

(اتجاه تغير دالة)

1 | تذكير حول المعادلات والمتراجحات:

1. دراسة إشارة العبارة $ax + b$ مع $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$:لدراسة إشارة العبارة $ax + b$ يجب إيجاد قيم العدد x حيث:

$$1/ ax + b = 0 \text{ (تندعم)} \quad 2/ ax + b > 0 \text{ (موجبة)} \quad 3/ ax + b < 0 \text{ (سالبة)}$$

1/ تندعم إذا وفقط كان: $ax + b = 0$ ومنه

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

نقول أن العبارة $ax + b$ تندعم من أجل $x = -\frac{b}{a}$

وإشارة العبارة $ax + b$ تتعلق بإشارة العدد a كما هو موضح في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax + b$		عكس إشارة a	نفس إشارة a

مثال 1: دراسة إشارة العبارة: $3x + 4$.

$$3x + 4 = 0 \text{ يكافئ } 3x = -4 \text{ ومنه } x = -\frac{4}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
إشارة $ax + b$	-	0	+

إشارة العبارة $3x + 4$ تلخص في الجدول الموالي:2. دراسة إشارة العبارة $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$:

1.2 | المعادلات من الدرجة الثانية:

■ نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول حقيقي x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ ، c ، b أعداد حقيقية ثابتة معلومة و $a \neq 0$.

2.2 | حل المعادلات من الدرجة الثانية:

مبرهنة: لتكن في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و Δ مميزها حيث $\Delta = b^2 - 4ac$ الجدول أدناه يوضح مراحل حل معادلة $ax^2 + bx + c = 0$.

تحليل $ax^2 + bx + c$	حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هي	إذا كان	مبرهنة
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta > 0$	
$a(x - x_1)^2$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$\Delta = 0$	
لا يمكن تحليل العبارة	لا توجد حلول	$\Delta < 0$	

ملاحظة: في حالة $\Delta = 0$ نقول أن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلاً مضاعفاً $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

3.2 | المتراجحات من الدرجة الثانية:

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية ذات مجهول حقيقي x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية $ax^2 + bx + c \leq 0$ ، $ax^2 + bx + c < 0$ ، $ax^2 + bx + c \geq 0$ ، $ax^2 + bx + c > 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة معلومة و $a \neq 0$.

4.2 | حل متراجحات من الدرجة الثانية:

مبرهنة: يؤول حل متراجحة من الدرجة الثانية إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود

إشارة العبارة $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$:

$ax^2 + bx + c$ ثلاثي حدود مع $a \neq 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزه.

• $\Delta < 0$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ لا تقبل حلولاً من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $ax^2 + bx + c$ هي من نفس إشارة a .

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	نفس إشارة a	0	نفس إشارة a

• $\Delta = 0$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلاً مضاعفاً x_1 .

وإشارة $ax^2 + bx + c$ موضحة في الجدول المقابل:

• $\Delta > 0$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين متميزين x_1 و x_2 .

وإشارة $ax^2 + bx + c$ موضحة في الجدول التالي: (نعتبر $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	عكس إشارة a	إشارة a

أمثلة:

1. دراسة إشارة $x^2 + 2x - 2$:

حل المعادلة $x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \\ c=-2 \end{array} \right. \text{ لدينا } \Delta = b^2 - 4ac \text{ حيث } \Delta = 12 \text{ ومنه } \Delta > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فالمعادلة $x^2 + 2x - 2 = 0$ تقبل حلين هما: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} = -1 - \sqrt{3}$ و

$$x_2 = -1 + \sqrt{3}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $x^2 + 2x - 2 = 0$ هي: $S = \{-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\}$

إشارة $x^2 + 2x - 2$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 2$	+	0	0	+

لدينا $a = 1 > 0$ ومنه:

تطبيق 1: أدرس إشارة العبارات الموالية:

$$2x^2 + 3x + 4 \quad | \quad -16x^2 + 8x - 1 \quad | \quad x^2 - x - 6$$

2 | تذكر حول الدوال المشتقة:

1. الدالة المشتقة لدالة (تعريف)

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

■ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد x_0 من D_f ، نقول إنها قابلة للاشتقاق على المجال D_f .

■ إن الدالة التي تفرق بكل عدد x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على D_f ويرمز لها بالرمز: f' . ونكتب:

$$f': x \rightarrow f'(x)$$

2. الدوال المشتقة لبعض الدوال المألوفة:

نعتبر الدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

ولتكن a, b و k أعداد حقيقية، نلخص الدالة المشتقة للدالة f في الجدول أدناه:

الدالة f	مجموعة التعريف	قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة $f'(x)$	مثال تطبيقي
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 2$ أي: $f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$ أي: $f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$f(x) = 4x - 8$ أي: $f'(x) = 4$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = x^2$ أي: $f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$f(x) = x^3$ أي: $f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^7$ أي: $f'(x) = 7x^6$
$f(x) = x^3 + x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2 + 2x$	$f(x) = x^3 + 4x$ أي: $f'(x) = 3x^2 + 4$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{3}{x}$ أي: $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$f(x) = \frac{1}{x^8}$ أي: $f'(x) = -\frac{8}{x^9}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$ أي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

3. عمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة
--------	------------------------	----------------

$f' + g'$	يأخذ الشرط حسب كل دالة	$f + g$
$f'g + g'f$		$f \times g$
$\lambda f'$		$\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R})$
$\frac{f'}{f^2}$		$\frac{1}{f}$
$\frac{f'g - g'f}{g^2}$		$\frac{f}{g}$

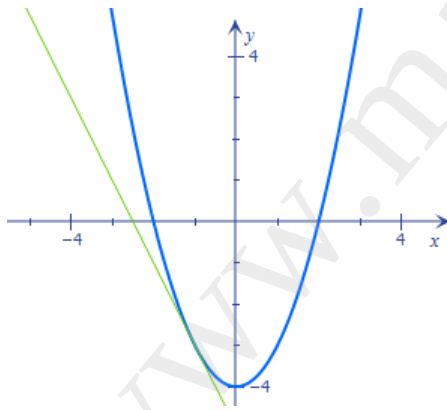
أمثلة:

- ✓ الدالة $f(x) = 3x - 5$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = 3$.
- ✓ الدالة $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = -4x + 8$.
- ✓ الدالة $f(x) = \frac{1}{3x-2}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = -\frac{3}{(3x-2)^2}$.
- ✓ الدالة $f(x) = \frac{x-1}{3x-2}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = \frac{1(3x-2) - 3(x-1)}{(3x-2)^2}$.

4. مماس لمنحن عند نقطة منه :

f دالة معرفة على مجال D من $\mathbb{R}$ و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 من D و $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند x_0 فإن المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_0, f(x_0))$ ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يسمى مماس المنحنى (C) عند النقطة A . معادلته هي: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

مثال:



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x^2 - 4$.
كتابة معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$.
معادلة المماس (T) من الشكل: $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$
لدينا: $f'(x) = 2x$
ومنه: $f'(-1) = -2$ و $f(-1) = -3$.
ومنه معادلة المماس (T) هي: $y = -2(x + 1) - 3$ أي $y = -2x - 5$.
 (T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A .

تطبيق 2: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 2x$

أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $a = 1$

5. اتجاه تغير دالة:

لتكن دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة.
■ إذا كانت f' موجبة تماما على المجال D فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D .

■ إذا كانت f' سالبة تماماً على المجال D فإن الدالة f متناقصة تماماً على المجال D .

■ إذا كانت f' معدومة على المجال D فإن الدالة f ثابتة على المجال D .

ملاحظات:

- هذه المبرهنة تبقى صحيحة إذا انعدمت f' من أجل قيم معزولة من D .
- إذا كانت دالة f إما متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً على مجال D نقول أن الدالة f رتيبة تماماً على المجال D .

مثال:

لتكن الدالة $f: x \rightarrow x^2 - 1$ متزايدة تماماً على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty, 0]$ لأن $f'(x) = 2x$ و: $f'(x) > 0$ إذا كان $x > 0$ وكذلك: $f'(x) < 0$ إذا كان $x < 0$.

مثال:

الدالة $f(x) = x^2 - 8x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = 2x - 8$.
 $f'(x) = 0$ يكافئ $2x - 8 = 0$ أي $x = 4$ وعليه إشارة f' موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

وعليه الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty, 4]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[4, +\infty[$.

تطبيق 3: أدرس اتجاه تغير الدالة f في كل حالة مما يلي:

$$(1) f(x) = -3x^2 + 3x - 2$$

$$(2) f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$$

(الدوال كثيرات الحدود)

1 | الدوال كثيرات حدود من الدرجة الأولى:

1. تعريف: نسمي دالة كثير حدود من الدرجة الأولى كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = ax + b$ حيث $a \neq 0$ و b عدنان حقيقيان ثابتان مع $a \neq 0$.

2. اتجاه التغير:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل $f(x) = ax + b$ لدينا:

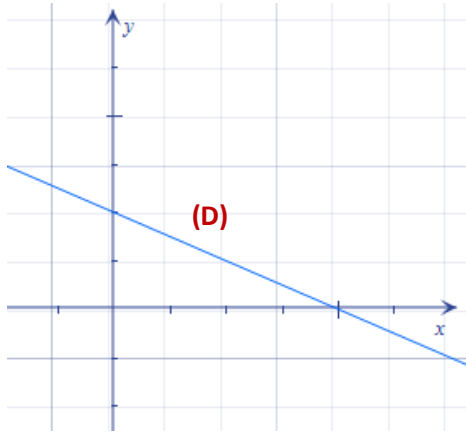
✓ إذا كان $a < 0$ (سالب) فإن f متناقصة تماما.

✓ إذا كان $a > 0$ (موجب) فإن f متزايدة تماما.

✓ إذا كان $a = 0$ (معدوم) فإن f ثابتة.

3. التمثيل البياني لدالة كثير حدود من الدرجة الأولى

تمثيل دالة كثير حدود من درجة 1: $f(x) = ax + b$ هو عبارة عن مستقيم (D) ذات معامل التوجيه a ويشمل النقطة $B(0; b)$ وهي الترتيب إلى المبدأ. و $y = ax + b$ هي معادلة المستقيم (D) .



4. نهايات دالة كثير حدود من الدرجة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax)$$

و هكذا يكون لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = +\infty \text{ فإن: } a > 0 \text{ (موجب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = -\infty \text{ فإن: } a < 0 \text{ (سالب)}$$

أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

2 | الدوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية:

1. تعريف: نسمي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ و b, c ثلاثة أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

2. اتجاه التغير:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل $f(x) = ax^2 + bx + c$

لدراسة تغيرات الدالة f يكفي دراسة إشارة الدالة المشتقة لها f'

$$\text{حيث } f'(x) = 2ax + b$$

3. نهايات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2)$$

و هكذا يكون لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty \text{ فإن: } a > 0 \text{ (موجب)}$$

✓ إذا كان $a < 0$ (a سالب) فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$

أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2 + 8x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-7x^2 + 8x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-7x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

3 | الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

1. تعريف: نسمي دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$ و b, c, d أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

2. اتجاه التغير:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

لدراسة تغيرات الدالة f يكفي دراسة إشارة الدالة المشتقة لها f'

$$\text{حيث } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

3. نهايات دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3)$$

و هكذا يكون لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty \quad \text{فإن: } a > 0 \text{ (موجب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty \quad \text{فإن: } a < 0 \text{ (سالب)}$$

أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-12x^3 - x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-12x^3) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-12x^3 - x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-12x^3) = -\infty$$

جدول ملخص لنهايات الدوال المرجعية

النهايات	الدالة	مجموعة التعريف	التسمية
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$	$x \rightarrow x$	$\mathbb{R}$	الخطية
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$	$x \rightarrow x^2$	$\mathbb{R}$	مربع
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$	$x \rightarrow x^3$	$\mathbb{R}$	مكعب

أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) = +\infty \quad \text{وعليه } g(x) = -5x^3 + 2x^2 + x - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \quad \text{وعليه } f(x) = 3x^2 - x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{إذن:}$$

تطبيق 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. عين نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أنه من أجل كل x من $\square$ لدينا: $f(x) = (x-2)(x+1)^2$

■ استنتج إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4. أرسم المنحنى (C_f)

الحل:

1. حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة المشتقة: $f'(x) = 3x^2 - 3$ ولدينا: $\square$ قابلة للاشتقاق على

دراسة إشارة $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } 3x^2 - 3 = 0 \text{ أي } x^2 = \frac{3}{3} = 1 \text{ ومنه } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

وبما أن $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية إشارته موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

وعليه: الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-\infty, -1]$ و $[1, +\infty]$ ومتناقصة تماماً على المجال $[-1, 1]$.

جدول التغيرات للدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)=0$	-4	$+\infty$	

3. إثبات أنه من أجل كل x من $\square$ لدينا: $f(x) = (x-2)(x+1)^2$

$$(x-2)(x+1)^2 = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 = x^3 - 3x - 2 = f(x)$$

من أجل كل x من $\square$ لدينا:

$$f(x) = (x-2)(x+1)^2$$

استنتج إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل. معناه $y = 0$ و $y = f(x)$ إذا $y = 0$ معناه $f(x) = 0$

$$(x-2)(x+1)^2 = 0 \text{ يكافئ } f(x) = 0$$

$$\text{أي } x - 2 = 0 \text{ أو } x + 1 = 0 \text{ ومنه } x = 2 \text{ أو } x = -1$$

وعليه نستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما $A(2, 0)$ و $B(-1, 0)$.

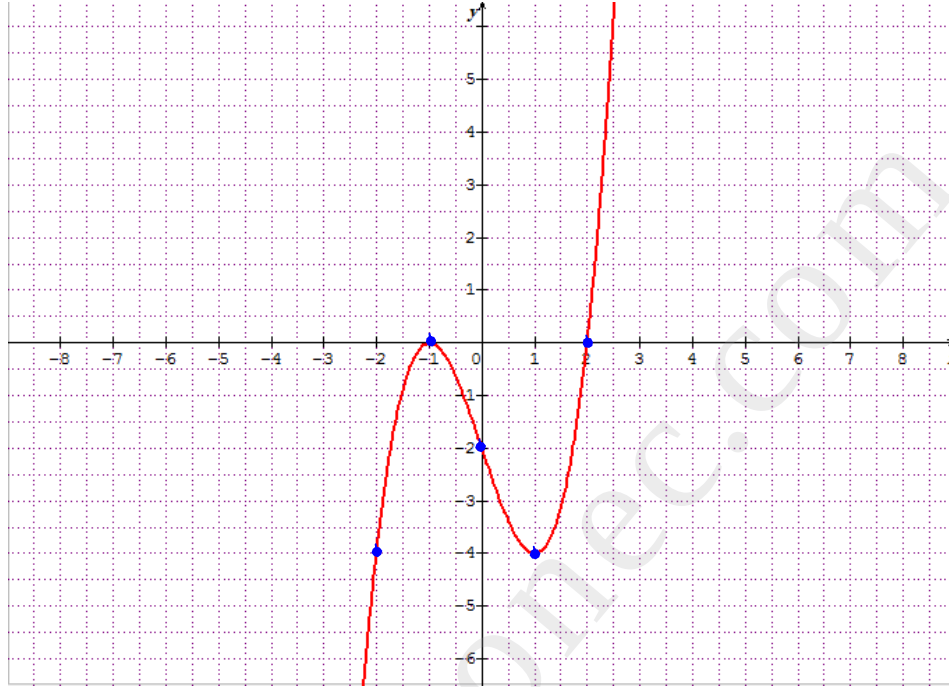
4. رسم المنحنى (C_f)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0

لرسم المنحنى (C_f) ننشئ بعض النقاط المساعدة باستعمال الجدول الموالي:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 2 = -8 + 6 - 2 = -4$$

التمثيل البياني:



تطبيق 2:

f و g دالتين معرفتان على $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3 + x + 1$ و $g(x) = x^3$ وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين.

(1) أحسب نهايتي كل من الدالتين f و g عند $+\infty$ و $-\infty$

(2) أثبت أن الدالتين f و g متزايدتان تماماً على $\mathbb{R}$.

(3) أنجز جدول تغيرات كل من f و g

(4) عين الوضعية النسبية للمنحنين (C_f) و (C_g) .

(5) أرسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.

الحل:

① حساب نهايتي كل من الدالتين f و g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

② إثبات أن الدالتين f و g متزايدتان تماماً على $\mathbb{R}$:

• الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = 3x^2 + 1$ و $g'(x) = 3x^2$.

• دراسة إشارة $f'(x)$ و $g'(x)$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) > 0$ لأن $\Delta = -12 < 0$. وعليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
ولدينا: $g'(x) = 0$ يكافئ $3x^2 = 0$ أي $x = 0$.
ومنه إشارة $g'(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	$\circ$	+

وعليه: g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

③ جدول تغيرات كل من f و g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	$\circ$	+
$g(x)$	$-\infty$	$\circ$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

④ تعيين الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g) :

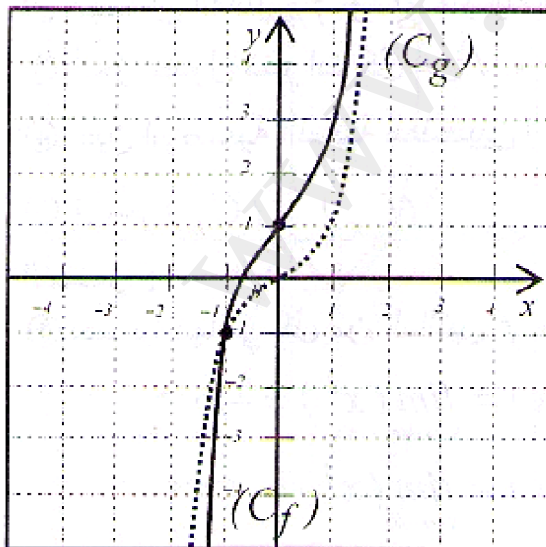
• من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x) - g(x) = x^3 + x + 1 - x^3 = x + 1$

• دراسة إشارة $f(x) - g(x)$:

إشارة $f(x) - g(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	$\circ$	+

وعليه: - المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطة $A(-1, -1)$.



- في المجال $]-\infty, -1[$: (C_f) تحت (C_g)

- في المجال $]-1, +\infty[$: (C_f) فوق (C_g)

⑤ رسم (C_g) و (C_f) :

لرسم (C_f) و (C_g) ننشئ بعض النقط المساعدة

باستعمال الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-9	-1	1	3	11
$g(x)$	-8	-1	0	1	8

(الدوال التناظرية)

1 | الدوال التناظرية:

1. تعريف: نسمي دالة تناظرية كل دالة f عرفة ب: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية مع $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ أي $D_f =]-\infty, -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}, +\infty[$

2. نهايات دالة تناظرية:

مبرهنة: الدالة f هي دالة تناظرية حيث $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ و $c \neq 0$ لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{c} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{c}$$

معناه نهاية دالة تناظرية g عند $+\infty$ أو $-\infty$ من نهاية الحد ذات الدرجة الأكبر بالبسط على الجد ذات الدرجة الأكبر بالمقام.

نتيجة: نعرف: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-a}\right) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-a}\right) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x+4} = \frac{3}{2} \text{ وكذلك } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x+4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{2-3x} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \text{ وكذلك } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{2-3x} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x}{7-21x} = \frac{7}{-21} = -\frac{1}{3} \text{ وكذلك } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{7-21x} = \frac{7}{-21} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x-3}{x-2}\right) = \frac{7}{1} = 7 \text{ وكذلك } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x-3}{x-2}\right) = \frac{7}{1} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{7x-3}{x-2}\right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{7x-3}{x-2}\right) = +\infty \text{ وكذلك}$$

2 | المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب:

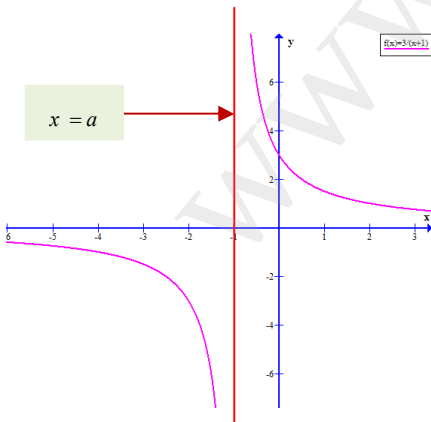
a عدد حقيقي.

المستقيم (D) ذو المعادلة $x = a$ يسمى مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب للمنحنى (C_f) يعني:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

ملاحظة: إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فان المنحنى (C_f) يُحصر في شريط يشمل المستقيم ذا المعادلة $x = a$ من أجل x قريب قدر الإمكان من a .

التفسير الهندسي:



مثال: g دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ كما يلي: $g(x) = -\frac{3}{x+2}$ و (C_g) منحناها

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(-\frac{3}{x+2}\right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(-\frac{3}{x+2}\right) = -\infty$$

إذن المنحنى (C_g) يقبل مستقيم مقارباً يوازي محور الترتيب وهو المستقيم ذو المعادلة $x = -2$

3 | المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل:

b عدد حقيقي.

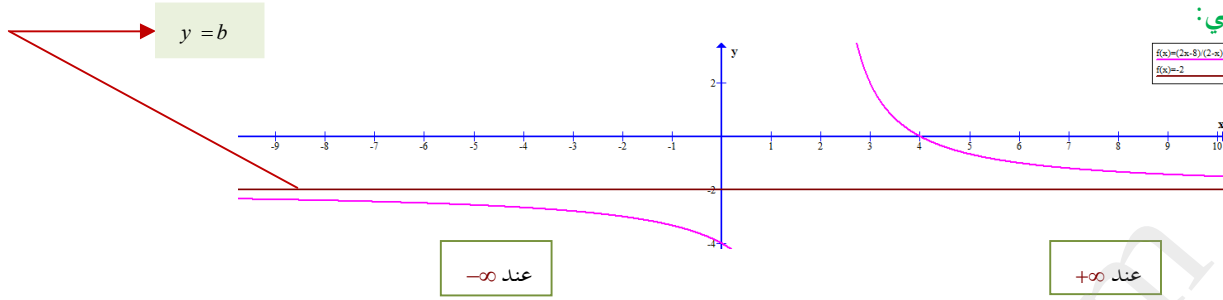
المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = b$ يسمى مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل للمنحنى (C_f) يعني:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

ملاحظة: إذا كان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور

الفواصل

التفسير الهندسي:



مثال: h دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ كما يلي: $h(x) = \frac{2x+7}{4-x}$ و (C_h) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+7}{4-x} \right) = -2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{4-x} \right) = -2$$

لدينا: إذن المستقيم (C_g) ذو المعادلة $y = -2$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل للمنحنى (C_h) .

ملاحظة هامة:

يسمى التمثيل البياني للدالة التناظرية $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ مقطعاً زائداً معادلتي مستقيمي المقاربن هما: $y = \frac{a}{c}$ و $x = -\frac{d}{c}$

تطبيق 3:

g دالة معرفة بـ: $g(x) = \frac{x+2}{x}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- أدرس تغيرات الدالة g . أحسب نهاية g عن حدود مجموعة تعريفها.
- عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -1.
- عين معادلات المستقيمت المقاربة الممكنة.
- أرسم (C_g) و (T) .

الحل:

1. دراسة تغيرات الدالة $g(x) = \frac{x+2}{x}$.

مجموعة التعريف: $D_g = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

حساب الدالة المشتقة: $f'(x) = \frac{x-x-2}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	$+\infty$	-
$g(x)$	1	$+\infty$	1

بما أن $\frac{-2}{x^2} < 0$ فإن الدالة متناقصة تماماً على D_g

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$$

2. كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة -1 .

$$y = g'(-1)(x+1) + g(1-)$$

$$= -2x - 2 - 1$$

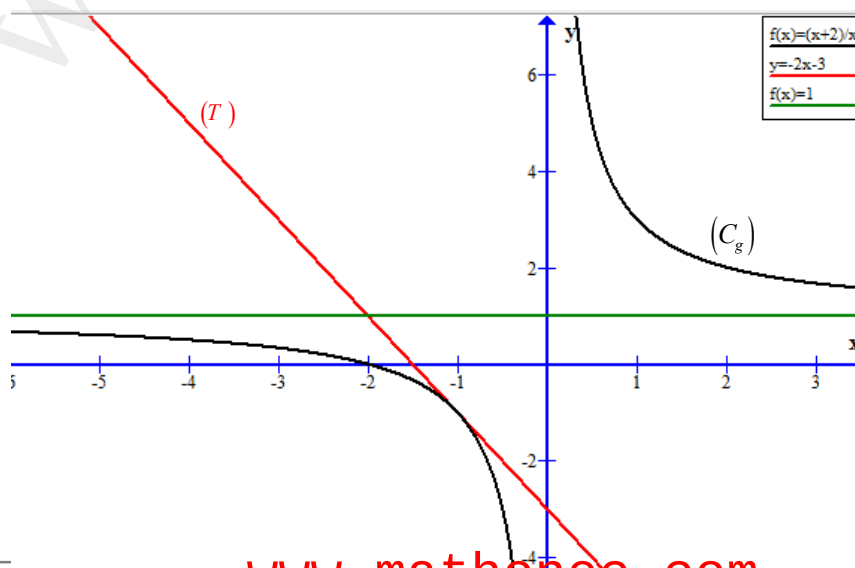
ومنه معادلة المماس (T) هي $y = -2x - 3$

3. تعيين معادلات المستقيمات المقاربة الممكنة:

✓ بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب

✓ بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل

4. تمثيل (Δ) و (C_f) .



مخطط دراسة دالة (ملخص عام)

لدراسة دالة نتبع الخطوات التالية:

1. تعيين مجموعة التعريف.
2. دراسة شفعيه أو دوريتها قصد تقليص مجموعة دراستها.
3. حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.
4. دراسة اتجاه تغير الدالة:
 - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
 - دراسة إشارة الدالة المشتقة واستنتاج اتجاه التغير
5. تشكيل جدول تغيرات الدالة. (تلخيص دراسة التغير في جدول)
6. تحديد المستقيمات المقاربة.
7. التمثيل البياني للدالة:
 - رسم المستقيمات المقاربة
 - تمثيل النقاط المساعدة: النقاط الحدية، نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات.
 - رسم المماسات عند القيم الحدية وأخرى مطلوبة في النص.

تذكير بشفعية دالة:

تعريف: لتكن f دالة معرفة على D_f من $\mathbb{R}$ ، لدينا:

- نقول أن f دالة زوجية إذا كان D_f متناظر بالنسبة إلى 0 وكان لكل x من D : $f(-x) = f(x)$.
- نقول أن f دالة فردية إذا كان D_f متناظر بالنسبة إلى 0 وكان لكل x من D : $f(-x) = -f(x)$.

أمثلة: دراسة شفعية الدالتان: $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = -\frac{2}{x}$.

1. تعيين مجموعة التعريف: لدينا $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ وكلاهما متناظر بالنسبة إلى 0
2. دراسة شفعية كلا الدالتين:

$$f \text{ زوجية لأن: } f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x)$$

$$g \text{ فردية لأن: } g(-x) = -\frac{2}{(-x)} = -\left(\frac{2}{x}\right) = -g(x)$$

ملاحظات:

- لدراسة شفعية دالة يجب أن تكون مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة لـ 0.

■ للبرهان أن دالة ليست زوجة ولا فردية يكفي إيجاد قيمة a واحدة من مجموعة التعريف حيث:

$$h(x) = x + 3 \text{ مثلا: } f(-a) \neq -f(a) \text{ أو } f(-a) \neq f(a)$$

$$h(-x) = -x + 3 \neq h(x) \neq -h(x) \text{ ليست فردية ولا زوجية}$$

www.mathonec.com