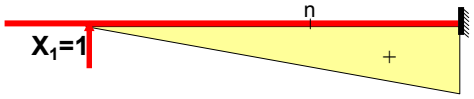
denklemi yazılarak

kontrol edilir.Hiperstatik sistemlerin kuvvet metoduyla çözümünde izostatik esas sistem seçilirken minimum işlemle sistemin çözümünü gerçekleştirecek durum seçilmelidir.

Örnek 3.31: n noktasındaki deplasmanın ve dönüş açısının bulunması



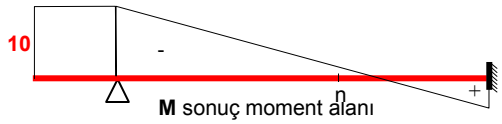
Sistem 1. dereceden hiperstatik olduğu için **B** mesnet tepkisi bilinmeyen olarak seçilir



$$\delta_{11} = \frac{10^3}{3EI} = \frac{333.333}{EI}$$

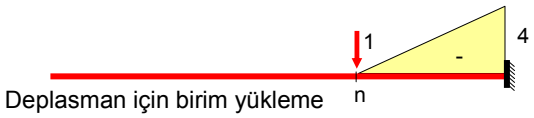


$$\delta_{10} = -\frac{10^3}{2EI} = -\frac{500}{EI}$$



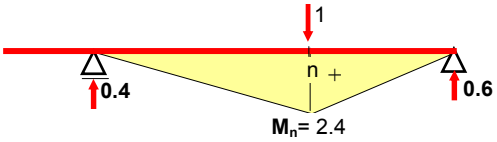
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = \frac{500}{333.333} = 1.5\,t$$



$$\delta_n = -\frac{4x1x4}{6EI} + \frac{4x5x4}{3EI} = \frac{24}{EI}$$

veya birim yük başka bir izostatik sisteme uygulanır ve moment alanı çizilirse,

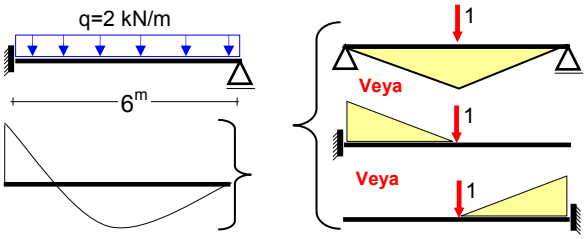


$$\delta_n = \frac{4x5x2.4}{6EI} - \frac{6x2.4(2x1+10)}{6EI} - \frac{4x1x2.4}{3EI} = \frac{24}{EI}$$

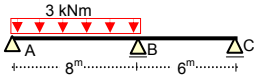
Dönüş açısı içinde aynı işlemleri yapmak mümkündür.



$$\varphi_n = \frac{4x1x1}{2EI} - \frac{4x5x1}{2EI} = -\frac{8}{EI}$$



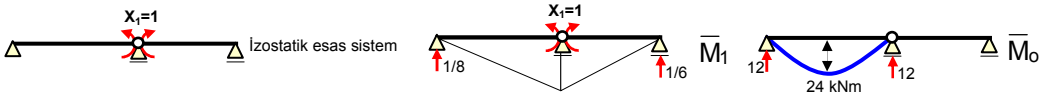
ÖRNEK 17: Şekilde verilen mütemadi kirişin



a. **KUVVET** metoduyla moment alanın çizimi.

b. **A-B** açıklığının orta noktasındaki deplasmanın bulunması

c. **C** mesnedinin dönüş açısının hesaplanması



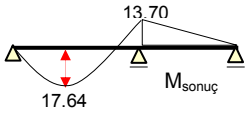
$$\delta_{11} = \frac{8 \times 1 \times 1}{3EI} + \frac{6 \times 1 \times 1}{3EI} = \frac{4.67}{EI} \qquad \delta_{10} = \frac{8 \times 24 \times 1}{3EI} = \frac{64}{EI}$$

Süreklilik denklemi yazılarak, $\delta_{11}X_1+\delta_{10}=0$ $4.67X_1 + 64 = 0$ $X_1=-64/4.67= - 13.705$ kNm

olarak bulunur. Bundan sonra çubuk uç momentleri ise,

$M_{ij} = M_1 \times X_1 + M_O$ bağıntısı kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

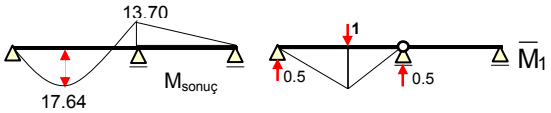
$M_{BA} = -13.705 \times (1) + (0.00) = -13.705$ kNm $M_{BC} = -13.705 \times (1) + (0.00) = -13.705$ kNm



KONTROL: Birim yükleme moment alanı ile sonuç moment alanlarının çarpımı sıfır olmalı.

$$M_{11} \times M_{sonuç} = -\frac{13.705 \times 8 \times 1}{3EI} - \frac{13.705 \times 6 \times 1}{3EI} + \frac{24 \times 8 \times 1}{3EI} = 0.13$$

a. **A-B** açıklığının orta noktasındaki **deplasmanın** hesabı

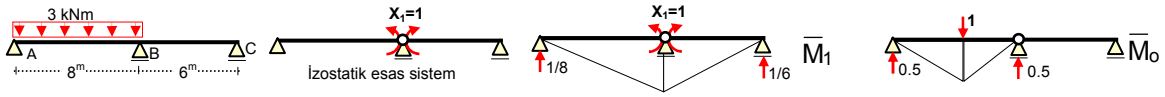


B-C açıklığında birim yüklemeden dolayı herhangi bir moment olmadığı için çarpıma gerek yoktur.

$$\delta_{A-B\,orta} = M_{birim} \times M_{sonuç} = -\frac{4 \times 2 \times 6.853}{3EI} - \frac{4 \times 2 \times (2 \times 6.853 + 13.705)}{6EI} + 2\left(\frac{5 \times 4 \times 24 \times 2}{12EI}\right) = \frac{105.177}{EI}$$

V E Y A

1. Birim yükleme deplasman istenen yönde ve noktada hiperstatik sisteme yapılır ve moment alanı çizilir.
2. Diş yükleme istenilen bir izostatik sisteme yapılır ve moment alanı çizilir.
3. **1.** ve **2.** maddelerde çizilen moment alanları çarpılarak birim yükleme yapılan yer ve yöndeki deplasman bulunur.



$$\delta_{11} = \frac{8 \times 1 \times 1}{3EI} + \frac{6 \times 1 \times 1}{3EI} = \frac{4.67}{EI} \qquad \delta_{10} = \frac{4 \times 2 \times 0.5}{3EI} + \frac{4 \times 2\,(2 \times 0.5 + 1)}{6EI} = \frac{4}{EI}$$

Süreklilik denklemi yazılarak,

$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{10} = 0$ $4.67\ X_1 + 4 = 0$ $X_1 = -4 / 4.67 = -0.857$ kNm

olarak bulunur. Bundan sonra çubuk uç momentleri ise,

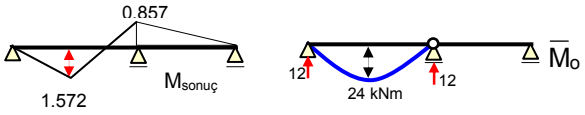
$M_{ij} = M_1 \times X_1 + M_O$ bağıntısı kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

$M_{BA} = - 0.857 \times (1) + (0.00) = -0.857$ kNm

$M_{BC} = - 0.857 \times (1) + (0.00) = -0.857$ kNm

$M_{B\text{-}Aorta}$ = - 0.857 x (0.5) + (2.00) = 1.572 kNm

$M_{B\text{-}Corta}$ = - 0.857 x (0.5) + (0.00) = -0.429 kNm



Hiperstatik sistemde deplasmanı bulunacak noktaya yapılan birim kuvvet moment alanı ile izostatik esas sisteme yapılan dış yüklemeden dolayı oluşan moment alanı çarpılarak **A-B** açıklığının orta noktasındaki deplasman hesaplanır.

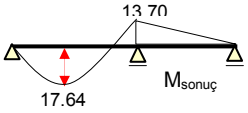
$$\delta_{A-Borta} = M_{birim} x M_{sonuç} = 2\left(\frac{5 x 4 x 2 x 24}{12EI}\right) - \left(\frac{0.857 x 8 x 24}{3EI}\right) = \frac{105.152}{EI}$$

$$\delta_{A-Borta} = M_{birim} x M_{sonuç} = -\frac{4 x 2 x 6.853}{3EI} - \frac{4 x 2 x (2x6.853 + 13.705)}{6EI} + 2\left(\frac{5 x 4 x 24 x 2}{12EI}\right) = \frac{105.177}{EI}$$

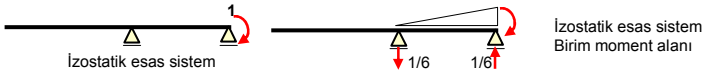
yukarıda bulunan değerle aynı olduğu görülür.

d. C mesnedinin dönüş açısını

a maddesindeki çözümde olduğu gibi hiperstatik sistem dış yüklere göre moment alanı aşağıdaki gibi çizilir.

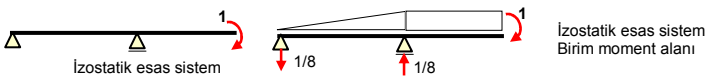


Dönüş olduğu için herhangi bir izostatik sisteme **birim moment** uygulanır. Burada aşağıdaki gibi uygulanmıştır.



$$\varphi_C = M_{birim} x M_{sonuç} = \left(\frac{6 x 1 x 13.705}{6EI}\right) = \frac{13.705}{EI} rad$$

VEYA Birim yükleme aşağıdaki gibi izostatik sisteme uygulanır ise,



Sonuç moment alanı ile birim moment alanları aşağıdaki şekilde çarpılarak C noktasındaki dönüş açısı bulunur.

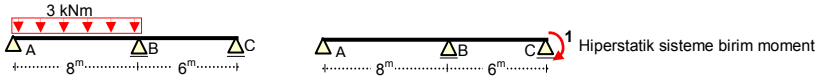
$$\varphi_C = M_{birim} x M_{sonuç} = \left(\frac{8 x 1 x 13.705}{3EI} - \frac{8 x 1 x 24}{3EI}\right) + \frac{6 x 1 x 13.705}{2EI} = \frac{13.662}{EI} rad$$

yukarıda bulunan değere eşit olduğu görülür. $\varphi_C = M_{birim} x M_{sonuç} = \left(\frac{6 x 1 x 13.705}{6EI}\right) = \frac{13.705}{EI} rad$

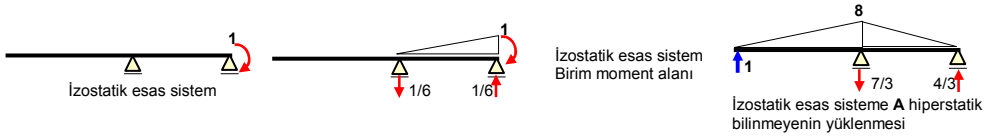
V E Y A

1. Birim yükleme dönüş istenen yönde ve noktada hiperstatik siteme yapılır ve moment alanı çizilir.

2. Dış yükleme istenilen bir izostatik sisteme yapılır ve moment alanı çizilir.
3. **1.** ve **2.** maddelerde çizilen moment alanları çarpılarak birim yükleme yapılan yer ve yöndeki deplasman bulunur.



Bu hiperstatik sistem birim momente göre çözülür. Bunun için izostatik esas sistem seçilir.



$$\delta_{11} = \frac{8 \times 8 \times 8}{3EI} + \frac{6 \times 8 \times 6}{3EI} = \frac{266.67}{EI} \qquad \delta_{10} = -\frac{6 \times 8 \times 1}{6EI} = -\frac{8}{EI}$$

Süreklilik denklemi yazılarak,

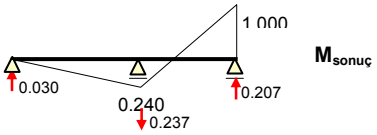
δ_{11} X_1 + δ_{10} = 0 **266.67 X_1 - 8 = 0** **X_1 = 8 / 266.67 = 0.03 kN**

olarak bulunur. Bundan sonra çubuk uç momentleri ise,

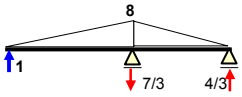
$M_{ij} = M_1 \times X_1 + M_O$ bağıntısı kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

M_{BA} = 0.03 x (8) + (0.00) = 0.24 kNm A_y = 0.03 t B_y = -(7/3) 0.03-(1/6)=-0.237 kN

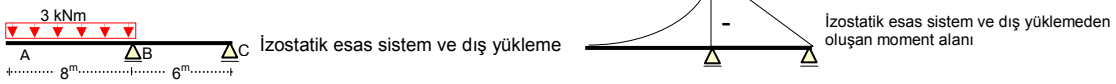
M_{BC} = 0.03 x (8) + (0.00) = 0.24 kNm C_y = (4/3)x0.03 +(1/6)=0.207kN



KONTROL: Birim yükleme moment alanı ile sonuç moment alanlarının çarpımı sıfır olması gerekir.



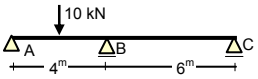
$$M_{11} x M_{sonuç} = \frac{8 \times 8 \times 0.24}{3EI} + \frac{6 \times 8 \times 0.24}{3EI} - \frac{6 \times 8 \times 1}{6EI} = 0.96$$



$$\varphi_C = M_{birim} x M_{sonuç} = \left(\frac{8 \times 96 \times 0.24}{4EI} + \frac{6 \times 0.24 \times 96}{3EI} \right) + \frac{6 \times 1 \times 96}{6EI} = \frac{13.662}{EI} \text{rad}$$

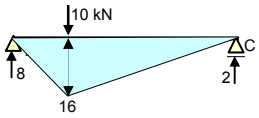
$$\varphi_C = M_{birim} x M_{sonuç} = \left(\frac{6 \times 1 \times 13.705}{6EI} \right) = \frac{13.705}{EI} \text{rad}$$

ÖRNEK 6: Şekildeki mütemadi kirişin **M** alanının **KUVVET** yöntemiyle belirlenmesi. (EI=sabit)

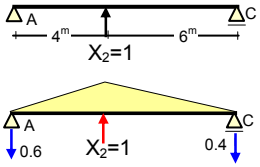


Çözüm: İlk önce izostatik esas aşağıdaki şekilde seçilmiştir.

M_o dış yüklemesi



M_1 birim yüklemesi



$$\delta_{11} = \frac{1}{3}\left[\frac{2.4 \times 4 \times 2.4}{EI} + \frac{2.4 \times 6 \times 2.4}{EI}\right] = \frac{19.20}{EI}$$

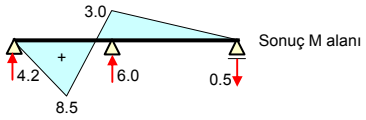
$$\delta_{10} = \frac{2 \times 16 \times 1.2}{3EI} + \frac{2 \times 4 \times 1.2}{6EI} + \frac{2 \times 12 \times 1.2}{2EI} + \frac{2 \times 12 \times 1.2}{EI} + \frac{2 \times 4 \times 1.2}{2EI} + \frac{6 \times 2.4 \times 12}{3EI} = -\frac{120}{EI}$$

$\delta_{11} X_2 + \delta_{10} = 0$ $19.20\ X_2 - 120 = 0$ $X_2 = 6.25$ kN

M_{21}= 12 + 6.25 (-2.4) = -3.0 kNm 1. Mesnedin mesnet tepkisi=8 –0.6x 6.25= **4.25 kN**

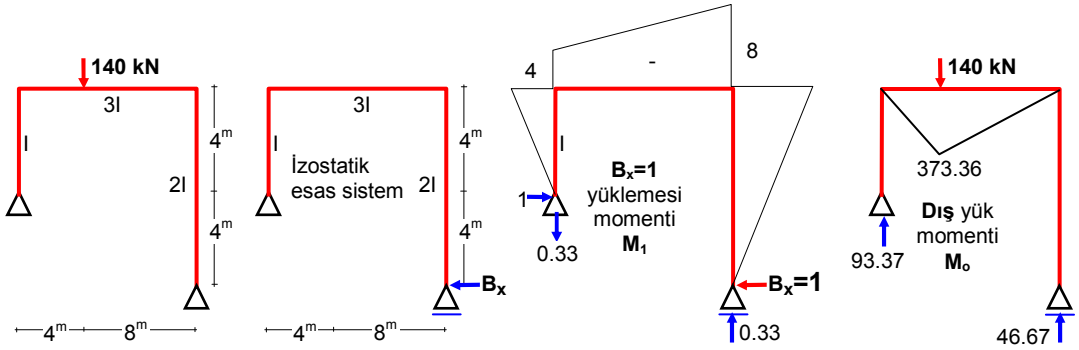
M_{23}= 12 + 6.25 (-2.4) = -3.0 kNm 2. Mesnedin mesnet tepkisi= 1.0 x 6.25= **6.25 kN**

M_{max}=16+ 6.25 (-1.2) = 8.5 kNm 3. Mesnedin mesnet tepkisi= 2–0.4x6.25= **-0.50 kN**



Kontrol: $M_{sonuç} \times M_1 = -\frac{2 \times 8.5 \times 1.2}{3} - \frac{2 \times 8.5(2 \times 1.2 + 2.4)}{6} + \frac{2 \times 3(2 \times 2.4 + 1.2)}{6} + \frac{6 \times 3 \times 2.4}{3} = 0.00$

ÖRNEK 7: Şekilde verilen çerçevenin **KUVVET** metoduyla moment alanını çiziniz.



$$\sum M_A = 0 \qquad 140 \times 4 \quad 12 \times B_y = 0 \qquad B_y = 46.67\,kN \qquad A_y = 93.33\,kN$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \left(\frac{4 \times 4 \times 4}{3(EI)} + \frac{12 \times (2 \times 4x4 + 4x8 + 8x4 + 2x8x8)}{6(3EI)} + \frac{8^3}{3(2EI)}\right) = \frac{256}{EI}$$

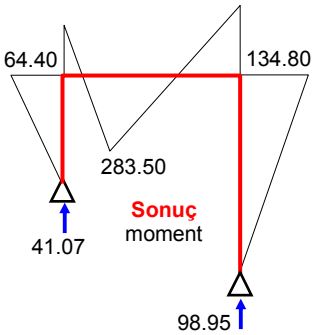
Burada çarpım sadece kirişte olmaktadır.



$$\delta_{10}=\int\frac{M_0\bar{M}_1}{EI}dx=\left(-\frac{4x373.36x(4+2x5.33)}{6(3EI)}-\frac{8x373.36x(2x5.33+8)}{6(3EI)}\right)=\frac{-4312.72}{EI}$$

$$\delta_{11}X_1+\delta_{10}=0 \qquad 4312.72+256X_1=0 \qquad X_1=16.85$$

Çubuk uç momentlerinin hesabı,



M_{AC}= 0 +16.85 x (-4) = -67.40 kNm

M_{CD}= 0 +16.85 x (-4) = -67.40 kNm

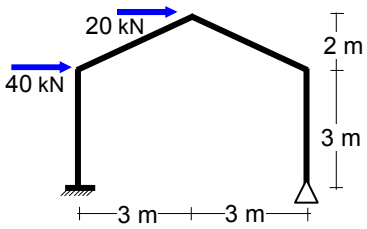
M_{DC}= 0 +16.85 x (-8) = -134.80 kNm

M_{DB}= 0 +16.85 x (-8) = -134.80 kNm

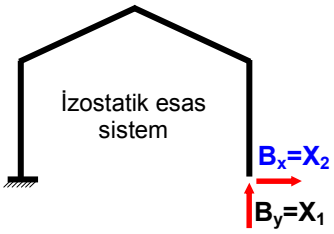
Açıklık momentinin hesaplanması,

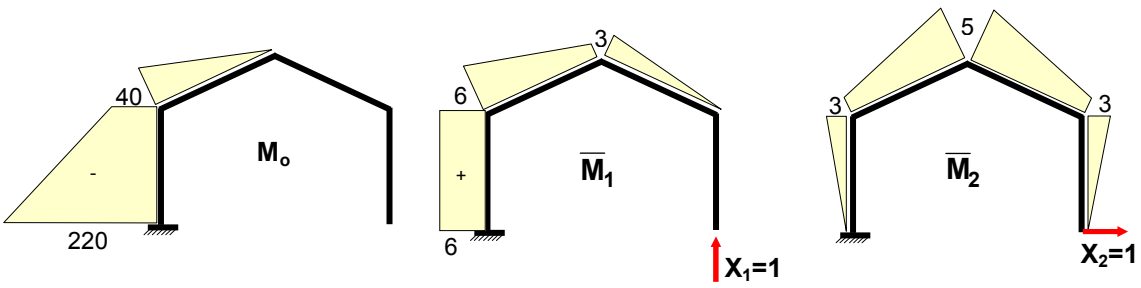
max$M_{aç}$= 373.36 – 5.33 x 16.85 = 283.5 kNm

ÖRNEK 8: Şekilde yükleme durumu verilen hiperstatik kirişin moment alanının çizimi.



Çözüm: ilk önce eşdeğer sistem seçilir.
Sonra bu sisteme [eşdeğer] dış ve birim yüklemeler yapılarak moment alanları çizilir.





Çizilen alanlar birbiri ile çarpılarak gerekli terimler aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\delta_{11}=\int\frac{\bar{M}_1^2}{EI}dl=\frac{1}{EI}\left[3x6x6+\frac{3.61(2x3x3+2x6x6+2x6x3)}{6}+\frac{3.61x3x3}{3}\right]=194.64$$

$$\delta_{22}=\int\frac{\bar{M}_2^2}{EI}dl=\frac{2}{EI}\left[\frac{3x3x3}{3}+\frac{3.61(2x3x3+2x3x5+2x5x5)}{6}\right]=135.93$$

$$\delta_{12}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_2}{EI}dl=\frac{3x6x3}{2EI}+\frac{3.61x(6x(5+2x3)+3x(3+2x5))}{6EI}+\frac{3.61x3x(3+2x5)}{6EI}=113.64$$

$$\delta_{10}=-\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_0}{EI}dl=-\frac{3x6(40+220)}{2EI}-\frac{3.61x40(3+2x6)}{6EI}=-\frac{2701}{EI}$$

$$\delta_{20}=-\int\frac{\bar{M}_2\bar{M}_0}{EI}dl=-\frac{3x3x(2x40+220)}{6EI}-\frac{3.61x40x(2x3+5)}{6EI}=-\frac{714.73}{EI}$$

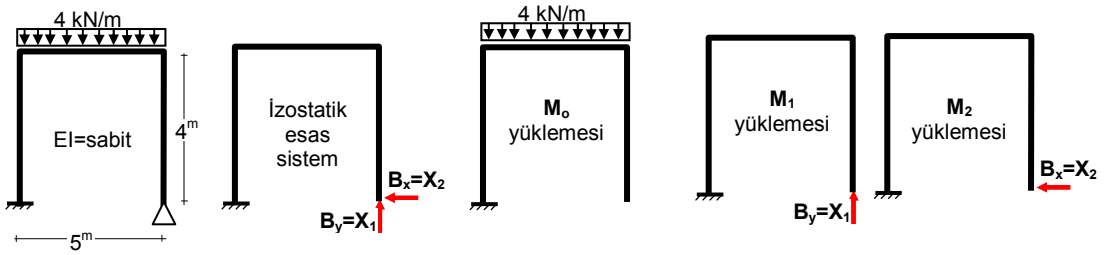
$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{10}=0 \qquad 194.64X_1+113.64X_2-2701=0$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{20}=0 \qquad 113.64X_1+135.93X_2-714.73=0$$

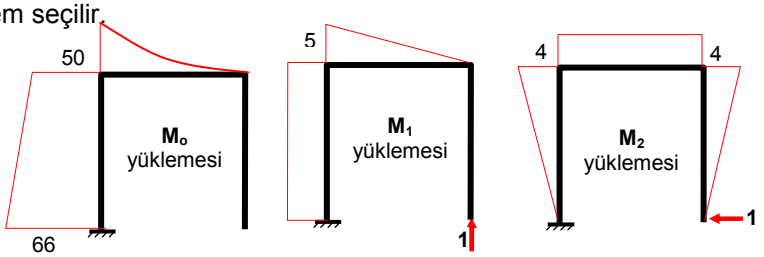
$$X_1=-33.11 \qquad X_2=32.94$$

olarak hiperstatik bilinmeyenler bulunur.

ÖRNEK 9: Şekilde verilen çerçevenin **KUVVET** metoduyla moment alanını çiziniz.



Çözüm: İlk önce izostatik esas sistem seçilir.



$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{10}=0$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{20}=0$$

$\delta_{11}=\int\frac{\bar{M}_1^2}{EI}dl=$ $\quad EI\delta_{11}=[\,(5^3/3)+(5\times5\times4)=$ **141.67**

$\delta_{12}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_2}{EI}dl$ $\quad EI\delta_{12}=[\,(4\times4\times5/2)+(5\times5\times4/2)=$ **90.00**

$\delta_{22}=\int\frac{\bar{M}_2\bar{M}_2}{EI}dl$ $\quad EI\delta_{22}=[\,(2\times4^3/3)+(5\times4\times4)=$ **122.67**

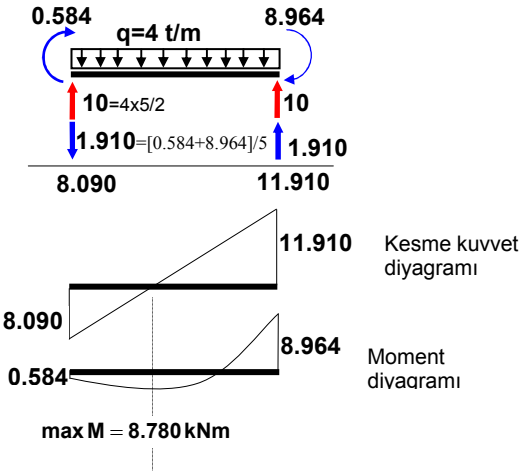
$\delta_{10}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_0}{EI}dl$ $EI\delta_{10}$ = [(5 x 5 x 50 / 4) + (4 x 5x (50 +66)) / 2) = **1472.50**

$\delta_{20}=\int\frac{\bar{M}_2\bar{M}_0}{EI}dl$ $EI\delta_{20}$ = [(4 x 4 x (2x50+66) / 6) + (4 x 5x 50) / 3) = **776.00**

$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{10}=0 \quad 141.67X_1+90.00X_2+1472.50=0$

$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{20}=0 \quad 90.00X_1+122.67X_2+776=0$

X_1= 11.676 **X_2= -2.241**



M_{AC}= **11.676** x 5 + (-2.**241**x0) –66 = -7.62 kNm

M_{CA}= **11. 676** x 5 + (-2. **241** x 4) –50 = -0.584 kNm

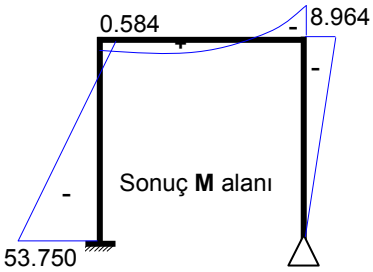
M_{CD}= **11. 676** x 5 + (-2. **241**x 4) –50 = -0.584 kNm

M_{DC}= **11. 676**x 0 + (-2. **241** x 4) –0 = -8.964 kNm

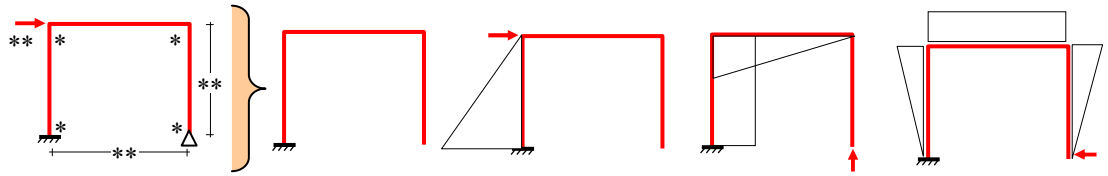
M_{DB}= **11. 676** x 0 + (-2. **241** x 4) –0 = -8.964 kNm

M_{BD}= -**11. 676** x 0 - (-2. **241** x 0) –0 = 00.00 kNm

Sonuç ve açıklık moment değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.



ÖRNEK 13: Şekilde verilen çerçevenin moment alanının 4 mesnedindeki tepkileri hiperstatik bilinmeyen seçerek **KUVVET** metoduyla çizimi.



Çözüm: İzostatik esas sistem belirlenir ve birim yüklemeler aşağıdaki şekilde izostatik esas sisteme uygulanarak moment alanları elde edilir.

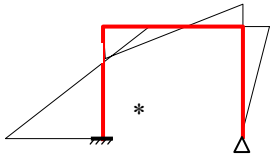
$\delta_{11}=\frac{6x6x6}{3EI}+\frac{3x6x6}{EI}=\frac{180}{EI}$ $\delta_{22}=2\left(\frac{3^3}{3EI}\right)+\frac{3x3x6}{EI}=\frac{72}{EI}$ $\delta_{12}=-\left(\frac{6x3x3}{2EI}+\frac{6x6x3}{2EI}\right)=-\frac{81}{EI}$

$\delta_{10}=-\frac{6x3x12}{2EI}=-\frac{108}{EI}$ $\delta_{20}=\frac{3x3x12}{6EI}=\frac{18}{EI}$

$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{10}=0$ **180 X_1 -81 X_2 -108 = 0**

$\delta_{12}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{20}=0$ **-81 X_1 + 72 X_2 +18 = 0** **X_1 =0.987** **X_2 =0.861**

Çubuk uç momentlerinin bulunması



M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2

M_{12}= -12 + 6 x 0.987 = -6.078 tm

M_{21}= 0 + 6 x 0.987 – 3 x 0.861= 3.34 tm

M_{23}= 0 + 6 x 0.987 – 3 x 0.861= 3.34 tm

M_{32}= 0 + 6 x 0 – 3 x 0.861= -2.58 tm

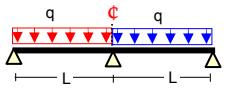
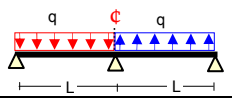
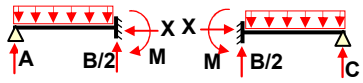
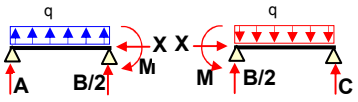
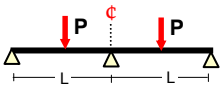
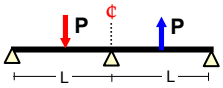
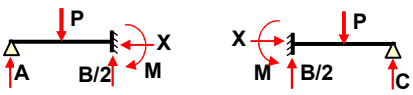
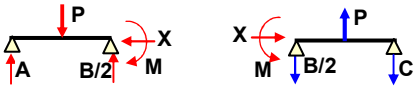
M_{34}= 0 + 6 x 0 – 3 x 0.861= -2.58 tm

KONTROL: Kontrol işlemi sonuç moment alanı ile M_1 moment alanlarının çarpımı ile yapılmıştır. Alan çarpımları tam çubuk boyları alınarak yapılmıştır.

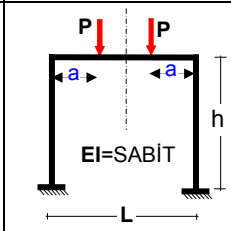
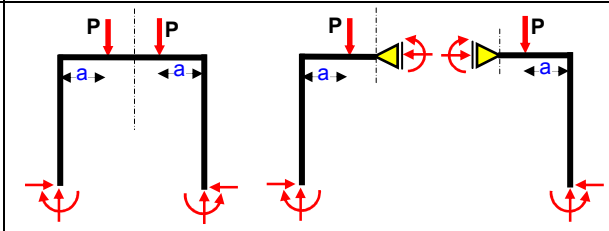
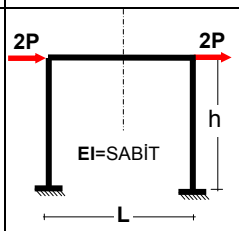
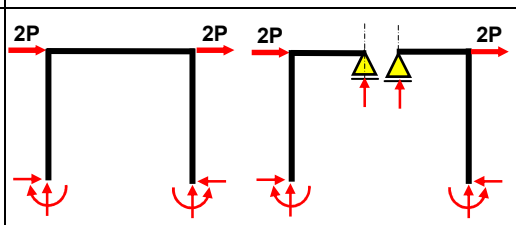
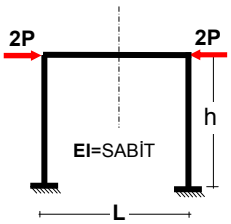
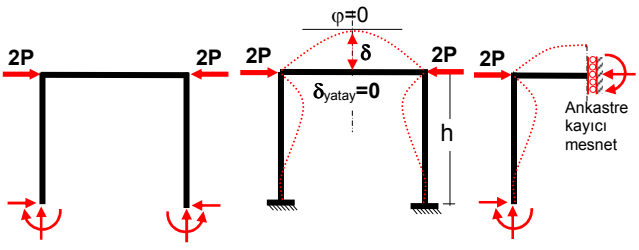
$$M_{sonuç} \, x M_1 = -\frac{3 x 6 x 6.078}{2} + \frac{3 x 6 x 3.339}{2} + \frac{6 x 6 x 3.339}{3} - \frac{6 x 6 x 2.583}{6} = -54.702 + 30.051 + 40.068 - 30.996 = 0.00$$

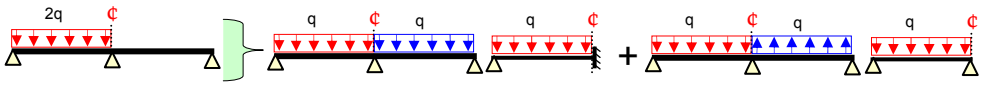
6.2. SİMETRİK SİSTEM [SİMETRİK VE ANTİMETRİK YÜKLEME]

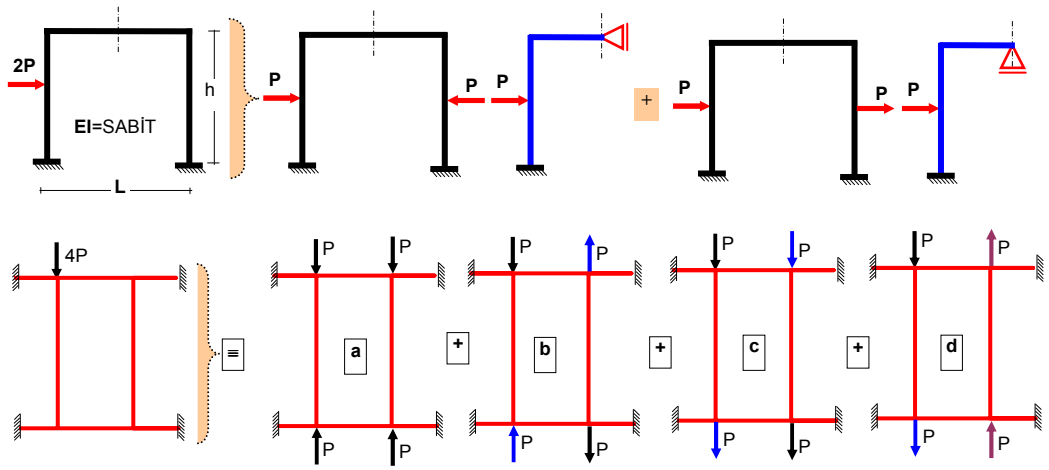
Yapı sistemlerinin çözümünde, sistemin simetrik olması çözümün kısa olması ve sistemin davranışının istenilen yönde davranış göstermesi bakımından önemli bir özelliktir. Sistemin simetrik olmasının yanında yükün de simetrik ve antimetrik olması da ayrı bir çözüm kolaylığı sağlar. Bunun için simetrik sistemlerin çözümünde yükleri simetrik ve antimetrik olarak düzenleme yapılır.

SİSTEM	SİMETRİK	
YÜKLEME	SİMETRİK	ANTİMETRİK
TÜM SİSTEM		
YARIM SİSTEM		
TÜM SİSTEM		
YARIM SİSTEM		

Şekilde verilen sistemlere simetri özelliğinin uygulanması

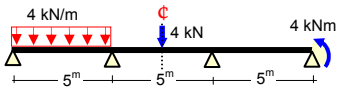
SİSTEM SİMETRİK	TAM SİSTEM	YARIM SİSTEM
SİMETRİK YÜKLEME		
ANTİMETRİK YÜKLEME		
Simetrik yükleme durumu için şekil değiştirme		





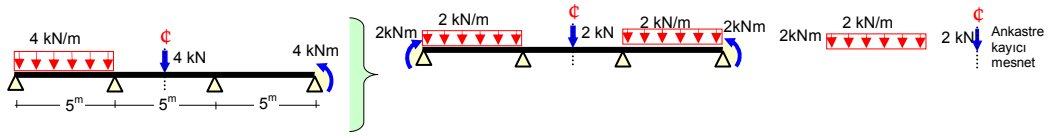
Yukarıda verilen (a) sistemin simetrik ve antimetrik yükleme durumlarından yararlanarak çözümü için oluşturulan simetrik ve antimetrik yükleme durumları görülmektedir. Mütemadi kirişler içinde aşağıdaki örnek incelenerek simetrik sistemin üzerinde simetrik olmayan yükleme durumu simetri özelliğinden yararlanarak çözüm yolu açıklanmıştır.

Örnek: Verilen sistemin simetri özelliğinden yararlanarak çözümü.

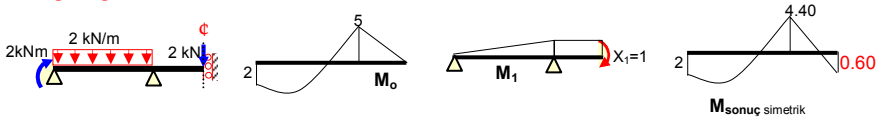


Verilen sistem aşağıdaki şekilde simetrik ve antimetrik yükleme durumları için iki parçaya ayrılarak çözüm yapılmıştır.

Simetrik yükleme için çözüm



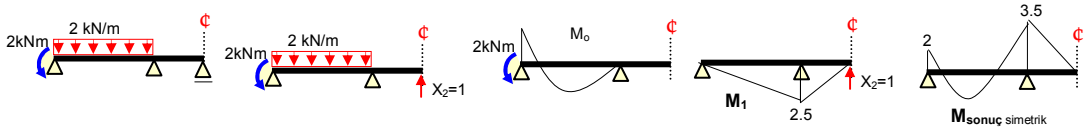
Simetrik yükleme için çözüm



$\delta_{11} = 4.17/EI$ $\delta_{10} = 2.50/EI$ $4.17X_1 + 2.5 = 0 \Rightarrow X_1 = -0.60$ kNm

$M_{mesnet} = -5 + (-0.60)x(-1) = -4.40$ kNm

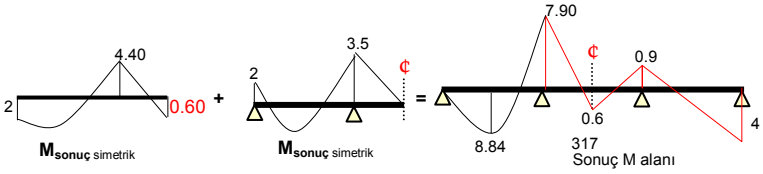
Antimetrik yükleme için çözüm



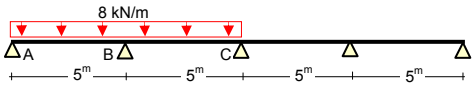
$\delta_{11} = 15.625/EI$ $\delta_{10} = 21.875/EI$ $15.625X_1 + 21.875 = 0 \Rightarrow X_1 = -1.40$ kN

$M_{mesnet\ momenti} = 0 + (-1.40)x2.5 = -3.50$ kNm

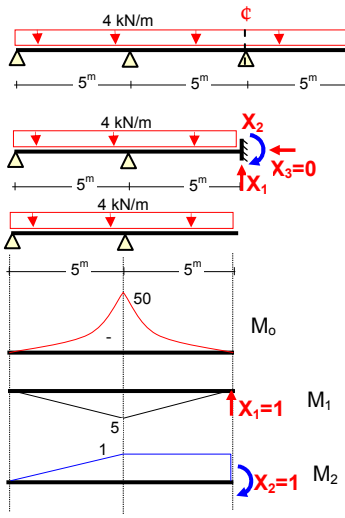
Sonuç M alanı yukarıda elde edilen yükleme durumlarının toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

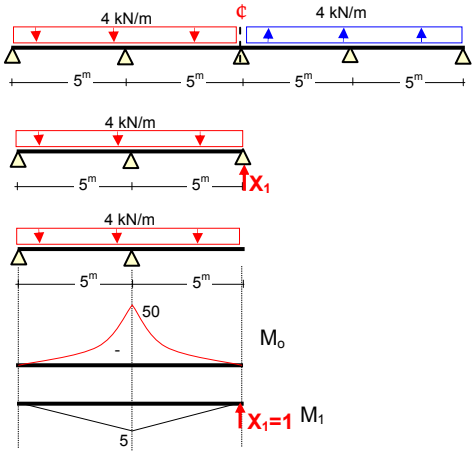


Örnek: Verilen sistemin simetri özelliğinden yararlanarak çözümü (EI=sabit).



Çözüm: Sistem bir simetrik yükleme durumu için birde antimetrik yükleme durumu için çözülmüştür.





$$\delta_{10} = -2\left[\frac{5x50x5}{4EI}\right] = -\frac{625}{EI} \qquad \delta_{11} = 2\left[\frac{5x5x5}{3EI}\right] = \frac{83.33}{EI} \qquad \delta_{20} = \frac{5x50x1}{4EI} + \frac{5x50x1}{3EI} = \frac{145.83}{EI}$$

$$\delta_{11} = 2\left[\frac{5x5x5}{3EI}\right] = \frac{83.33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \left[\frac{5x1x1}{3EI} + \frac{5x1x1}{EI}\right] = \frac{6.67}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{5x5x1}{3EI} - \frac{5x5x1}{2EI} = -\frac{20.83}{EI}$$

$$83.33X_1 - 20.83X_2 = 625$$

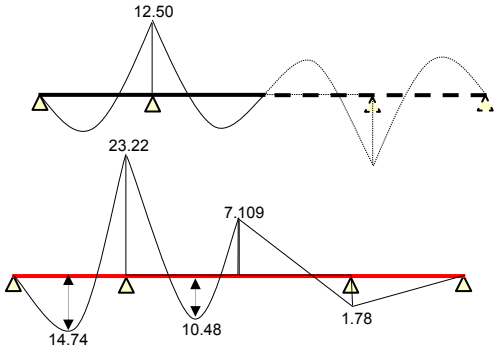
$$-20.83X_1 + 6.67X_2 = -145.83$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = 9.277, \quad X_2 = 7.109$$

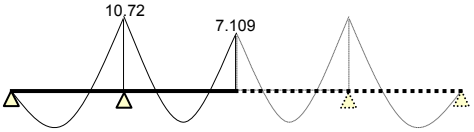
$$83.33X_1 - 625 = 0 \Rightarrow X_1 = 7.5 \text{ kN}$$

$$M_{BA} = 5x7.5 - 50 = -12.5 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = 5x7.5 - 50 = -12.5 \text{ kNm}$$



Sonuç M alanı=Simetrik+antimetrik yükleme

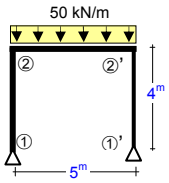


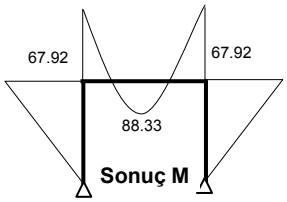
$$M_{BA} = 5x9.277 - 1x7.109 - 50 = -10.72 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = 5x9.277 - 1x7.109 - 50 = -10.72 \text{ kNm}$$

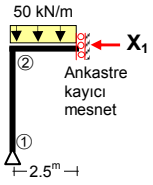
$$M_{CB} = 0 + 0x9.277 - 1x7.109 = -7.109 \text{ kNm}$$

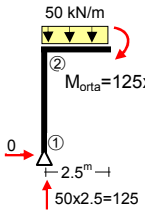
ÖRNEK 21: Şekilde verilen sistemin moment alanını simetri özelliğinden yararlanarak çözünüz. (EI=sabit)

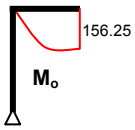


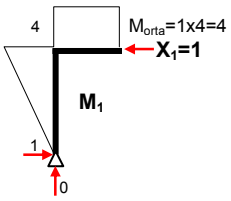


Çözüm: Yarım ve izostatatik esas sistem aşağıdaki şekilde seçilerek çözüm





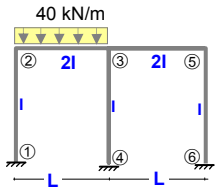


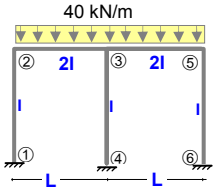
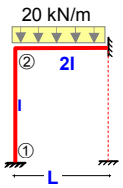
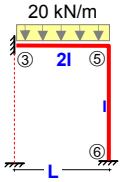
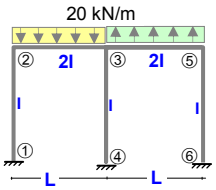
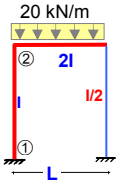
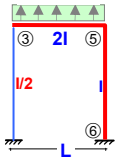


$\delta_{11} = 61.33/EI$ $\quad \delta_{10} = -1041.67/EI$ $\quad 61.33X_1 - 1041.67 = 0 \Rightarrow X_1 = 16.98$ kN

Çubuk uç momentleri
$M_{21} = 0 + (-4)x16.98 = -67.92$ kNm
$M_{22'} = 0 + (-4)x16.98 = -67.92$ kNm
$\max M_{aç} = 156.25 - 4x16.98 = 88.33$ kNm

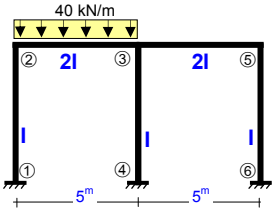
Kuvvet Metodunda Simetrik sistem simetrik ve Antimetrik yükleme

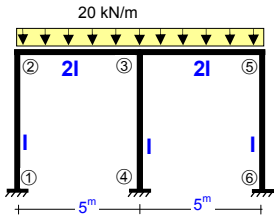
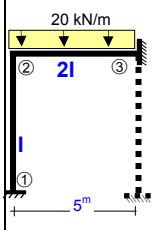
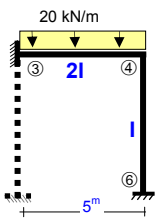
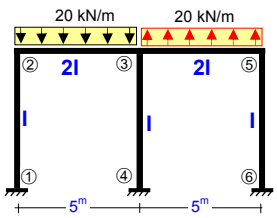
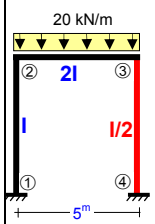
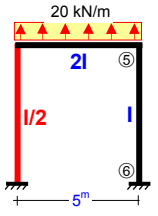


Simetrik sistem simetrik yükleme	Simetrik sistem simetrik yüklemede çözüme esas olan sistem
	 veya 
Simetrik sistem antimetrik yükleme	**Simetrik sistem simetrik yüklemede çözüme esas olan sistem**
	 veya 

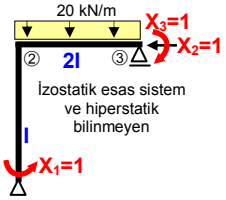
Kuvvet Metodunda Simetrik sistem simetrik ve Antimetrik yükleme

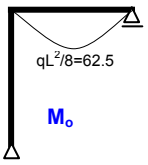
ÖRNEK: Şekilde verilen çerçevenin simetri özelliğinden yararlanarak çözümü.

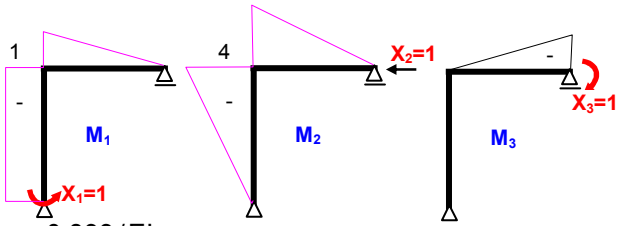


Simetrik sistem simetrik yükleme	Simetrik sistem simetrik yüklemede çözüme esas olan sistem
	 veya 
Simetrik sistem antimetrik yükleme	**Simetrik sistem simetrik yüklemede çözüme esas olan sistem**
	 veya 

A: Simetrik yükleme durumu için çözüm (kat yüksekliği 4 m)





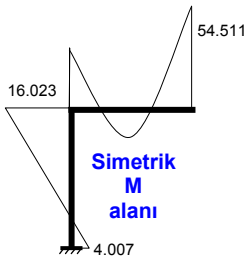


$\delta_{11} = 4.833/EI \qquad \delta_{22} = 34.667/EI \qquad \delta_{33} = 0.833/EI$

$\delta_{10} = -52.083/EI \qquad \delta_{20} = -208.33/EI \qquad \delta_{30} = -52.083/EI$

$\delta_{12} = 3.333/EI \qquad \delta_{13} = 0.417/EI \qquad \delta_{23} = 1.667/EI$

$$\left.\begin{aligned} 4.833X_1 + 3.333X_2 + 0.417X_3 &= 52.083 \\ 3.333X_1 + 34.667X_2 + 1.667X_3 &= 208.33 \\ 0.417X_1 + 1.667X_2 + 0.833X_3 &= 52.083 \end{aligned}\right\} X_1 = 4.007 \quad X_2 = 3.004 \quad X_3 = 54.511$$

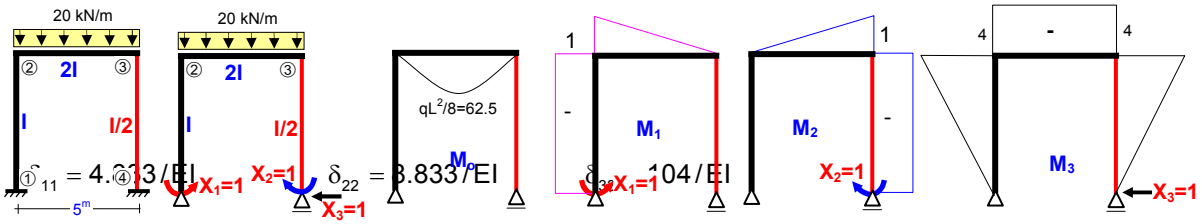


$M_1 = 0 - 4.007 = -4.007 \text{ kNm}$

$M_2 = (-1)x4.007 + (-4)x3.004 = -16.023 \text{ kNm}$

$M_3 = (-1)x54.511 = -54.511 \text{ kNm}$

A: Antimetrik yükleme durumu için çözüm



$\delta_{11} = 4.833/EI \qquad \delta_{22} = 8.833/EI \qquad \delta_{33} = 104/EI$

$\delta_{10} = -52.083/EI \qquad \delta_{20} = -52.083/EI \qquad \delta_{30} = -416.67/EI$

$\delta_{12} = 0.416/EI \qquad \delta_{13} = 13/EI \qquad \delta_{23} = 21/EI$

$$\left.\begin{aligned} 4.833X_1 + 0.416X_2 + 13X_3 &= 52.083 \\ 0.416X_1 + 8.833X_2 + 21X_3 &= 52.083 \\ 13X_1 + 21X_2 + 104X_3 &= 416.67 \end{aligned}\right\} X_1 = -7.186 \quad X_2 = -10.435 \quad X_3 = 7.012$$

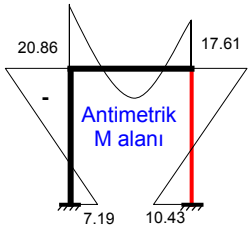
Çubuk uç momentleri

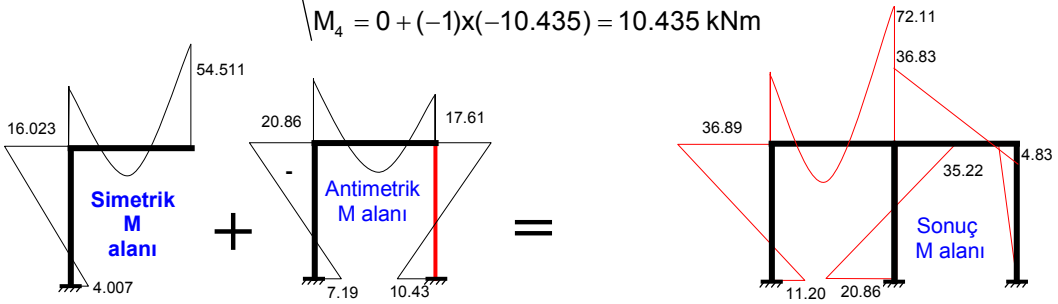
$M_1 = 0 + (-1)x(-7.186) = 7.186$ kNm

$M_2 = 0 + (-1)x(-7.186) + (-4)x7.012 = -20.86$ kNm

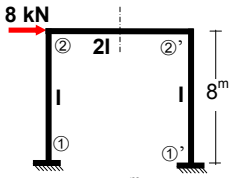
$M_3 = 0 + (-1)x(-10.435) + (-4)x7.012 = -17.613$ kNm

$M_4 = 0 + (-1)x(-10.435) = 10.435$ kNm

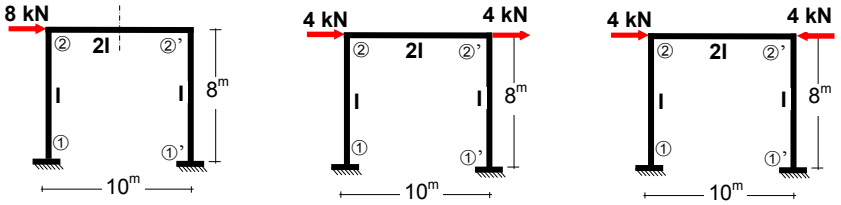




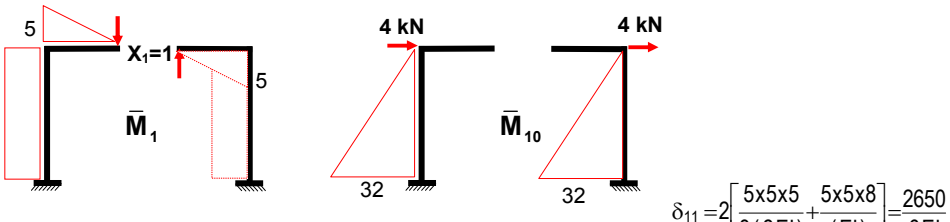
ÖRNEK 22: Şekildeki çerçevenin simetri özelliğinden yararlanarak **KUVVET** yöntemiyle moment alanının çizimi.



Verilen sistem önce simetrik sistem antimetrik yükleme ve simetrik sistem simetrik yükleme olarak ikiye ayrılmış ve çözümler buna göre yapılmıştır.



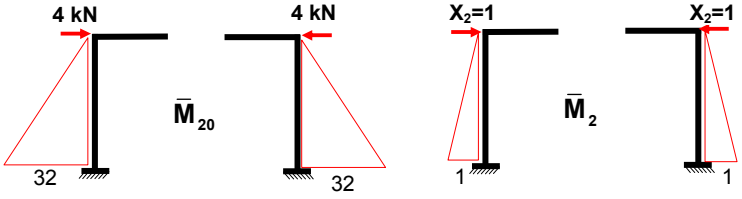
❶. Sistemin çözümü.



$$\delta_{11} = 2\left[\frac{5x5x5}{3(2EI)} + \frac{5x5x8}{(EI)}\right] = \frac{2650}{6EI}$$

$$\delta_{10} = 2\left[\frac{8x32x5}{2(EI)}\right] = \frac{1280}{EI} \qquad \delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad \frac{2650}{6EI}X_1 + \frac{1280}{EI} = 0 \qquad X_1 = -2.90\,t$$

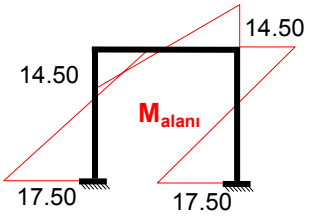
X_2 yüklemesi yapılmış olsa da aynı değer bulunur.



$$\delta_{11} = 2\left[\frac{8x8x8}{3EI}\right] = \frac{1024}{3EI} \qquad \delta_{10} = 2\left[\frac{8x32x8}{3EI}\right] = \frac{4096}{3EI} \qquad \delta_{21}X_{12} + \delta_{20} = 0 \quad \frac{1024}{3EI}X_{12} + \frac{4096}{3EI} = 0 \qquad X_{12} = -4.00\,t$$

Çubuk uç momentleri

$$M_i = M_{01} + M_1 X_1 + M_{02} + M_{12} X_{12}$$



$$M_{1'2'} = M_{12} = (-32) + (-5) \times (-2.9) + (-32) + (-8) \times (-4) = -17.50 \text{ tm}$$

$$M_{2'1'} = M_{21} = (00) + (-5) \times (-2.9) + (00) + (00) \times (-4) = -14.50 \text{ tm}$$

$$M_{22'} = M_{22'} = (00) + (-5) \times (-2.9) + (00) + (00) \times (-4) = -14.50 \text{ tm}$$

KONTROL: Moment olarak

$$\int \frac{\overline{M}_i M_{sonuç}}{EI} = 0 \qquad \int \frac{\overline{M}_1 M_{sonuç}}{EI} = \frac{17.5 \times 8 \times 5}{2EI} - \frac{14.5 \times 8 \times 5}{2EI} - \frac{14.5 \times 5 \times 5}{3(2EI)} = 0$$

veya

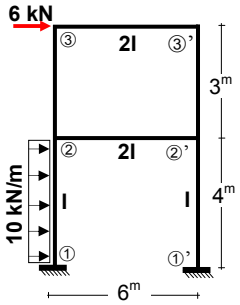
$$\int \frac{\overline{M}_i M_{sonuç}}{EI} = 0 \qquad \int \frac{\overline{M}_2 M_{sonuç}}{EI} = \frac{17.5 \times 8 \times 8}{3EI} - \frac{14.5 \times 8 \times 8}{6EI} - \frac{17.5 \times 8 \times 8}{3EI} + \frac{14.5 \times 8 \times 8}{6EI} = 0$$

KONTROL: Yatay denge (① ve ①' mesnedinde)

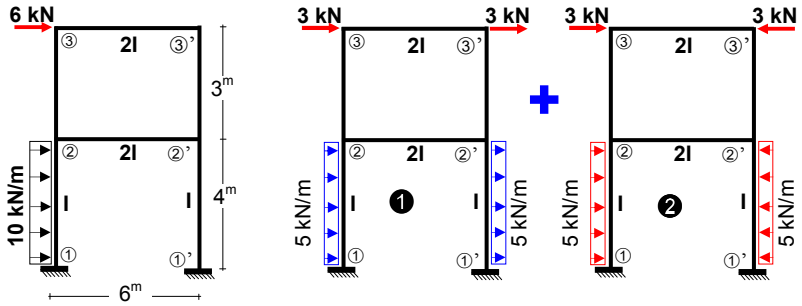
$$M_i = M_{01} + M_1 X_1 + M_{02} + M_{12} X_{12}$$

$$\sum F_x = 0 \quad 0 + 0 + 2\left[\frac{17.5 + 14.5}{8}\right] = 4 \Leftarrow + 4 \Leftarrow = 8\,t \Leftarrow$$

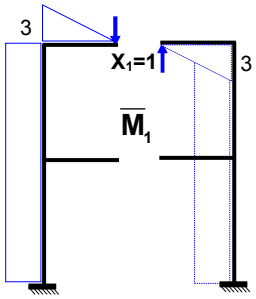
ÖRNEK 23: Şekilde verilen simetrik çerçevenin moment alanının
a. Simetrik yükleme
b. Antimetrik yükleme durumları için kuvvet metoduna göre çözümü

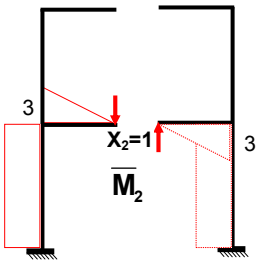


Çözüm: İlk önce sistemin simetrik ve antimetrik yükleme durumları belirlenir.

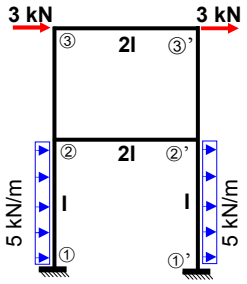


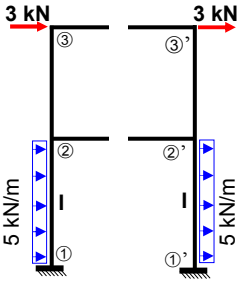
❶ **antimetrik yükleme** durumu için çözüm.

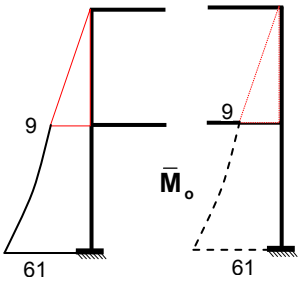




$$\delta_{11}=2\left[\frac{7x3x3}{EI}+\frac{3x3x3}{3(2EI)}\right]=\frac{135}{EI} \qquad \delta_{22}=2\left[\frac{4x3x3}{EI}+\frac{3x3x3}{3(2EI)}\right]=\frac{81}{EI} \qquad \delta_{11}=2\left[\frac{4x3x3}{EI}+\frac{3x3x3}{3(2EI)}\right]=\frac{81}{EI}$$







$$\delta_{11}=2\left[\frac{7x3x3}{EI}+\frac{3x3x3}{3(2EI)}\right]=\frac{135}{EI} \qquad \delta_{22}=2\left[\frac{4x3x3}{EI}+\frac{3x3x3}{3(2EI)}\right]=\frac{81}{EI}$$

$$\delta_{12}=2\left[\frac{4x3x3}{EI}+\frac{3x3x3}{3(2EI)}\right]=\frac{81}{EI} \qquad \delta_{10}=2\left[\frac{7x3x21}{2EI}+\frac{2x4x3x40}{3EI}\right]=\frac{1081}{EI}$$

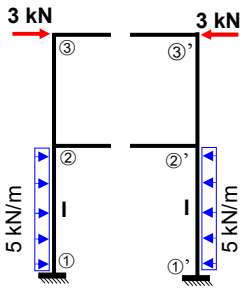
(δ_{10} ve δ_{20} çarpımları tekil ve yayılı yüklerin moment alanları ayrı ayrı alınarak yapılmıştır.)

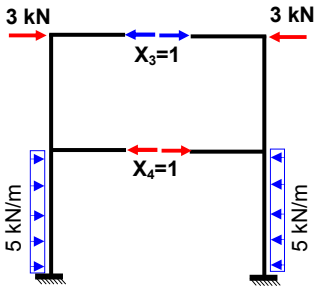
$$\delta_{20}=2\left[\frac{2x4x3x40}{3EI}+\frac{4x3x(9+21)}{2EI}\right]=\frac{1000}{EI}$$

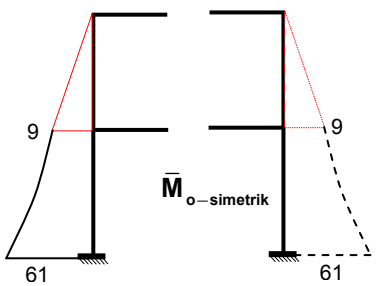
$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{10}=0 \qquad 135X_1+81X_2=-1081$

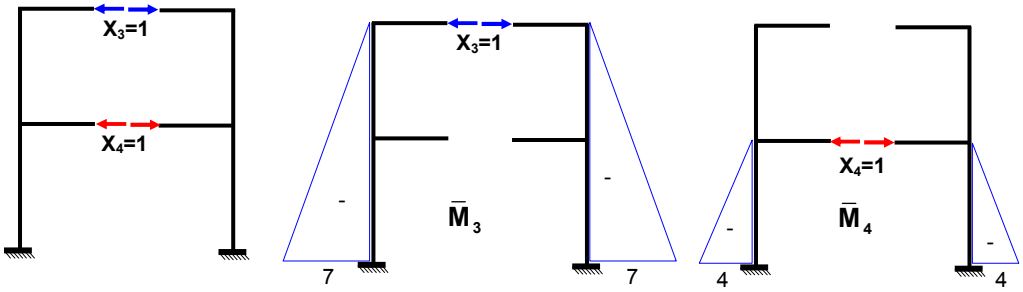
$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{20}=0 \qquad 81X_1+81X_2=-1000 \qquad X_1=-1.50 \qquad X_2=-10.85$

❷ **simetrik yükleme** durumu için çözüm.









$$\delta_{33} = 2\left[\frac{7 \times 7 \times 7}{3EI}\right] = \frac{228.67}{EI} \qquad \delta_{44} = 2\left[\frac{4 \times 4 \times 4}{3EI}\right] = \frac{42.67}{EI}$$

$$\delta_{34} = 2\left[\frac{4 \times 4 \times (3+2 \times 7)}{6EI}\right] = \frac{90.67}{EI} \qquad \delta_{30} = 2\left[\frac{7 \times 7 \times 21}{3EI} + \frac{4 \times 40 \times (3 \times 3 + 5 \times 7)}{12EI}\right] = \frac{1859.33}{EI}$$

(δ_{30} ve δ_{40} çarpımları tekil ve yayılı yüklerin moment alanları ayrı ayrı alınarak yapılmıştır.)

$$\delta_{40} = 2\left[\frac{5 \times 4 \times 4 \times 40}{12EI} + \frac{4 \times 4 \times (9 + 2 \times 21)}{6EI}\right] = \frac{805.33}{EI}$$

$\delta_{33} X_3 + \delta_{34} X_4 + \delta_{30} = 0 \qquad \delta_{34} X_3 + \delta_{44} X_4 + \delta_{40} = 0$

$228.67\ X_3 + 90.67\ X_4 = -1859.33$

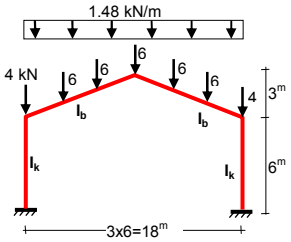
$90.67\ X_3 + 42.67\ X_4 = -805.33$ $\qquad X_1 = -4.113 \qquad X_2 = -10.134$

Düğüm	UÇ	Simetrik yükleme							Antimetrik yükleme							SONUÇ Simetrik+ Antimetrik
		M_0	M_1	X_1	$M_1 X_1$	M_2	X_2	$M_2 X_2$	M_0	M_3	X_3	$M_3 X_3$	M_4	X_4	$M_4 X_4$	
1	12	-61	-3	-1.5	4.5	-3	-10.85	32.55	-61	-7	-4.113	28.791	-4	-10.134	40.536	-15.62
1'	1'2'	61	3	-1.5	-4.5	3	-10.85	-32.55	-61	-7	-4.113	28.791	-4	-10.134	40.536	32.18
2	21	-9	-3	-1.5	4.5	-3	-10.85	32.55	-9	-3	-4.113	12.339	0	-10.134	0	31.39
	23	-9	-3	-1.5	4.5	0	-10.85	0	-9	-3	-4.113	12.339	0	-10.134	0	-1.161
	22'	0	0	-1.5	0	-3	-10.85	32.55	0	0	-4.113	0	0	-10.134	0	32.55
2'	2'2	0	0	-1.5	0	3	-10.85	-32.55	0	0	-4.113	0	0	-10.134	0	32.55
	2'1'	9	3	-1.5	-4.5	3	-10.85	-32.55	-9	-3	-4.113	12.339	0	-10.134	0	-24.71
	2'3'	9	3	-1.5	-4.5	0	-10.85	0	-9	-3	-4.113	12.339	0	-10.134	0	7.839
3	32	9	-3	-1.5	4.5	0	-10.85	0	-9	0	-4.113	0	0	-10.134	0	4.50
	33'	0	-3	-1.5	4.5	0	-10.85	0	0	0	-4.113	0	0	-10.134	0	4.50
3'	3'3	0	3	-1.5	-4.5	0	-10.85	0	0	0	-4.113	0	0	-10.134	0	-4.50
	3'2'	0	3	-1.5	-4.5	0	-10.85	0	0	0	-4.113	0	0	-10.134	0	-4.50

ÖRNEK 11: Şekilde verilen hiperstatik sistemin moment alanını simetri özelliğinden yararlanarak **KUVVET** metoduyla,

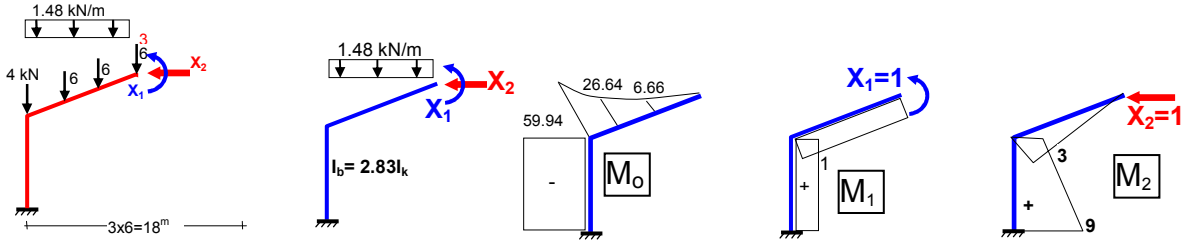
1. Sadece yayılı yüke göre
2. Sadece tekil yüklere göre
3. Sadece her iki yükün birlikte olması durumuna göre M alanlarını çiziniz.
4. Kontrol yapımız. (sonuç moment alanı x herhangi birim moment alanı)

Sistem simetrik yükleme simetrik olmasından dolayı hiperstatik bilinmeyenler aşağıdaki gibi seçilmiştir.



Çözüm: Sistemin simetrik olmasından dolayı sadece yarım sistem üzerinde işlem yapılacaktır.

1. **Yarım sistemde sadece yayılı yükten dolayı oluşan moment değerleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.**



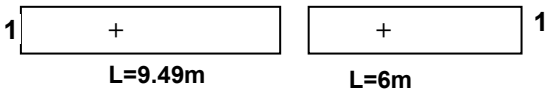
δ_{11} bulunması birim moment alanın kendisiyle çarpımıdır. Yatay çubuğun boyu **9.49 m**

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

Birinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın kendisiyle çarpımı,

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dl = \frac{9.49 \times 1 \times 1}{2.83EI} + \frac{6 \times 1 \times 1}{EI} = \frac{9.35}{EI}$$



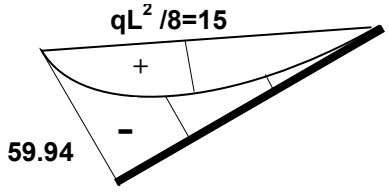
İkinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın kendisiyle çarpımı,

$$\delta_{22} = \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2}{EI} dl = \frac{3 \times 3 \times 9.49}{3 \times 2.83EI} + \frac{6 \times (3 \times 2 \times 3 + 3 \times 2 \times 9 + 2 \times 9 \times 9)}{6 \times EI} = \frac{244}{EI}$$

Birinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın ile ikinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın çarpımı,

$$\delta_{12}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_2}{EI}dl=\frac{9.49x3x1}{2x2.83EI}+\frac{6x(3+9)x1}{EI}=\frac{41.03}{EI}$$

Dış yüklerden dolayı oluşan moment alanı $\mathbf{M_o}$ ile birinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın çarpımı,



A-C çubuğunda Mo moment alanı

$$\delta_{10}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_0}{EI}dl=\left[-\frac{9.49x59.94x1}{2x2.83EI}+\frac{2x9.49x15x1}{3x2.83EI}-\frac{59.94x6x1}{EI}\right]=-\frac{426.61}{EI}$$

Dış yüklerden dolayı oluşan moment alanı $\mathbf{M_o}$ ile ikinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın çarpımı,

$$\delta_{20}=\int\frac{\bar{M}_2\bar{M}_0}{EI}dl=\left[-\frac{9.49x59.94x3}{3x2.83EI}+\frac{9.49x15x3}{3x2.83EI}-\frac{6x59.94x(3+9)}{2EI}\right]=-\frac{2308.54}{EI}$$

Yayılı yükten dolayı oluşan sonuç süreklilik denklemi yazılacak olursa

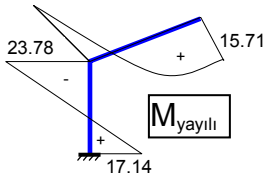
$$\mathbf{9.35X_1+41.03X_2=426.61}$$

$$\mathbf{41.03X_1+244.06X_2=2308.54}$$

$\mathbf{X_1=15.70\ tm}$ $\mathbf{X_2=6.82\ t}$

Düğümde noktalarında moment değeri

$\mathbf{M_i = M_1 \times X_1 + M_2 \times X_2 + M_O}$

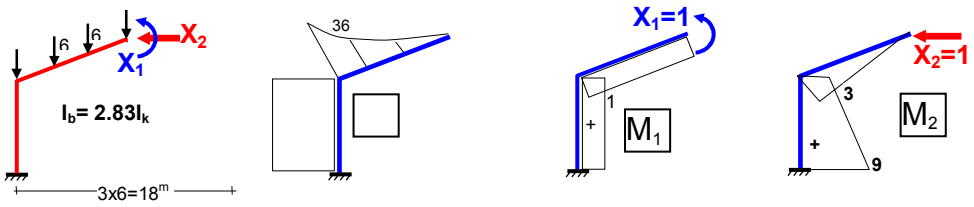


$\mathbf{M_A}$= 15.70 x 1 + 6.82 x 9 – 59.94 = **17.14 tm**

$\mathbf{M_B}$= 15.70 x 1 + 6.82 x 3 – 59.94 = **-23.78 tm**

$\mathbf{M_C}$= 15.70 x 1 + 0 – 0 = **15.70 tm**

2. Sadece tekil yüklerden dolayı oluşan moment değerleri,



Dış yüklerden dolayı oluşan $\mathbf{M_o}$ momet alanı yukarıdaki gibi çizilir.

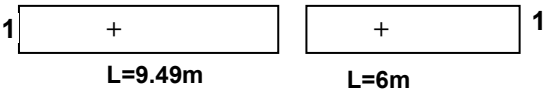
δ_{11}'in bulunması birim moment alanın kendisiyle çarpımıdır. Yatay çubuk boyu **9.49 m**

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

Birinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın kendisiyle çarpımı,

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dl = \frac{9.49 \times 1 \times 1}{2.83EI} + \frac{6 \times 1 \times 1}{EI} = \frac{9.35}{EI}$$



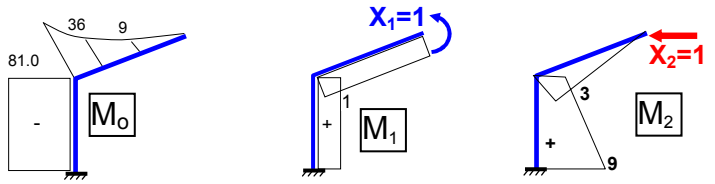
İkinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın kendisiyle çarpımı,

$$\delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dl = \frac{3 \times 3 \times 9.49}{3 \times 2.83EI} + \frac{6 \times (3 \times 2 \times 3 + 3 \times 2 \times 9 + 2 \times 9 \times 9)}{6 \times EI} = \frac{244}{EI}$$

Birinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın ile ikinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın çarpımı,

$$\delta_{12} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dl = \frac{9.49 \times 3 \times 1}{2 \times 2.83EI} + \frac{6 \times (3+9) \times 1}{EI} = \frac{41.03}{EI}$$

Dış yüklerden dolayı oluşan moment alanı $\mathbf{M_o}$ ile birinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın çarpımı,



$$\delta_{10} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_0}{EI} dl = \left[-\frac{81 \cdot 6 \cdot 1}{2.83EI} - \frac{45 \cdot 3.16 \cdot 1}{2 \cdot EI} - \frac{36 \cdot 3.16 \cdot 1}{EI} - \frac{27 \cdot 3.16 \cdot 1}{2 \cdot EI} - \frac{9 \cdot 3.16 \cdot 1}{EI} - \frac{9 \cdot 3.16 \cdot 1}{2 \cdot EI} \right] = -\frac{441.91}{EI}$$

Dış yüklerden dolayı oluşan moment alanı $\mathbf{M_o}$ ile ikinci hiperstatik bilinmeyenin moment alanın çarpımı,270.179

$$\delta_{20} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_0}{EI} dl = \left[-\frac{81 \cdot 6 \cdot 3}{2.83EI} - \frac{81 \cdot 6 \cdot 6}{2 \cdot (2.83EI)} - \frac{45 \cdot 3.16 \cdot 1}{3EI} - \frac{45 \cdot 3.16 \cdot 2}{2 \cdot EI} - \frac{36 \cdot 3.16 \cdot 1}{2EI} - \frac{36 \cdot 3.16 \cdot 2}{EI} - \frac{27 \cdot 3.16 \cdot 1}{3EI} - \frac{27 \cdot 3.16 \cdot 1}{2 \cdot EI} - \frac{9 \cdot 3.16 \cdot 1}{2EI} - \frac{9 \cdot 3.16 \cdot 1}{EI} - \frac{9 \cdot 3.16 \cdot 1}{3EI} \right] = -\frac{1030.388}{EI} - \frac{474}{EI} - \frac{123.24}{EI} = -\frac{1627.628}{EI}$$

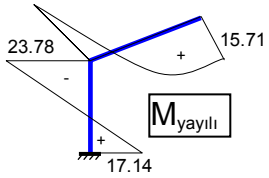
Yayılı yükten dolayı oluşan sonuç süreklilik denklemi yazılacak olursa

$$\left.\begin{aligned} 9.35X_1 + 41.03X_2 &= 441.91 \\ 41.03X_1 + 244.06X_2 &= 1627.628 \end{aligned}\right\} \quad X_1 = 68.62 \qquad X_2 = -4.87$$

9,35	41,03	=	441,91
41,03	244,06	=	1627,628

0,407786	-0,06855	X_1= 68,62318
-0,06855	0,015622	X_2=-4,86758

K^{-1}

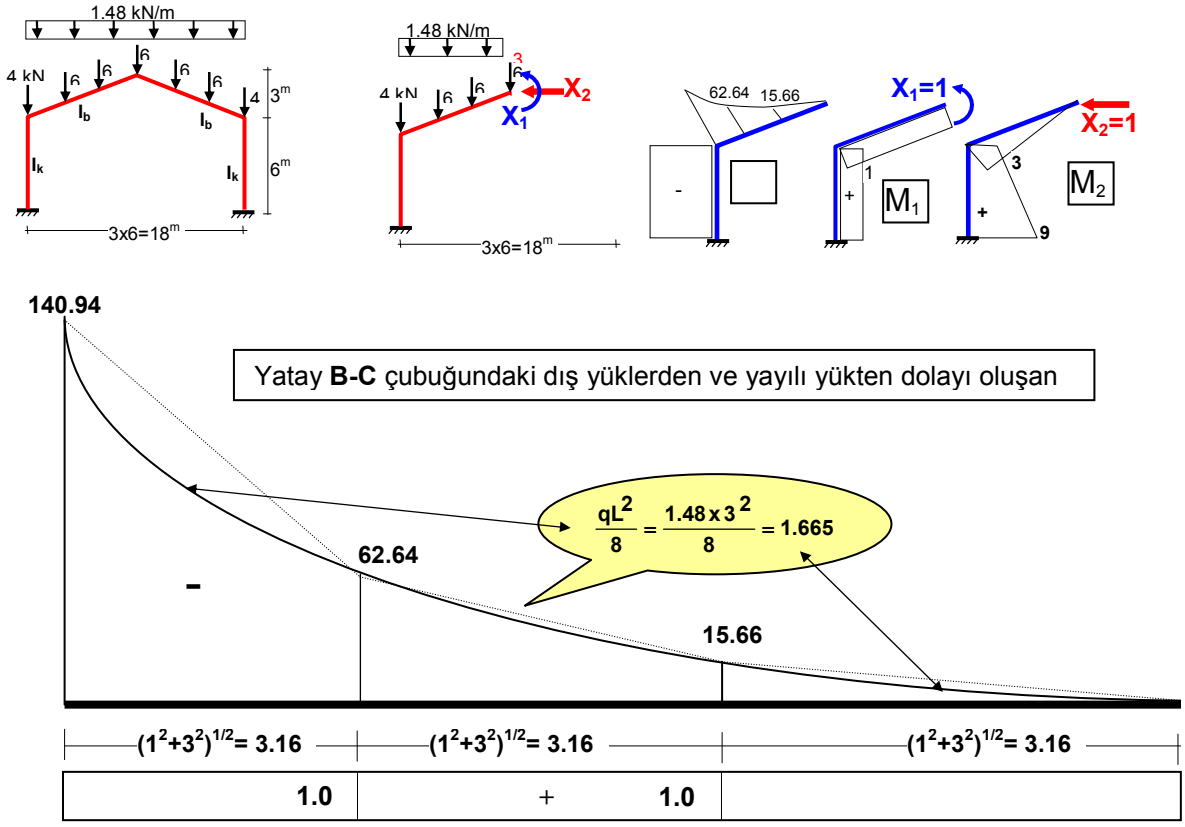


Düğümde noktalarında moment değeri

$M_i = M_1 \times X_1 + M_2 \times X_2 + M_O$ M_A= **-81**-18.953x1+10.904x9=160.183 **tm**

M_B= 15.70 x 1 + 6.82 x 3 – 59.94 = **-23.78 tm** M_C= 15.70 x 1 + 0 – 0 = **15.70 tm**

3. Hem yayılı yük hem tekil yüklerden dolayı oluşan moment değerleri,

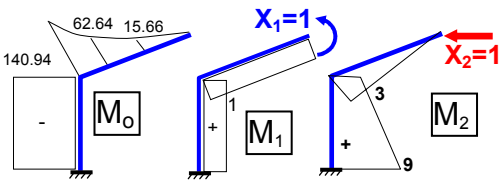


δ_{11} birim moment alanın kendisiyle çarpımına eşittir. Yatay çubuk boyu **9.49 m**

$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$ $\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$ $\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dL = \frac{9.49x1x1}{2.83EI} + \frac{6x1x1}{EI} = \frac{9.35}{EI}$

$$\delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dl = \frac{3x3x9.49}{3x2.83EI} + \frac{6x(3x2x3+3x2x9+2x9x9)}{6xEI} = \frac{244}{EI}$$

$\delta_{12} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dl = \frac{9.49x3x1}{2x2.83EI} + \frac{6x(3+9)x1}{EI} = \frac{41.03}{EI}$



$\delta_{10} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_0}{EI} dl = \left[\frac{3}{2.83EI}\left(\frac{2x3.16x1.67}{3}\right)\right] + \left[\frac{1}{2.83EI}\left(\frac{3.16x1x15.66+3.16x1x(15.66+62.64)+3.16x1x(62.64+140.94}{2}\right)\right]$

$\frac{6x140.94x1}{EI} = \frac{1008.1}{EI}$

$$\delta_{20}=\int\frac{\overline{M}_2\,\overline{M}_0}{EI}dl=\frac{1}{2.83EI}\left[\frac{1x3.16x1.67x(3+2)}{3}+\frac{3.16x1.67x(2+3)}{3}+\frac{3.16x1.67x1}{3}\right]$$

$$\frac{3.16x15.66x1}{3x2.83EI}\quad\frac{3.16(2x15.66x1+15.66x2+62.64x1+2x62.64x2)}{6x2.83EI}$$

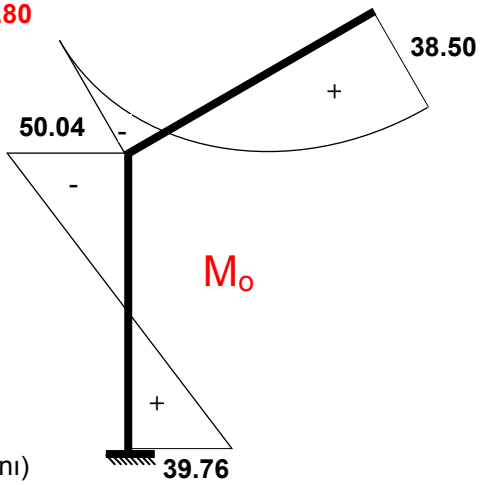
$$\frac{3.16(2x62.64x2+140.94x2+62.64x3+2x140.94x3)}{6x2.83EI}\quad\left[\frac{6x140.94x(3+9)}{3EI}\right]=\frac{5435.45}{EI}$$

Sonuç süreklilik denklemi yazılacak olursa

$$9.35X_1+41.03X_2=1008.20$$

$$41.03X_1+244.06X_2=5435.45$$

X_1=38.50 X_2=15.80



Düğümde noktalarında moment değeri

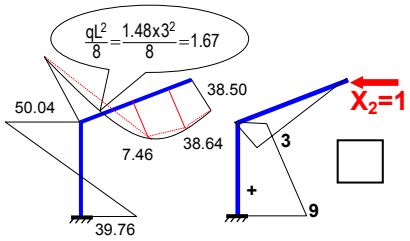
$$M_i = M_1 \times X_1 + M_1 \times X_1 + M_O$$

M_A= 38.50 x 1 + 15.80 x 3 – 140.94 = -55.04 tm

M_B= 38.50 x 1 + 15.80 x 9 – 140.94 = 39.76 tm

M_C= 38.50 x 1 + 0 – 0 = 38.50 tm

Kontrol . (sonuç moment alanı **x** herhangi birim moment alanı)



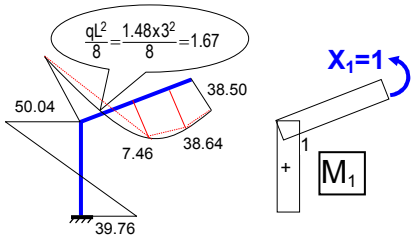
$$M_o \times M_2=\frac{1}{2.83EI}\left[\frac{3.163x1x1.67}{3}+\frac{3.163x1.67x((2+1)+(3+2))}{3}\right]$$

$$+\frac{3.163x1x(38.5+2x38.64}{6x2.83EI}+\frac{3.163(2x7.46+7.46x1+38.64x2+2x38.64x1)}{6x2.83EI}$$

$$-\frac{3.163(2x2x(-7.46)+55.04x2+(-7.46)x3+2x55.04x3)}{6x2.83EI}$$

$$-\frac{6(2x55.04x3+55.04x9+(-39.76)x3+2x(-39.76x9)}{6xEI}=M_o \times M_2=0$$

olduğu görülür. Aynı şekilde sonuç moment alanı M_o ile birinci hiperstatik birim yüklemesi moment alanının çarpımı da sıfırdır.

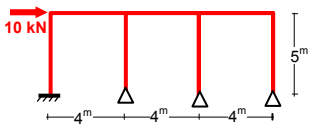


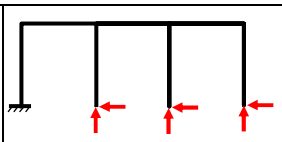
$$M_o \times M_1=\frac{1}{2.83EI}\left[\frac{3.163x1x1.67}{3}+\frac{3.163x1.67x((2+1)+(3+2))}{3}\right]$$

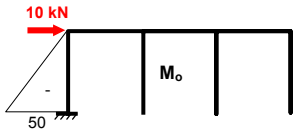
$$+\frac{3.163x1x(38.5+2x38.64}{6x2.83EI}+\frac{3.163(2x7.46+7.46x1+38.64x2+2x38.64x1)}{6x2.83EI}$$

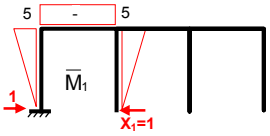
$$-\frac{3.163(2x2x(-7.46)+55.04x2+(-7.46)x3+2x55.04x3)}{6x2.83EI}$$

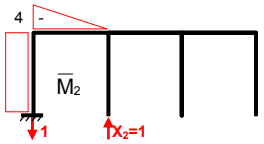
$$-\frac{6(2x55.04x3+55.04x9+(-39.76)x3+2x(-39.76x9)}{6xEI}=M_o \times M_2=00000000000$$

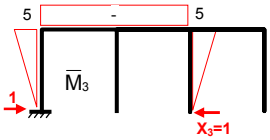








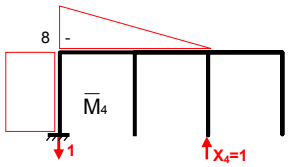


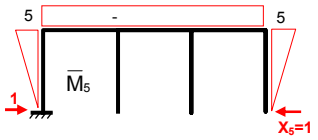


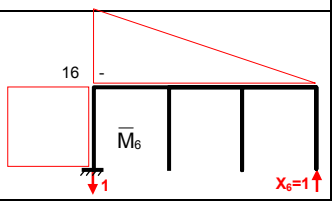
$$\delta_{11} = 2\frac{5^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{183.33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{4^3}{3EI} + \frac{5x4x4}{EI} = \frac{101.33}{EI}$$

$$\delta_{33} = 2\frac{5^3}{3EI} + \frac{5x8x5}{EI} = \frac{283.33}{EI}$$







$$\delta_{44} = \frac{8^3}{3EI} + \frac{5x8x8}{EI} = \frac{490.67}{EI}$$

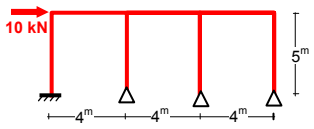
$$\delta_{55} = 2\frac{5^3}{3EI} + \frac{5x12x5}{EI} = \frac{383.33}{EI}$$

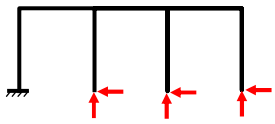
$$\delta_{66} = \frac{12x16^2}{3EI} + \frac{5x16^2}{EI} = \frac{2304}{EI}$$

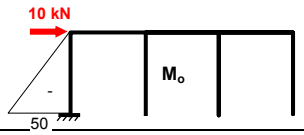
Bu çözüm sonucunda süreklilik denklemi,

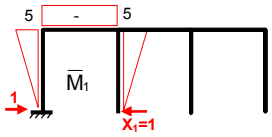
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} + \delta_{1t} = \sum \bar{C}_2 c + \sum M_2 \varphi$$
$$\delta_{21}X_2 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} + \delta_{2t} = \sum \bar{C}_2 c + \sum M_2 \varphi$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{3n}X_n + \delta_{30} + \delta_{3t} = \sum \bar{C}_3 c + \sum \bar{M}_3 \varphi$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} + \delta_{nt} = \sum \bar{C}_n c + \sum \bar{M}_n \varphi$$

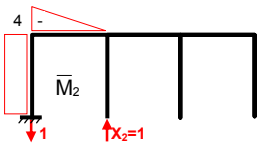
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}	δ_{10}	X_1	=	0
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{26}	δ_{20}	X_2		0
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}	δ_{30}	X_3		0
δ_{41}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}	δ_{30}	X_4		0
δ_{51}	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{50}	X_5		0
δ_{61}	δ_{62}	δ_{63}	δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}	δ_{60}	X_6		0

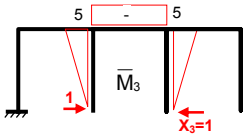








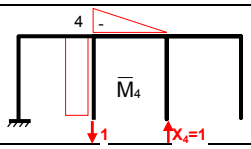


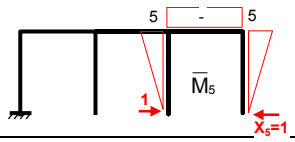


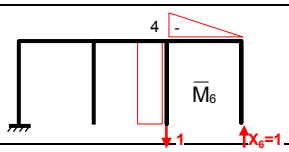
$$\delta_{11} = 2\frac{5^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{183.33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{4^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{121.33}{EI}$$

$$\delta_{33} = 2\frac{5^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{183.33}{EI}$$







$$\delta_{44} = \frac{4^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{121.33}{EI}$$

$$\delta_{55} = 2\frac{5^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{183.33}{EI}$$

$$\delta_{66} = \frac{4^3}{3EI} + \frac{5x5x4}{EI} = \frac{121.33}{EI}$$

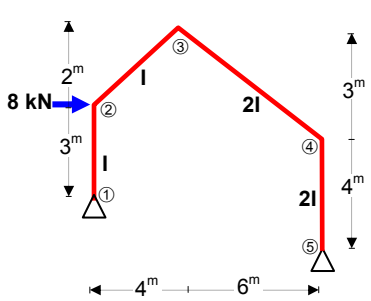
ALANLARIN ÇARPIM TABLOSU (EI)

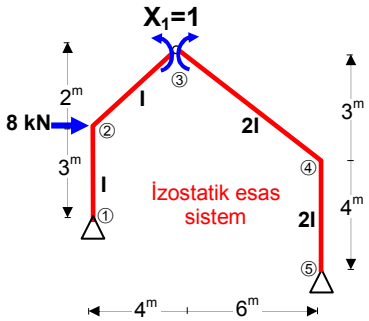
$\int_0^L \frac{M_i \bar{M}_k}{EI} dL = \frac{L}{EI}$	$\frac{Lik}{L}$	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Li(k_1+k_2)}{2}$	$\frac{2Lik}{3}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lk(i_1+i_2)}{2}$	$\frac{2Lik}{3}$	$\frac{2Lik}{3}$	$\frac{2Lik}{3}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{5}$
	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Li(k_1+2k_2)}{6}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lk(i_1+2i_2)}{6}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{5Lik}{12}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{12}$	$-\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{5}$
	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Li(2k_1+k_2)}{6}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{L[2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2]}{6}$	$\frac{Lk[i_1+5i_2]}{12}$	$\frac{7Lik}{15}$	$\frac{11Lik}{30}$	$\frac{Lik}{10}$	$\frac{2Lik}{15}$	$\frac{Lik}{10}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{30}$	$\frac{Lik}{12}$
	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Li(k_1+3k_2)}{12}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{Lik}{10}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{2Lik}{15}$	$\frac{Lk[3i_1+5i_2]}{12}$	$\frac{7Lik}{15}$	$\frac{8Lik}{15}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{2Lik}{15}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{6}$
	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Li(3k_1+k_2)}{12}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{Lik}{10}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{2Lik}{15}$	$\frac{Lk[i_1+3i_2]}{12}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{Lik}{10}$	$\frac{2Lik}{15}$	$\frac{Lik}{30}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{6}$
	$\frac{Lik}{2}$	$\frac{Lik[1+a/L]}{6}$	$\frac{Li[(1+a/L)k_2+(1+b/L)k_1]}{6}$	$\frac{Lik[1+ab/L^2]}{3}$	$\frac{Lik[3+3\beta-\beta^2]}{12}$	$\frac{Lik[1+\alpha+\alpha^2]}{12}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik[1+a/L][1+b^2/L^2]}{20}$	$\frac{Lik[\beta/L]}{4}$	$\frac{Lik[1-2a/L]}{6}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{-3Lik}{20}$					
	0	$-\frac{Lik}{6}$	$\frac{Li[k_1-k_2]}{6}$	0	$\frac{Lik[5-1.5]}{12}$	$\frac{Lik[1-1.5]}{12}$	$-\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik[1-a/L][1+b^2/L^2]}{20}$	$\frac{Lik[\beta/L]}{4}$	$\frac{Lik[1-2a/L]}{6}$	$\frac{Lik}{3}$	$\frac{Lik}{4}$						
	$\frac{Lik}{4}$	0	$\frac{Lik_1}{4}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{6}$	$-\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik[1+a/L][1+b^2/L^2]}{20}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{4}$							
	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{5}$	$\frac{Li(k_1+4k_2)}{20}$	$\frac{2Lik}{15}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{12}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik[1+a/L][1+b^2/L^2]}{20}$	$\frac{Lik}{4}$	$\frac{Lik}{6}$	$\frac{Lik}{4}$							

ÖRNEK 14: Şekilde verilen çerçevenin **KUVVET** metoduyla

a. ③ Düğümündeki momenti
b. B_x mesnet tepkisini bilinmeyen seçerek moment alanını çiziniz.

b. ③ düğümündeki momenti





M_o moment alanın çizimi için mesnet tepki kuvvetlerinin bulunması için,

$\Sigma F_x=0$ $A_x + B_x = 8$ $A_x = 8 - B_x$ **(1)**
$\Sigma F_y=0$ $A_y + B_y = 0$ $A_y = -B_y$

denklemleri yazılır. Ayrıca $M_③=0$ düğüm noktasında moment dengesi,

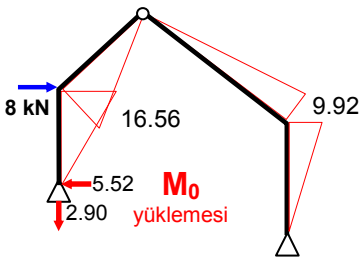
$A_x \times 5 + A_y \times 4 - 8 \times 2 = 0$ (sol) $5A_x + 4A_y = 16$ **(2)**
$B_x \times 7 - B_y \times 6 = 0$ (sağ) $7B_x - 6B_y = 0$

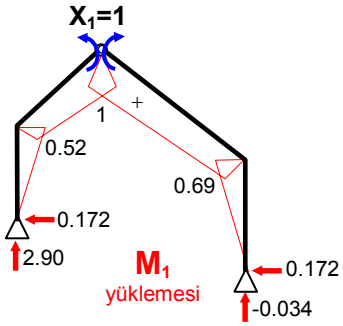
olarak yazılır. Yukarıdaki **(1)** denkleminden bulunan değerler bu **(2)** denkleminde yerine yazılır ise,

$5A_x + 4A_y = 16$ **(3)**
$7 (8 - A_x) - 6 (-A_y) = 0$ **(4)**

bu iki denklemin ortak çözümünden, $A_y = -2.90$ t $B_y = 2.90$ t $A_x = -5.53$ t $B_x = 2.48$ t

olarak bulunur ve bu değerlere göre M_o alanı aşağıdaki gibi çizilir. M_1 moment alanın çizimi için mesnet tepki kuvvetlerinin bulunması için,





$\Sigma F_x=0$ $A_x - B_x = 0$ $A_x = B_x$ **(1)**

$\Sigma F_y=0$ $A_y + B_y = 0$ $A_y = -B_y$

denklemleri yazılır. Ayrıca $M_3=0$ düğüm noktasında moment dengesi,

$A_x \times 5 + A_y \times 4 = 1$ (sol) $5A_x + 4A_y = 1$ **(2)**
$-B_x \times 7 - B_y \times 6 = -1$ (sağ) $7B_x + 6B_y = 1$

olarak yazılır. Yukarıdaki **(1)** denkleminden bulunan değerler bu **(2)** denkleminde yerine yazılır ise,

$5A_x + 4A_y = 1$ **$7\,(A_x) + 6\,(-A_y) = 1$** **(3)**

bu iki denklemin ortak çözümünden,

$A_x = 0.172$ t $B_x = 0.172$ $A_y = 0.034$ kN $B_y = -0.034$ kN

olarak bulunur ve bu değerlere göre **M_1** alanı aşağıdaki şekilde çizilir.

$$\delta_{11} = \frac{0.52 \times 0.52 \times 3}{3EI} + \frac{4.47 \times (2 \times 0.52 \times 0.52 + 2 \times 0.52 + 2 \times 1 \times 1)}{6EI} + \frac{0.69 \times 0.69 \times 4}{3(2EI)} + \frac{6.71 \times (2 \times 0.69 \times 0.69 + 2 \times 0.69 + 2 \times 1 \times 1)}{6(2EI)} = \frac{5.65}{EI}$$

$$\delta_{10} = \frac{0.52 \times 16.56 \times 3}{3EI} + \frac{4.47 \times 16.56 (2 \times 0.52 + 1)}{6EI} - \frac{0.69 \times 9.92 \times 4}{3(2EI)} - \frac{6.71 \times 9.92 (2 \times 0.69 + 1)}{6(2EI)} = \frac{15.88}{EI}$$

Süreklilik denklemi yazılarak,

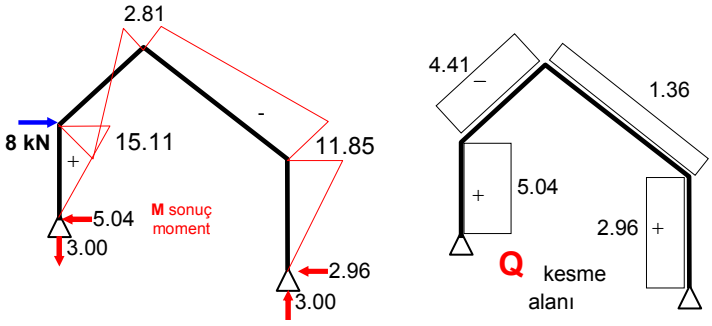
$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{10} = 0$ **$5.65\ X_1 + 15.88 = 0$** **$X_1 = -15.88 / 5.65 = -2.81$ kNm**

olarak bulunur. Bundan sonra çubuk uç momentleri ise,

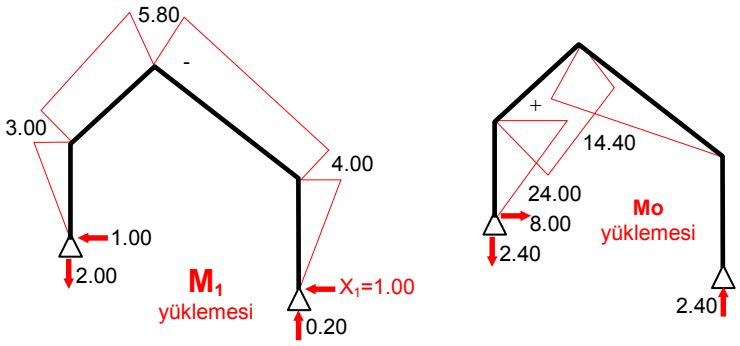
$M_{ij} = M_1 \times X_1 + M_O$ bağıntısı kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

$M_{21} = -2.81 \times 0.52 + 16.56 = 15.10$ kNm
$M_{23} = -2.81 \times 0.52 + 16.56 = 15.10$ kNm
$M_{32} = -2.81 \times 1.00 + 00.00 = -2.81$ kNm
$M_{34} = -2.81 \times 0.52 + 00.00 = -2.81$ kNm
$M_{45} = -2.81 \times 0.69 - 9.92 = -11.85$ kNm

$A_y = -2.81 \times 0.034 - 2.90 = -3.00$ kN
$B_y = -2.81 \times (-0.034) + 2.90 = 3.00$ kN
$A_x = -2.81 \times (-0.172) - 5.52 = -5.04$ kN
$B_x = -2.81 \times (-0.172) - 2.48 = -2.96$ kN



c. **B_X mesnet tepkisinin bilinmeyen olarak seçilmesi durumu için çözüm.**



$$\delta_{11} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3EI} + \frac{4.47 (2 \times 3^2 + 3 \times 5.8 \times 2 + 2 \times 5.8 \times 5.8)}{6EI} + \frac{4 \times 4 \times 4}{3(2EI)} + \frac{6.71 (2 \times 4^2 + 2 \times 5.8 \times 4 + 2 \times 5.8 \times 5.8)}{6(2EI)} = \frac{190.59}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{3 \times 24 \times 3}{3EI} - \frac{4.47 \times (2 \times 24 \times 3 + 24 \times 5.8 + 14.4 \times 3 + 2 \times 14.4 \times 5.8)}{6EI} + \frac{6.71 \times 14.4 (2 \times 5.80 + 4)}{6(2EI)} = -\frac{565.22}{EI}$$

Süreklilik denklemi yazılarak,

$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{10} = 0$ $\quad$ $190.59\ X_1 - 565.22 = 0$ $\quad$ **X_1 = -565.22 / 190.59 = 2.97 tm**

olarak bulunur. Bundan sonra çubuk uç momentleri ise,

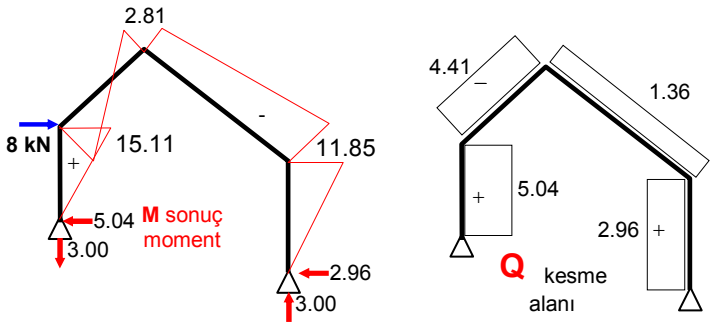
$M_{ij} = M_1 \times X_1 + M_O$ bağıntısı kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

M_{21} = 2.97 x (-3) + 24 = 15.10 kNm $\quad$ A_y= -2.81 x 0.034 –2.90 = -3.00 kN
M_{23} = 2.97 x (-3) + 24 = 15.10 kNm
M_{32} = 2.97 x (-5.8) + 14.4 = -2.83 kNm $\quad$ B_y= -2.81 x (-0.034) +2.90 = 3.00 kN
M_{34} = 2.97 x (-5.8) + 14.4 = -2.83 kNm $\quad$ A_x= -2.81 x (-0.172) –5.52 = -5.04 kN
M_{45} = 2.97 x (-4) + 0.00 = -11.88 kNm $\quad$ B_x= -2.81 x (-0.172) –2.48 = -2.96 kN

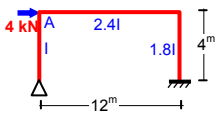
KONTROL: Birim yükleme moment alanı ile sonuç moment alanlarının çarpımı sıfır olması gerekir.

$$M_{11} x M_{sonuç} = -\frac{3 \times 3 \times 15.11}{3EI} - \frac{4.47 \times 15.11 (2 \times 3 + 5.8)}{6EI} + \frac{4.47 \times 2.81 (2 \times 5.8 + 3)}{6EI} +$$

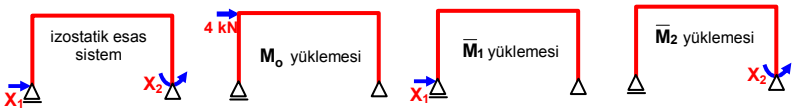
$$\frac{4 \times 4 \times 11.85}{3(2EI)} + \frac{6.71 \times (2 \times 2.81 \times 5.8 + 2.81 \times 4 + 5.8 \times 11.85 + 2 \times 11.85 \times 4)}{6(2EI)} = \frac{0.045}{EI}$$



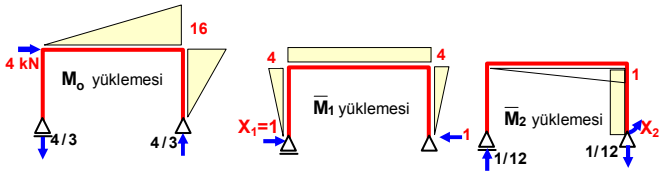
ÖRNEK 15: Verilen sistemde **A** noktasının **yatay deplasmanının** hesaplanması.



Çözüm: İzostatik esas sistem seçilerek sistemin moment alanı çizilir.



1. Bunun için sistem önce hiperstatik sistem olarak çözülür.
2. Daha sonra kısaltma teoremi kullanılarak herhangi bir izostatik sisteme birim yükleme yapılır.
3. Birim moment alanı ile hiperstatik sistemim moment alanı ile çarpılarak bulunur.



$$\delta_{11}=\frac{4x4x4}{3EI}+\frac{4x4x4}{3(1.8IE)}+\frac{4x12x4}{2.4EI}=\frac{113.185}{EI} \qquad \delta_{22}=\frac{1x1x12}{3(2.4EI)}+\frac{1x4x1}{1.8IE}=\frac{3.89}{EI} \qquad \delta_{21}=-\frac{4x1x12}{2(2.4EI)}-\frac{1x4x4}{2(1.8IE)}=-\frac{14.444}{EI}$$

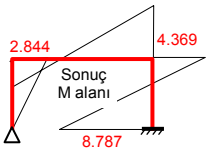
$$\delta_{10}=\frac{4x12x16}{2(2.4EI)}+\frac{4x4x16}{3(1.8EI)}=\frac{207.407}{EI} \qquad \delta_{20}=-\frac{1x16x12}{3(2.4EI)}-\frac{1x4x16}{2(1.8EI)}=-\frac{44.444}{EI}$$

Süreklilik denklemi,

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{10}=0 \qquad 113.185X_1-14.444X_2=-207.407$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{20}=0 \qquad -14.444X_1+3.890X_2=44.444$$

X_1= -0.711 X_2= 8.787



olarak bulunur. Çubuk uç momentleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

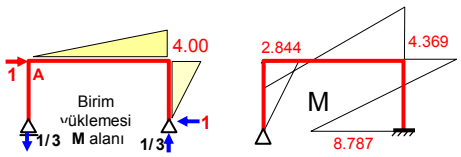
$M_i = M_1 \text{ x } X_1 + M_1 \text{ x } X_1 + M_O$

M_{21} = -0.711 x (-4) + 8.787 x (0.00) + 0.00 = 2.844 kNm
M_{23} = -0.711 x (-4) + 8.787 x (0.00) + 0.00 = 2.844 kNm
M_{32} = -0.711 x (-4) +8.787 x (1.00) + (-16.00) = -4.369 kNm
M_{34} = -0.711 x (-4) +8.787 x (1.00) + (-16.00) = -4.369 kNm
M_{34} = -0.711 x (0) +8.787 x (1.00) + (0.00) = -8.787 kNm

KONTROL: Birim yükleme moment alanı ile sonuç moment alanlarının çarpımı sıfır olması gerekir.

$$M_{22}xM_{sonuç}=\frac{2.844x1x12}{6(2.4EI)}-\frac{12x4.369x.1}{3(2.4EI)}+\frac{4x8.787x1}{2(1.8EI)}-\frac{4x4.369x1}{2(1.8EI)}=0.000$$

2. **Kısaltma teoremi** kullanılarak herhangi bir izostatik sisteme birim yükleme yapılır.

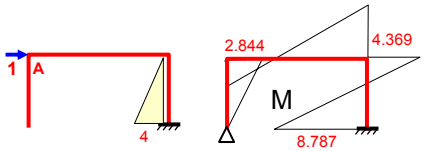


Bu birim yükleme ile sonuç moment alanın çarpımından,

$$\delta=M_{birim}xM_{sonuç}=-\frac{12x4x2.844}{6E(2.4)I}+\frac{12x4x4.369}{3(2.4EI)}+\frac{4x4x4.369}{3(1.8EI)}-\frac{4x4x8.787}{6(1.8EI)}=\frac{19.565}{EI}$$

VEYA

3. **Kısaltma teoremi** kullanılarak herhangi bir izostatik sisteme birim yükleme yapılır.



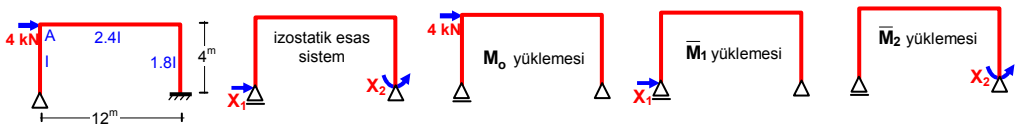
Bu birim yükleme ile sonuç moment alanın çarpımından,

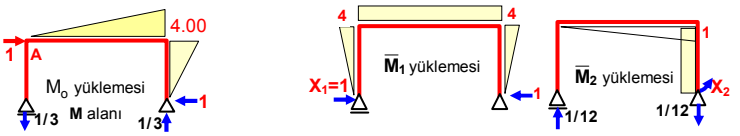
$$\delta_2 = M_{birim} \times M_{sonuç} = \frac{4 \times 4 \times 8.787}{3(1.8EI)} - \frac{4 \times 4.369 \times 4}{6(1.8EI)} = \frac{19.563}{EI}$$

DİĞER BİR ÇÖZÜM YOLU

ÖRNEK 16: Verilen sistemde ② noktasının **yatay deplasmanının** hesaplanması.

1. **Birim yükleme** hiperstatik sisteme yüklenir ve moment alanı çizilir.
2. Daha sonra **kısaltma teoremi** kullanılarak **dış yükler** herhangi bir izostatik sisteme yüklenir ve sistem çözülerek moment alanı çizilir.
3. Hiperstatik sisteme yapılan birim yükleme moment alanı ile izostatik sisteme yüklenen dış yüklerden oluşan moment alanın çarpımı sonucu ② düğümündeki yatay deplasman bulunur.





$$\delta_{11} = \frac{113.185}{EI} \quad \delta_{22} = \frac{3.89}{EI} \quad \delta_{21} = -\frac{14.444}{EI}$$ [yukarıda hesaplanmıştı]

$$\delta_{10} = \frac{4 \times 12 \times 4}{2(2.4EI)} + \frac{4 \times 4 \times 4}{3(1.8EI)} = \frac{51.85}{EI} \qquad \delta_{20} = -\frac{1 \times 4 \times 12}{3(2.4EI)} - \frac{1 \times 4 \times 4}{2(1.8EI)} = -\frac{11.111}{EI}$$

Süreklilik denklemi,

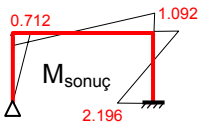
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0 \qquad 113.185 X_1 - 14.444 X_2 = -51.85$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0 \qquad -14.444 X_1 + 3.890 X_2 = 11.111$$

Bilinmeyenler, $X_1 = -0.178$ $X_2 = 2.196$

olarak bulunur. Çubuk uç momentleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$M_i = M_1 \times X_1 + M_1 \times X_1 + M_O$$

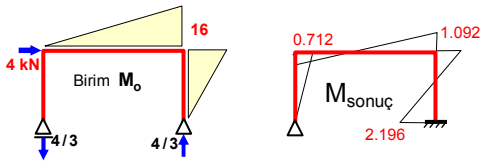


M_{21} = -0.178 x (-4) + 2.196 x (0.00) + 0.00 = 0.712 kNm
M_{23} = -0.178 x (-4) + 2.196 x (0.00) + 0.00 = 0.712 kNm
M_{32} = -0.178 x (-4) + 2.196 x (1.00) + (-4.00) = -1.092 kNm
M_{34} = -0.18 x (-4) + 2.196 x (1.00) + (-4.00) = -1.092 kNm
M_{34} = -0.178 x (0) + 2.196 x (1.00) + (0.00) = 2.196 kNm

KONTROL: Birim moment alanı ile sonuç moment alanlarının çarpımı sıfır olması gerekir.

$$M_{22} \times M_{sonuç} = \frac{0.712 \times 1 \times 12}{6(2.4EI)} - \frac{12 \times 1.092 \times 1}{3(2.4EI)} + \frac{4 \times 2.196 \times 1}{2(1.8EI)} - \frac{4 \times 1.092 \times 1}{2(1.8EI)} = 0.00$$

4. Daha sonra **kısaltma teoremi** kullanılarak **dış yük** herhangi bir izostatik sisteme yüklenir.

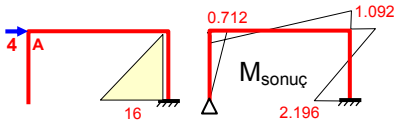


Bu birim yükleme ile sonuç moment alanın çarpımından,

$$\delta_2 = M_{birim} x M_{sonuç} = \frac{12x16x1.092}{6(2.4EI)} - \frac{12x16x0.712}{6(2.4EI)} + \frac{4x1.092x16}{3(1.8EI)} - \frac{4x2.196x16}{6(1.8EI)} = \frac{19.616}{EI}$$

V E Y A

5. Daha sonra **kısaltma teoremi** kullanılarak herhangi bir izostatik sisteme dış yük yüklemesi yapılır.



Bu dış yükleme moment alanı ile sonuç moment alanın çarpımından,

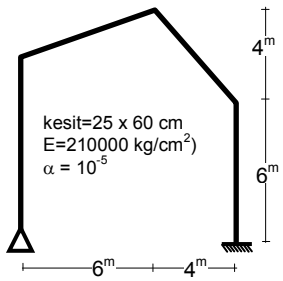
$$\delta_2 = M_{birim} x M_{sonuç} = \frac{4x16x2.196}{3(1.8EI)} - \frac{4x1.092x16}{6(1.8EI)} = \frac{19.556}{EI}$$

olarak bulunur. Buradan görülüyor ki hiperstatik sistemin herhangi bir noktasındaki deplasmanı bulmak için **birim yükleme ve dış yükler,**

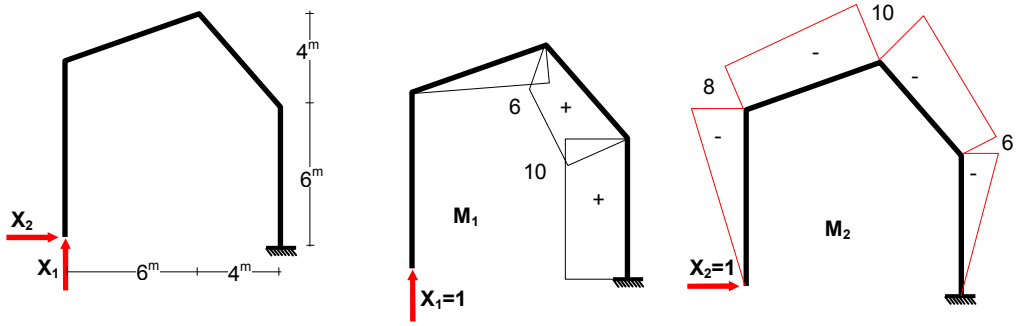
a. Hiperstatik sisteme
b. İzostatik esas sisteme

yapılabilir. Yani hiperstatik sistemin herhangi bir noktasındaki şekil değiştirmeyi bulmak için birim yükleme ve/veya dış yükler hiperstatik ve/veya izostatik bir sisteme yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi yapılabilir.

ÖRNEK 18: Şekilde verilen sistemin $\Delta t=30^oC$ sıcaklık değişiminden dolayı oluşan moment alanının ① mesnet tepki kuvvetlerinin hiperstatik bilinmeyen seçilerek çizimi.



Çözüm: Verilen sistemin e



$$\delta_{11}=\frac{6.32x6x6}{3EI}+\frac{5.66(2x6x6+2x10x10+2x6x10)}{6EI}+\frac{6x10x10}{EI}=\frac{1045.63}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{8x8x8}{3EI}+\frac{6.32(2x8x8+2x10x10+2x8x10)}{6EI}+\frac{5.66(2x6x6+2x10x10+2x6x10)}{6EI}+\frac{6x6x6}{3EI}=\frac{1126.48}{EI}$$

$$\delta_{12}=\frac{6.32x6(8+2x10)}{6EI}+\frac{5.66(2x6x10+6x6+10x10+2x10x6)}{6EI}+\frac{6x6x10}{2EI}=\frac{711.65}{EI}$$

$$\delta_{1t}=\int\frac{\bar{M}_1\,\alpha\,\Delta t}{d}dL=\frac{10^{-5}30}{0.6}\int\bar{M}_1\,dL=[0.0005]\left[\frac{6.32x6}{2}+\frac{5.66(10+6)}{2}+\frac{10x6}{1}\right]=0.062$$

$$\delta_{2t}=\frac{10^{-5}30}{0.6}\int\bar{M}_2\,dL=[0.0005]\left[\frac{8^2}{2}+\frac{6.32(10+8)}{2}+\frac{5.66(10+6)}{2}+\frac{6^2}{2}\right]=0.076$$

Süreklilik denklemi $\mathbf{EI=210000\,x\,\frac{0.25\,x\,0.6^3}{12}=945\,tm^2}$

$\mathbf{\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{1t}=0}$ $\qquad$ $\mathbf{1045.63X_1-711.65X_2+(EI)\,0.062=0}$

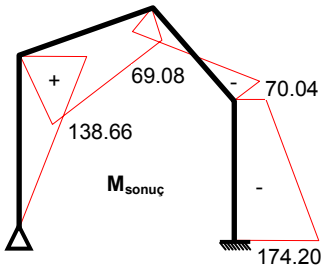
$\mathbf{\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{2t}=0}$ $\qquad$ $\mathbf{-711.65X_1+1126.48X_2+(EI)\,0.076=0}$

$\mathbf{1045.63X_1-711.65X_2=-5859}$ $\qquad$ $\mathbf{X_1=-17.42}$

$\mathbf{-711.65X_1+1126.48X_2=-7158}$ $\qquad$ $\mathbf{X_2=-17.36}$

Çubuk uç momentleri

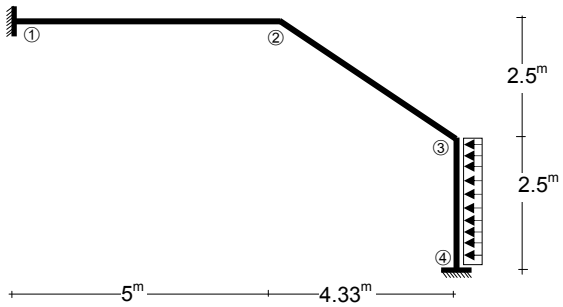
M_{21}= (-17.42 x 0) + (-17.36 x (-8)) = 138.88 kNm
M_{23}= (-17.42 x 0) + (-17.36 x (-8)) = 138.88 kNm
M_{32}= (-17.42 x 6) + (-17.36 x (-10)) = 69.08 kNm
M_{34}= (-17.42 x 6) + (-17.36 x (-10)) = 69.08 kNm
M_{43}= (-17.42 x 10) + (-17.36 x (-6)) = -70.04 kNm
M_{45}= (-17.42 x 10) + (-17.36 x (-6)) = -70.04 kNm
M_{54}= (-17.42 x 10) + (-17.36 x (0)) = -174.20 kNm



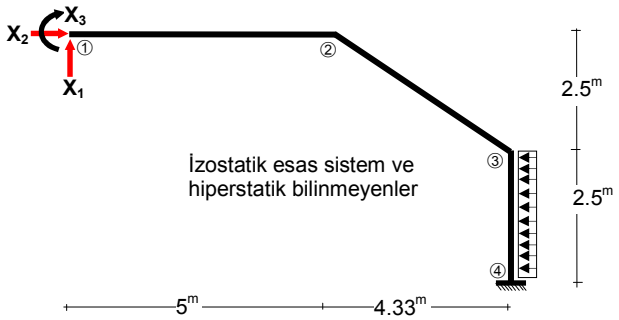
ÖRNEK 19: Şekilde verilen sistemin,

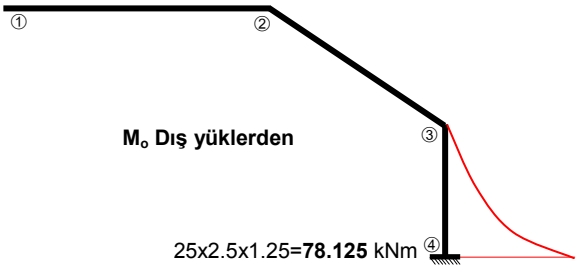
a. Verilen dış yüke göre moment alanını (**KUVVET** yöntemine göre)
b. ② düğümdeki düşey deplasmanı
c. ③ düğümdeki yatay deplasmanı

belirlenmesi.



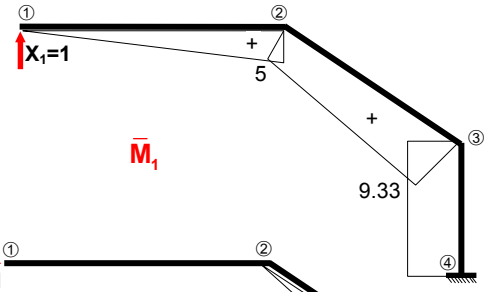
a. Moment alanının elde edilmesi



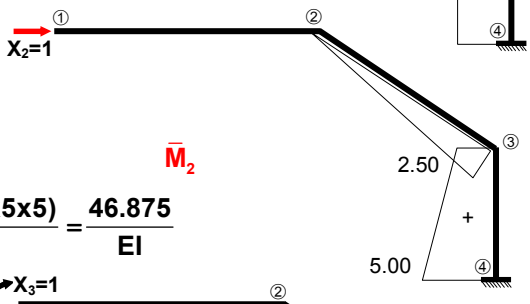


$$\delta_{11}=\frac{5\times5\times5}{3EI}+\frac{5\times(2\times5\times9.33+2\times5\times5+2\times9.33\times9.33)}{6EI}$$

$$+\frac{9.33\times9.33\times2.5}{EI}=\frac{523.787}{EI}$$

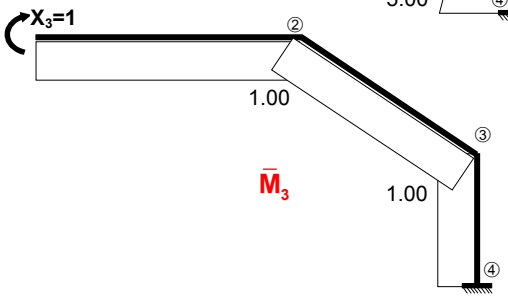


$$\delta_{10}=-\frac{2.5\times9.33\times78.125}{3EI}=-\frac{607.422}{EI}$$



$$\delta_{22}=\frac{5\times2.5\times2.5}{3EI}+\frac{2.5\times(2\times2.5\times5+2\times2.5\times2.5+2\times5\times5)}{6EI}=\frac{46.875}{EI}$$

$$\delta_{20}=-\frac{2.5\times(2.5+3\times5)\times78.125}{12EI}=-\frac{284.831}{EI}$$



$$\delta_{33}=\frac{5\times1\times1}{EI}+\frac{5\times1\times1}{EI}+\frac{2.5\times1\times1}{EI}=\frac{12.500}{EI}$$

$$\delta_{30}=-\frac{2.5\times1.0\times78.125}{3EI}=-\frac{65.104}{EI}$$

Birim yüklemelerin birbiri ile çarpımları,

$$\delta_{12}=\frac{5\times2.5(5+2\times9.33)}{6EI}+\frac{2.5\times9.33(5+9.33)}{2EI}=\frac{216.415}{EI}\qquad \delta_{13}=\frac{5\times5\times1}{2EI}+\frac{5\times1(5+9.33)}{2EI}+\frac{2.5\times9.33\times1}{EI}=\frac{71.650}{EI}$$

$$\delta_{23}=\frac{5\times2.5\times1}{2EI}+\frac{2.5\times1(2.5+5)}{2EI}=\frac{15.625}{EI}$$

Genel süreklilik denklemleri yazılır ise,

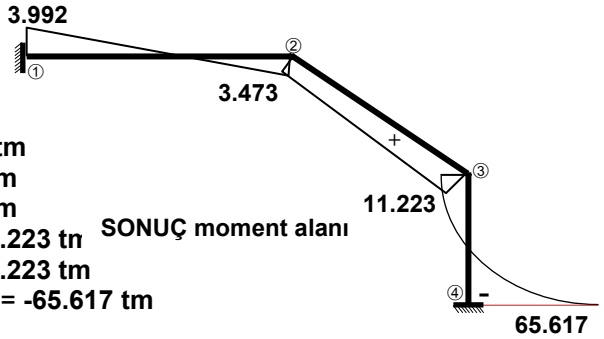
$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{10} = 0$ $\quad 523.787\ X_1 + 216.415\ X_2 + 71.650\ X_3 - 607.422 = 0$

$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{20} = 0$ $\quad 216.415\ X_1 + 46.875\ X_2 + 15.625\ X_3 - 284.831 = 0$

$\delta_{13} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{30} = 0$ $\quad 71.650\ X_1 + 15.625\ X_2 + 12.500\ X_3 - 65.104 = 0$

$X_1 = 1.493$ $X_2 = 0.514$ $X_3 = -3.992$

Çubuk uç momentlerinin bulunması



$M_{ik} = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3$

$M_{12} = 0 + 0 \times 1.493 + 0 \times 0.514 + 1 \times (-3.992) =$ **-3.992 tm**
$M_{21} = 0 + 5 \times 1.493 + 0 \times 0.514 + 1 \times (-3.992) =$ **3.473 tm**
$M_{23} = 0 + 5 \times 1.493 + 0 \times 0.514 + 1 \times (-3.992) =$ **3.473 tm**
$M_{32} = 0 + 9.33 \times 1.493 + 2.5 \times 0.514 + 1 \times (-3.992) =$ **11.223 tm**
$M_{34} = 0 + 9.33 \times 1.493 + 2.5 \times 0.514 + 1 \times (-3.992) =$ **11.223 tm**
$M_{43} = -78.125 + 9.33 \times 1.493 + 5 \times 0.514 + 1 \times (-3.992) =$ **-65.617 tm**

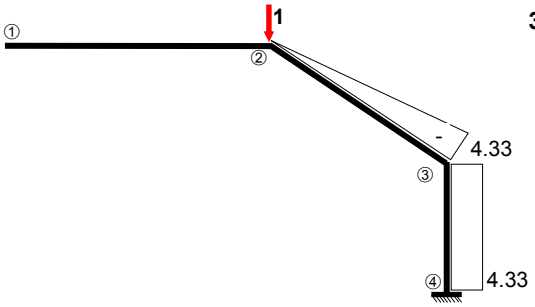
KONTROL:

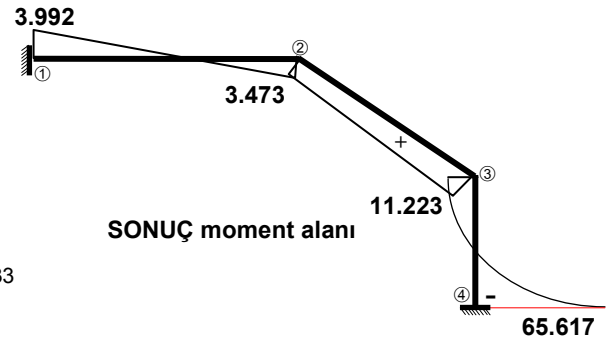
$$\bar{M}_{33} x M_{sonuç} = -\frac{5x3.992x1}{2EI} + \frac{5x3.473x1}{2EI} + \frac{5x1(3.473+11.223)}{2EI} + \frac{2.5x11.223x1}{2EI} - \frac{2.5x65.617x1}{2EI} + \frac{2.5x2x1x(25x2.5^2/8)}{3EI}$$

$$\bar{M}_{33} x M_{sonuç} = -9.98 + 8.683 + 36.74 + 14.029 - 82.021 + 32.552 = 0.003 \cong 0000$$

b. ② düğümündeki düşey deplasmanın bulunması

Düşey deplasmanın bulunması için ② düğümüne düşey yönde bir birim yük uygulanarak moment alanı elde edilir. Bu moment alanı ile sistemin sonuç moment alanları çarpılarak ② düğümündeki düşey deplasman elde edilir.

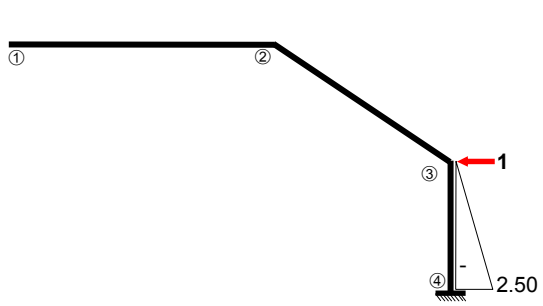


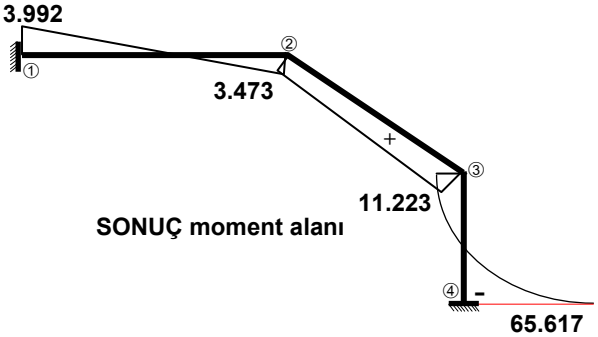


$$\delta_2 = -\frac{5x4.33(3.473+2x11.223)}{6EI} + \frac{2.5x11.223x4.33}{2EI} - \frac{2.5x65.617x4.33}{2EI} - \frac{2.5x2x4.33x(25x2.5^2/8)}{3EI} = -\frac{356.04}{EI}$$

c. ③ düğümündeki yatay deplasmanın bulunması

Yatay deplasmanın bulunması için ③ düğümüne yatay yönde bir birim yük uygulanarak moment alanı elde edilir. Bu moment alanı ile sistemin sonuç moment alanları çarpılarak ③düğümündeki yatay deplasman elde edilir.

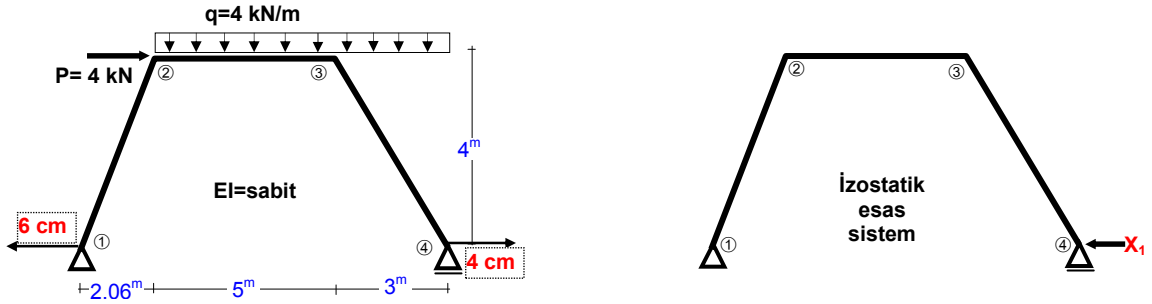




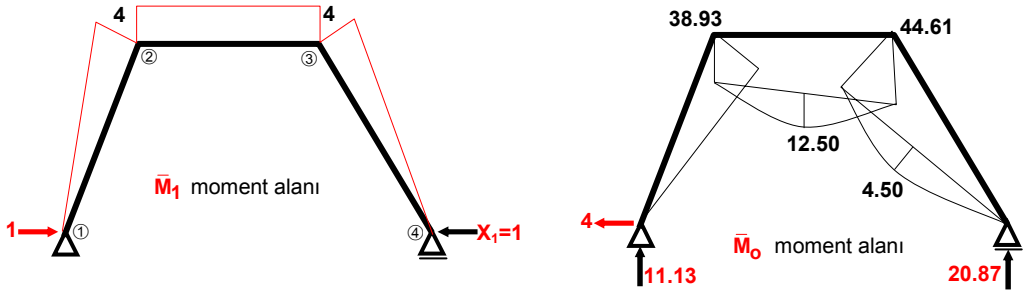
$$\delta_{3yatay} = -\frac{2.5x2.5x11.223}{6EI} + \frac{2.5x2.5x65.617}{3EI} - \frac{2.5x2.5x(25x2.5^2/8)}{3EI} = \frac{84.32}{EI}$$

ÖRNEK 20: Şekilde verilen sistemde,

a. Verilen dış yükler altında
b. t=30^o ısıtılması durumunda **(α=10^{-5} EI=5.10^4 tm^2)**
c. Sıcaklıktan dolayı ② düğümündeki düşey deplasmanı
d. ① mesnedinin sol yönde 6 cm, ve ④ mesnedinin sağ yönde 4 cm hareket etmesi halinde moment alanlarının
e. Mesnet çökmelerinden dolayı ③ düğümündeki dönüş açısının belirlenmesi.



İlk önce sistemin izostatik esas sistemi yukarıdaki gibi belirlenmiştir. Bu izostatik sistemde dış yüklerden ve hiperstatik bilinmeyenden dolayı oluşan moment alanları aşağıdaki gibi bulunur.



a. Verilen dış yükler altında

$$\delta_{11} = \frac{4.5\,x4x4}{3EI} + \frac{5\,x4x4}{3EI} + \frac{5\,x4x4}{EI} = \frac{130.67}{EI}$$

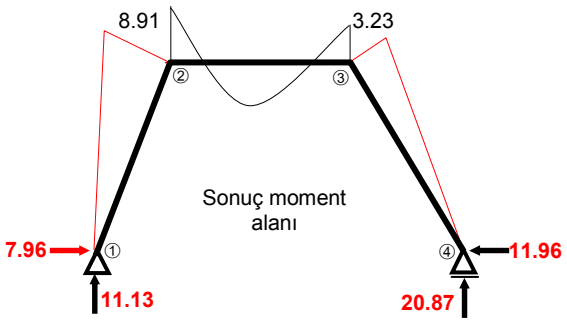
$$\delta_{10} = -\left[\frac{4.5\,x4x38.93}{3EI} + \frac{5\,x4x44.61}{3EI} + \frac{5\,x4x(38.93+44.61)}{2EI} + \frac{2x5\,x4(4x5^2/8)}{3EI} + \frac{5\,x4\,(4x3^2/8)}{3EI}\right] = -\frac{1563.05}{EI}$$

$$\delta_{11}\,X_1 + \delta_{10} = 0 \qquad X_1 = \frac{1563.05}{130.67} = 11.96\,t$$

M = M_0 + M_1 X_1

M_2 = 38.93 - 4 x (11.96) = -8.91 tm

M_3 = 44.61 - 4 x (11.96) = -3.23 tm

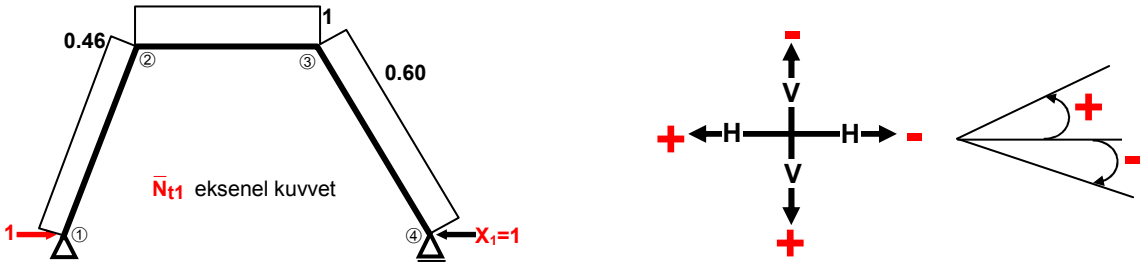


Kontrol,

$$M_i M_{sonuç} = \frac{8.91x4x4.5}{3} + \frac{5x4x8.91}{2} + \frac{5x4x3.23}{2} - \frac{2x5x4x(4x5^2/8)}{3} + \frac{5x4x3.23}{3} - \frac{5x4x(4x3^2/8)}{3} \cong 0$$

b. **t=30^o için δ_t** $EI\delta_t = \int \bar{N}_1 \alpha t\, dI$ olduğundan **N** kuvvet diyagramının çizilmesi gerekir.

c.



Eğik çubuklarda kesme kuvveti $Q = V\cos\alpha - H\sin\alpha$

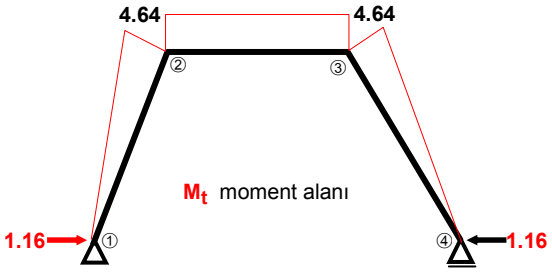
Eğik çubuklarda normal kuvvet $N = -(H\cos\alpha + V\sin\alpha)$

Bağıntıları ile hesaplanır. N_{41}= -(1 x cos 53.13) = -0.6 t N_{12}= -(1 x cos 62.75) = -0.46 t

$$EI\delta_t = EI\int \bar{N}_1\,\alpha\,t\,dl = 50000\,(10^{-5}x30)(-0.46x4.5 - 1x5 - 0.6x5) = -151$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1t} = 0 \qquad X_1 = \frac{151}{130.67} = 1.16\ t$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 \qquad M_2 = 0 - 4 \times (1.16) = -4.64\ tm \qquad M_3 = 0 - 4 \times (1.16) = -4.64\ tm$$

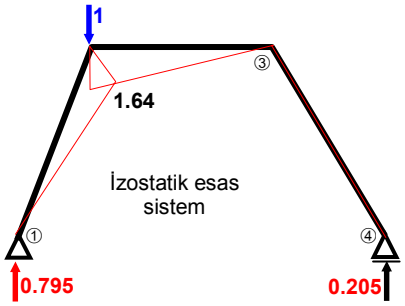


Kontrol,

$$\int\frac{M_1M_{sonuç}}{EI} + \int N_{1t}\,\varepsilon\,t\,dL = \frac{4\,x\,4.64\,x\,4.5}{3EI} + \frac{5\,x\,4\,x\,4.64}{3EI} + \frac{5\,x\,4.64\,x\,4}{EI} + 50000\,(10^{-5}x30)(-0.46x4.5 - 1x5 - 0.6x5) \cong 0$$

sonuçların doğruluğunun sağlamasının sağlandığı görülmektedir.

② düğümündeki düşey deplasmanın belirlenmesi için kısaltma teoremi uygulanarak verilen sistemin herhangi bir izostatik haline deplasman istenilen yönde bir birim yükleme yapılarak moment alanı çizilir. Bu moment alanı ile sıcaklıktan dolayı oluşan sonuç moment alanı çarpılarak istenilen deplasman elde edilir.



$$\delta_{2dü} = \frac{4.5\,x\,4.64x1.64}{3EI} + \frac{5\,x\,4.64x\,1.64}{2EI} = \frac{30.44}{EI} = \frac{30.44}{50000} = 0.00061m$$

Mesnet çökmelerinden oluşan moment

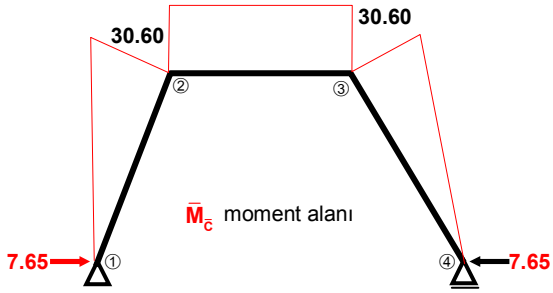
$\bar{C}$ Mesnet çökmesi birim yüklemeden dolayı oluşan mesnet tepkileri ile mesnet çökmesinin çarpımından oluşan iştir. Burada mesnet tepki kuvveti çökme aynı yönde ise yapılan yapılan iş pozitif değilse negatif olacağından,

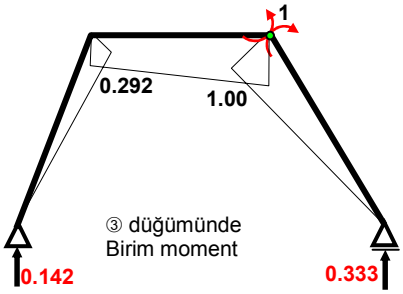
$$\bar{C} = EI[0.004 \times 0 + 0.02 \times 0 + 0.06 \times 1 - 0.04 \times 1] = 5.10^4\,[0.06 \times 1 - 0.04 \times 1] = 1000$$

olarak hesaplanır. Burada birim yüklemeden dolayı düşey bir mesnet tepki kuvveti oluşmadığından dolayı düşey yöndeki mesnet çökmelerinin yaptığı bir iş yoktur yani sıfırdır. Bundan dolayı oluşan hiperstatik bilinmeyen,

$$\delta_{11} X_1 = \sum \bar{C}c + \sum \bar{M}\phi \qquad \delta_{11} X_{1\bar{C}} - \delta_{1\bar{C}} = 0 \qquad X_{1\bar{C}} = \frac{1000}{130.67} = 7.65t$$

$M = M_1 X_{1C}$ **$M_2 = -4 \times 7.65 = 30.60$ tm** **$M_3 = -4 \times 7.65 = 30.60$ tm**





$$\int \frac{M_1 M_{sonuç}}{EI} = \bar{C} = \frac{4 \times 30.6 \times 4.5}{3EI} + \frac{5 \times 4 \times 30.6}{3EI} + \frac{5 \times 30.6 \times 4}{EI} = 999.60$$

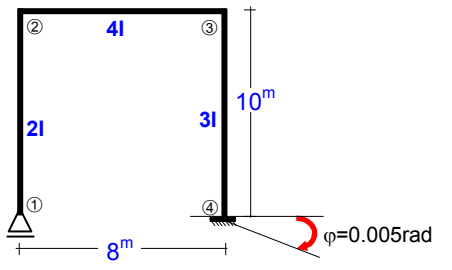
Kontrol,

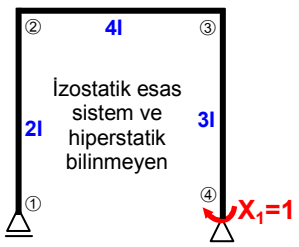
$$EI[0.004 \times 0 + 0.02 \times 0 + 0.06 \times 1 - 0.04 \times 1] = 5.10^4\,[0.06 \times 1 - 0.04 \times 1] = 1000 \cong 999.60$$

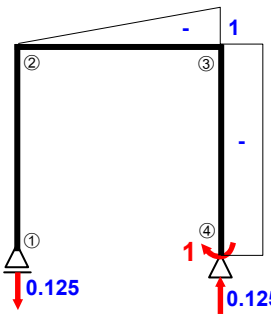
③ düğümündeki dönüşü bulmak için kısaltma teoremi kullanılarak sistemin herhangi bir izostatik haline birim bir moment uygulanır ve alanı çizilir. Bu çizilen moment alanı ile mesnet çökmeleri sonucu meydana gelen sonuç moment alanları çarpılarak ③ düğümünün dönüş açısı bulunur.

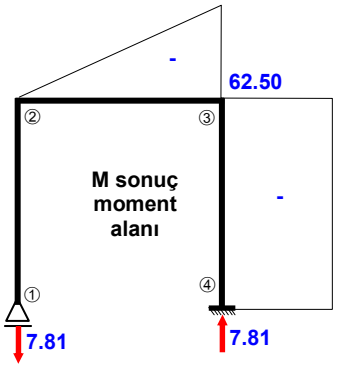
$$\varphi_3 = \frac{4.5 \times 0.292 \times 30.6}{3EI} + \frac{5 \times 30.6 \times (0.292 + 1)}{2EI} + \frac{1 \times 5 \times 30.6}{3EI} = \frac{163.241}{50000} = 0.00326\,\text{rad.}$$

ÖRNEK 21: Şekilde verilen sistemde ④ mesnedinin 0.005 rad. dönmesi halinde oluşacak moment alanının belirlenmesi. **(φ=0.005 rad EI=5.10^4 tm^2)**









$\delta_{11}=\frac{8x1x1}{3(4EI)}+\frac{10x1x1}{(3EI)}=\frac{4}{EI}$ $\delta_{11}X_1=\sum\bar{C}c+\sum\bar{M}\varphi$ $4X_1=\sum 0.00+\sum(X)1x0.005x50000$ $X_1=62.5tm$

Yukarıdaki bağıntıda mesnedin dönüş yönü ile birim moment aynı yönde olduğu için yapılan iş pozitif olarak alınmıştır.

$M = M_1 X_{1\varphi}$ M_{23} = 0 x 62.5 = 0.00 tm M_{32} =-1 x 62.5 = -62.50 tm M_{43} =-1 x 62.5 = -62.50 tm

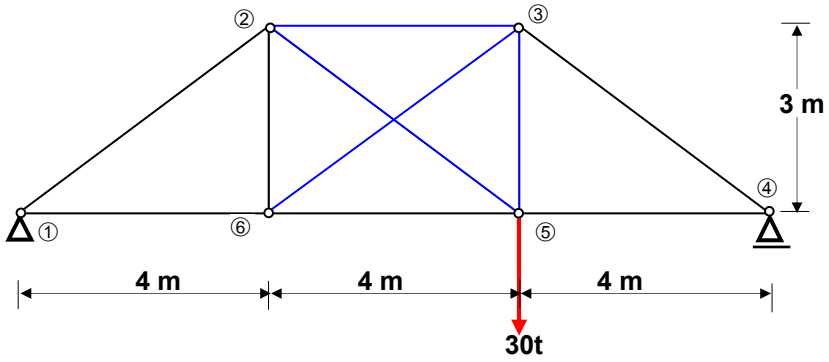
Kontrol, $\int\frac{M_1M_{sonuç}}{EI}=\sum\bar{M}\varphi=\frac{8\,x\,62.5\,x\,1}{3(4EI)}+\frac{10\,x\,1\,x\,62.50}{(3EI)}+\frac{5\,x\,30.6\,x\,4}{EI}=250$

$\sum(X)1x\,0.005\,x\,50000=250=250$

6.3. HİPERSTATİK KAFES SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Kafes sistemlerde diğer sistemlerde olduğu gibi içten ve dıştan veya her ikisi de birlikte olmak üzere hiperstatik olabilir. Hiperstatik kafes sistemlerin çözümü bir örnek üzerinde incelenerek aşağıda anlatılacaktır.

ÖRNEK 24: Şekilde verilen kafes kirişin çubuk kuvvetlerinin bulunması.

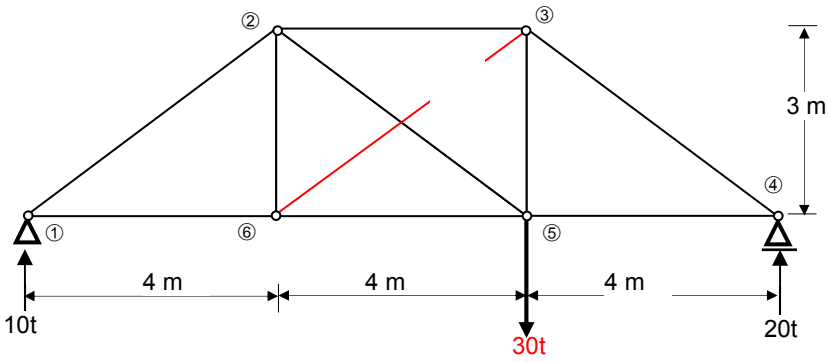


$\Sigma M_{①}=0$ dan ④ mesnedinin düşey tepkisi, 30 x 8 +– 12 $Y_{⑤}$ = 0 $Y_{④}$= 20 t

$\Sigma M_{④}=0$ dan ① mesnedinin düşey tepkisi, 30 x 4 – 12 $Y_{①}$ = 0 $Y_{①}$= 10 t

m : çubuk sayısı
n : düğüm sayısı
r : mesnet tepkisi sayısı
q = 2 n – r
Hiperstatiklik derecesi= m-q

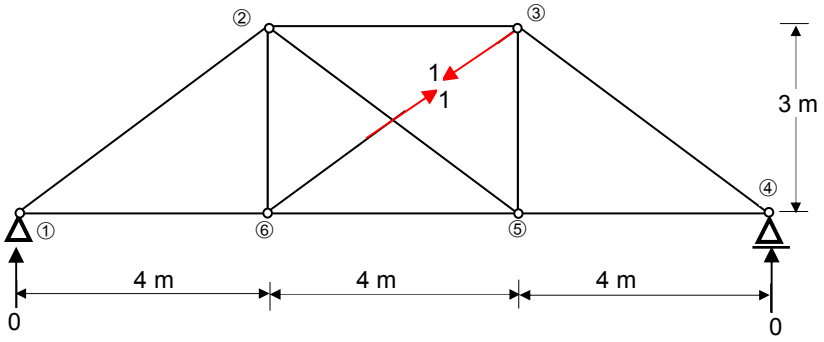
olmak üzere, kafes sistemin içten hiperstatiklik derecesi **= m-q = 10 – 2 x 6 + 3 = 1** olmaktadır. Yani sistem 1. Dereceden hiperstatiktir. Bu nedenle ilk etapta ③-⑥ çubuğunu kesiyoruz. Bu sistem mesnetleri itibariyle izostatik sistemdir.



Dış yükleme durumu

Hiperstatik kafes kirişlerin çözümü de diğer klasik sistemler gibi önce sistemin hiperstatikliği giderilerek izostatik hale getirilir. Bu izostatik sistem dış yüklere göre ve izostatiklik yaparken ki kaldırılan kesit

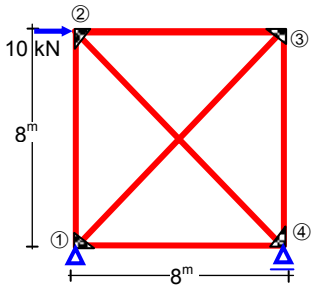
tesiri yerine birim yük veya moment uygulanarak sistem ayrı ayrı çözülür. Bu çözümler sonucu $N_{11}\,X_1 + N_{10} = 0$ süreklilik denklemi ve/veya yazılarak hiperstatik bilinmeyen veya bilinmeyenler bulunur. Hiperstatik bilinmeyenler bulunduktan sonra $N_i = N_o + N_1\,X_1 + N_2\,X_2 + \ldots\ldots$ denklemiyle çubuk kuvvetleri bulunur.



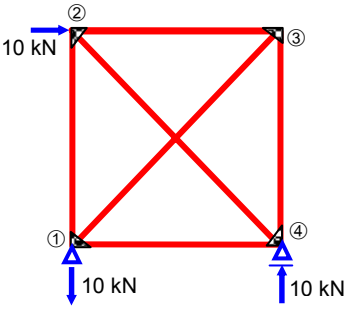
Birim yükleme durumu

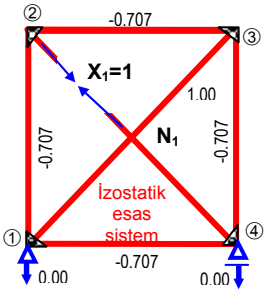
Çubuk	L (m)	N_0	N_1	$N_1 \times N_o L$	$N_1^2 L$	$X_1 = \frac{N_1 N_o L}{N_1^2 L}$	$N = N_0 + N_1 X_1$
①-②	**5**	-16.67	0.00	0.00	0.00		**-16.67**
①-⑥	**4**	13.34	0.00	0.00	0.00		**13.34**
②-③	**4**	26.67	-0.80	-85.36	2.56		**24.00**
②-⑤	**5**	16.67	1.00	83.35	5.00	$N_{11}\,X_1 + N_{10} = 0$	**20.02**
②-⑥	**3**	-10.00	-0.60	18.00	1.80		**-12.01**
③-④	**5**	-33.33	0.00	0.00	0.00		**-33.33**
③-⑤	**3**	20.00	-0.60	-36.00	1.80	$X_1 = \frac{62.69}{18.72} = 3.35$	**18.00**
③-⑥	**5**	0.000	1.00	0.00	5.00		**3.35**
④-⑤	**4**	26.67	0.00	0.00	0.00		**26.67**
⑤-⑥	**4**	13.34	-0.80	-42.68	2.56		**10.66**
Toplam				**-62.69**	**18.72**		

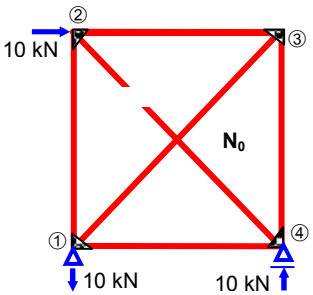
ÖRNEK 25: Şekilde verilen kafes kirişin çubuk kuvvetlerinin bulunması.



Çözüm: Sistem mesnet tepkileri itibari ile izostatiktir ve tepki kuvvetleri aşağıdaki şekilde bulunur







$\Sigma M_{①}=0$ dan ④ mesnedinin düşey tepkisi, $10 \times 8 + -8\, Y_{⑤} = 0$ $\quad Y_{④}= 10$ kN

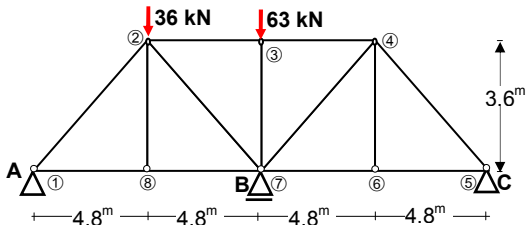
$\Sigma M_{④}=0$ dan ① mesnedinin düşey tepkisi, $10 \times 4 + 8\, Y_{①} = 0$ $\quad Y_{①}= -10$ kN

m : çubuk sayısı
n : düğüm sayısı
r : mesnet tepkisi sayısı
q = 2 n – r

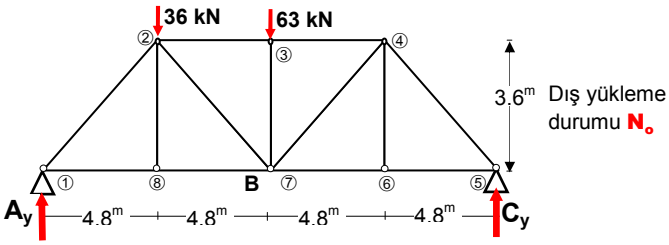
olmak üzere, kafes sistemin içten hiperstatiklik derecesi **= m - q = 6 – 2 x 4 + 3 = 1** olmaktadır. Yani sistem 1. Dereceden hiperstatiktir. Bu nedenle ilk etapta ③-⑥ çubuğunu kesilir. Bu sistem mesnetleri itibariyle izostatik sistemdir. **N_0** dış yüklerden oluşan çubuk kuvvetleri ve birim yüklemeden oluşan çubuk kuvvetleri **N_1** tabloda aşağıdaki tabloda hesaplanmıştır.

Çubuk	L (m)	N_0	N_1	$N_1 \times N_0 L$	$N_1^2 L$	$X_1 = N_1 N_0 L / [N_1^2 L]$	$N = N_0 + N_1 X_1$
①-②	**8**	0.00	-0.707	0.00	**4.00**	**$N_{11} X_1 + N_{10} = 0$**	5.00
①-③	**11.31**	14.144	1.00	159.97	**11.31**		7.07
①-④	**8**	0.00	-0.707	0.00	**4.00**		5.00
②-③	**8**	-10.00	-0.707	56.56	**4.00**		-5.00
②-④	**11.31**	0.00	1.00	0.00	**11.31**		-9.07
③-④	**8**	-10.00	-0.707	56.56	**4.00**	$X_1 = \frac{-273.09}{38.62} = -9.07$	-5.00
Toplam				**273.09**	**38.62**		

ÖRNEK 12: Kafes sistemin çubuk kuvvetlerini **B_y** mesnet tepkisini hiperstatik bilinmeyen seçerek bulunuz.



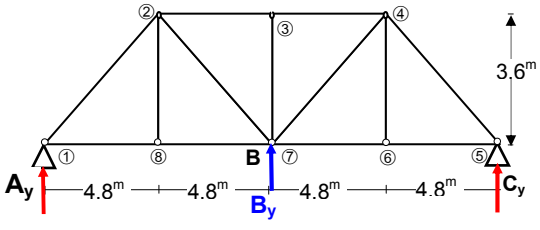
1.adım: İzostatik esas sistem aşağıdaki şekilde seçilir. İzostatik esas sistemi daha değişik olarak da seçmek mümkündür.



$\Sigma M_A=0$ dan A ve **C** mesnetlerinin düşey tepkileri bulunur.

$36 \times 4.8 + 63 \times 9.6 - 4 \times 4.8\, C_y = 0$ $\quad$ **C_y= 40.50 kN**
$36 \times 3 \times 4.8 + 63 \times 9.6 - 4 \times 4.8\, A_y = 0$ $\quad$ **A_y= 58.50 kN**

Bulunan bu mesnet tepkilerine göre izostatik esas sistemde verilen dış yüklerden ve B mesnedine yapılan birim yüklemeden dolayı çubuklarda oluşan eksenel kuvvetler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

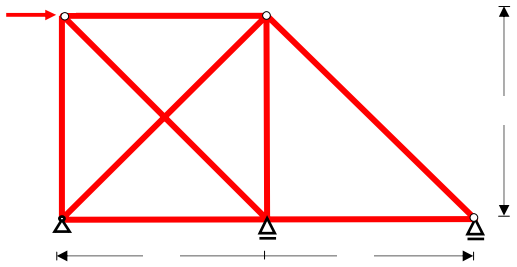


Bilinmeyen **B_y=1** yüklemesi

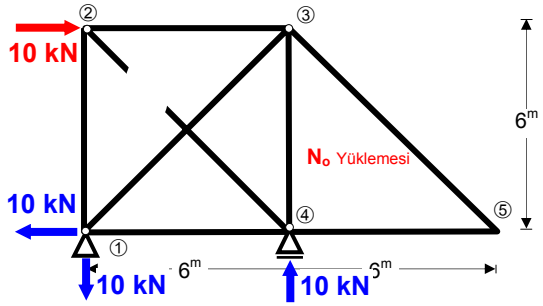
Çubuk	L (m)	A	P=L/A	N_1	$N_1 \times N_1 \times P$	N_0	$N_0 N_1 P$	$N_{SONUÇ} = N_0 + N_1 B_Y$	$\Sigma N_{SONUÇ} N_1 P=0$ [Kontrol]
①-⑧	**4.8**	**2.0**	2.400	-0.67	1.077	78.00	-125.47	**20.72**	-33.30
①-②	**6.0**	**2.5**	2.400	0.83	1.653	-97.52	-194.260	**-26.53**	-52.80
②-⑧	**3.6**	**1.3**	2.770	0.00	0.000	0.00	0.00	**0**	0
②-⑦	**6.0**	**2.5**	2.400	-0.83	1.653	37.52	-74.740	**-33.47**	66.70
②-③	**4.8**	**2.6**	1.846	1.33	3.266	-108.00	-265.181	**5.76**	14.10
③-④	**4.8**	**2.6**	1.846	1.33	3.280	-108.00	-265.181	**5.76**	14.10
④-⑦	**6.0**	**2.5**	2.400	-0.83	1.653	67.50	-134.460	**-3.49**	7.00
④-⑥	**3.6**	**1.3**	2.769	0.00	0.000	0.00	0.00	**0**	0
④-⑤	**6.0**	**2.5**	2.400	0.83	1.653	-67.50	-134.460	**3.49**	7.00
⑤-⑥	**4.8**	**2.0**	2.400	-0.67	1.077	54.00	-86.832	**-3.31**	5.30
⑦-⑥	**4.8**	**2.0**	2.400	-0.67	1.077	54.00	-86.832	**-3.31**	5.30
③-⑦	**3.6**	**1.3**	2.769	0.00	0.000	-63.00	0	**-63.00**	0
⑦-⑧	**4.8**	**2.0**	2.400	-0.67	1.077	78.03	-125.470	**20.72**	33.30
Toplam					**Σ17.454**		**Σ-1492.89**		Σ0.000

$$N_{11} B_Y + N_{10} = 0 \qquad 17.454\, B_Y + (-1492.89) = 0 \qquad B_Y = \frac{1492.89}{17.454} = 85.533$$

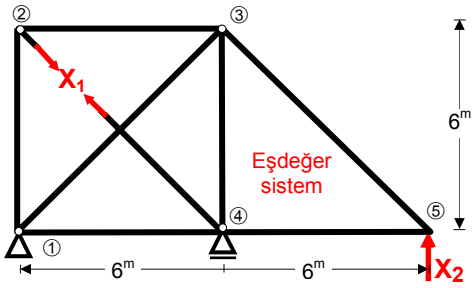
ÖRNEK 26: Şekilde verilen kafes sistemin çubuk kuvvetlerinin bulunması [KUVVET]



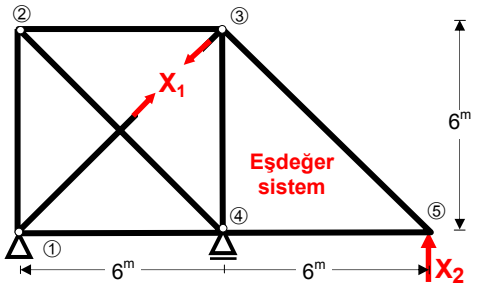
Çözüm: Sistem hem dıştan (mesnet tepkisi) hem de içten (çubuk kuvveti) hiperstatiktir. Mesnet tepkisinden oluşan izostatik esas sistem aşağıdaki şekilde seçilir ve dış yüklerden oluşan mesnet kuvvetleri bulunur.



Çubuk kuvvetinden dolayı olan hiperstatiklik aşağıdaki seçilen izostatik esas sistem aşağıdaki şekilde seçilebilir.

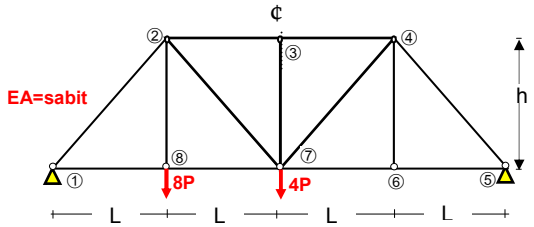


Bu sistem izostatik esas sistem olarak seçilir ise $\mathbf{X_2 = 1}$ yüklemesinde çubuk kuvvetleri bulunamayacağı için sistem yine hiperstatik olacaktır. Bunun için izostatik esas sistem aşağıdaki gibi seçilmiştir.

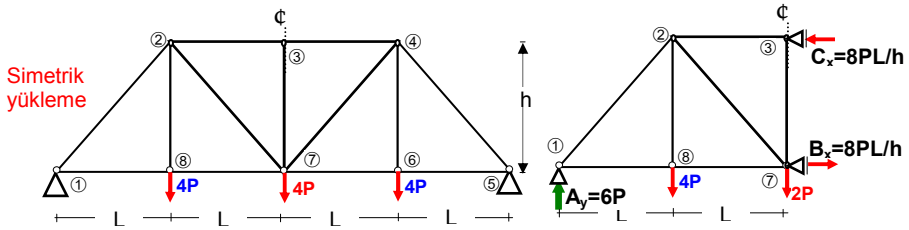


KAFES SİSTEMLERDE SİMETRİ ÖZELLİĞİ

Kafes sistemlerin simetrik olarak düzenlenmesi çözümünü diğer klasik sistemlerde olduğu gibi oldukça kolaylaştırır. Yüklerinde simetrik olması çözümü daha da kolay olmasını sağlar. Aşağıda simetrik olarak düzenlenmiş bir kafes sistemin simetri özelliğinden yararlanarak yarım sistem olarak çözümü sistem üzerinde yüklerin simetrik ve antimetrik olması durumları için yapılmaktadır.



Yukarıda verilen sistem önce aşağıdaki şekilde yüklemesi simetrik hala getirilir.



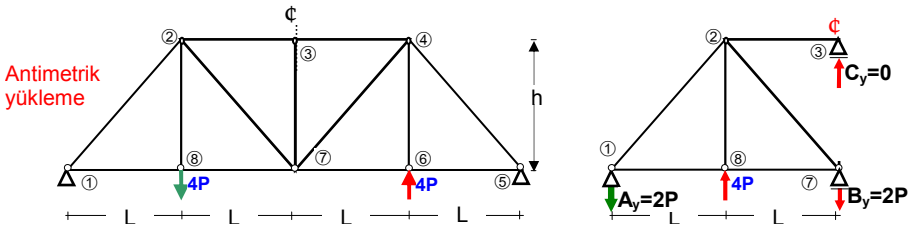
Simetrik sistem simetrik yükleme durumunda yarım sistemin orta noktası düşey deplasman yapacak şekilde aşağıdaki şekilde seçilerek mesnet tepki kuvvetleri bulunur. Bu durumda ③-⑦ çubuğunun çubuk kuvveti sıfırdır.

$\sum F_y = 0 \quad 4P + 2P - A_y = 0 \quad A_y = 6P \uparrow$

$\sum M_1 = 0 \quad hC_x - 4PL - 4PL = 0 \quad C_x = 8PL/h \leftarrow$

$\sum M_7 = 0 \quad hB_x - 4PL + 12PL = 0 \quad B_x = -8PL/h \rightarrow$

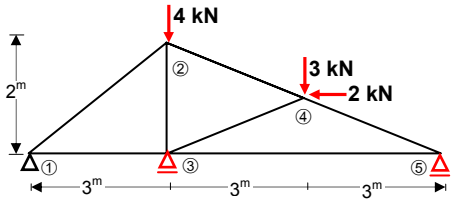
Sonra da sistemdeki yüklerin antimetrik olarak yüklenmesi sonucu sistemin çözümü aşağıdaki şekilde yapılır.



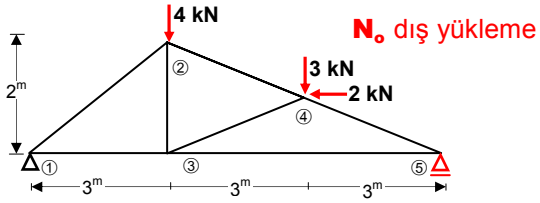
Yukarıdaki sistemin antimetrik yükleme olması durumunda yarım sistem olarak çözümü yapılır.

Sistemin Çubuk Kuvveti				
i Çubuk kuvveti	=	Simetrik yükleme durumundaki çubuk kuvveti	+	Antimetrik yükleme durumundaki çubuk kuvveti

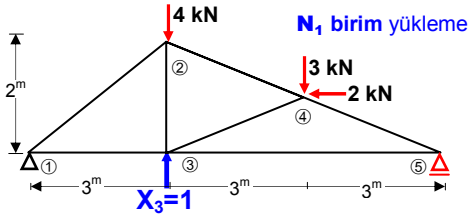
ÖRNEK 27:Şekilde verilen kafes kirişin çubuk kuvvetlerinin bulunması **(EA=2.10^4 t)**



3 mesnedinin düşey birleşeni hiperstatik bilinmeyen seçilerek sistemden kaldırılarak izostatik esas sistem elde edilir. Daha sonra 3 mesnedine birim yükleme yapılarak sistem çözülür.



N_o dış yükleme



N_1 birim yükleme

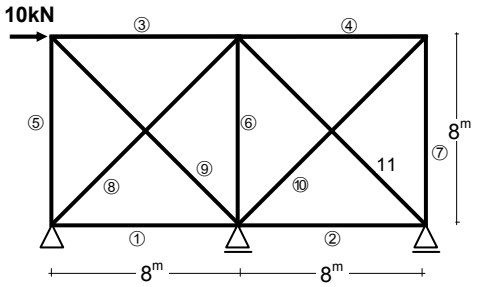
Çubuk	N_o	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_1\,\bar{N}_1$	L (m)	$\bar{N}_1 N_o$	N (sonuç)= 6.62 x N_1+N_o
1-2	-6.21	1.20	1.440	3.606	-7.452	**1.73**
2-3	1.17	-1.00	1.000	2.000	-1.170	**5.45**
1-3	7.17	-1.00	1.000	3.000	-7.170	**0.55**
3-4	-3.69	0	0	3.162	0	**-3.69**
3-5	10.67	-1.00	1.000	6.000	-10.670	**4.05**
4-5	-11.24	1.05	1.103	3.162	-11.802	**-3.94**
2-4	-5.45	1.05	1.103	3.162	-5.723	**1.85**
		Toplam	**6.646**		**43.987**	

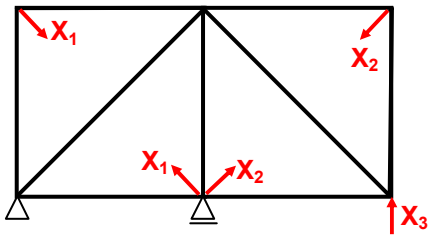
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_3 = \sum \frac{\bar{N}_1 N_0}{\bar{N}_1^2}$$

$$X_3 = \sum \frac{43.987}{6.646} = 6.62$$

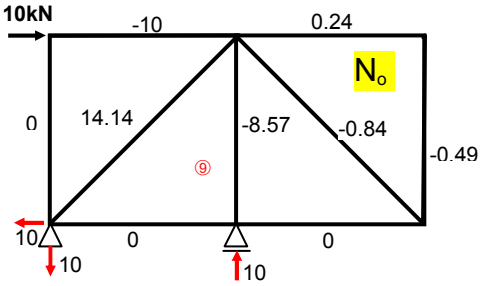
Örnek: Şekilde verilen hiperstatik kafes kirişin çubuk kuvvetler

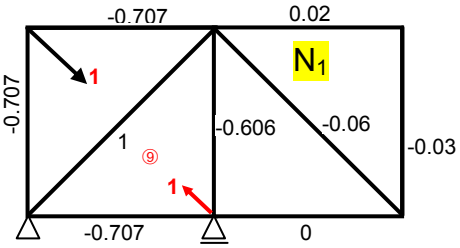


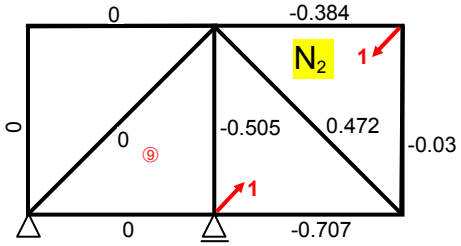


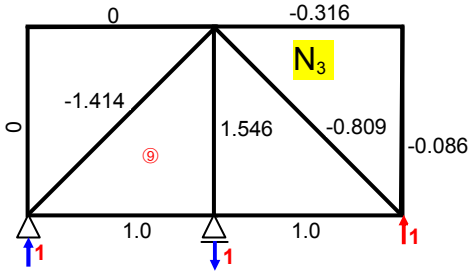
Çözüm: Kafes sistem 3. dereceden hiperstatiktir. Sistem önce izostatik hale getirilir.

Yukarıdaki izostatik sisteme dış yükler yüklenerek N_0 değerleri bulunur. Daha sonra her bir N değeri için sistem aşağıdaki şekilde ayrı ayrı çözülür.



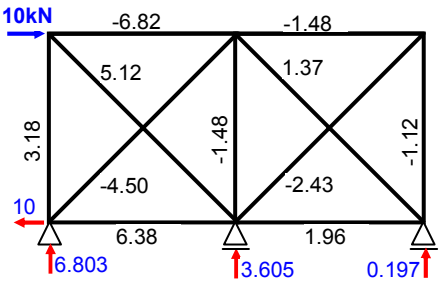






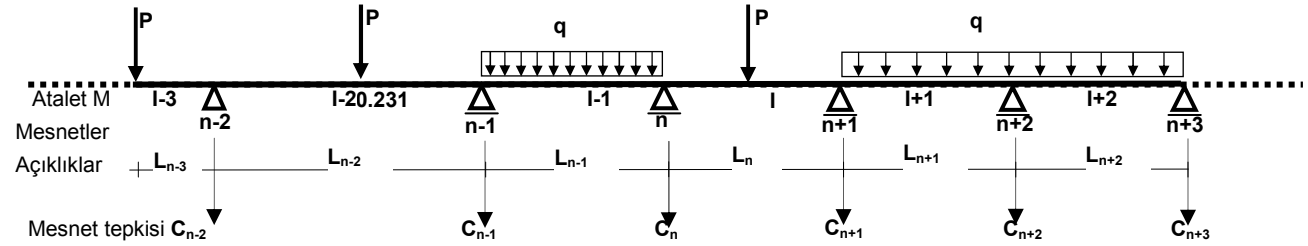
δ_{11}=40.153 δ_{10}=258.757 δ_{22}=22.939 δ_{33}=59.376

$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3$ bağıntısı kullanılarak sonuç çubuk kuvvetleri bulunur.

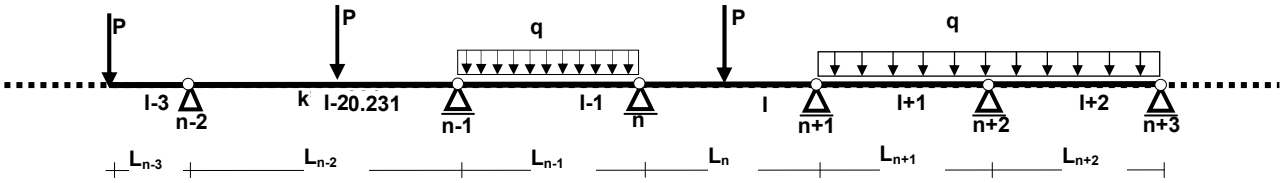


6.2 ÜÇ MOMENT DENKLEMİ (CLEPEYRON)

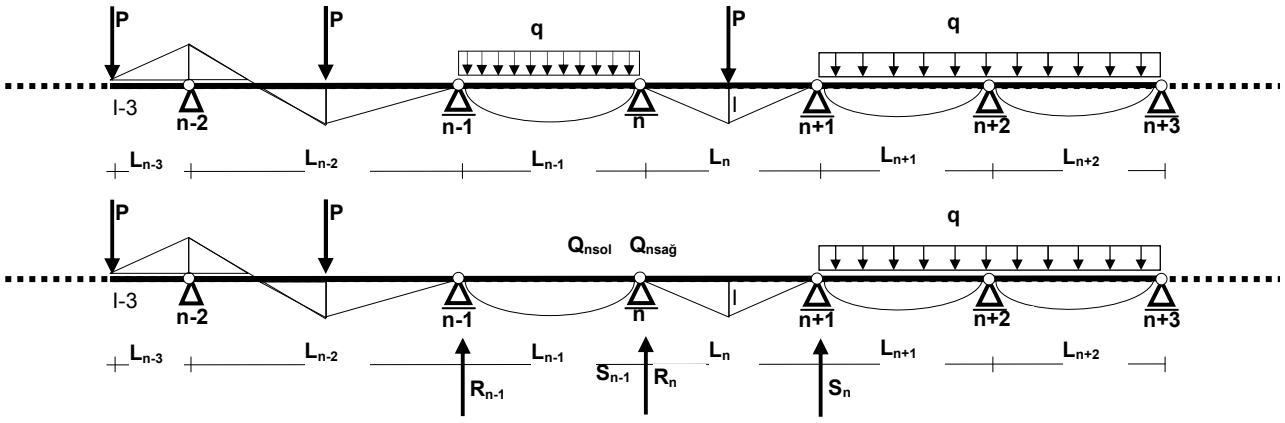
Mütemadi kirişler, genellikle orta mesnet sayısı kadar hiperstatik sistemlerdir. Şekilde verilen mütemadi kirişin moment alanının üç moment denklemi ile belirlenmesi için önce kuvvet metodunda olduğu gibi sistemin izostatik esas sistemi belirlenir.

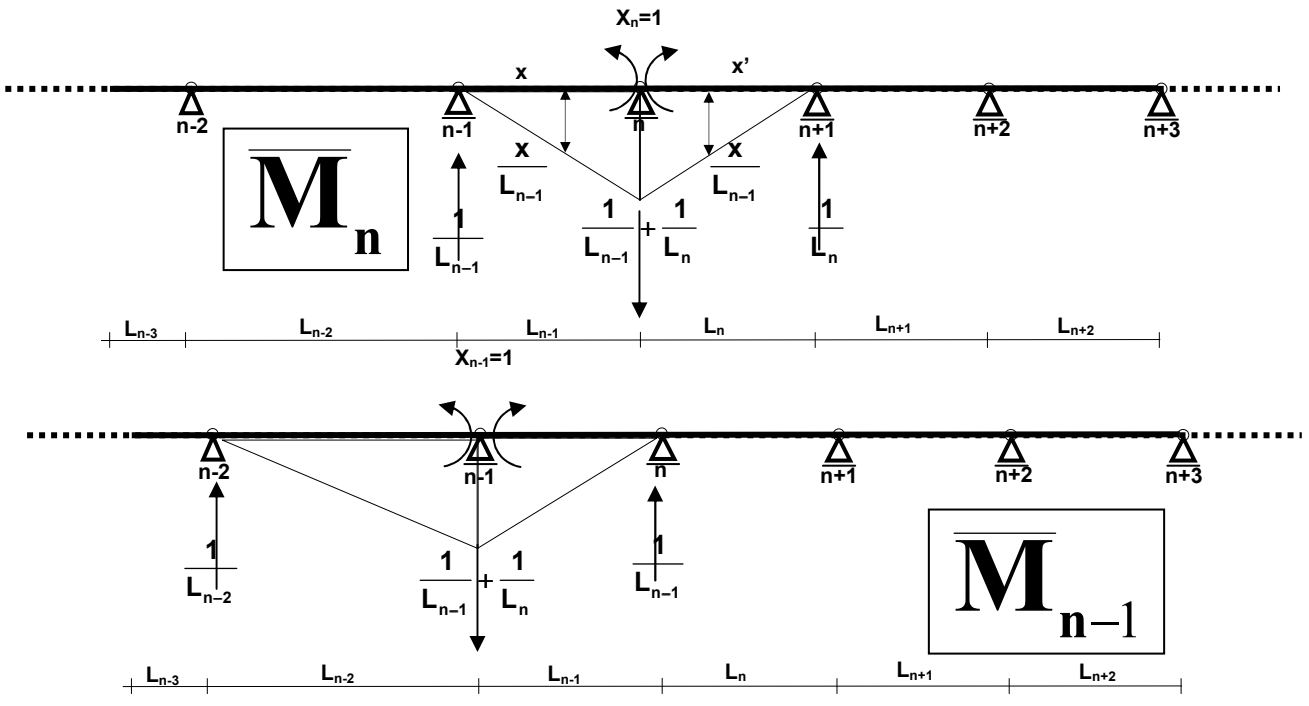


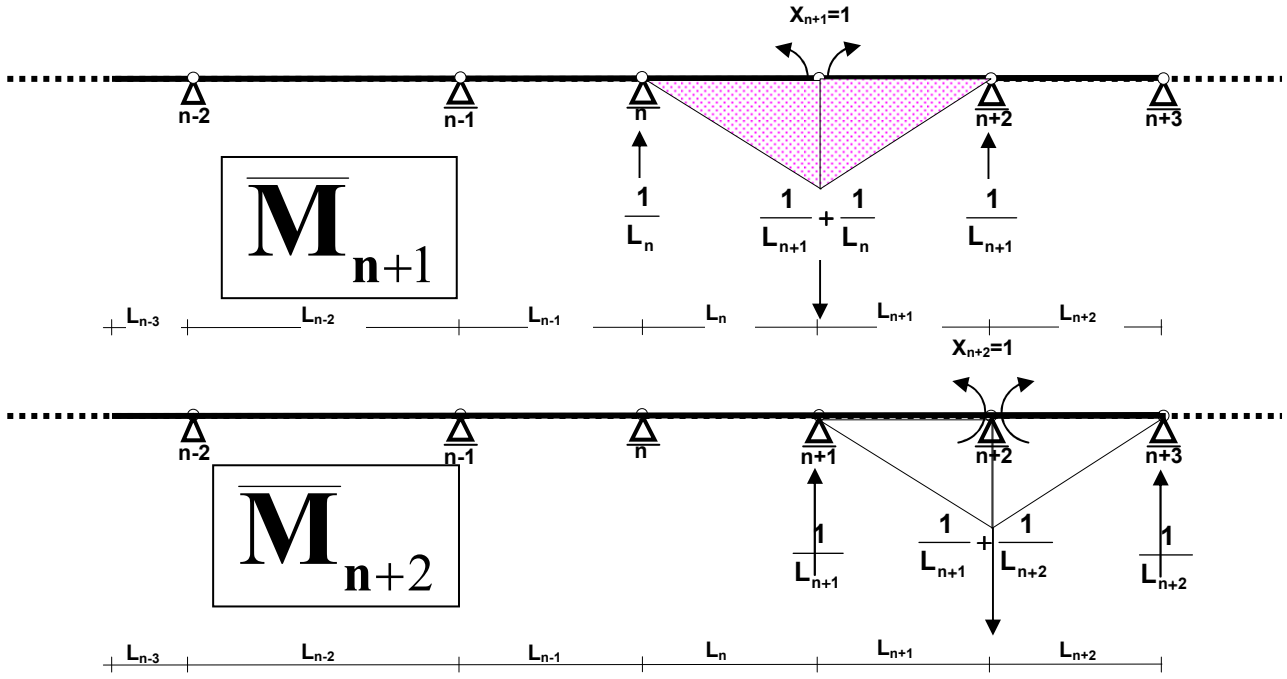
İzostatik esas sistem aşağıdaki gibi seçilir.



İzostatik esas sistemde dış yüklerden dolayı oluşan moment alanı **(M_o)** aşağıdaki şekilde çizilir.







Bu moment alanlarından sıfırdan farklı olanlar,

$$\delta_{n.n} \neq 0 \qquad \delta_{n.n+1} \neq 0 \qquad \delta_{n.n-1} \neq 0$$

diğer çarpımların hepsi sıfır olmaktadır. Mütemadi kiriş kaç açıklıklı olursa olsun izostatik esas sistemde sadece 3 tanesi çarpımdan sonuç verdiği için metodun adına **Üç Moment Denklemi** kabul edilmiştir. Ayrıca bu metodu bulan kişinin ismi olan **Clopeyron** olarak da kullanılmaktadır.

Genel denklem yazılacak olursa,

$$\delta_{n.n} X_n + \delta_{n.n+1} X_{n+1} + \delta_{n.n+2} X_{n+2} + \delta_{no} + \delta_{nt} = \sum \bar{C} c \quad \text{.....1}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemdeki bağıntılar,

$$\delta_{n.n} = \frac{1}{EI_{n-1}} \frac{L_{n-1}}{3} + \frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{3} \qquad \delta_{n.n+1} = \frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{6} \qquad \delta_{n.n+2} = \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{L_{n+1}}{6}$$

Isı etkisi $$\delta_{nt} = \int \frac{\alpha \Delta t \, \bar{M}_d}{d} = \alpha \Delta t \left(\frac{L_{n-1}}{2 d_{n-1}} + \frac{L_n}{2 d_n} \right)$$

Mesnet çökmesinin etkisi $$\sum \bar{C} c = \left(-\frac{C_n}{L_n} \right) + \left(\frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_{n+1}} \right) C_{n+1} - \frac{C_{n+2}}{L_{n+1}}$$

Şeklinde yazılır. Bu bağıntılar yukarıdaki denklem 1 de yerine yazılır ise.

$$\left[\frac{1}{EI_{n-1}} \frac{L_{n-1}}{3} + \frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{3} \right] X_n + \left[\frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{6} \right] X_{n+1} + \left[\frac{1}{EI_{n+1}} \frac{L_{n+1}}{6} \right] X_{n+2} + \left[\alpha \Delta t \left(\frac{L_{n-1}}{2 d_{n-1}} + \frac{L_n}{2 d_n} \right) \right] + \delta_{n0} = \sum \left[\left(-\frac{C_n}{L_n} \right) + \left(\frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_{n+1}} \right) C_{n+1} - \frac{C_{n+2}}{L_{n+1}} \right]$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı $\mathbf{6EI_{n-1}}$ ile çarpılır ise,

$$(6EI_{n-1})\left[\frac{1}{EI_{n-1}}\frac{L_{n-1}}{3}+\frac{1}{EI_n}\frac{L_n}{3}\right]X_n+\left[\frac{1}{EI_n}\frac{L_n}{6}\right]X_{n+1}+\left[\frac{1}{EI_{n+1}}\frac{L_{n+1}}{6}\right]X_{n+2}+\left[\alpha\Delta t\left(\frac{L_{n-1}}{2d_{n-1}}+\frac{L_n}{2d_n}\right)\right]+\delta_{n0}=(6EI_{n-1})\sum\left[\left(-\frac{C_n}{L_n}\right)+\left(\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}\right)C_{n+1}-\frac{C_{n+2}}{L_{n+1}}\right]$$

$$2\left[L_{n-1}+L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_n+\left[L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_{n+1}+\left[L_{n+1}\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}}\right]X_{n+2}+\left[3EI_{n-1}\alpha\Delta t\left(\frac{L_{n-1}}{d_{n-1}}+\frac{L_n}{d_n}\right)\right]+6EI_{n-1}\delta_{no}=(6EI_{n-1})\sum\left[\left(-\frac{C_n}{L_n}\right)+\left(\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}\right)C_{n+1}-\frac{C_{n+2}}{L_{n+1}}\right]$$

bağıntısı elde edilir. Bu uzun bağıntı düzenlenecek olur ise,

$$6EI_{n-1}\delta_{no}=(6EI_{n-1})\int_0^{L_n}\frac{\bar{M}_n X}{EI_n L_n}dx+\int_0^{L_{n+1}}\frac{\bar{M}_{n+1}X'}{EI_{n+1}L_{n+1}}dx'=(6)\int_0^{L_n}\frac{\bar{M}_n X I_{n-1}}{I_n L_n}dx+\int_0^{L_{n+1}}\frac{\bar{M}_{n+1}X'}{L_{n+1}}dx'=$$

$$6L_{n-1}\frac{1}{L_{n-1}}\int_0^{L_{n-1}}6M_{0\,n-1}\,x\,dx+L_n\frac{1}{L_n}\int_0^{L_1}6M_{0\,n}\,x'\frac{I_{n-1}}{I_n}dx'$$

R_n

Sonuç denklem;

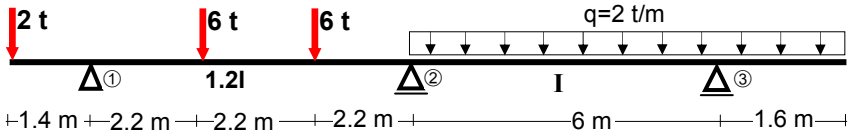
ClapeyronDenklemi

$$L_{n-1}X_{n-1}+2\left[L_{n-1}+L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_n+\left[L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_{n+1}=-S_{n-1}L_{n-1}-R_nL_n\frac{I_{n-1}}{I_n}$$

$$-3EI_{n-1}\alpha\Delta t\left[\frac{L_{n-1}}{d_{n-1}}+\frac{L_n}{d_n}\right]+6EI_{n-1}\left[\frac{C_{n-1}}{L_{n-1}}\left(\frac{1}{L_{n-1}}+\frac{1}{L_n}\right)C_n-\frac{C_{n+1}}{L_n}\right]$$

Yük terimleri, $S_{n-1}=\frac{6EI_{n-1}}{L_{n-1}}Q_{nsol}$ $\qquad R_n=\frac{6EI_n}{L_n}Q_{nsağ}$

ÖRNEK 1: Verilen mütemadi kirişin M alanın **üç moment denklemleri** kullanılarak elde edilmesi



Genel denklem: $L_1X_1+2(L_1+L_2\frac{I_1}{I_2})X_2+L_2\frac{I_1}{I_2}X_3=-S_1L_1-R_2L_2\frac{I_1}{I_2}$

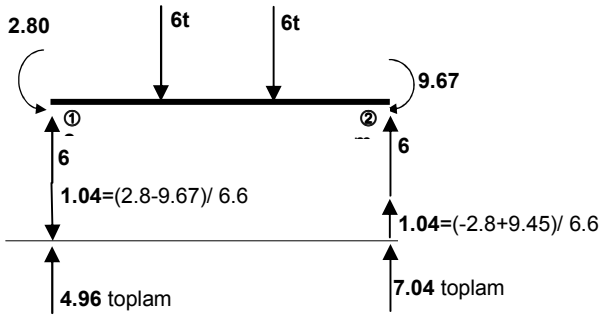
$X_①$= 2 x 1.4 = -2.8 tm **$X_③$= 2 x 1.6 x 8.8 =-2.56 tm**

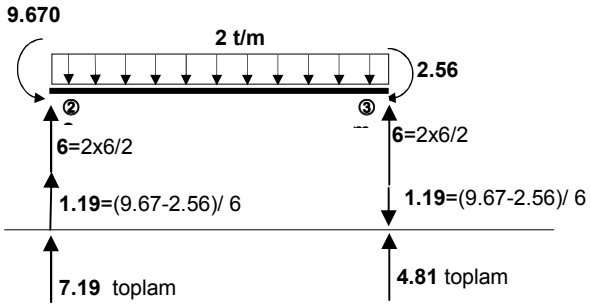
$S_①=\frac{2PL}{3}=\frac{2x6x6.6}{3}=26.4$ $\qquad R_②=\frac{qL^2}{4}=\frac{2x6^2}{4}=18$

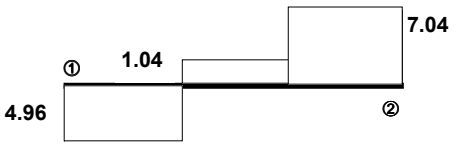
Bu değerler yukarıdaki genel denklemde yerlerine yazılır ve buradan bilinmeyen X_2 bulunur.

$$6.6(-2.8)+2(6.6+6\frac{1.2}{1})X_2+6\frac{1.2}{1}(-2.56)=-(26.4)6.6-(18)6\frac{1.2}{1}\quad X_2=-9.67$$

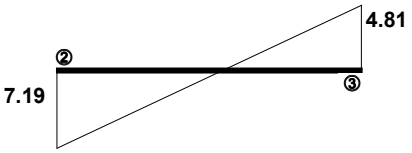
Kirişler çıkarılarak moment ve kesme kuvvet diyagramları aşağıdaki şekilde elde edilir.



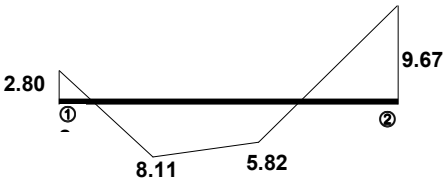


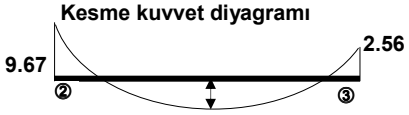


Kesme kuvvet diyagramı



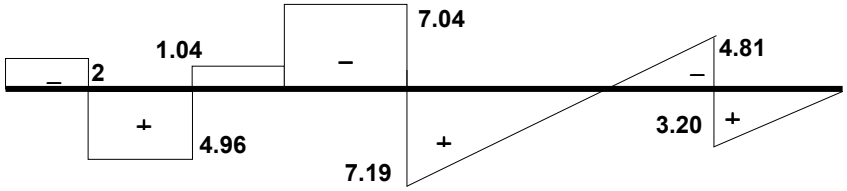
Kesme kuvvet diyagramı



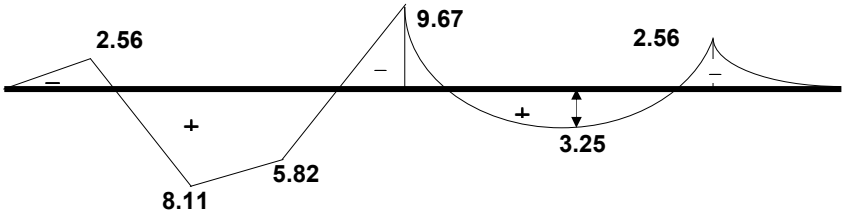


$$\max M_{aç} = \frac{7.19^2}{2x2} - 9.67 = 3.25\,tm$$

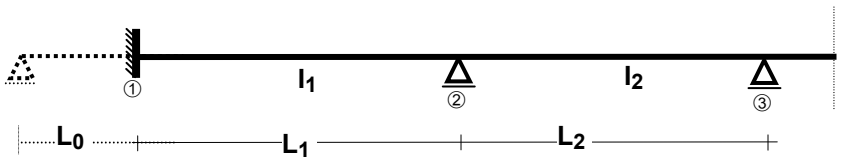
Kesme kuvvet diyagramı



Moment diyagramı

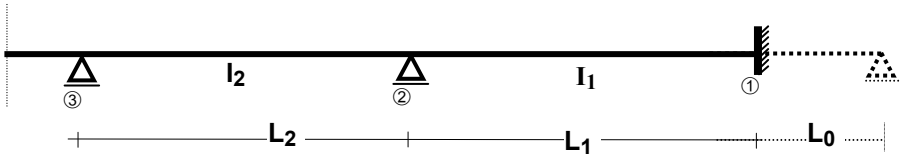


Sistemin ankastre mesnet ile başlaması durumunda yazılacak ilave denklem,



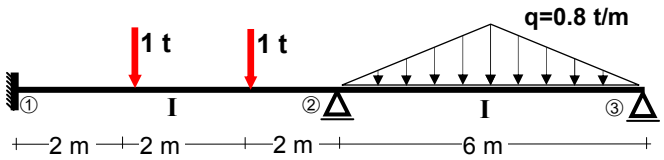
$$0 + 2X_1\left(0 + \frac{L_1}{I_1}\right) + X_2\left(\frac{L_1}{I_1}\right) = S_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right) \qquad 2X_1 + X_2 = -S_1$$

Sistemin ankastre mesnet ile son bulması durumunda yazılacak ilave denklem,



$$X_2\left(\frac{L_1}{I_1}\right)+2X_1\left(0+\frac{L_1}{I_1}\right)+0=R_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right) \qquad 2X_1+X_2=-R_1$$

ÖRNEK 2: Şekilde verilen mütemadi kirişin moment alanın **üç moment denklemleri** kullanılarak elde edilmesi



Genel denklem: $L_1X_1+2(L_1+L_2\frac{I_1}{I_2})X_2+L_2\frac{I_1}{I_2}X_3=-S_1L_1-R_2L_2\frac{I_1}{I_2}$

$S_①=R_①=\frac{2PL}{3}=\frac{2x1x6}{3}=4tm$ $\qquad S_②=R_②=\frac{5qL^2}{32}=\frac{5x0.8x4^2}{32}=2tm$

① düğümünde moment dengesi yazılırsa

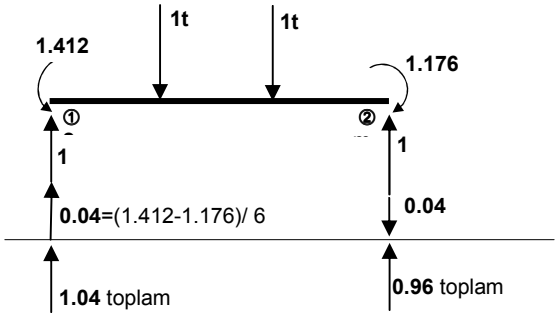
$6X_1+2(6+4)X_2=-6R_1-4S_2$

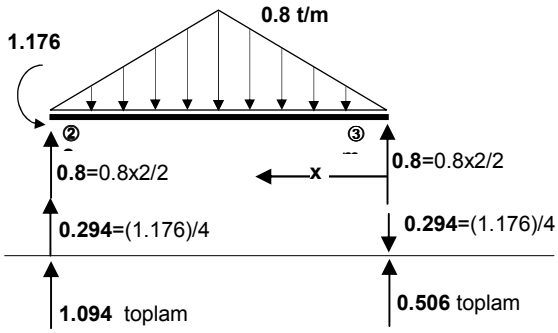
$6X_1+2(6+4)X_2=-6(4)-4(2)$ $\qquad 6X_1+20X_2=-32$

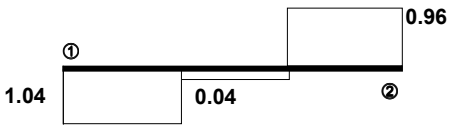
② düğümünde moment dengesi yazılırsa $\qquad 2X_1+X_2=-4$

Yukarıdaki iki denklemin ortak çözümünden, $\qquad X_1$= -1.412 tm $\qquad X_2$= -1.176 tm

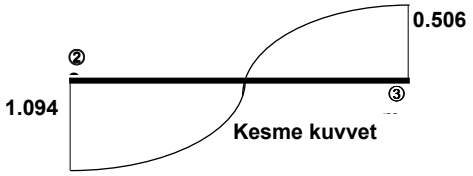
Kirişler çıkarılarak moment ve kesme kuvvet diyagramları aşağıdaki şekilde elde edilir.

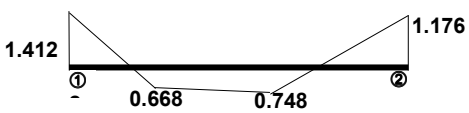


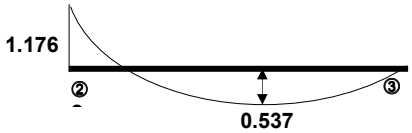




Kesme kuvvet diyagramı







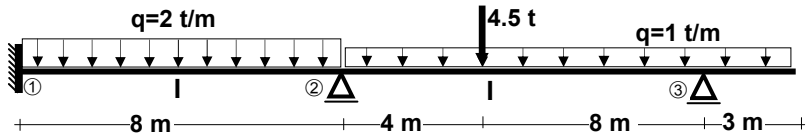
Maksimum açıklık momenti $0.506-\frac{0.8x^2}{2\ 2}=0 \quad x=1.59 \quad q_x=\frac{0.8}{2}1.59=0.636 t/m$

max$M_{aç}$= $0.506x1.59-\frac{0.636\,x\,1.59}{2}(\frac{1.59}{3})=0.537 tm$

ÖRNEK 3: Şekilde verilen mütemadi kirişin, **(**$E=2.10^6\ t/m^2$ $I=0.01\ m^4$ $\alpha=10^{-5}$)

a. Dış yükler altında moment alanın
b. **$\Delta t=20^oC$** sıcaklı değişiminden dolayı oluşan moment alanının (d_1=0.7 m d_2=0.9 m)
c. Mesnet çökmelerinden dolayı oluşan moment alanının (①=0.2 cm↓ ②=0.5 cm↓ ③=0.4 cm↓)

üç moment denklemleri kullanılarak elde edilmesi



Dış yükleme durumu için üç moment denklemleri,

① düğümünde $0+2\left[0+\frac{8}{I_1}\right]X_1+\left[\frac{8}{I_1}\right]X_2=0-\left[\frac{8}{I_1}.\frac{2x8^2}{4}\right] \quad R=\frac{qL^2}{4}$

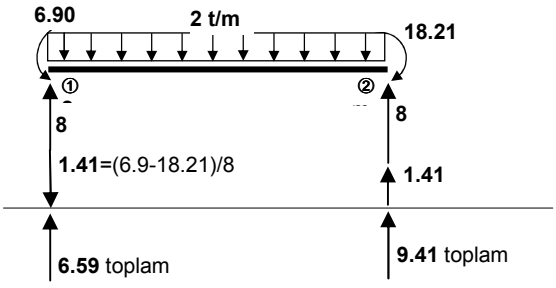
② düğümünde $\left[\frac{8}{I}\right]X_1+2\left[\frac{8}{I}+\frac{12}{2I}\right]X_2+\left[\frac{12}{2I}\right]X_3=-\left[\frac{8}{I}.\frac{2x8^2}{4}\right]-\left[\frac{12}{2I}\right]\left[\frac{1x12^2}{4}+\frac{4.5x4x8(12+8)}{12^2}\right]$

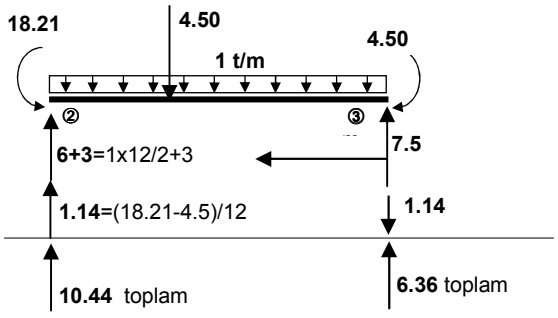
$\mathbf{X_3=-\frac{1x3^2}{2}=-4.5\,tm}$ olarak alınır ① ve ② düğüm denge denklemleri düzenlenerek aşağıdaki şekilde çözülerek bilinmeyenler bulunur.

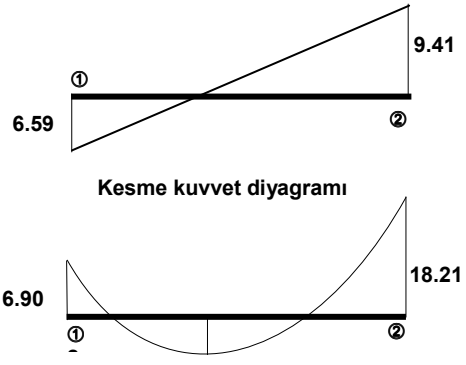
$16X_1+8X_2=-256 \qquad X_1=-6.90$

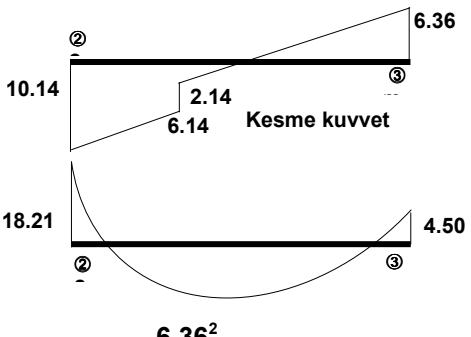
$8X_1+28X_2=-565 \qquad X_2=-18.21$

Açıklık momentlerinin bulunması,









$$\max M_{aç}=\frac{6.59^2}{2\,x\,2}-6.90=3.96$$

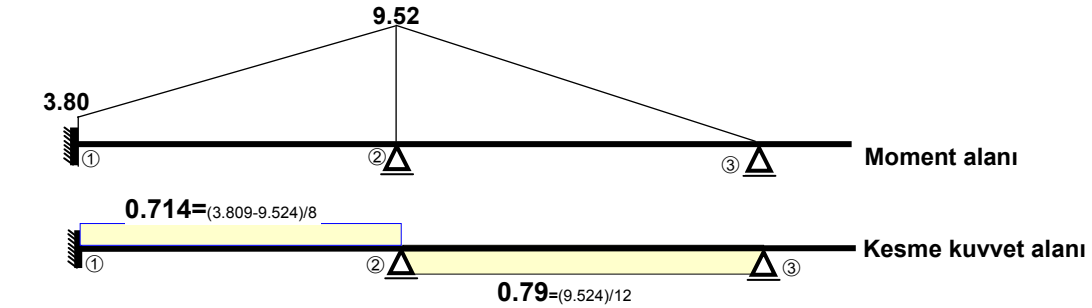
$$\max M_{aç}=\frac{6.36^2}{2\,x\,1}-4.5=15.72\,tm$$

b. Sıcaklı değişimi ① $0+2\left[0+\frac{8}{I_1}\right]X_1+\left[\frac{8}{I_1}\right]X_2=-3xExax\Delta t\frac{L}{d}$

② $\left[\frac{8}{I}\right]X_1+2\left[\frac{8}{I}+\frac{12}{2I}\right]X_2+\left[\frac{12}{2I}\right]X_3=-3xExax20x\left[\frac{8}{0.7}+\frac{12}{0.9}\right]$

$16X_1+8X_2=-137.24$ $X_1=-3.809tm$

$8X_1+28X_2=-297.10$ $X_2=-9.524\,tm$



c. Mesnet çökmesi hali için çözüm ① $0+2\left[0+\frac{8}{I_1}\right]X_1+\left[\frac{8}{I_1}\right]X_2=-6E\left[\frac{1}{800}+\frac{0.005-0.002}{8}\right]$

② $\left[\frac{8}{I}\right]X_1+2\left[\frac{8}{I}+\frac{12}{2I}\right]X_2+\left[\frac{12}{2I}\right]X_3=-6E\left[\frac{0.002}{8}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)0.005+\frac{0.004}{12}\right]$ $16X_1+8X_2=104.40$ $X_1=6.69tm$

$8X_1+28X_2=55.20$ $X_2=0.13tm$

