Teoría de Control
Ajuste de Controladores Industriales

Guillermo Ávalos Arzate
Marcela Adriana Montúfar Navarro
Fernando Elí Ortiz Hernández
Gustavo Villalobos Ordas

Instituto Politécnico Nacional
Mexico

Primera Edición

TEORÍA DE CONTROL, AJUSTE DE CONTROLADORES INDUSTRIALES

DIRECTORIO

LIC. MIGUEL ÁNGEL CORREA JASSO
Director General

LIC. JAIME A. VALVERDE ARCINIEGA
Secretario General

DR. JOSÉ ENRIQUE VILLA RIVERA
Secretario Académico

DR. BONIFACIO EFRÉN PARADA ARIAS
Secretario de Apoyo Académico

DRA. MARÍA DE LA LUZ PANIAGUA JIMÉNEZ
Secretaria de Extensión y Difusión

LIC. RICARDO HERNÁNDEZ RAMÍREZ
Secretario Técnico

LIC. FRANCISCO GUTIÉRREZ VELÁZQUEZ
Secretario Ejecutivo de la Comisión de Operación
y Fomento de Actividades Académicas

ING. MANUEL QUINTERO QUINTERO
Secretario Ejecutivo del Patronato
de Obras e Instalaciones

Teoría de control, ajuste de controladores industriales

Guillermo Ávalos Arzate
Marcela Adriana Montúfar Navarro
Fernando Elí Ortiz Hernández
Gustavo Villalobos Ordaz

Instituto Politécnico Nacional
— México —

Teoría de control, ajuste de controladores industriales

Primera edición: 2002

D.R. © 2002 Instituto Politécnico Nacional
Dirección de Publicaciones
Tresguerras 27, 06040 México DF

ISBN 970-36-0006-9

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Índice

Introducción 11

Terminología y simbología de ingeniería de control automático

¿Qué significa medición y control automático? 13
Velocidad de respuesta 15
Respuesta de elementos primarios 16
Exactitud en la medición 17
Error estático y reproducibilidad 17
  Error dinámico 17
  Cambio sinusoidal 19
Carga de proceso 20
Fuentes de cambio de carga 20
Capacitancia 21
Tipos de capacidad y capacitancia 22
Capacitancia térmica 23
Capacitancia volumétrica 23
Capacitancia en peso 23
Capacitancia eléctrica 23
Capacitancia y retraso en el proceso 24
Capacitancia grande y capacitancia pequeña 24
Resistencia 26
Resistencia y retraso del proceso 26
Potencial 27
Tiempo muerto y retraso en procesos 27

Teoría de control automático

Teoría de control automático 29
Modos de control automático 31
Control de dos y múltiples posiciones 31
Control de dos posiciones sin diferencial 32
Control de dos posiciones con diferencial 32
Control de tres posiciones 33
Control flotante de una o varias velocidades 34
Control flotante de velocidad proporcional 37
Control proporcional puro o control modulante 39
Control proporcional con reajuste automático (*reset* o integral) 45
Control proporcional con reajuste (*reset*) y acción derivada (*rate*) 50

Principios de control automático

Controlador automático 55
Efecto de espacio muerto 56
Espacio muerto 56
Tiempo muerto 56
Posicionadores de válvulas 56
Válvula de control 57
Circuito de control automático 57
Instrumentos de medición y control 58
Variable manipulada 59
Variable controlada 59
Punto de ajuste 59
Velocidad de acción correctiva 60
Estabilidad 60
Características estáticas 61
Exactitud 61
Errores de calibración 63
Resolución de la sensibilidad 64
Tiempo muerto 64
Histéresis 65

Remanencia 65
Linearidad e histéresis en los sistemas de control 66
Características de un proceso 67
Proceso sin autorregulación 69
Ganancia del proceso 70

Ajuste de controladores

Modelos matemáticos 75
Relación de flujo con respecto
a la señal de salida del controlador 78
Rango de flujo respecto al nivel del tanque 79
Comportamiento del recipiente *B* 82
Función dinámica 84
Procesos dinámicos 88
Transformadas de Laplace 88
Pico o impulso unitario 93
Ecuaciones diferenciales 93
Teorema de sustitución 98
Traslación o retraso de una función 99
Retraso de una función 100
Multiplicación 101
Teorema de valor inicial y final 101
Resumen 102
Control proporcional 106
Control proporcional con reajuste automático (*reset*) 107
Respuesta del sistema a un cambio de carga a disturbio
en el proceso 109

Bibliografía 119

Introducción

Durante la última década México ha realizado esfuerzos tendientes a mejorar la calidad de los productos que se manufacturan en todas las ramas de la industria con el fin de poder competir dentro y fuera del país en contra de productos extranjeros.

Se han formado por todas partes comités de mejora continua, grupos de aseguramiento de la calidad y círculos de control de calidad; sin faltar una comisión nacional de la calidad.

Todas las pláticas, conferencias, seminarios, cursos, folletos, manuales, libros, videos y otros auxiliares que se han implementado para tener productos de calidad han sido útiles en empresas de servicio, principalmente, porque en las compañías donde se tienen procesos con diferentes variables a controlar como en las industrias: química, petroquímica, petrolera, energética, alimentaria entre otras, no se podrán obtener productos de calidad mientras no se tenga en el proceso un lazo de control adecuado, los modos de control bien seleccionados y sus parámetros de operación calculados *matemáticamente*.

Con el objeto de que los ingenieros de proceso y los ingenieros instrumentistas tengan un panorama completo que les permita tener un óptimo control del proceso, se incluye en esta obra la terminología de control automático que contempla muchos tópicos inherentes al proceso.

En los dos primeros temas se estudian la teoría de control automático, los tipos de proceso, sus características y comportamiento y en el tercero se aborda el análisis matemático para calcular el valor de los parámetros más importantes que permiten una operación óptima de un controlador industrial.

Las definiciones y terminología empleadas a lo largo de este libro son las de uso común entre los instrumentistas y se derivan de publicaciones del comité de terminología de la División de Instrumentos y Reguladores de la *American Society of Mechanical Engineers* (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos, ASME), y de la Sociedad de Instrumentistas de América (ISA por sus siglas en inglés de *Instruments Society of America*).

Terminología y simbología de ingeniería de control automático

¿Qué significa medición y control automático?

La mayor parte de las industrias de transformación: químicas, petroleras, petroquímicas y manufactureras, requieren de la medición y el control de sus procesos, tanto para la obtención de productos de calidad, como para el aprovechamiento integral de sus recursos.

Todo sistema de control automático consta de dos componentes básicos:

- el proceso y
- el controlador automático.

Cada uno tiene características importantes que influyen para que el sistema sea o no fácil de controlar.

El controlador automático es un aparato que contiene un mecanismo que mide la variable y corrige la desviación con respecto al valor que deseamos tener (punto de ajuste, *set point*) y que ajustamos previamente al instrumento. El término controlador automático involucra tanto a los medios de medición como a los de control.

Proceso se define como *las funciones colectivas realizadas en y por el equipo en el cual la variable es controlada*. El término *proceso* incluye cualquier cosa que afecte la variable controlada

sin tomar en cuenta al controlador automático. En la figura 1 se ilustra, como ejemplo, un proceso en el cual calentamos agua automáticamente.

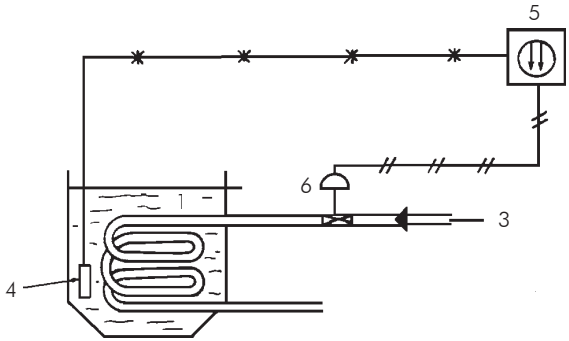


FIGURA 1. Sistema de control de temperatura.

En este proceso sencillo podemos identificar lo siguiente:

1. *Medio controlado*: agua.
2. *Variable controlada*: temperatura del agua.
3. *Agente de control*: el vapor por medio del cual se calienta el agua.
4. *Elemento primario de medición*: el termómetro de bulbo que está sensando la temperatura del agua.
5. *Registrador controlador*: instrumento donde se fija el punto de ajuste (*set point*) con el valor de la temperatura a la que queremos mantener el agua. Suele asociarse con una gráfica de registro para tener un historial del comportamiento del proceso.
6. *Elemento final de control*: válvula de control que recibe señal neumática del controlador.

La fijación del punto de ajuste (*set point*) en el controlador determina el valor que deberá tener la variable controlada.

Suponiendo que el controlador de la figura 1 tiene un rango de 0 a 100°C y que el punto de ajuste lo fijamos a 60°C, cuando la temperatura del agua descienda por debajo de 60°C el controlador

envía una señal para que la válvula de control abra y permita el paso de mayor cantidad de vapor por el serpentín, de manera que la temperatura del agua se incremente hasta alcanzar el valor fijado. Si por el contrario, el valor de la temperatura rebasara los 60°C, el controlador automático enviaría una señal a la válvula para cerrar un poco, de tal manera que pasaría menor cantidad de vapor y la temperatura descendería al punto fijado.

Dos aspectos muy importantes para evaluar la calidad del medidor son: la *exactitud* y la *velocidad de respuesta* o *retraso*. La velocidad de respuesta está íntimamente relacionada con la exactitud, por lo que serán tratadas por separado.

Velocidad de respuesta

Una respuesta completa e inmediata a un cambio en una variable es una condición ideal que no se presenta en ningún sistema físico incluyendo el control automático industrial.

La respuesta puede iniciarse de inmediato, pero tomará tiempo para completar su efecto. Este factor tiempo es llamado *retraso*.

El retraso o atraso es el momento desde que ocurre un evento hasta que la señal del elemento primario llega al controlador. En el ejemplo considerando de la figura 1, un cambio en la temperatura del agua ocasionará que el calor se transmita a través de la pared del bulbo a la sustancia que llena el tubo y después el cambio que resulte en la presión (por el cambio de volumen de la sustancia de llenado del bulbo), debe ser transmitido a la espiral receptora en la caja del instrumento.

De aquí concluimos que el retraso en un termómetro de bulbo de sistema lleno se debe: a la transferencia de calor, al pequeño flujo de fluido del material de llenado, a la transmisión de presión a lo largo del capilar y al espiral en la caja, además de la dinámica del elemento espiral al moverse.

Respuesta de elementos primarios

Un sistema para medir temperatura, muy usual en la industria, es el elemento termal lleno que consiste en un bulbo o cilindro llenado con líquido o gas, sustancias éstas que se expanden o contraen con los cambios de temperatura. Si un sistema lleno es sumergido a 250°C, la plumilla indicadora del termómetro aumentará como se muestra en la curva *A* de la figura 2. La curva es no-lineal (exponencial). La indicación de la temperatura medida se irá aproximando gradualmente a la temperatura real del medio.

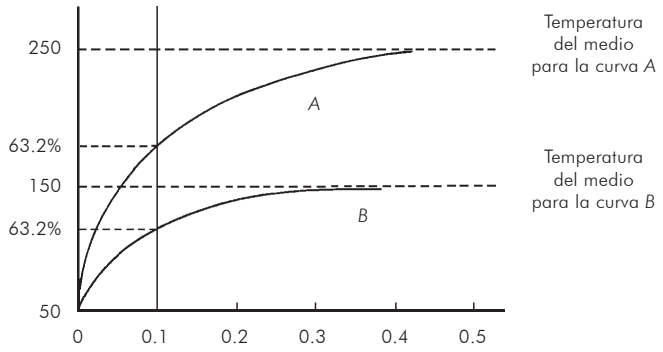


FIGURA 2. Velocidad de respuesta del elemento primario de medición a un cambio de la variable controlada.

Si el medio tiene una temperatura de 150°C, el mismo procedimiento produce una curva similar a la de la curva *B* de la figura 2. Todos los tubos alcanzan un porcentaje determinado del cambio total en un tiempo indeterminado, indistintamente de la magnitud del cambio en la temperatura. El bulbo que responda a 95% de su escala con un cambio de temperatura de 100°C en un minuto, responderá también a 95% con un cambio de 300°C en un minuto.

Los fabricantes de instrumentos han acordado expresar la velocidad de respuesta de un elemento primario desnudo en términos de su respuesta en 63.2% del cambio total. Este 63.2% es llamado *coeficiente de retraso*. En la figura 2, el coeficiente de retraso es igual a 0.1 minutos.

Exactitud en la medición

Los factores que influyen directamente en la exactitud de la medición son el error estático y el dinámico:

Error estático y reproducibilidad

El error estático en la medición es la diferencia entre la lectura del instrumento y el valor real de la variable, el error puede ser grande o pequeño, pero lo más importante en un instrumento es su repetibilidad y su reproducibilidad ya que nos interesa más que se repita un error en la lectura para un valor de la variable, sin importar la magnitud de la diferencia entre el valor medido y el valor real.

La exactitud es expresada en términos de error estático como un porcentaje del rango del instrumento. Por ejemplo, si un instrumento tiene un rango de 100 a 500°C y tiene una exactitud de ±1%, su error estático en cualquier punto de la escala nunca excede los 4°C que es 1% de 400 (500 menos 100).

La repetibilidad es el grado de desviación al cual un mismo valor de la variable puede ser medido a diferentes tiempos. En control automático, la repetibilidad es más importante que la exactitud, porque es una condición dinámica como lo es el control automático por sí mismo. De aquí que una inexactitud (como error estático) en un control automático puede ser útil si es reproducible, o sea, si se repite la misma inexactitud a diferentes tiempos.

Error dinámico

Cuando analizamos la velocidad de respuesta, sólo consideramos una etapa del cambio –un cambio instantáneo de la variable a un nuevo valor. Pero una etapa de cambio es una condición teórica que no se encuentra con frecuencia en la práctica. Es mucho más importante el error de un instrumento conforme

mide un cambio gradual de una variable, que su respuesta a una etapa de cambio.

En la figura 3 se puede ver el efecto de un cambio gradual de la temperatura y la exactitud del instrumento sin tomar en cuenta el error estático. Al inicio de la medición, la temperatura real y la temperatura medida coinciden, el instrumento mide la temperatura actual sin error.

Al ir incrementándose la temperatura del recipiente esta medida empieza a retrasarse con respecto de la temperatura real, y el monto del retraso se incrementa con el tiempo, siendo el mayor error a los 3.5 minutos. Cuando la temperatura del recipiente deja de cambiar, el error de la temperatura medida disminuye, hasta que a los 10 minutos las dos temperaturas coinciden nuevamente y ya no hay error.

El error dinámico y el retraso ocurren cuando hay un cambio en la variable medida. El error dinámico es independiente de y en adición al error estático del instrumento.

Aun cuando un instrumento no tenga error estático, siempre tendrá error dinámico debido a que toda transferencia de energía necesariamente toma tiempo. Este retraso de tiempo que ocurre en cualquier condición es dinámico.

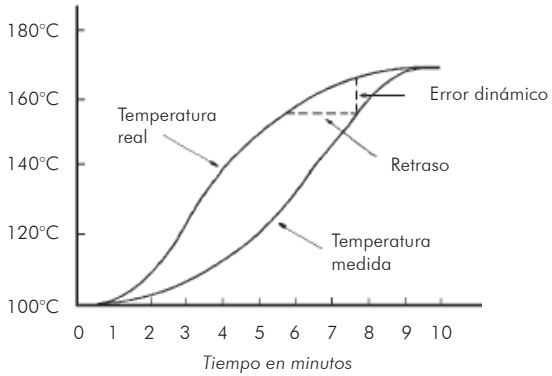


FIGURA 3. Error dinámico y retraso durante un cambio gradual de la variable.

Cambio sinusoidal

En control automático, a cada cambio de la variable controlada hay una acción correctiva, por lo tanto, un cambio gradual fuera del punto de ajuste indica un cambio sinusoidal alrededor del punto de ajuste debido a la acción correctiva del controlador.

En la figura 4 se ilustra el ciclaje de la temperatura hacia arriba y hacia abajo del punto de ajuste. En este caso, la temperatura medida y la temperatura real cambian sinusoidalmente, y las curvas nunca coinciden debido al retraso.

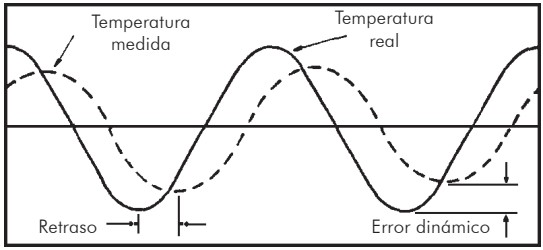


FIGURA 4. Error dinámico y retraso durante un cambio sinusoidal.

El retraso del elemento primario causa que el ciclo de medición sea demorado y la amplitud reducida. El ciclaje de la temperatura medida tiene menor amplitud debido a que la temperatura real llega al máximo de su movimiento cíclico e inicia en la otra dirección antes de que el valor coincida con ella. El valor medido cambia su dirección antes de alcanzar el extremo de su ciclo por lo que también oscila pero con menor amplitud.

El error dinámico es extremadamente importante porque impide que el indicador o el registrador muestren las condiciones reales del proceso, es por tanto aconsejable que el retraso en la medición sea lo más pequeño posible.

Al seleccionar el equipo de control automático es necesario tomar en cuenta los siguientes efectos del proceso:

1. Los cambios de carga, que son cambios en la variable controlada debido a la alteración de las condiciones en el proceso.

2. El retraso del proceso, o sea, la demora que le toma a la variable del proceso alcanzar un nuevo valor cuando el cambio de carga ocurre. Este retraso es causado por una o más de las características del proceso: capacitancia, resistencia y tiempo muerto.

Carga de proceso

Es la cantidad total de agente de control requerido por el proceso en cualquier momento para mantener una condición balanceada. Por ejemplo, si tenemos en un cambiador de calor un fluido en circulación que es calentado continuamente con vapor (agente de control), se requiere de cierta cantidad de vapor para mantener la temperatura del fluido a un valor dado.

Un incremento en el volumen del fluido requiere más vapor y por consiguiente constituye un cambio de carga del proceso. Si aumenta la temperatura ambiente y el fluido llega a mayor temperatura, se requerirá entonces menos vapor y es también un cambio de carga.

La carga de proceso está directamente relacionada con la posición del elemento final de control. Cualquier cambio de carga del proceso ocasiona un cambio en la posición del elemento final de control para mantener la variable controlada en el punto de ajuste en el valor deseado. La magnitud y el rango de los cambios de carga son factores primordiales en la aplicación de controladores automáticos.

Fuentes de cambio de carga

Los cambios de carga en un proceso no son fáciles de reconocer, algunos ejemplos son:

1. El medio controlado demanda mayor o menor cantidad de agente de control como en el cambiador de calor donde un incremento en el volumen del fluido o en la temperatura del fluido a la entrada del cambiador de calor constituye un cambio de carga.

2. Se presenta un cambio en la cantidad del agente de control, si el gas combustible utilizado para calentar un proceso cambia repentinamente en su contenido de calorías, ya que si desciende se tendrá menor cantidad de calor disponible para el proceso, y aun cuando éste permanezca sin cambio, se deberá quemar mayor cantidad de gas para mantener la temperatura.

3. Cambios en las condiciones ambientales climatológicas afectan al proceso, pues un incremento o disminución en la temperatura ambiente ocasionará que se requiera mayor o menor cantidad de vapor para mantener la temperatura del proceso.

4. Si el proceso es exotérmico o endotérmico representa también un cambio de carga, porque el monto del calor generado o absorbido por la reacción química varía requiriéndose mayor o menor cantidad de agente de control.

Capacitancia

Un factor muy importante en el análisis de un proceso es la capacitancia. Aun cuando está relacionada con la capacidad, los dos términos tienen significados totalmente diferentes.

La *capacidad de un proceso* es una medición de su habilidad para mantener o contener energía o material.

La *capacitancia de un proceso* es una medición de su habilidad para mantener una cantidad de energía o material por cantidad unitaria de alguna variable de referencia.

En la figura 5, la capacidad en volumen del líquido en ambos tanques la consideramos de $8m^3$, por lo tanto, cada tanque puede ser llenado con $8m^3$ de algún líquido sin que se derrame.

La capacitancia de los dos tanques de la figura 5 es diferente puesto que el tanque *A* tiene una capacitancia volumétrica de 1m³ por metro de nivel, mientras que el tanque *B* tiene una capacitancia volumétrica de 2m³ por metro de nivel.

La capacidad en peso de un tanque para aire comprimido es el peso máximo de aire que pueda tener el tanque sin exceder la presión de seguridad.

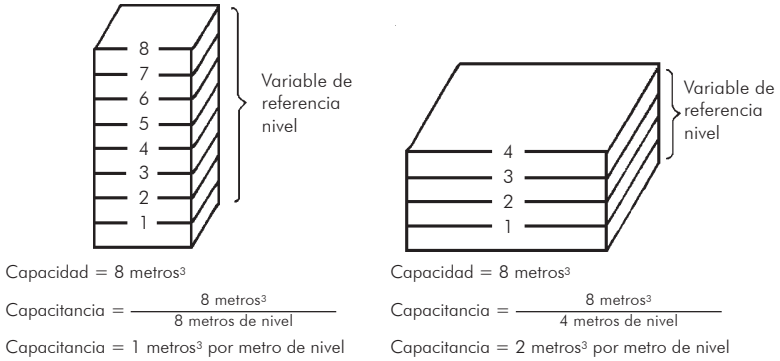


FIGURA 5. Capacidad y capacitancia.

Tipos de capacidad y capacitancia

Debido a que en un proceso sencillo pueden existir muchos tipos de capacidad y capacitancia, no es suficiente decir que el recipiente *A* de la figura 5 tiene una misma capacidad que el recipiente *B*. Aun cuando ambos tienen la misma capacidad volumétrica de líquido. El recipiente *A* tiene el doble de capacidad de nivel de líquido que el recipiente *B*; es decir, 8 metros contra 4 metros. De aquí que el tipo de capacidad debe ser identificada siempre por el tipo de energía o material involucrado.

De igual manera, no es suficiente decir que *B* tiene mayor capacitancia que *A* ya que el *tipo* de capacitancia debe ser identificado así como también mencionar el tipo de energía o material y la variable de referencia.

La forma correcta de identificar la diferencia de capacitancia es cuando por ejemplo *B* tiene el doble de *capacitancia en volumen de líquido con respecto al nivel* de lo que tiene *A*; es decir, $2m^3$ por metro de nivel contra $1m^3$ por metro de nivel.

Asumamos que el tanque *A* es llenado con un líquido que requiere 100 calorías para elevar su temperatura un grado centígrado, mientras que el líquido en *B* necesita sólo 50 calorías:

la capacitancia termal por grado centígrado de *B* será entonces la mitad de la de *A*; es decir, la inversa de la capacitancia relacionada a su volumen-nivel.

Capacitancia térmica

Está definida como las calorías que absorbe un cuerpo por grado centígrado de temperatura.

Capacitancia volumétrica

Está definida por los metros cúbicos de sólidos o líquidos que pueden ser almacenados en un recipiente por metro de incremento en el nivel. En el caso de gases, son los metros cúbicos estándar bajo condiciones estándar por cambio en la presión en kg/cm^2.

Capacitancia en peso

Está definida como los kilogramos de sólidos o líquidos que pueden ser almacenados en un recipiente por metro de incremento en el nivel.

Capacitancia eléctrica

Es el cambio de la carga eléctrica de un capacitor expresada en microfaradios por voltios a través de sus terminales.

Capacitancia y retraso en el proceso

En cualquier proceso, ya sea continuo o discontinuo, una capacitancia grande en relación con el flujo del agente de control puede ser favorable al control automático. Un proceso de capacitancia relativamente grande tiende a mantener a un valor constante la variable controlada pese a los cambios de carga. Una capacitancia grande hará fácil mantener la variable a un valor deseado pero por otra parte, hará más difícil cambiarla a un nuevo valor.

Aunque en conjunto el efecto de una capacitancia grande es generalmente favorable, introduce un retraso entre el tiempo en que se hace un cambio en el agente de control y el tiempo en que la variable controlada refleja el cambio. Cuando un líquido es calentado en un recipiente, tomará algún tiempo para que el líquido alcance una temperatura más alta después de que el suministro de calor se haya incrementado, ¿cuánto tiempo tomará?, esto depende primariamente de la capacitancia termal del líquido en relación al suministro de calor. Por lo tanto, el efecto en conjunto de la capacitancia es el factor más importante en el análisis de cualquier proceso.

Capacitancia grande y capacitancia pequeña

Para hacer una comparación entre una capacitancia termal grande y una pequeña, consideremos la diferencia entre la facilidad para mantener una temperatura constante entre los procesos.

En la figura 6 se tiene un recipiente con considerable volumen de líquido, el calor es aplicado por medio de una chaqueta de vapor, la temperatura la medimos con un termómetro de bulbo, la masa del líquido ejerce una influencia estabilizadora y resiste cambios de temperatura que pudieran ser causados por variaciones en el rango del flujo, variaciones pequeñas en la temperatura del líquido de entrada y cambios repentinos en la temperatura ambiente.

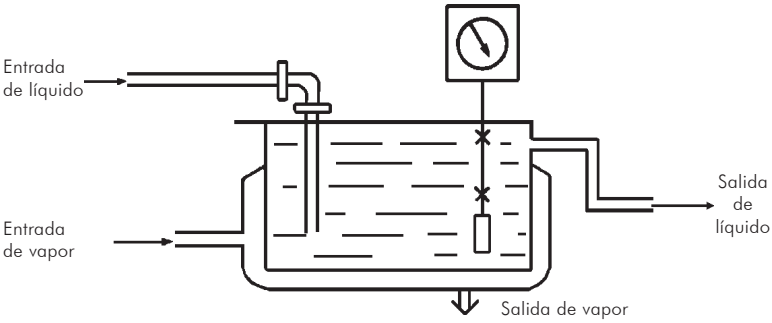


FIGURA 6. Proceso con capacitancia termal grande.

En la figura 7 se ilustra un cambiador de calor de alta velocidad con un termómetro de bulbo colocado a la salida del líquido. Podemos dar por hecho que el flujo a través de este proceso es idéntico que el de la figura 6, pero un volumen comparativamente menor de líquido está fluyendo en los tubos en cada instante. A diferencia del primer proceso, la masa es pequeña por tanto no hay influencia estabilizadora.

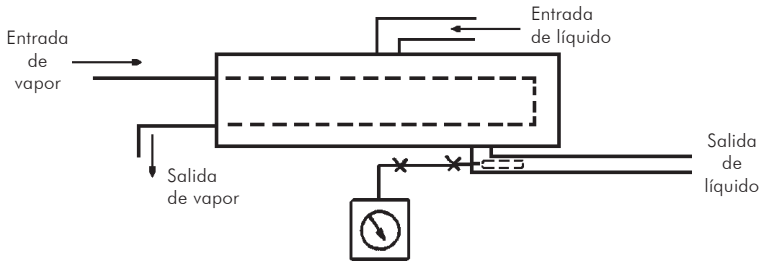


FIGURA 7. Proceso con capacitancia termal pequeña.

El volumen total de líquido en el intercambiador de calor en cualquier momento es pequeño en comparación con el rango a través del área de transferencia de calor. Una pequeña variación en el rango de alimentación o en el rango de suministro de calor, será reflejado casi inmediatamente en fluctuaciones de la temperatura del líquido que está saliendo del intercambiador.

Si este proceso fuera regulado manualmente, su pequeña capacitancia requeriría vigilancia continua de parte del operador en su casi imposible intento por mantener la temperatura constante.

Resistencia

La resistencia es el segundo tipo básico de retraso en un proceso, y se define como la oposición al flujo. Se expresa en unidades de cambio de potencial (diferencia de potencial) que es requerido para producir una unidad de cambio en el flujo.

Un ejemplo de resistencia ocurre cuando el calor está siendo transferido por conducción a través de un sólido, como ocurre en las paredes de un recipiente enchaquetado en las que hay una pérdida de temperatura que depende de la composición del sólido, porque algunos materiales tienen mejor conductividad térmica (o menor resistencia térmica) que otros.

La resistencia térmica es el cambio de temperatura que ocurre por unidad de rango de flujo de calor.

Resistencia y retraso del proceso

Al analizar las características de resistencia de un equipo, debemos considerar que las películas de gas y de líquido en los tubos de intercambiadores de calor producen mayor resistencia al flujo de calor que las que producen las paredes de los tubos.

Si un material está siendo calentado en un proceso con alta resistencia térmica, implicará que se emplee más agente de control para cambiar la temperatura del material que si se tratara de un proceso con baja resistencia térmica. Además de que en el primer caso tendremos un retraso mayor en la medición de la temperatura por lo que es conveniente tener en consideración lo siguiente:

- Capacidad es una cantidad estática.
- Capacitancia es una cantidad dinámica.

Potencial

Representa una condición en un punto particular en el proceso, la cual determina la energía en ese punto.

Resistencia

La resistencia es el potencial por unidad de flujo.

CUADRO 1. Unidades dimensionales de capacidad, potencial, capacitancia y resistencia

Característica	*Térmica*	*Presión*	*Eléctrica*
Capacidad	Calorías, BTU	m^3, Ft^3	Coulomb
Potencial	Grado	kg/cm^2, Lb/plg^2 = psi	voltios
Capacitancia	Calorías/grado, BTU/grado	$m^3/(kg/cm^2)$, ft^3/psi	coulomb/volt
Resistencia	cal/(grado/s), BTU/(grado/s)	$(kg/cm^2)/(m^3/s)$, $psi/(ft^3/seg)$	volt/ampere

Tiempo muerto y retraso en procesos

Un tercer tipo de retraso llamado *tiempo muerto* ocurre con frecuencia en procesos continuos donde es necesario transferir calor o algún otro tipo de energía por medio de un fluido que circula a través de cierta distancia a una determinada velocidad.

Aun en condiciones ideales donde a cada variable la consideramos con valores fijos, si ocurre un cambio en la temperatura de entrada y si el elemento primario de medición está localizado en la línea de salida, habrá un retraso considerable en la detección de un cambio de la temperatura, este retraso es tiempo muerto.

Cualquier cambio en el calor de entrada tendrá el mismo tiempo muerto antes que sea reflejado en el elemento primario y la acción del control se retrasará en este espacio de tiempo.

El tiempo muerto también se incrementa mientras mayor sea la distancia que exista entre el elemento primario de medición y el controlador, así como la distancia entre el controlador y la válvula de control.

En general el tiempo muerto hace más difícil el control automático que el retraso en cualquier otro punto en el sistema de control. El efecto del tiempo muerto es mostrado gráficamente en la figura 8. Esto no causa cambios en la reacción característica del proceso, pero normalmente retrasa la reacción.

Hay un periodo durante el cual el controlador está sin ayuda, debido a que no puede iniciar una acción correctiva sino, muy tarde, después que la desviación ha ocurrido.

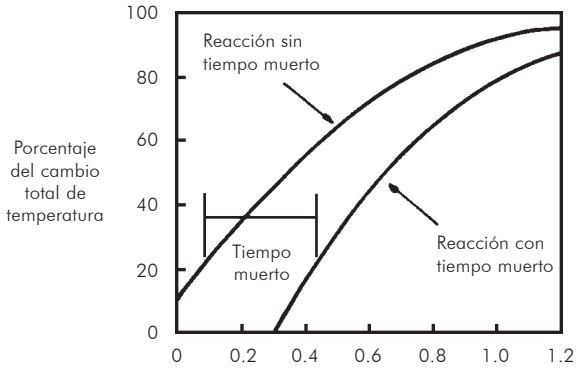


FIGURA 8. Efecto del tiempo muerto.

Todos los sistemas de control automático se basan en el principio de realimentación llamado *feed back*, y consiste en un elemento primario de medición que mide el valor de una variable, este valor es comparado dentro de un controlador con el valor deseado que ha sido ajustado previamente y que es llamado *set point*.

Cualquier diferencia entre el punto de ajuste y el valor de la variable del proceso ocasiona que el controlador envíe una señal al elemento final de control para que el proceso quede en el valor deseado.

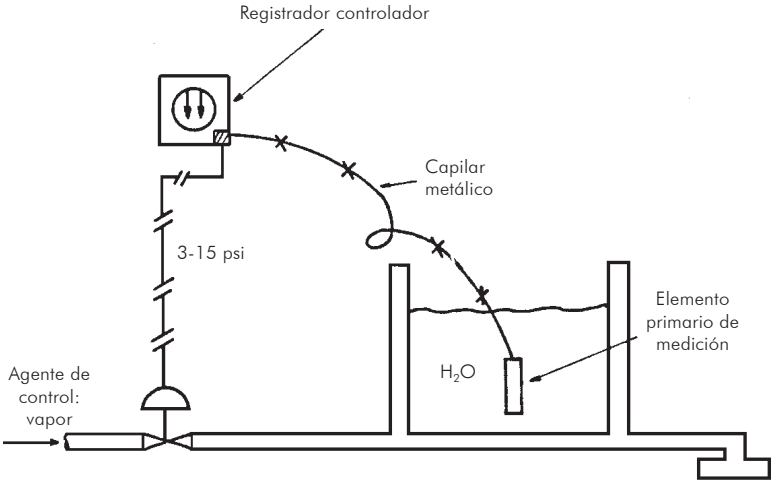


FIGURA 9. Sistema de control automático.

- *Variable controlada*: temperatura
- *Medio controlado*: agua
- *Variable manipulada*: flujo o gasto de vapor
- *Elemento primario de medición*: bulbo sensor
- *Elemento final de control*: válvula de control

Cada vez que la señal recorre el circuito completo, el error se va reduciendo hasta llegar a ser prácticamente cero.

Los controladores más empleados son accionados de manera neumática, eléctrica o electrónica y raramente en forma hidráulica o mecánica.

El sistema de control automático es llamado también circuito de control, lazo de control, rizo o *loop* de control.

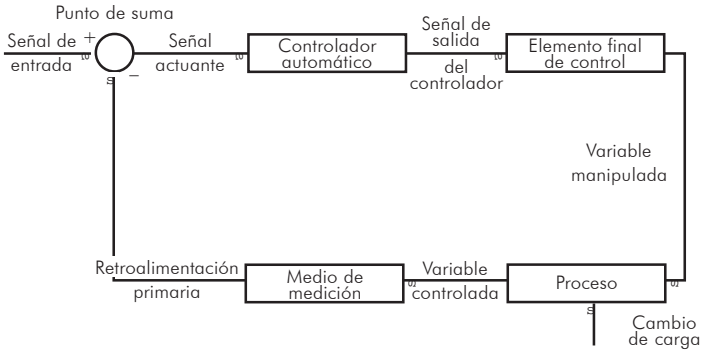


FIGURA 10. Sistema de control automático llamado también circuito de control, *loop* de control, lazo de control o rizo.

El controlador contiene normalmente como parte integral un componente llamado punto de suma o de cómputo y este componente es el que compara la retroalimentación primaria y la entrada de referencia (punto de ajuste).

Si hay alguna diferencia entre los valores, se origina la señal actuante; la que es amplificada por el controlador para que pueda modificar la posición del elemento final de control.

El sistema de control automático consta de los medios de medición, el controlador y el elemento final de control sin incluir al proceso.

Cabe hacer notar que la variable manipulada es una condición o característica del agente de control y que la variable controlada es una condición o característica del medio controlado.

Hemos dicho entonces que el controlador compara los cambios que ocurren en la variable con respecto al punto de ajuste y genera una señal correctiva hacia el punto final de control para mantener al proceso en el punto de ajuste deseado. La forma en que el controlador produce esta acción correctiva se llama modo de control.

Modos de control automático

Los principales modos de control automático son los siguientes:

a) Control de dos y múltiples posiciones.
b) Control flotante de una o varias velocidades.
c) Control flotante de velocidad proporcional.
d) Control proporcional puro o control modulante.
e) Control proporcional con reajuste automático (*reset*).
f) Control proporcional con reajuste (*reset*) y acción derivada (*rate*).

Control de dos y múltiples posiciones

En esta forma de control, si la variable se sale del valor deseado (punto de ajuste), el elemento final de control (una válvula) se abre y se cierra totalmente. El controlador reacciona a valores fijos de la variable controlada y no reconoce magnitud o velocidad de la desviación.

Control de dos posiciones sin diferencial

En la figura 11 se ilustra un proceso en el cual el elemento final de control se mueve de una posición extrema a otra (totalmente abierta o totalmente cerrada tratándose de una válvula), dependiendo si la variable controlada tiene un valor mayor o menor del establecido en el punto de ajuste.

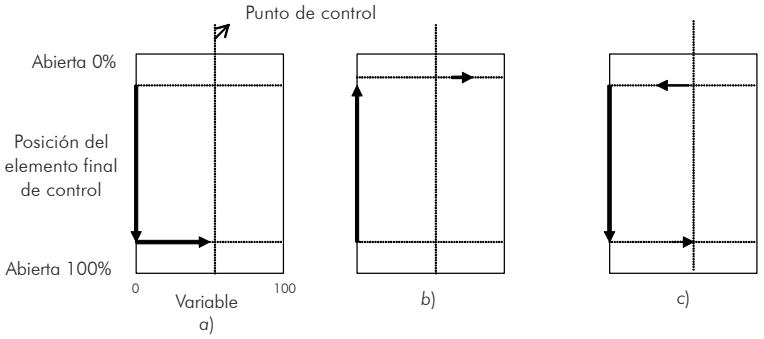


FIGURA 11. Control de dos posiciones sin diferencial. En el dibujo (a), la válvula pasa de totalmente cerrada a totalmente abierta porque el controlador detecta una temperatura menor que el valor fijado. La temperatura se incrementa hasta llegar al punto de control, cuando esto sucede la válvula se cierra (dibujo (b)), aún con la válvula cerrada, por la inercia del proceso la temperatura se eleva unos grados más, finalmente la temperatura se abate por falta de agente de control y cuando es menor del punto de ajuste, la válvula se vuelve a abrir totalmente como se ve en el dibujo (c).

Control de dos posiciones con diferencial

La diferencial es también llamada zona neutra o zona muerta. En este caso, el elemento final de control permanece en su última posición hasta que la variable controlada cambie hacia arriba o hacia abajo del punto de control (véase la figura 12).

En la zona neutra la posición de la válvula está determinada por la dirección de cambio de la variable controlada:

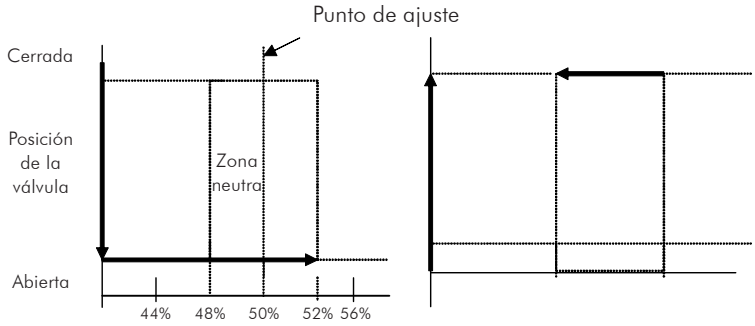


FIGURA 12. Control de dos posiciones con diferencial. En el esquema la válvula se abre totalmente y la temperatura se incrementa a través del tiempo hasta que toca el extremo superior de la diferencial o banda neutra, cuando esto ocurre la válvula se cierra totalmente y la temperatura todavía se incrementa un pequeño porcentaje por la inercia del proceso y luego empieza a disminuir hasta que toca el extremo inferior de la banda neutra y el controlador ordena la apertura de la válvula nuevamente.

Cuando la variable incrementa su valor a partir de un nivel por debajo del punto de ajuste, el controlador no hace nada hasta que la variable alcanza el límite superior de la zona neutra (52%), entonces el controlador cierra la válvula.

Por el contrario, cuando el valor de la variable decrece desde un punto por arriba del límite superior del punto de ajuste, el controlador no abre la válvula hasta que la variable alcanza el límite inferior (48%) de la zona neutra.

Control de tres posiciones

En este modo de control, el elemento final de control se posiciona en una de tres posiciones dependiendo de si la variable se encuentra arriba, abajo o cerca del punto de control. Esta acción se realiza por medio de relevadores, válvulas solenoides o mediante un motor que opere la válvula (véase la figura 13).

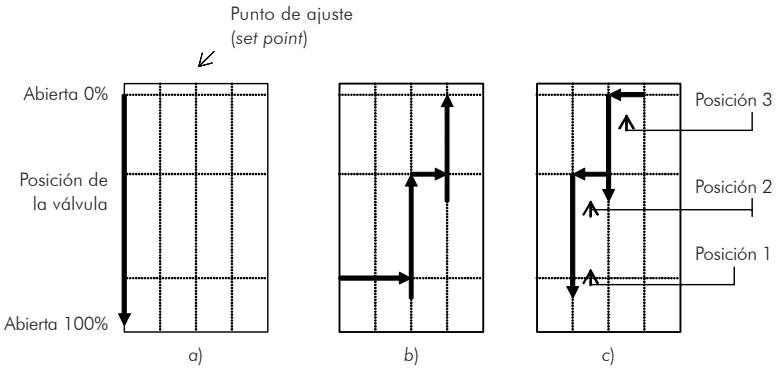


FIGURA 13. Control de tres posiciones. En el dibujo (a) la válvula se abre totalmente, en el (b) la temperatura se incrementa hasta llegar al punto de control, en ese momento la válvula se cierra a una posición intermedia en un porcentaje prefijado por el operador, si la variable se sigue incrementando, al llegar al extremo superior, la válvula se cierra totalmente. En (c), al decrementarse el valor de la temperatura, la válvula se abre a la posición intermedia y si continuara disminuyendo la válvula se abriría totalmente.

El control de dos o tres posiciones se emplea en procesos discontinuos (procesos por lotes, *batch*) que son de una sola capacidad, se usan cuando los cambios de carga no son grandes ni frecuentes, si la velocidad de reacción de proceso es lenta y cuando los atrasos de la transmisión y de tiempo muerto son mínimos. Ejemplos de esta clase de procesos se tienen en secadores industriales, ollas de cocción, tanques de cromado y plateado, etcétera.

Este tipo de controladores muestra una medición cíclica, pero cuando se emplean en los procesos considerados ideales para este tipo de control, las amplitudes de los ciclos son muy pequeñas y presentan una línea uniforme en la gráfica de registro.

Control flotante de una o varias velocidades

Este control es semejante al de dos posiciones, su diferencia consiste en que el elemento final de control tiene un movimiento

gradual y tarda más de 120 segundos en recorrer de la posición cerrada a la posición abierta.

La válvula se abre o cierra en forma gradual, *flota*, en una posición parcialmente abierta. Generalmente se utiliza con zona muerta, y si la variable sale de los límites de la zona neutra, la acción del control hace que la válvula se mueva un poco (flote), y la variable regrese a la zona de control logrando que ésta permanezca en la zona neutra.

El control flotante puede ser de una sola velocidad, con o sin zona neutra, y de varias velocidades.

El control flotante de una sola velocidad se obtiene con un controlador de dos posiciones y una válvula de control con motor eléctrico. El control reacciona en el momento de la desviación y no reconoce la magnitud ni la rapidez de la misma.

En las figuras 14 y 15 se ilustra el control flotante de una velocidad con zona neutra que se emplea para que las idas y vueltas del motor no sean frecuentes.

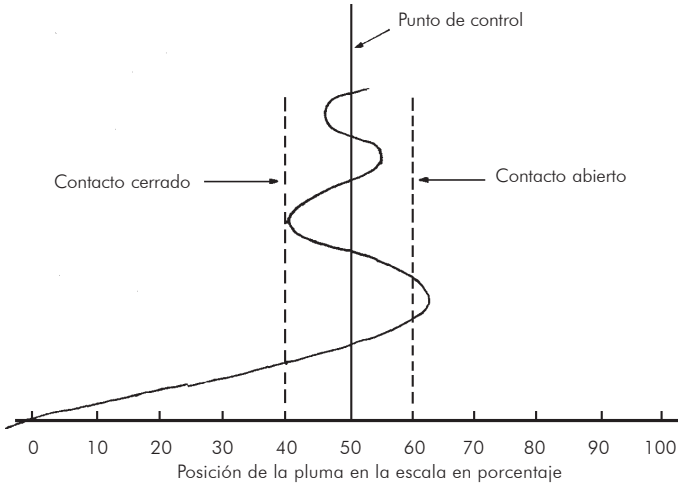


FIGURA 14. Control flotante de una sola velocidad con zona neutra.

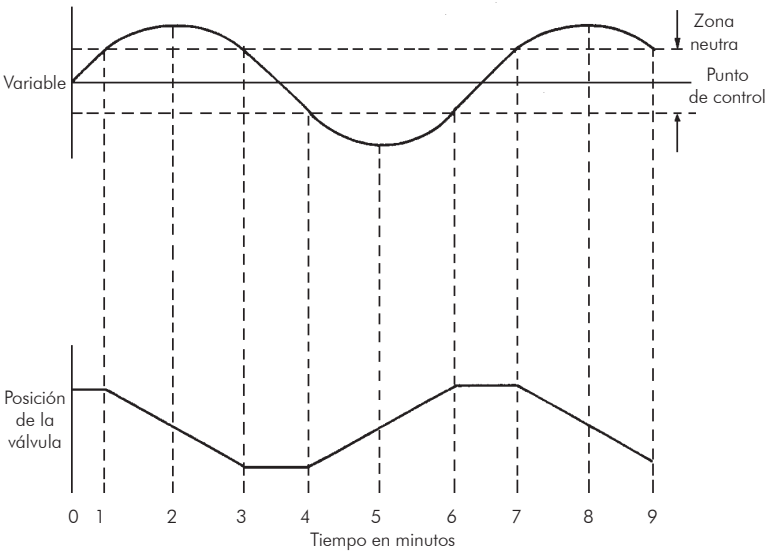


FIGURA 15. Gráfica del comportamiento del control flotante de una velocidad con zona neutra.

La zona neutra es ±1% de la escala total, cuando la variable está cerca del punto de control, no existe acción del controlador, de cualquier manera, el atraso es insignificante ya que la válvula continúa en su movimiento hasta que la variable alcanza su punto de control.

El control flotante de varias velocidades reconoce el tiempo y la magnitud de la desviación, por lo que el elemento final de control se mueve a diferentes velocidades dependiendo de si la variable controlada está cerca o lejos del punto de control.

Puede emplearse en procesos autorregulados y cuando los atrasos en la transmisión y tiempo muerto sean pequeños. También cuando los cambios de carga sean lentos y cuando la velocidad de reacción del proceso sea grande.

Control flotante de velocidad proporcional

Al causarse una desviación de 1% de la variable controlada, se origina un porcentaje de movimiento de la válvula a una velocidad que depende de la magnitud de la desviación. Si la variable cambia su valor hacia arriba o hacia abajo del punto de control, la válvula empieza a abrirse o a cerrarse a una velocidad constante; si la desviación se dobla, la válvula se mueve a una velocidad doble.

Este control flotante se llama de velocidad proporcional porque podemos ajustar la velocidad a la que deseamos que se mueva la válvula de control, pudiendo por tanto moverse la válvula a cualquier velocidad para la misma desviación, dependiendo sólo del ajuste que se haya hecho (véase la figura 16).

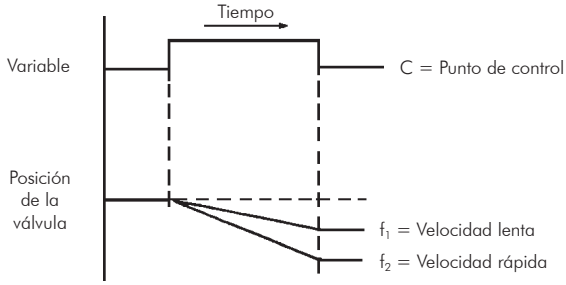


FIGURA 16. Respuesta de control flotante de velocidad proporcional a cambios repentinos.

La acción de este modo de control es una función de integración en su respuesta ya que reconoce el tiempo y la magnitud de la desviación. La rapidez de cambio de posición de la válvula con respecto al tiempo depende de la desviación.

En la figura 17 se muestra la reacción del control flotante de velocidad proporcional a cambios estables de carga. La variable controlada se desvía gradualmente del punto de control (generalmente por un cambio de carga), y el controlador manda una señal a la válvula que responde formando la curva de desviación

mostrada y pasando su máxima pendiente por el punto de inflexión cuando la variable empieza a volver al punto de control. Finalmente la válvula se sitúa en una posición diferente.

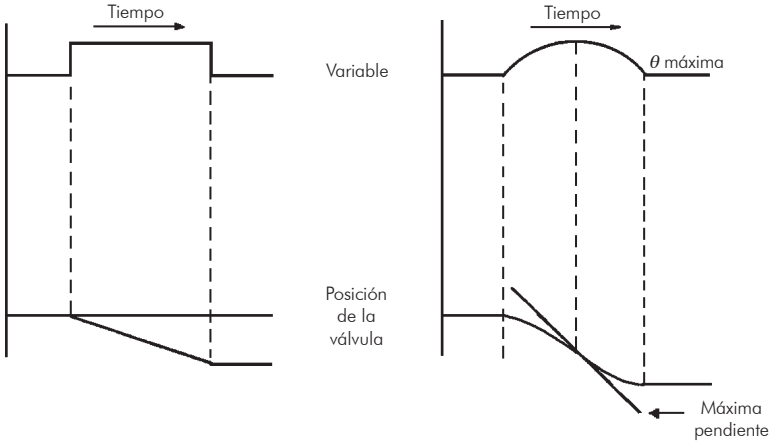


FIGURA 17. Respuesta del control flotante de velocidad proporcional a cambios estables.

De lo anterior se deduce que la posición de la válvula con respecto al tiempo es igual a la velocidad proporcional multiplicada por la desviación.

$$\frac{-dP}{dt} = f\left(\theta - c\right)$$

Donde:

P = posición de la válvula en porcentaje dividido entre 100.
t = tiempo en minutos.
f = velocidad flotante (porcentaje de movimiento de la válvula por minuto causado por una desviación de 1% de la variable controlada).
θ = variable en porcentaje dividido entre 100.
c = punto de control en porcentaje dividido entre 100.
$(\theta - c)$ = desviación.

El signo negativo de la ecuación se debe a que la acción correctiva de la válvula es opuesta a la desviación.

Integrando tenemos:

$$-\int dP = f(\theta - c)\, dt \qquad (1)$$

K = constante de integración

Se utiliza generalmente accionado por medios hidráulicos, como lo es el controlador hidráulico tipo pistón en el cual la alimentación de aceite al cilindro se ajusta en proporción a la magnitud de la desviación de la variable medida.

Es recomendable cuando los atrasos en la transmisión y el tiempo muerto son pequeños, donde el proceso sea autorregulado y cuando los atrasos de la medición sean pequeños.

$$-P = f\int(\theta - c)\, dt + K$$

Control proporcional puro o control modulante

Llamado también banda proporcional, su acción se puede resumir en los siguientes enunciados:

- Existe una posición de la válvula para cada posición de la pluma.
- Banda proporcional es el porcentaje de la escala que la variable tiene que recorrer para mover el elemento final de control de una posición extrema a otra.

En las figuras 18 y 19 se muestra el porcentaje de abertura de la válvula con diferentes valores de la banda proporcional. Mientras más pequeña o angosta sea la banda proporcional, más nos acercaremos al control de dos posiciones (banda proporcional = 0%) ya que sólo se requerirá un pequeño cambio para operar la válvula en su carrera total.

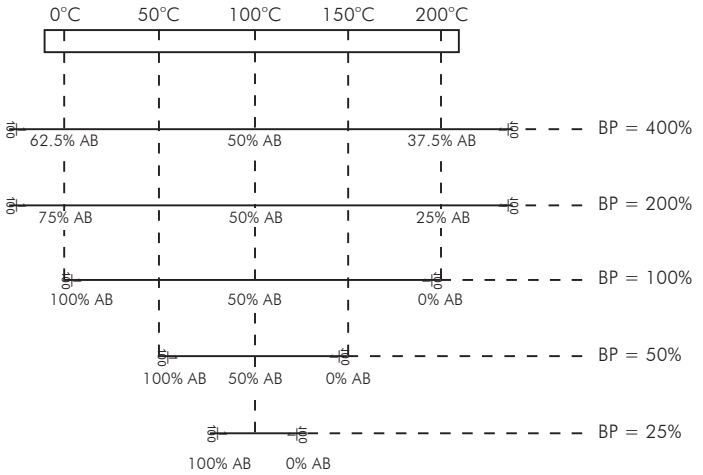


FIGURA 18. Porcentaje de apertura de la válvula con diferentes valores de banda proporcional.

El mecanismo de control de banda proporcional, está diseñado para producir una posición definida de la válvula para una posición de la pluma que indica el valor de la variable. Como habíamos enunciado: *a cada posición de la válvula corresponde una posición de la pluma*. Esto significa que la pluma es posicionada por un cambio en la salida del controlador.

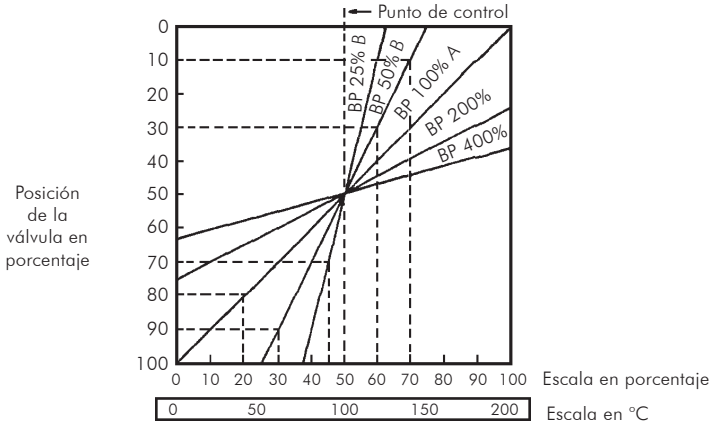


FIGURA 19. Gráfica de comportamiento de la banda proporcional.

En la figura 19 se muestra la relación entre el cambio del valor de la medición en porcentaje (posición de la pluma) y la carrera de la válvula. La curva *A*, con una banda proporcional (BP) de 100% muestra que la pluma debe cambiar (recorrer) el 100% de la escala para modificar la posición de la válvula, de completamente abierta a completamente cerrada.

También se muestra que para cualquier posición de la pluma dentro del rango de la escala, hay una posición correspondiente en porcentaje de carrera de la válvula.

Por ejemplo, si la pluma está en el 20% del rango de la escala, la válvula está en el 80% de su carrera. La acción proporcional en este caso es de 100%, esto es, la pluma debe recorrer 100% del rango de la escala para lograr 100% de la carrera de la válvula.

La curva *B* muestra que la posición de la pluma debe cambiar de 25 a 75% del rango de la escala para obtener 100% de la carrera de la válvula, por lo que representa una banda proporcional de 50%. La curva *C* representa 25% de una banda proporcional.

En esta gráfica se muestra también que por igual cambio de porcentaje en la posición de la pluma, hay cambio igual de porcentaje en la carrera de la válvula.

Por ejemplo: en la curva *A*, si los cambios en la medición pasan de 20 a 30% que representa 10% del rango de la escala, la carrera de la válvula cambia de 80 a 70%, o sea, 10% de la carrera.

Refiriéndonos a la curva *B*, si la pluma cambia de 30 a 40%, la posición de la válvula se moverá de 90 a 70%, o sea, 20% de su carrera, y de la misma manera, si la pluma cambia de 60 a 70%, la válvula cambiará de 30 a 10%, o sea, 20% de su carrera.

En ambos casos, la posición de la pluma cambia 10% de la escala, sin embargo, en la curva *A* la válvula cambia 10% de su carrera, esto ocurre porque conforme la banda proporcional se

acorta, la carrera de la válvula, por incremento del cambio de la pluma, se incrementa.

Se puede notar también en la figura 19, que cuando la banda proporcional es mayor de 100%, es imposible abrir o cerrar la válvula completamente, aun cuando la variable controlada esté en 0% o en 100% de la escala del controlador.

En la figura 20 se muestran diferentes cambios de la variable y la respuesta de la válvula de control con banda proporcional angosta y ancha. La ecuación del controlador proporcional es:

$$-\frac{dP}{dt} \alpha \frac{d\theta}{dt}$$

La posición de la válvula con respecto al tiempo es directamente proporcional a la rapidez de cambio, θ, con respecto al tiempo.

$$-\frac{dP}{dt} = \frac{1}{s}\frac{d\theta}{dt}$$

$$-\int dP = \frac{1}{s}\int d\theta$$

$$-P = \frac{1}{s}(\theta - c) + L \qquad (2)$$

donde:

P = posición de la válvula en porcentaje dividido entre 100.
s = banda proporcional en porcentaje dividida entre 100.
θ = variable en porcentaje dividido entre 100.
c = punto de control en porcentaje dividido entre 100.
L = constante.

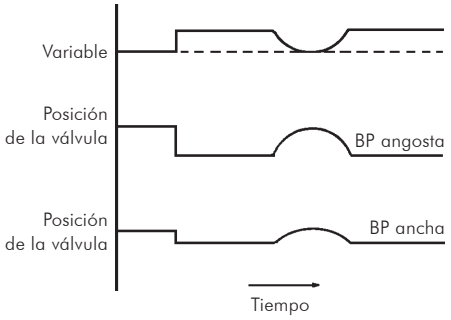


FIGURA 20. Respuesta del control a cambio repentino y estable.

El signo negativo se debe a la representación de la acción correctiva del control automático que indica un cambio inverso al movimiento de desviación de la variable.

Cuando estamos manteniendo la temperatura de un líquido en un recipiente, si por alguna razón aumenta la cantidad de líquido en éste, decimos que ocurre un cambio de carga y esto hace que se abata la temperatura del líquido; el controlador iniciará una acción correctiva enviando una señal a la válvula de control para que permita el paso de más agente de control (pudiera ser vapor en este caso) hasta que se vuelva a tener a la variable en el punto de control.

Sin embargo quedando la válvula en una nueva posición, a esto se la llama desviación sostenida, *off-set*, porque de cualquier manera la válvula queda en una nueva posición, como dijimos, y la variable de todas formas no vuelve al punto de control. En la figura 21 se muestra la desviación sostenida con banda proporcional ancha y angosta.

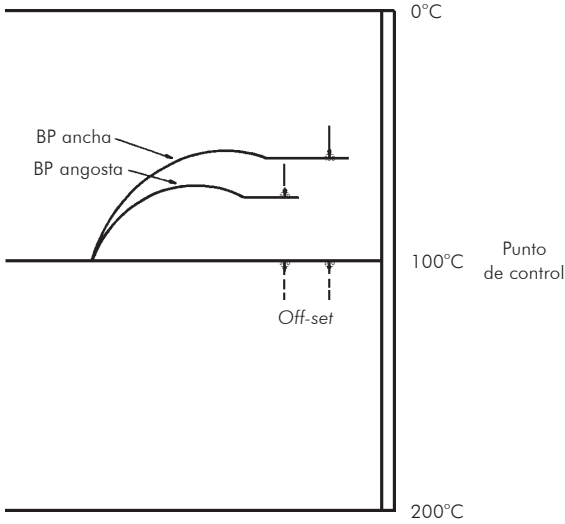


FIGURA 21. Desviación sostenida *off-set* con banda proporcional ancha y angosta.

De la figura 22 se deduce que una banda proporcional ancha produce poco ciclaje pero ocasiona una desviación excesiva, y una banda proporcional muy angosta produce poca desviación pero demasiado ciclaje antes de estabilizar a la variable.

Cuando se utiliza en control proporcional puro la válvula continúa moviéndose, siempre que la variable esté cambiando de valor (véase la figura 20). En cualquier instante, la cantidad de movimiento de la válvula es directamente proporcional a la cantidad de movimiento de la medición.

La posición de la válvula está siempre en relación directa con la medición, y el máximo valor en la corrección de la válvula ocurre en el punto en que la desviación de la medición es máximo; siempre y cuando la desviación no se mueva hacia afuera de la banda proporcional del controlador.

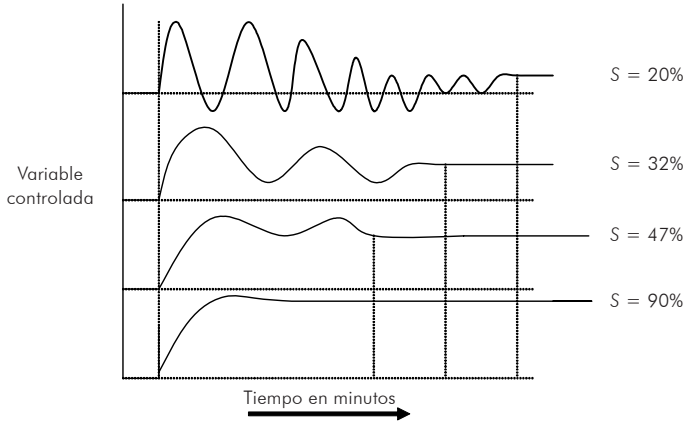


FIGURA 22. Comportamiento de la variable con diferentes valores de banda proporcional. Con una banda proporcional angosta se tiene mucho ciclaje y se tarda mucho tiempo en que el proceso se estabilice con una desviación sostenida pequeña. Con una banda proporcional ancha, el proceso se estabiliza en menor tiempo pero la desviación sostenida es mayor.

Es necesario insistir en que con la acción proporcional, cada posición de la válvula está relacionada con una posición definida de

la medición. Un controlador puede ser ajustado de manera que la válvula sea posicionada para llevar a la variable al punto de control, pero la variable se mantendrá en este punto sólo que no existan cambios de carga.

Si se presenta un cambio de carga o alguna otra condición, tal como la caída de presión a través de la válvula, entonces ésta tomará una nueva posición a fin de dejar pasar la cantidad original de la variable (como una cantidad determinada de flujo).

De esta manera la medición se mueve a una nueva posición, la cual necesariamente estará separada del punto de control antes de que el equilibrio se alcance nuevamente.

Se puede utilizar el control proporcional satisfactoriamente ahí donde las condiciones de operación y la banda proporcional del controlador sean tales que la máxima desviación permanente esté dentro de las variaciones permisibles del medio controlado, y se aplica en los casos en donde no hay cambios de carga rápidos ni frecuentes, cuando la velocidad de reacción del proceso es lenta y donde no hay grandes atrasos en la transmisión ni tiempo muerto.

En los casos en que se utiliza el control proporcional puro, el instrumento tiene un reajuste manual (*reset*) que se utiliza para mover la banda proporcional en la escala, permitiendo un cambio en la apertura de la válvula que permita que la variable controlada vuelva al punto de control.

Control proporcional con reajuste automático (*reset* o integral)

Para poder eliminar la desviación sostenida, se combina la estabilidad inherente del control proporcional y la estabilización en el punto de control que proporciona el control flotante de velocidad proporcional para tener el control proporcional con reajuste automático.

En la figura 23 podemos notar que si el valor de la variable aumenta y por tanto se sale del punto de control, el control proporcional cierra la válvula repentinamente una cierta cantidad, y la acción de reajuste produce un cambio en la posición de la válvula con una rapidez proporcional a la desviación de la variable, este cambio se agrega a la cantidad de movimiento de la válvula que produce el control proporcional puro, así, la válvula cierra en forma repentina una cantidad y de ahí continúa cerrándose gradualmente hasta que la variable vuelve al punto de control.

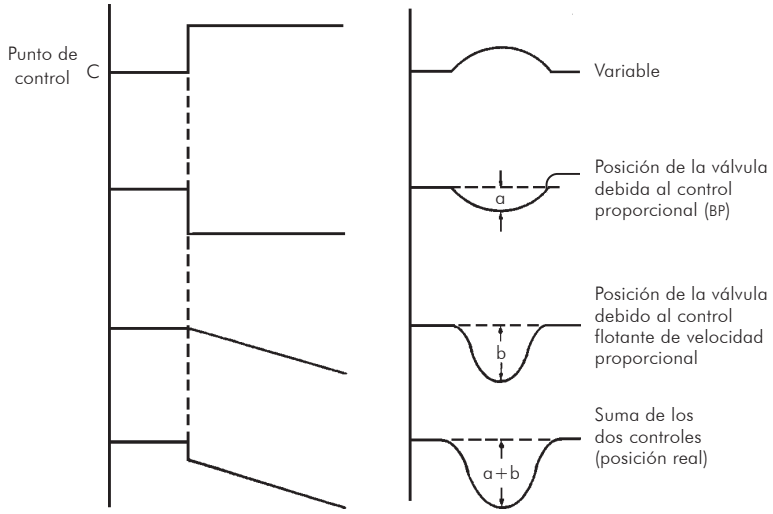


FIGURA 23. Cambio de carga y posición que adquiere la válvula debido al control proporcional, al reajuste automático y a la suma de ambos.

El movimiento de la válvula causado por la acción proporcional aumentará o disminuirá al mismo tiempo que la magnitud de la desviación de la variable aumente o disminuya.

Las unidades del reajuste automático se dan en repeticiones por minuto, y es el número de veces por minuto que la respuesta del control proporcional es repetida cuando hay un cambio repen-

tino en la variable. Lo descrito se puede ver con mayor claridad en la figura 24.

r = velocidad de reajuste en repeticiones por minuto.

De la ecuación (1):

$$-P = f\int(\theta - c)$$

de la ecuación (2):

$$-P = \frac{1}{s}(\theta - c) +$$

sumando:

$$-P = f\int(\theta - c)\,dt + \frac{1}{s}(\theta - c) + K$$

$$f = \frac{r}{s} \therefore -P = \frac{r}{s}\int(\theta - c)\,df + \frac{1}{s}(\theta - c) + K$$

$\int dt + K$

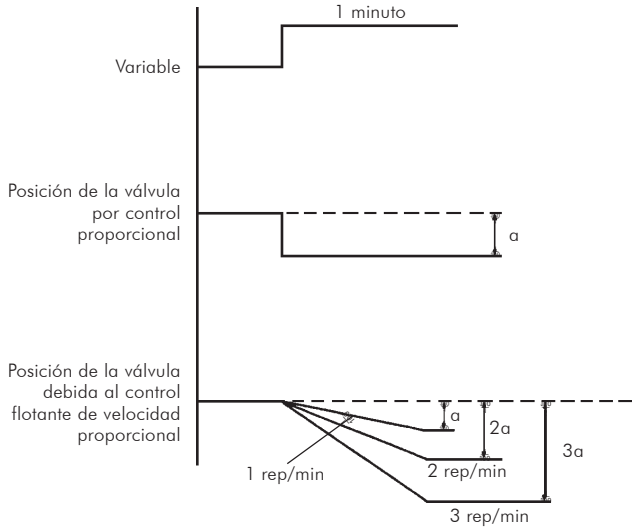


FIGURA 24. Cambio de carga y posición de la válvula debido al control proporcional y al control flotante de velocidad proporcional.

En la figura 25 se tiene la respuesta del proceso con diferentes valores de banda proporcional y el mismo valor de reajuste automático. Con una banda proporcional de 20, se requiere mucho tiempo para que la variable vuelva al punto de control porque hay ciclaje excesivo; en este ejemplo la banda proporcional de 50% es la más óptima.

El valor óptimo de la velocidad de reajuste automático es de 0.20 repeticiones por minuto; si es menor, el regreso de la variable al punto de control es lento, y si es mayor, se produce un ciclaje excesivo antes de alcanzar el punto de control.

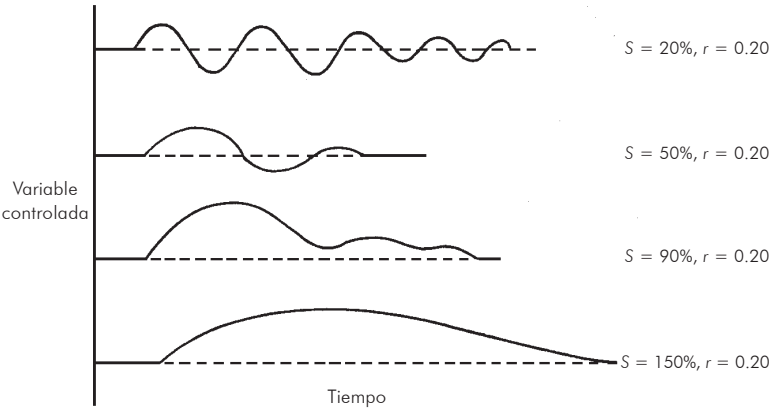


FIGURA 25. Respuesta del proceso a diferentes valores de banda proporcional.

En la figura 26 se muestran los efectos de la banda proporcional y del reajuste automático por separado, y juntos ante un cambio de carga; como las acciones son simultáneas y acumulativas, el efecto ocasiona una mejor respuesta del controlador.

Los fabricantes de instrumentos presentan sus controladores indicando el reajuste automático en minutos por repetición o en repeticiones por minuto, indistintamente.

Reset rápido: 0.02 a 5 minutos por repetición.
0.8 a 20 repeticiones por minuto.
Reset lento: 0.2 a 30 minutos por repetición.
0.8 a 120 repeticiones por minuto.

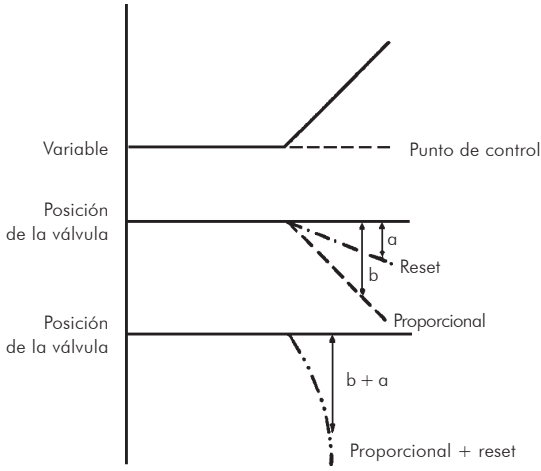


FIGURA 26. Efectos de la banda proporcional y reajuste automático.

También para aplicaciones prácticas se aconsejan las siguientes combinaciones según el tipo de proceso:

Banda proporcional moderada y reajuste lento, si la velocidad de reacción del proceso es pequeña.

Banda proporcional ancha y *reset* lento o banda proporcional moderada y *reset* rápido, si la velocidad de reacción del proceso es grande.

Banda proporcional ancha y *reset* lento, si el retraso en la transmisión o el tiempo muerto es grande.

Banda moderada y reajuste rápido, si el atraso en la transmisión o el tiempo muerto es pequeño.

La acción proporcional más reajuste se utilizó con éxito por muchos años, pero había procesos donde no se tenía la calidad en el control que se requería y se hizo necesario el desarrollo de un mecanismo de control superior. Lo ideal sería algo que realizara

una acción anticipatoria, se atacó el problema y se desarrolló una función de control que aplica una corrección proporcional a la rapidez del cambio de la medición y que además no es afectada ni por la magnitud ni por la duración de la desviación. A esta función se le llama acción derivada.

Acción proporcional con reajuste automático (*reset*) y acción derivada (*rate*)

La acción derivada, llamada también anticipatorio, nunca se usa sola, sino en combinación con el control proporcional o proporcional con reajuste.

La acción derivativa proporciona una sobrecorrección inicial cuando ocurre una desviación, por tanto el elemento final de control se mueve en forma adelantada al principio como si la desviación de la variable hubiese sido de un salto. El efecto de la derivativa es adelantar la acción del elemento final de control.

La acción derivativa responde a la siguiente ecuación matemática:

$$-P\alpha$$

La posición de la válvula es proporcional a la rapidez de cambio de la variable con respecto al tiempo.

donde:

P = posición de la válvula
q = acción derivativa o anticipatoria (*rate*) en minutos
s = banda proporcional en porcentaje dividido entre 100
θ = variable en porcentaje dividida entre 100
t = tiempo en minutos

diferenciando:

$$-\frac{dP}{dt} = \frac{q}{s}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La ecuación del controlador proporcional + *reset* + *rate*, queda:

$$-\frac{dP}{dt} = \frac{r}{s}(\theta - c) + \frac{1}{s}\frac{d\theta}{dt} + \frac{q}{s}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-P = \frac{r}{s}\int_0^t (\theta - c)\,dt + \frac{1}{s}(\theta - c) + \frac{q}{s}\frac{d\theta}{dt} + K$$

El cambio de la posición de la válvula que resulta por la acción derivativa es acumulativo a la acción proporcional y al reajuste automático. En la figura 27 se muestra un cambio de la variable y el cambio de posición de la válvula debido a la banda proporcional, al reajuste automático, a la acción derivativa y al efecto acumulado de las tres.

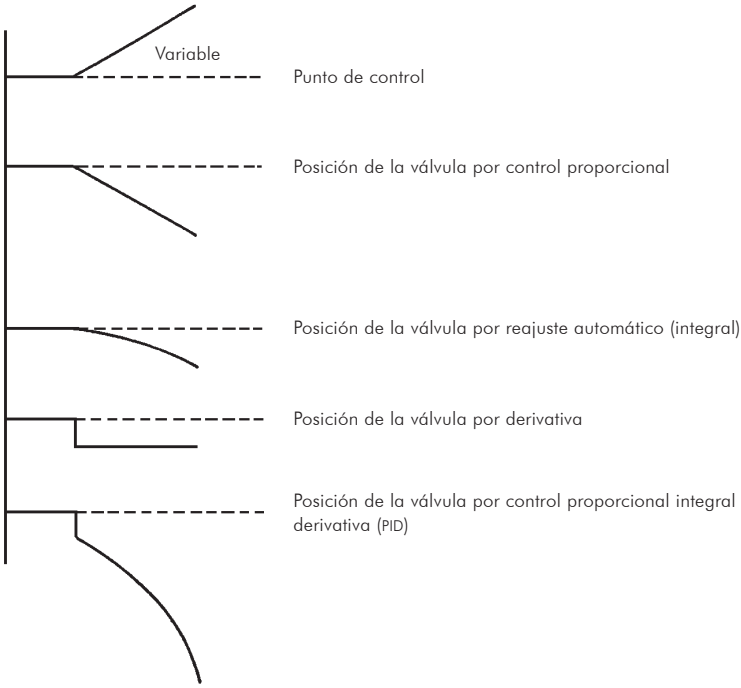


FIGURA 27. Posición de la válvula debida a la acción de la banda proporcional más el reajuste automático acción integral (*reset*) y acción derivativa (*rate*).

La función de un controlador automático es mantener el proceso estable, esto es, a la variable en el punto de control. Al presentarse un disturbio, el controlador deberá poder reducir la duración y el rango de la desviación al mínimo y restablecer la estabilidad del proceso en el tiempo más corto posible.

El efecto de la acción derivada consiste en aplicar una acción correctiva más rápidamente que la que aplicaría una acción proporcional solamente, y el resultado es que se reduce la desviación de la variable de proceso, y por consiguiente la cantidad y la duración de la inestabilidad del proceso son mínimos. En la figura 28 se ilustra lo dicho anteriormente, y las dos curvas se han sobrepuesto para una mejor comparación del efecto de las combinaciones de los modos de control.

Se debe hacer notar que no siempre es necesaria la acción derivativa, pues hay una gran cantidad de aplicaciones que no la requieren; además, en muchos instrumentos la acción derivativa desestabiliza al proceso aun cuando sea puesta en cero.

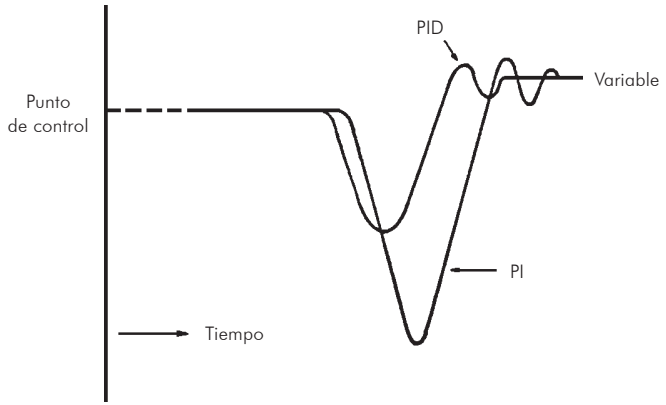


FIGURA 28. Gráfica del comportamiento de la variable debido a un cambio de carga y la acción de los modos de control.

CUADRO 2
Resumen de los modos de control

Modo	*Velocidad de la reacción del proceso*	*Cambios de carga*		*Aplicaciones*
		Tamaño	*Velocidad*	
Dentro-fuera. Dos posiciones con espacio diferencial.	Lenta	Ninguno	Ninguna	Instalaciones de gran capacidad de temperatura y nivel. Tanques de almacenamiento, tanques de suministro de agua caliente, calentamiento de cuartos.
Flotante. Velocidad proporcional con zona neutra ajustable.	Rápida	Ninguno	Pequeña	Procesos con pequeños tiempos muertos. Hornos industriales, aire acondicionado.
Proporcional más derivativa	Moderada	Pequeño	Ninguna	Donde se requiere gran estabilidad con mínimo desajuste y deficiencia de reposición. Presión de descarga de un compresor, guías para la orilla de tiras de papel.
Proporcional	Lenta a moderada	Pequeño	Moderada	Presión, temperatura y nivel, en donde el desajuste es permitido. Nivel de reactores, temperatura de hornos de secado, estaciones reductoras de presión.
Proporcional más reajuste (reset)	Ninguna	Grande	Lenta o moderada	La mayoría de las aplicaciones, incluyendo flujo. No recomendable para operaciones en tandas (baches) a menos que se permitan valores excesivamente altos.
Proporcional más reajuste más derivativa	Ninguna	Grande	Rápida	Control en tandas, procesos con disturbios repentinos.

Principios de control automático

Controlador automático

Puede ser definido como un regulador de suministro contra la demanda en un periodo determinado de tiempo, esto es, si consideramos que un cambio de carga (un disturbio) en un proceso es un cambio en la demanda, un controlador automático debe ser capaz de cambiar el suministro para restablecer el equilibrio del proceso. El tiempo que se tarda en igualar el suministro y la demanda varía en función de las condiciones de proceso.

El control automático puede aplicarse a cualquier proceso en el que la variable pueda ser medida:

presión, flujo, temperatura, nivel, pH, conductividad, potencial de óxido reducción, vibración, densidad, etcétera.

Es muy importante hacer notar que la selección del elemento primario de medición es fundamental en el lazo de control, ya que ningún controlador automático puede ser mejor que su sistema de medición. Es por tanto un engaño el que seleccionemos un controlador de alta resolución si el elemento primario de medición tiene una exactitud muy pobre.

Efecto de espacio muerto

Si el sistema de medición no puede responder con la misma rapidez con la que cambia la variable, la acción correctiva en la válvula de control será retardada. A esto se le conoce como *efecto de espacio muerto* que como ya hemos visto, puede ser la causa de considerables problemas en el control de un proceso.

Espacio muerto

El *espacio muerto* es el intervalo de tiempo entre el cambio en la variable medida y el movimiento de la válvula de control para corregir tal cambio.

Tiempo muerto

El *tiempo muerto* también es ocasionado por mal funcionamiento de la válvula de control, ya sea que alguna tuerca esté demasiado ajustada o que se atasque por falta de mantenimiento y limpieza; en casos como éstos, la válvula de control tardará en responder al cambio inicial de la presión del aire proveniente del controlador o del transductor y por consiguiente, la variable continuará cambiando hasta que la presión sea suficiente para vencer la fricción y lograr que la válvula se mueva; el exceso de aire en el diafragma de la válvula, hará que ésta se mueva demasiado lejos y como resultado se obtenga una *acción correctiva en exceso*.

Posicionadores de válvulas

Para evitar los tiempos muertos por mal funcionamiento de las válvulas de control, los fabricantes han desarrollado *posicionadores de válvulas*, que son mecanismos que forman parte del operador de la válvula de control, reciben un suministro de aire independiente y están diseñados para producir una posición

exacta de la válvula, proporcional al cambio de presión proveniente del controlador.

Válvula de control

La válvula de control es tan importante en el lazo de control, como lo es el controlador y el elemento primario de medición. Las válvulas empleadas para una acción de dos posiciones generalmente es de asiento sencillo y operarán totalmente abiertas o cerradas; las que se emplean para control proporcional (con o sin reajuste y derivativa), deberán producir igual cambio de porcentaje en flujo para iguales cambios de porcentaje de carrera de la válvula, y son provistas generalmente con un motor neumático que tiene un resorte de carga capaz de posicionar la carrera de la válvula en forma proporcional a la presión del aire proveniente del controlador (si éste es neumático), o desde el transductor (si el controlador es electrónico).

Circuito de control automático

También se conoce como lazo de control, rizo o *loop* de control y como hemos dicho, incluye a los medios de medición (elemento primario de medición), al controlador automático y al elemento final de control, sin tomar en cuenta al proceso.

Al sistema de control automático es el circuito de control automático más el proceso, este sistema se muestra en la figura 29.

Los medios de medición, el controlador automático y el elemento final de control son considerados como unidades separadas en la figura 29. La entrada al controlador automático es llamada retroalimentación primaria y esta señal es comparada con la señal de referencia llamada punto de ajuste *(set point)* en un componente llamado punto de suma o punto de cómputo, de ahí se obtiene una señal actuante que con los modos de

control nos da la señal de salida del controlador que en su caso modificará la posición del elemento final de control.

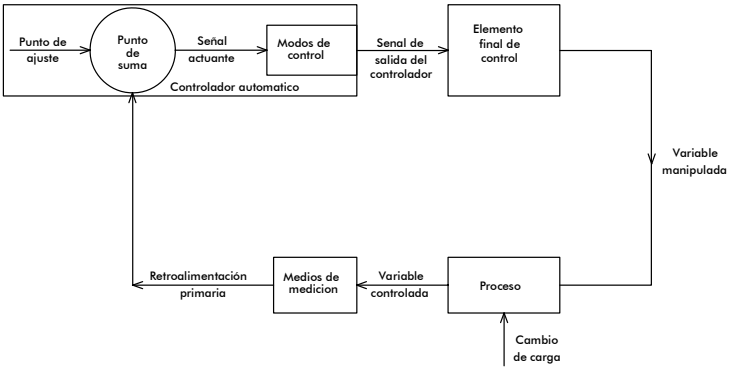


FIGURA 29. Sistema de control automático.

Instrumentos de medición y control

Los instrumentos de medición y control empleados, pueden ser neumáticos o electrónicos. Si son neumáticos funcionan con una señal de aire de 3 a 15*lb/pg*^{2} que es proporcional al mínimo y al máximo del rango del instrumento. Si los instrumentos son electrónicos generalmente manejan una señal de 4 a 20*mA* de corriente directa y se requerirá un transductor que cambie la señal de corriente a neumática y ésta pueda accionar el diafragma del elemento final de control.

La señal actuante puede ser definida como la desviación de la variable controlada con respecto al punto de ajuste. El propósito del controlador automático es el de reducir la señal actuante al mínimo y hasta eliminarla con el menor retraso posible, esto se logra por medio de la señal de salida que posicionará al elemento final de control que generalmente es una válvula pero que puede ser un pistón, una bomba, un motor, o algún dispositivo que cambie el valor de la variable manipulada.

Variable manipulada

Es una condición o característica del agente de control, si por ejemplo el elemento final de control cambia el flujo de combustóleo a un quemador, la variable manipulada es el flujo y el agente de control es el combustóleo.

Variable controlada

Es una condición o característica del medio controlado. Cuando controlamos automáticamente la temperatura del agua en un tanque, la variable controlada es la temperatura y el medio controlado es el agua.

Según el elemento primario de medición que se utilice, su efecto producirá un cambio de presión, fuerza, posición, potencia eléctrica o resistencia, que comunica al punto de suma del controlador el valor de la variable controlada, con una señal que es llamada retoalimentación primaria. Ésta se combina con la señal de referencia o punto de ajuste.

Punto de ajuste

Es el valor en el cual queremos que se mantenga la variable controlada y podemos variarlo manualmente o puede ser variado automáticamente en sistemas de control más sofisticados.

Los cambios de carga obedecen a varias causas: puede ser que el medio controlado demande mayor o menor cantidad de agente de control, o que se presente un cambio en la calidad del agente de control o también que se presenten cambios en las condiciones ambientales. Además de estos cambios de carga puede haber incrustaciones en las tuberías, deterioro de aislantes térmicos, etcétera.

Velocidad de acción correctiva

Es necesario que conforme el elemento primario detecte un cambio de carga, el controlador envíe la señal de corrección para llevar al sistema al punto de control y que toda la retroalimentación del lazo de control sea con el menor retraso posible para ir haciendo modificaciones en la posición de la válvula de tal manera que podamos tener a la variable en el punto de control.

Estabilidad

En la figura 30 se muestran tres gráficas de respuesta de la variable controlada ocasionadas por un cambio brusco del punto de ajuste del controlador. Estamos considerando en estas gráficas a tres sistemas con diferente estabilidad.

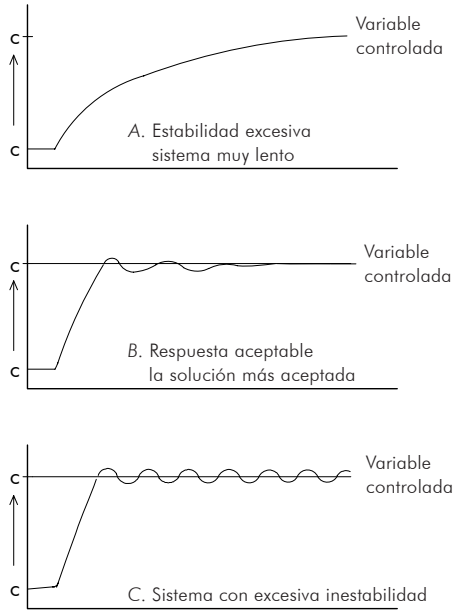


FIGURA 30. Tres sistemas con la respuesta de la variable controlada a un cambio repentino del punto de ajuste.

Las variables pueden ser: nivel, presión, flujo, etcétera. En el sistema *A*, el nuevo valor deseado es alcanzado sin oscilación, pero una vez que ha transcurrido mucho tiempo, o sea que se ha tardado demasiado en alcanzar el nuevo punto de ajuste. En el sistema *B*, la respuesta es más rápida, se tienen algunas oscilaciones continuas pero son aceptables y esta forma de respuesta es considerada como la mejor, o la más aceptable. La variable del sistema *C*, muestra una respuesta con oscilaciones continuas y este tipo de respuesta es la más inestable y por tanto no es aceptada.

Características estáticas

Las características estáticas de los componentes de un sistema de control automático determinan la calidad con que va a operar el sistema, y son: exactitud, resolución de la sensibilidad, banda muerta, histéresis y linearidad.

Al seleccionar instrumentos debemos tomar muy en cuenta estos aspectos porque influyen en la operación y por otro lado debe cuidarse de no caer en refinamientos innecesarios porque afectan el aspecto económico.

Exactitud

Es el grado al cual el valor de la salida se acerca al valor correcto. El valor de la señal de salida no es el mismo valor correcto debido a que todo aparato tiene imperfecciones. La exactitud es indicada por el fabricante en porcentaje del rango, en porcentaje de la lectura instantánea, etcétera.

En la figura 31 se muestra un controlador automático del tipo neumático que contiene el mecanismo de ajuste del punto de control. Con el objeto de simplificar el esquema, no se dibujaron los mecanismos de los modos de control.

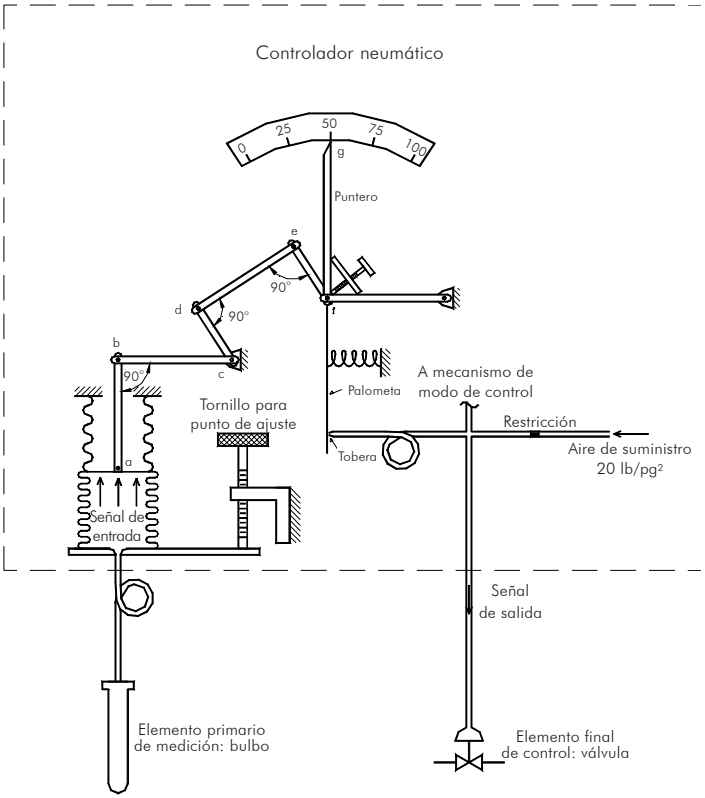


FIGURA 31. Controlador automático de tipo neumático con su elemento primario de medición (bulbo) y el elemento final de control (válvula).

Si para este ejemplo consideramos que la variable es la temperatura con un rango de 0 a 100°C, la señal de salida del controlador será de 3 *lb/pg²* a 0°C, y de 15 *lb/pg²* a 100°C.

La ecuación matemática para este ejemplo en particular es:

$$P = 0.12\ T + 3$$

P = valor correcto de la salida del controlador

T = temperatura medida.

En este caso, si el fabricante indicara que el instrumento tiene una exactitud de ±1% del rango, tendríamos lo siguiente:

Como el controlador tiene un rango de 100°C, el 1% de 100° es 1°, y como la señal de salida cambia 12 *lb/pg*^{2} (*15-3*), para un cambio de 100°C, equivalentemente para 1° de cambio se tendrá 0.12 *lb/pg*^{2}. Por lo tanto, la presión de la señal de salida variará ± 0.12 *lb/pg*^{2} del valor correcto.

Al especificar la exactitud también debe indicarse el efecto de la temperatura y de la humedad relativa porque normalmente tienen una influencia considerable en la exactitud.

Se debe insistir en la importancia de la interpretación de la exactitud de un instrumento porque esto permitirá una operación adecuada del proceso.

Por ejemplo, si en un medidor de flujo se especifica una exactitud de ± 2% del rango y éste va de 0 a 500 galones por minuto (*gpm*), el rango de flujo máximo será entonces de 500*gpm*, ±10 *gpm* que corresponde a 2% de 500. Esto significa que si se está operando a flujo máximo, la lectura irá de 498 a 502*gpm* cuando en realidad están pasando 500*gpm*. Si por alguna razón se estuviese operando con un flujo muy bajo, por decir, de 25*gpm*, como la exactitud es de ± 2% del rango del instrumento, éste seguiría siendo de ±10*gpm*, en este caso al estar pasando 25*gpm* por el medidor, la lectura podría estar entre los 15 y 35*gpm* que nos daría una exactitud (error) del 40% de lectura instantánea.

Errores de calibración

Los errores de calibración son: errores de cero y errores angulares que también afectan los lazos de control.

Error de cero: es un desplazamiento lineal del rango (véase la figura 32).

Error angular: muestra una lectura correcta en cualquier punto de la escala y conforme se aleja la medición de ese punto, el error se va incrementando en proporción de la distancia (véase la figura 33).

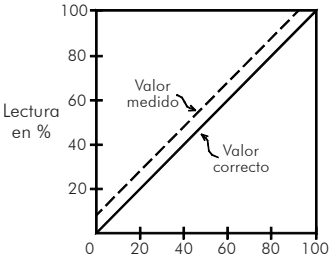


FIGURA 32. Error de cero.

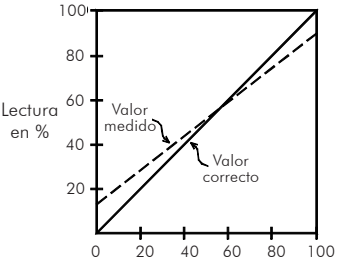


FIGURA 33. Error angular.

Resolución de la sensibilidad

Es el cambio mínimo que se opera en la variable medida y que produce una respuesta en el controlador en el lazo de control. La sensibilidad generalmente aceptada en válvulas de control es de 0.1%, esto es, al operar la válvula en un rango de 3 a 15 *lb/pg*^{2}, la presión mínima que se requiere para hacer que el vástago se desplace es de 0.012 *lb/pg*^{2}.

Tiempo muerto

También conocida como banda muerta, es el rango de valores en los cuales puede variar la señal de entrada sin que se inicie una respuesta en la señal de salida.

Por ejemplo, si un controlador de temperatura con una gama de 100°C, tiene una banda muerta de ±1% de la gama; al querer controlar la temperatura a 70°C, ésta podrá variar de 69 a 71°C sin que se produzca ninguna acción. Si al estar midiendo 69°C se iniciase un incremento, no ocurriría ninguna acción del controlador hasta que la temperatura fuera de 71°C, esto implica por tanto, que haya un

cambio de la variable controlada sin que se presente ninguna acción de corrección del controlador.

Histéresis

Palabra que proviene del griego *hysterein* que significa estar retrasado. La histéresis puede ser de tipo mecánico y consiste en que la deformación que sufre un material al aplicársele una fuerza, es diferente a la deformación que sufre al dejar de aplicársele. En la figura 34 se muestra la curva de comportamiento de un tubo bourdón cuando se incrementa o disminuye la presión. En este caso, cuando la presión se está incrementando se lee 98*psi* y cuando va disminuyendo se lee 102*psi*, aun cuando la presión exacta sea 100*psi* en ambos casos.

La histéresis de tipo magnético (véase la figura 35) consiste en el retraso de la imantación de un cuerpo magnético respecto a las variaciones del campo magnetizante.

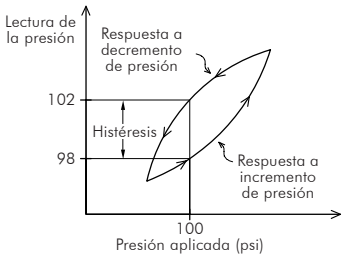


FIGURA 34. Histéresis de tipo mecánico.

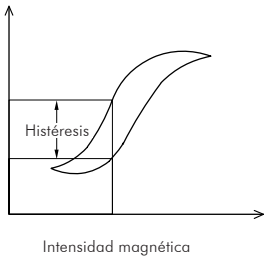


FIGURA 35. Histéresis de tipo magnético.

Remanencia

En ambos ejemplos, se inicia en cero, pero una vez que la señal de entrada ha sido aplicada, permanece una memoria de esta señal llamada remanencia. La magnitud de la remanencia depende de

la amplitud de la señal de entrada y la histéresis es cada vez menos notable si la desviación se reduce cuando la señal de entrada es ciclada periódicamente, por lo tanto es necesario especificar la amplitud de la señal de entrada cuando se dan valores de histéresis.

Linearidad e histéresis en los sistemas de control

Como ya hemos visto, la linearidad e histéresis afectan a la exactitud de la lectura de la variable controlada. Sin embargo, la función de control automático puede tolerar alguna desalineación e histéresis en cierta parte del lazo de control sin que se afecte demasiado el proceso, ya que los cambios de carga ocurren gradualmente y aunque fuesen rápidos, debido a las interacciones en el lazo de control, se presenta un sistema autocorrectivo en el cual muchas de las desalineaciones son absorbidas.

Esto es, en el sistema de control, el controlador actúa sobre el proceso y a su vez el proceso actúa sobre el controlador. Un cambio en la entrada del controlador proveniente del proceso ocasionaría un cambio en la señal de salida del controlador. Esto produciría una corrección en la posición de la válvula lo que ocasionaría una corrección en el proceso modificando con esto la entrada al controlador y así sucesivamente (véase la figura 36).

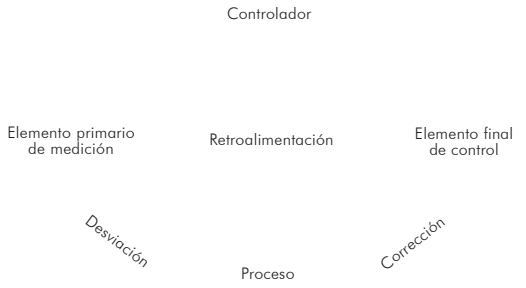


FIGURA 36. Retroalimentación en un sistema de control.

Características de un proceso

Para determinar las características dinámicas del comportamiento de un proceso o de uno de los componentes del lazo de control, se aplica una entrada artificial y el cambio en la respuesta de salida es registrado. Se utilizan tres patrones típicos de señales de entrada para comparar la respuesta de salida, en la figura 37 se muestra las funciones de escalón, de rampa y sinusoidal.

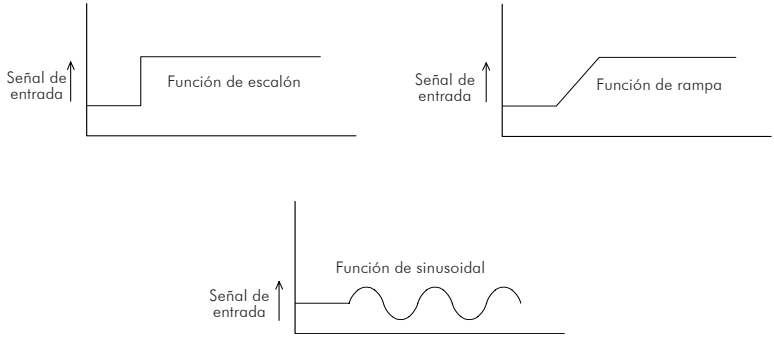


FIGURA 37. Patrones de señales de entrada.

Para hacer pruebas de los equipos generalmente se prefiere utilizar las funciones de escalón y sinusoidal. La función de rampa es raramente usada y casi siempre es con el controlador proporcional con reajuste automático y derivativa.

Para conocer la respuesta del proceso a un cambio de escalón, se utiliza un controlador con interruptor de transferencia automático-manual y un regulador de presión de aire a la válvula para que podamos operarla en forma manual; es decir, sin que las funciones del controlador intervengan, se utiliza también un registrador para poder comparar los diferentes eventos. Si la prueba es hecha bajo condiciones de operación, deberán eliminarse los cambios de carga y se harán cambios pequeños en el punto de ajuste.

En la figura 38 se ilustra un sistema en el cual la variable controlada es la presión. El elemento final de control (la válvula), es

manejada en forma manual desconectando el controlador. Si hacemos en forma manual un cambio brusco en la presión de aire que llega a la válvula, la posición de ésta cambiará modificando la presión del proceso. Este nuevo valor de la presión del proceso es registrado en la gráfica como un escalón.

Si hacemos los cambios de escalón muy pequeños, de tal manera que el cambio de escalón de la posición de la válvula sea tan pequeño pero aún medible, tendremos respuestas lineales. El cambio tipo escalón deberá ser repetido a diferentes aberturas de la válvula, pues la respuesta no es la misma si partimos con una abertura de ¼ que si se tiene ¾ de abertura de la válvula.

El cambio de tipo escalón hace que varíe la energía que entra al proceso a través de la variable manipulada y esta variación es en energía potencial y cinética.

Los aspectos que se pueden observar en las respuestas del proceso a un cambio tipo escalón son: el *tiempo muerto*, la *constante de tiempo* como resultado de resistencias y capacitancias y la *ganancia del proceso*.

Con esta información es posible determinar cuál es la acción más recomendable y qué valores son los más adecuados para que operen los modos de control.

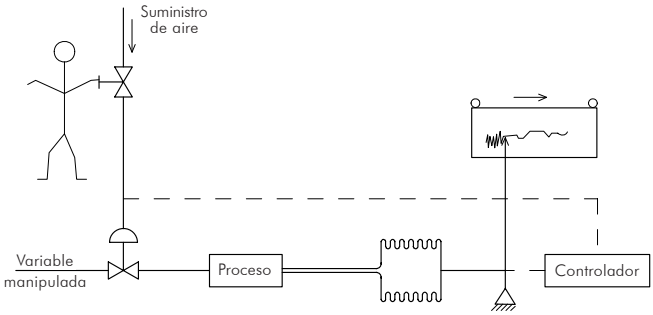
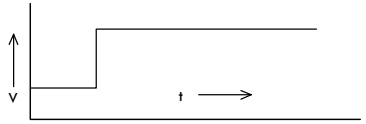


FIGURA 38. Registro de cambios tipo escalón de la variable.



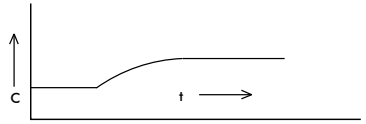
Entrada tipo escalón

Respuesta de un proceso sin autorregulación

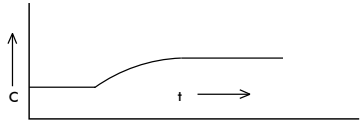
Respuesta de un proceso con autorregulación

FIGURA 39. Respuesta de procesos con y sin autorregulación.

Los patrones de respuesta (véase figura 39) muestran un cambio manual brusco de la señal de entrada, que en operación normal sería la entrada que recibiría el controlador proveniente del proceso; y según el tipo de proceso de que se trate con o sin autorregulación nos presentará alguna de las curvas mostradas; por ejemplo, la curva de respuesta de un proceso con autorregulación, ésta es deter-
del proceso y su velocidad de respuesta.



ulación



stica inherente el almacenar la energía
ación constante. La figura 40 muestra un
mos controlando el nivel, con una válvula
le entrada del líquido y con una bomba man-
tenemos el flujo de salida constante. Si la entrada y la salida de líquido se mantienen constantes e iguales en cantidad, el proceso está en equilibrio y el nivel permanece constante, si hacemos un cambio tipo escalón en la válvula y la abrimos un poco más, haremos que se incremente la entrada de líquido y el nivel se incrementa porque la salida de la bomba permanece constante. El nivel continúa subiendo y nunca alcanza un nuevo equilibrio, a un proceso que responda de esta manera se dice que no tiene autorregulación.

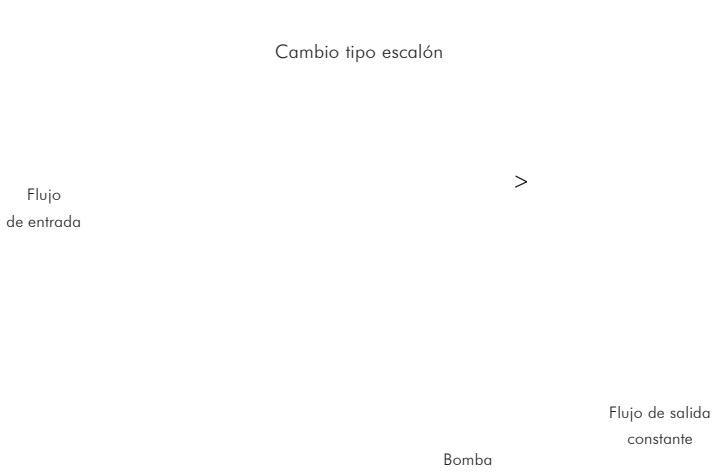


FIGURA 40. Ejemplo de proceso sin autorregulación.

Ganancia del proceso

Es el cambio total en magnitud de la variable controlada por unidad de acción correctiva del elemento final de control. Si consideramos un cambio tipo escalón aplicado al elemento final de control que le ocasiona un cambio en su abertura de 0.1 pulgadas y que este hecho hace que la variable —en este caso presión—, cambie gradualmente hasta 20*psi* de su valor inicial; la ganancia del proceso en este caso es de 20/0.1 = 200*psi/pulgada* de movimiento de la válvula.

$$g = \frac{c}{u}$$

Donde g es la ganancia del proceso,
c es el incremento de la variable del proceso para un cambio en escalón dado del elemento final de control y
u es la magnitud del cambio en escalón.

La velocidad de respuesta es el cambio máximo de la variable controlada por unidad de tiempo (t) por unidad de acción correctiva del elemento final de control.

Si la entrada en escalón mueve al elemento final de control 0.1 *pulgadas* y la respuesta resultante es un cambio de 50*psi* en un minuto de la variable controlada, la velocidad de respuesta es de 50/0.1 = 500 *psi/min/pulgada* de movimiento de la válvula.

La constante de tiempo es la razón de la ganancia del proceso (*g*) y la velocidad de respuesta a un cambio (*v*).

$$t_1 = \frac{g}{v}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de ganancia del proceso y de velocidad de respuesta queda:

$$t_1 = \frac{200}{500} = 0.4\,\text{min}$$

si en la ecuación:

$$t_1 = \frac{g}{v}$$

sustituimos:

$$g = \frac{c}{u}$$

queda:

$$t_1 = \frac{c}{uv}$$

En un proceso sin autorregulación, la ganancia sería infinita y la constante de tiempo sería por tanto infinita.

La constante de tiempo es definida como el tiempo que la variable controlada requiere para llegar a 63.2% de su cambio total. En la figura 41 se ilustra un proceso con sus respuestas a diferentes magnitudes de entrada en escalón, en los tres casos el inicio de la respuesta es un cambio máximo por unidad de tiempo, la velocidad se expresa por la línea tangente a la curva donde se tiene pendiente máxima que es en el punto de inflexión.

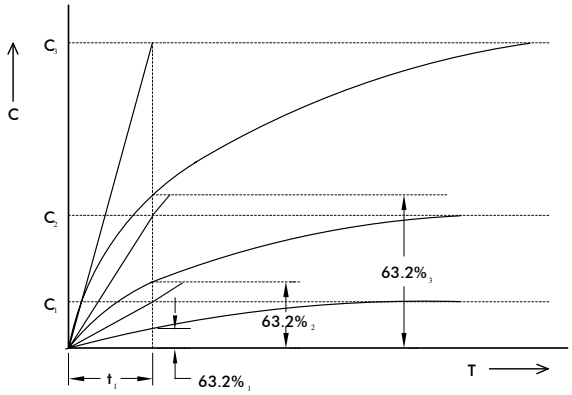


FIGURA 41. Relación de respuesta de la función tipo escalón a varias magnitudes de entrada tipo escalón.

Sin importar lo pequeño o grande que sea un cambio en escalón para un proceso dado, la variable controlada siempre alcanza el 63.2% de su valor final en el mismo periodo de tiempo (t_1) llamado constante de tiempo.

Las tangentes mostradas en la figura 41 corresponden a las máximas velocidades de respuesta y muestran que la relación del cambio total de la variable controlada a t_1, es igual a la velocidad inicial de respuesta, por lo que para obtener la velocidad de respuesta del proceso, se multiplica la velocidad inicial de respuesta por la magnitud del cambio de entrada en escalón (u).

$$v_1 = \frac{c_1}{t_1} u_1 \; ; \; v = \frac{c_2}{t_1} u_2$$

y análogamente sería con u_3 y c_3.

El cambio total de la variable controlada dividido por la magnitud del cambio en escalón es igual a la ganancia, quedando:

$$\frac{c_3}{u_3} = \frac{c_2}{u_2} = g$$

quedando finalmente:

$$v = \frac{g}{t_1}$$

En la figura 42 se compara una señal de entrada tipo escalón, con la respuesta del proceso y se observa que transcurre un cierto tiempo (t_2) entre el momento en que cambia la entrada y la iniciación de la respuesta, éste es el tiempo muerto del proceso.

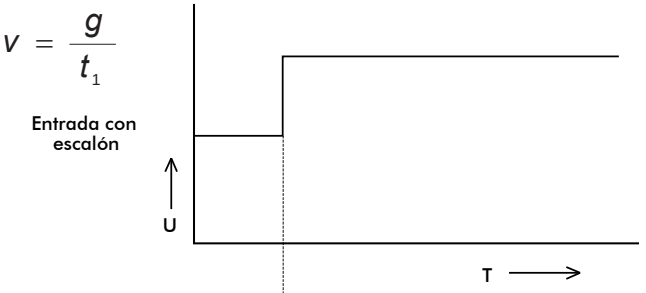
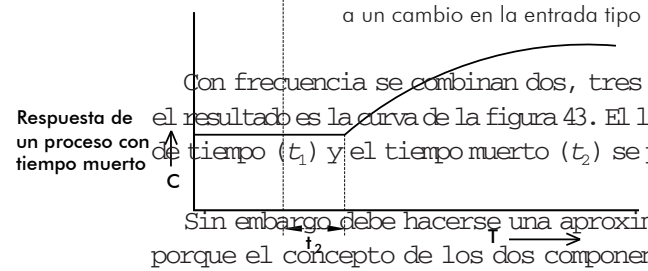


FIGURA 42. Respuesta de un proceso con tiempo muerto a un cambio en la entrada tipo escalón.



Con frecuencia se combinan dos, tres o más capacitancias y el resultado es la curva de la figura 43. El límite entre la constante de tiempo (t_1) y el tiempo muerto (t_2) se pierde.

Sin embargo debe hacerse una aproximación de los valores porque el concepto de los dos componentes de tiempo es muy

importante para la evaluación de los sistemas de control y para determinar los ajustes de los modos de control.

En la figura 43 la máxima pendiente —la velocidad de respuesta máxima—, está en el punto de inflexión de la curva en forma de *S* y en ese punto se traza la tangente. Los puntos de intersección de la tangente con el eje de las abscisas mínimas y máximas de la curva de respuesta están marcadas con (*a*) y (*b*) respectivamente y el tiempo que transcurre entre estos dos puntos es la constante de tiempo (t_1).

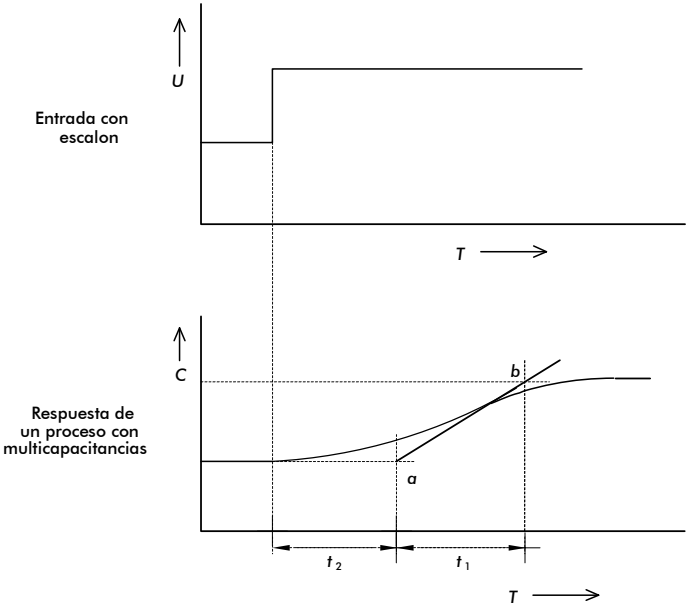


FIGURA 43. Respuesta de un proceso con multicapacitancias.

Ajuste de controladores

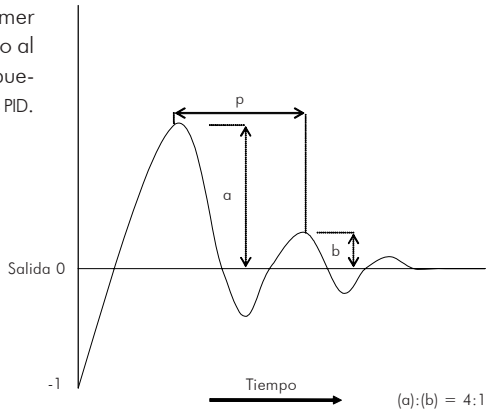
Un controlador en un lazo de control se comporta como una computadora diseñada con el propósito particular de mantener a cualquiera de las variables más comunes como la presión, temperatura, nivel, flujo, velocidad, pH, etc., de los procesos industriales en un valor determinado para que se obtengan los productos deseados.

Al aplicar los controladores industriales, la mayor dificultad consiste en fijar los valores adecuados de la ganancia (la inversa de la banda proporcional), la integral (llamada también reajuste automático o *reset*) y la derivativa (anticipatoria o *rate*) para obtener la combinación óptima de un controlador PID.

Afinar o entonar un controlador consiste en definir los valores óptimos de banda proporcional, integral y derivativa de los modos de control. El método utilizado por la mayoría de los ingenieros instrumentistas y de procesos es el de prueba y error llamado coloquialmente *al tanteo*.

El criterio más empleado es afinar el controlador de tal manera que el sistema tenga una curva de respuesta con una relación de decaimiento de la desviación de 1:4 como se puede ver en la figura 44 donde la relación de sobrepaso del segundo pico comparado con el sobrepaso del primer pico es de 1:4. Aunque no haya una argumentación matemática que justifique esta relación, con ella se obtiene, a cualquier desviación de la variable, una respuesta de corrección inicial rápida con poco periodo de tiempo de ciclaje.

FIGURA 44. La amplitud del primer pico decae de 4 a 1 con respecto al segundo pico. Esta relación se puede obtener con diferentes valores PID.



Ziegler y Nichols desarrollaron en forma empírica el primer método con ecuaciones sencillas para calcular los valores adecuados de proporcional (S), integral (r) y derivativa (q) determinando los valores de la ganancia o sensibilidad última (S_u) y del último periodo de oscilación (P_u), quedando para un control proporcional solamente: $S=0.5S_u$; para el modo proporcional+integral: $S=0.45\ S_u$, $r=P_u/1.2$; para el modo proporcional+derivativa: $S=0.6\ S_u$, $q=P_u/8$; y para los tres modos de control proporcional+integral+derivativa PID: $S=0.6\ S_u$; $r=0.5\ P_u$; $q=P_u/8$.

Las ecuaciones que desarrollaron son válidas para la mayoría de los procesos y particularmente aquéllos sin autorregulación. Para procesos con autorregulación Cohen y Coon plantearon otras ecuaciones introduciendo el índice de autorregulación μ definido como:

$$\mu = R_r L_t / K$$

R_r es el grado de reacción del proceso en lazo abierto.
L_t es el retraso de tiempo en lazo abierto.
K es la relación del cambio de estado final estable de la variable controlada entre el cambio de la salida del controlador.

Como los procesos industriales son dinámicos, los modelos matemáticos para representarlos pueden dar como resultado

ecuaciones diferenciales difíciles de manipular y resolver, por lo que se utilizarán diagramas de bloques como medio para representar las ecuaciones y el uso de transformadas de Laplace para resolverlas.

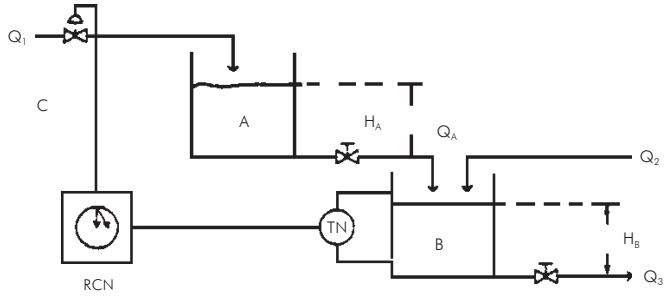


FIGURA 45. Sistema de control de nivel.

En la figura 45 se muestra un sistema con un registrador controlador de nivel (RCN) que nos servirá para mantener un nivel constante en el recipiente *B*, manipulando la apertura de la válvula de control de flujo que llega al recipiente *A*.

El recipiente *A* recibe un flujo de líquido controlado Q_1 y descarga un flujo Q_A;[1] la cantidad de flujo de descarga dependerá de la altura hidrostática del nivel del líquido contenido. Este flujo Q_A descarga dentro del recipiente *B* en compañía de una corriente no controlada Q_2.

El objetivo del sistema de control es mantener constante el nivel H_B del recipiente *B*, por razones prácticas asumiremos que ambos recipientes están abiertos a la atmósfera y ambos descargan a la presión atmosférica, que las dimensiones de los recipientes y las propiedades de los fluidos son conocidas.

El objetivo de la investigación es determinar la variación con respecto al tiempo del nivel en el recipiente *B* cuando el flujo no controlado Q_2 cambia de alguna manera.

[1] Los términos en mayúsculas indican el valor real de las variables y los subíndices los cambios a partir de un estado estable inicial de la variable.

Con las consideraciones anteriores, procederemos a obtener las ecuaciones matemáticas que cumplan con el sistema descrito.

El rango de flujo Q_1 puede ser relacionado con el área A_0 del claro de la apertura de la válvula utilizando la ecuación de flujo a través de un orificio:

$$\sqrt{(\Delta P)/\rho} \tag{1}$$

Donde:

Q_1 Flujo que pasa por la válvula
β Coeficiente del orificio
A_0 Área de orificio
g Constante de gravitación universal
ΔP Caída de presión
ρ Densidad del fluido

Como el problema ha sido definido de tal manera que todos los componentes son constantes excepto el área A_0 la ecuación (1) queda:

$$Q_1 = K_1 A_0 \tag{2}$$

Dependiendo de las características específicas de la válvula de control empleada, el área A_0 puede variar con la señal de control C de varias formas, muchas de las cuales son no-lineales. En cualquier caso, se puede tener una aproximación lineal teniendo:

$$A_0 = K_2 C + K_3 \tag{3}$$

donde K_2 y K_3 son constantes.

Combinando esta ecuación con la ecuación (2):

$$Q_1 = K_1 K_2 C + K_1 K_3 = K_4 C + K_5 \tag{4}$$

la ecuación (4) relaciona la magnitud real de Q_1 y C.

Relación de flujo con respecto a la señal de salida del controlador

En muchos casos es conveniente emplear relaciones cuando están en términos de desviación a partir de un valor de estado estable. De aquí que si c es definida como la desviación de la salida del controlador C a partir de un valor inicial C_i, entonces:

$$C = C_i + c \tag{5}$$

Si el valor de Q_1 que corresponde a C_i es $(Q_1)_i$, y q_1 es la desviación de Q_1 a partir de $(Q_1)_i$, tendremos:

$$Q_1 = (Q_1)_i + q_1 \tag{6}$$

De la ecuación (4), el valor de $(Q_1)_i$ que corresponde a C_i es:

$$(Q_1)_i = K_4 C_i + K_5 \tag{7}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (4) tendremos:

$$(Q_1)_i + q_1 = K_4 (C_i + c) + K_5 \tag{8}$$

Combinando las ecuaciones (7) y (8) tendremos:

$$q_1 = K_4 c \tag{9}$$

La ecuación (9) relaciona los cambios en el rango de flujo a los cambios en la señal de salida del controlador. Debido a que muchos sistemas de control operan alrededor de algún grupo de valores, esta forma de la ecuación es con frecuencia más útil que la ecuación (4).

Rango de flujo con respecto al nivel del tanque

Para desarrollar la ecuación diferencial que relacione cambios en el nivel del líquido en el tanque con el flujo del líquido que entra

y que sale del mismo, el balance de material del proceso inestable puede ser representado como:

> La acumulación del líquido en el tanque es igual al volumen del líquido de entrada menos el volumen del líquido de salida.

El flujo volumétrico del líquido de entrada es Q_1, y el flujo volumétrico de salida es Q_a. El volumen del líquido acumulado en el tanque estará dado por:

(10)

donde:
H_a = nivel del líquido en el tanque A
A_t = área de sección transversal del tanque.

Sustituyendo estos términos en el enunciado de balance de materia del proceso, queda:

$$Q_1 - Q_a = A_t \, (dH_a / dt) \tag{11}$$

Esta ecuación puede ser expresada en términos de cambios a partir de valores de estado estable:

$$dH_a / dt = 0 \tag{12}$$

Sustituyendo la ecuación (12) en la (11):

$$(Q_1)_i - (Q_a)_1 = 0 \tag{13}$$

Definiendo q_a y h_a como desviaciones a partir del estado estable de valores de Q_a y H_a, respectivamente, encontramos las siguientes relaciones:

$$Q_a = (Q_a)_i + q_a \tag{14}$$

$$H_a = (H_a)_i + h_a \tag{15}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6), (14) y (15) en la ecuación (11), tenemos:

$$(Q_1)_i + q_1 - [(Q_a)_i + q_a] = A_t \frac{d}{dt} [(H_a)_i + h_a] \tag{16}$$

Considerando que $(H_a)_i$ es constante y combinando la ecuación (16) con la ecuación (13) queda:

$$q_1 - q_a = A_t \, (dh_a / dt) \tag{17}$$

Como en el desarrollo una ecuación relaciona la señal de salida del controlador con el flujo de entrada al recipiente, el flujo de salida Q_a puede ser relacionado con el nivel del líquido en el tanque utilizando la ecuación:

$$Q_a = \beta \, A_1 \sqrt{2 g_c (-\Delta p) / \rho} \tag{18}$$

en este caso:

$$-\Delta p = \rho \, H_a \tag{19}$$

por consiguiente:

$$Q_a = \beta A_1 \sqrt{2 g_C H_a} = K_G \sqrt{H_a} \tag{20}$$

Nuevamente es preferible linearizar esta ecuación alrededor del punto inicial de operación:

$$Q_a = (Q_a)_i + (d Q_a / d H_a)_i \, h_a \tag{21}$$

despejando en la ecuación (14) q_a, queda:

$$q_a = Q_a - (Q_a)_i \tag{22}$$

entonces la ecuación (21) queda:

$$q_a = (dQ_a / dH_a)_i \, h_a = K_7 h_a \tag{23}$$

donde:

$$K_7 = K_6 / \quad (24)$$

Esta relación está dada en términos de cambio en las variables a partir de sus valores iniciales.

Comportamiento del recipiente B

Para el tanque *B*, la deducción de las ecuaciones del comportamiento de las variables, es análoga a lo realizado para el recipiente *A*. El flujo Q_2, que entra al tanque *B* puede ser expresado en términos de una desviación q_2 con respecto a un valor inicial $(Q_2)_i$:

$$Q_2 = (Q_2)_i + q_2 \quad (25)$$

el contenido del tanque *B* estará dado por:

$$Q_a + Q_2 - Q_3 = A_{tB} (dH_b / d_t) \quad (26)$$

Nuevamente podemos expresar las variables en esta ecuación en términos de las desviaciones con respecto a sus valores iniciales:

$$q_a + q_2 - q_3 = A_{tB} (dH_b / d_t) \quad (27)$$

la expresión q_3 en términos de h_b es:

$$q_3 = K_8 h_b \quad (28)$$

el sistema de la figura 45 se puede describir con las siguientes cuatro ecuaciones:

$$q_1 = K_4 \, c \quad (27)$$

$$q_a = K_7 h_a \quad (28)$$

$$q_1 = A_t (dh_a / d_t) + K_7 h_a \quad (29)$$

$$q_a + q_2 = A_{tb}\ (dh_b\ /\ d_t)\ +\ K_8 h_2 \tag{30}$$

la ecuación (29) resulta de combinar las ecuaciones (17) y (23) y la ecuación (30) resulta de combinar las ecuaciones (27) y (28). Estas cuatro ecuaciones relacionan el nivel en el segundo tanque con el flujo que entra en el tanque *A*. Las cuatro ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación diferencial que relaciona *c*, h_b y q_2.

$$A_{tB}A_t\ (d^2h_b\ /dt^2)\ +\ (A_{tb}K_7+AtK_8)\ dh_b\ /\ dt\ +\ K_7K_8h_b = A_t\ (dq_2\ /\ dt)\ K_7q_2\ +\ K_7K_4c \tag{31}$$

si consideramos que:

$$p^n = d^n\ /\ dt^n \tag{32}$$

la ecuación (31) queda:

$$A_{tb}\,A_tp^2\ h_b + (A_{tb}\ K_7 + A_tK_8)\ ph_b + K_7K_8h_b = A_tp\ q_2 + K_7q_2 + K_7K_4c \tag{33}$$

o también:

$$[A_{tb}A_tp^2 + (A_{tb}\ K_7 + AtK_8)\ p + K_7K_8]h_b = (A_tp + K_7)\ q_2 + K_7K_4c \tag{34}$$

quedando:

$$h_b = \frac{q_2}{A_{tb}\ p + K_8} + \frac{K_4K_7c}{A_{tb}\,A_t\,p^2 + (\,A_{tb}K_7 + A_tk_8)\,p + K_7K_8} \tag{35}$$

si suponemos la ganancia de cada recipiente como G_1 y G_2 respectivamente,

$$G_1(p) = \frac{1}{A_{tb}\ p + K_8} \tag{36}$$

$$G_2(p) = \frac{K_4K_7}{A_t\ p + K_7} \tag{37}$$

sustituyendo (36) y (37) en la ecuación 35 queda:

$$h_b = G_1(p)\,q_2 + G_1(p)\,G_2(p)\,m \qquad (38)$$

Para resolver problemas de control de procesos, en muchos casos es conveniente utilizar diagramas de bloques para representar el comportamiento del proceso con todos los factores que intervienen.

Por ejemplo, si consideramos la ecuación (29):

$$q_1 = A_t\,(dh_a / d_t) + K_7 h_a$$

La podemos representar con un diagrama de bloques:



Fig. 46. Diagrama de bloques que representa la ecuación (29).

Podemos entonces convertir un diagrama físico de un sistema a un diagrama de bloques y de esta manera los diferentes componentes del sistema, ya sea un elemento primario de medición sencillo como un sensor de nivel o un proceso complejo como una torre de destilación fraccionada, se puedan plantear en una base matemática común para analizarlas como parte de un sistema, donde se refleja la acción de las variables.

Al utilizar el diagrama de bloques, cada componente del sistema se presenta por un bloque o rectángulo que tiene una entrada y una salida, y un círculo que presenta una suma algebraica. El rectángulo representa una función dinámica en la cual la señal de salida está en función de la señal de entrada y del tiempo.

Los bloques se interconectan con flechas para mostrar el sentido de flujo de información en el sistema, las variables de entrada y de salida se consideran como señales.

Función dinámica

También conocida como función de transferencia es la relación entre la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de la variable de entrada considerando todas las condiciones iniciales igual a cero.

Por lo tanto al analizar el siguiente diagrama de bloques y su ecuación matemática (véase figura 47).

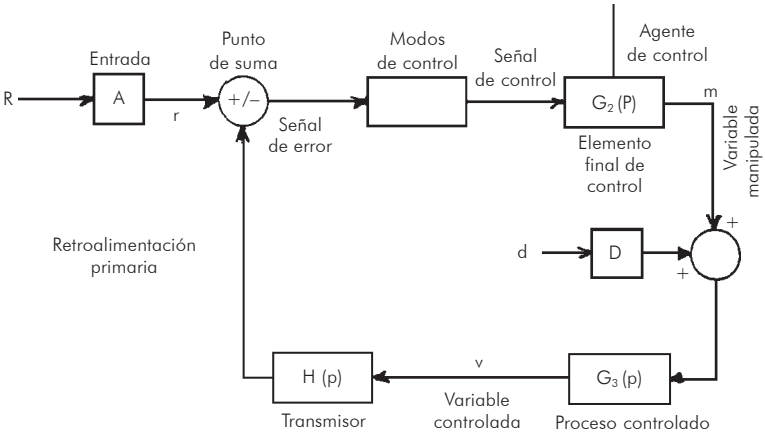


Fig. 47. Diagrama de bloques de un proceso.

$$\{[RA - vH(p)][G_1(p)][G_2(p)] + dD\}\{G_3(p)\} = v \qquad (39)$$

La variable controlada v, está en función del valor deseado (*set point*) y de los cambios de carga (disturbios) d que afectan al proceso y se puede representar como:

$$v = \frac{AG_1(p)G_2(p)G_3(p)R}{1+G_1(p)G_2(p)G_3(p)H(p)} + \frac{DG_3(p)d}{1+G_1(p)G_2(p)G_3(p)H(p)} \qquad (40)$$

Lo que nos indica que la variable controlada v es igual a:

v = [(producto de bloques circuito abierto) (valor deseado) / (*1* + producto de bloques circuito cerrado)] **+**

[(producto de bloques circuito abierto) (disturbios)/
(*1* + producto de bloques circuito cerrado)]

En general, la ecuación (41) puede ser empleada con cualquier diagrama de bloques lo que nos permite ahorrar mucho tiempo. Cuando la ecuación (41) se use para tener la variable controlada como una función de la señal de mando del controlador y de los cambios de carga (disturbios) en el proceso, el logro verdadero es la solución de todas las ecuaciones representadas por todos los elementos en el diagrama de bloques.

Si consideramos el ejemplo de control de nivel mostrado en la figura 45, la relación entre la señal de salida del controlador *c* y su efecto en la variable manipulada *m*, el flujo de entrada externo (flujo de disturbio del proceso), q_2, y el nivel del líquido h_b en el segundo tanque (tanque *B*), había sido ya establecido, obteniéndose las ecuaciones (9), (23), (29) y (30). Para cerrar el circuito de control, el controlador compara el valor de retroalimentación de h_b al valor deseado *r*, el cual es la referencia de entrada o punto de ajuste (*set point*), para tener, en su caso, una señal de error *e*.

$$e = r - h_b \tag{42}$$

La parte más importante del controlador industrial es la que genera la señal de salida *c* a partir de la señal de error *e* proveniente del comparador donde el controlador tiene varios modos de control. La ecuación que relaciona *e* y *c* es:

$$c = G(p)\,e \tag{43}$$

Para un controlador industrial típico de tres modos de control será:

$$G_c(p) = K_c\,[1 + T_d + (1/T_i p)] \tag{44}$$

donde:
K_c = ganancia proporcional
T_i = reajuste automático
Td = derivativa

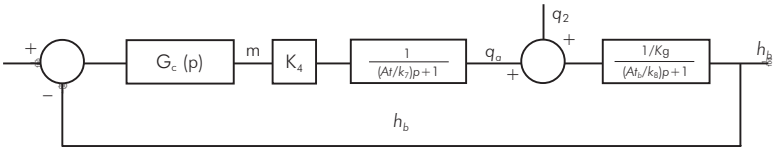


FIGURA 48. Diagrama de bloques correspondiente al proceso de la figura 45.

- La figura 48, nos muestra el diagrama de bloques para el sistema de control de la figura 45.
- El primer sumador corresponde al comparador en el controlador y está descrito en la ecuación (42).
- El rectángulo que contiene $G(p)$ corresponde a los modos de control del controlador.
- El que contiene a K_4 contiene a la válvula y corresponde a la ecuación (9).
- El rectángulo que relaciona q_a y q_1 expresa el estado dinámico del tanque A.
- La expresión en este rectángulo es una combinación de las ecuaciones (23) y (29).
- El segundo punto de suma corresponde a la entrada de q_2 al sistema.
- El último rectángulo corresponde al tanque B, estos dos últimos elementos se representan con la ecuación (30).
- La salida del último rectángulo es h_b, el cual es retroalimentado al comparador en el controlador.

La ecuación que relaciona r, q_2 y h_b es:

$$H_b = \frac{\dfrac{[K_4 G_c(p)/K_8]r}{[(At/K_7)p+1][(A_{tb}/K_8)p+1]}}{1+\dfrac{K_4 G_c(P)/K_8}{[(A_t/k_7)p+1][(A_{tb}/K_8)p+1]}} + \frac{\dfrac{(1/K_8)q_2}{[(A_{tb}/K_8)p+1}}{1+\dfrac{K_4 K_c(p)/K_8}{[(A_t/K_7)p+1][(A_{tb}/K_8)p+1]}} \qquad (45)$$

simplificando:

$$h_b = \frac{[K_4 G_c(p)/K_8]r}{[(A_t/K_7)p+1][(A_{tb}/K_8)p+1]+[K_4 G_c(p)/K]_8}$$

$$+\frac{\{[(A_t/K_7)p+1]/K_8\}q_2}{[(A_t/K_7)p+1][(A_{tb}/K_8)p+1]+[K_4 G_c(p)/K_8]} \qquad (46)$$

La ecuación (46) representa el modelo matemático para el control del nivel del líquido en el proceso. Para diferentes valores de r y q_2, la solución de la ecuación (46) nos dará la variación del nivel h_b en relación al tiempo, esto es, obtendremos un proceso dinámico.

Procesos dinámicos

Los procesos en la industria son dinámicos y se pueden expresar como sistemas de ecuaciones diferenciales que representen a dichos procesos. Como los procesos por lo general se componen de muchos elementos, la resolución de la ecuación diferencial resulta muy complicada, por lo que se han ideado varios métodos para la solución de la ecuación diferencial; uno de los más empleados es el uso de la transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un método matemático útil para resolver las ecuaciones diferenciales que representan a un proceso, y el principio es muy sencillo:

> si se especifica una función para todos los valores positivos del tiempo se puede establecer una función relacionada, llamada su transformada de Laplace lo que nos permitirá resolver la ecuación en forma algebraica; una vez resuelta la ecuación haremos una transformación a la variable independiente original, para obtener la solución a la ecuación diferencial inicial.

Las transformadas de Laplace sólo se pueden aplicar a ecuaciones diferenciales de tipo lineal y como las ecuaciones que describen a los procesos son del tipo no lineal, se considerará un tiempo (t) tan corto que t tienda a cero al analizar un cambio de la variable con lo que se puede linearizar la ecuación.

Entre los instrumentistas se han establecido una serie de reglas que serán empleadas en este trabajo y son las siguientes:

- La expresión $KG(s)$ sirve para designar funciones de transferencia en un diagrama de control.
- Cuando las funciones se encuentran dentro del dominio s (transformada de Laplace) se utilizan letras mayúsculas.
- Para indicar el dominio del tiempo se utilizan las minúsculas.
- $G(s)$ representa la porción dinámica de la función de transferencia.
- K es la ganancia de estado uniforme a través de un elemento.
- H es la función de transferencia del elemento primario de medición.
- Además se dibujan diagramas de bloques del dominio s, para omitir (s) en las expresiones de $F(s)$ y que representan al proceso o una parte del mismo.
- Se utilizan también cinco funciones de transferencia:

  proporcional K
  capacitancia $1/Ts$
  elemento de primer orden $1/Ts + 1$
  elemento de segundo orden $1/T^2s^2 + 2\varepsilon Ts + 1$
  elemento de tiempo muerto e^{-Ls}

Se está considerando que el lector está familiarizado con el manejo de transformadas de Laplace por lo que se pondrá a continuación un cuadro con las transformadas más empleadas.

CUADRO 3. Transformada de Laplace $g(s)$ de una función dada $f(t)$

$f(t)$	$g(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(47)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	(48)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(49)
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	(50)
$\left(\frac{1}{\omega}\right)sen\,\omega t$	$\frac{1}{s^2-\omega^2}$	(51)
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	(52)
$sen\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	(53)
$senh\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	(54)
$\cosh\,\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	(55)
$f^1(t)$	$sg(s)-f(0)$	(56)
$f^n(t)$	$s^n g(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots f^{n-1}(0)$	(57)
$\int_0^t f(r)dr$	$\frac{1}{s}g(s)$	(58)
$\int_0^t f_1(t-r)f_2(r)dr$	$g_1(s)\,g_2(s)$	(59)
$t^n f(t)$	$(-1)^n g^{(n)}(s)$	(60)
$\left(\frac{1}{t}\right)f(t)$	$\int_s^\infty g(s)ds$	(61)
$e^{at}f(t)$	$g(s-a)$	(62)
e^{-at}	$\frac{1}{(s-a)}$	(63)
$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	(64)
$f(t-\theta_0)\,f(t)=0, t<0$	$e^{-\theta_0 s}g(s)$	(65)
$\left(\frac{1}{c}\right)f\left(\frac{1}{c}\right), c>0$	$g(cs)$	(66)
$\left(\frac{1}{c}\right)exp\left[\left(\frac{bt}{c}\right)\right]f\left(\frac{t}{c}\right)$	$g(cs-b)$	(67)

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ la representamos con el símbolo $g(s)$ y está definida como:

$$g(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{68}$$

donde:

L = transformada de Laplace de
s = nueva variable
$f(t)$ = función tiempo
$g(s)$ = función de nueva variable

Las ecuaciones diferenciales que tienen el tiempo como una variable independiente son transformadas en ecuaciones algebraicas en s, estas ecuaciones algebraicas se resuelven y la solución es transformada en sentido inverso, del dominio s al dominio tiempo para obtener la solución de la ecuación diferencial.

La integral de la ecuación (68) debe ser convergente para que la función de la transformada de Laplace exista. Esta integral existe para prácticamente todas las funciones que se utilizan en control de procesos. El criterio matemático para que exista esta integral es que $f(t)$ sea de orden exponencial, por ejemplo:

$$e^{\alpha t}\left|f(t)\right|$$

donde $f(t)$ no se incrementa más rápido que $e^{\alpha t}$.

Determinaremos algunas transformadas de Laplace:

Función Lineal:

$$f(t) = K$$
$$g(s) = L[f(t)] = L[K] = \int_0^\infty Ke^{-st}dt = -\frac{K}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{K}{s} \tag{69}$$

Función exponencial:

$$f(t) = e^{at}$$
$$g(S)\int_0^\infty e^{at}e^{-st} = \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \tag{49}$$

Función seno:

$$f(t) = \operatorname{sen}\omega t$$

$$g(s) = \int_0^\infty \operatorname{sen}\omega t\, e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{tj\omega t}}{s-a} e^{-st}dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left[e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right]dt = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] =$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (51)$$

Las transformadas de Laplace para otras funciones continuas se pueden obtener con facilidad utilizando técnicas similares. En sistemas de control, tenemos funciones como: cambio tipo escalón, pulso e impulso (véase figura 49, 50 y 51).

$$f(t) = u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ h, t \geq 0 \end{cases}$$

$$g(s) = \int_0^\infty he^{-st}dt = \frac{h}{s} \qquad (70)$$

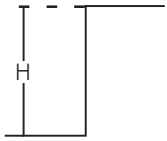


FIGURA 49. Función cambio tipo escalón.

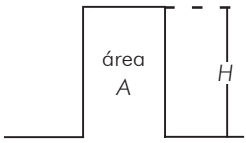


Fig. 50. Función tipo pulso

$$f(t) = H, \text{ para } 0 \leq t \leq t_1$$

$$g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^{t_1} He^{-st}dt = -\frac{H}{s}e^{-st}\Big|_0^{t_1} = \frac{H}{s}(1-e^{-st_1}) \qquad (71)$$



FIGURA 51. Función pico.

(72)

Pico o impulso unitario

Por consiguiente la transformada de la función pico es el área *A*, en el caso particular en que $A = 1$, se le llama pico unitario o impulso unitario. Podemos notar que el uso de un impulso no introduce un nuevo término *s* en el problema, y esta característica es muy útil para probar el comportamiento dinámico del equipo.

$$\frac{df(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$g(s) = \lim_{t_1 \longrightarrow 0} \left\{ \left(\frac{H}{s} \right) \left(1 - e^{-st_1} \right) \right\} = \lim_{t_1 \longrightarrow 0} \left\{ \left(\frac{A}{t_1 s} \right) \left(1 - e^{-st_1} \right) \right\} = \%$$

$$g(s) = \lim_{t_1 \longrightarrow 0} \left\{ \frac{Ase^{-st_1}}{s} \right\} = A$$

Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales, tienen relación con funciones derivativas que caracterizan a los procesos dinámicos, por lo que analizaremos la transformada de Laplace de la primera derivada de una función:

Primera derivada

$$u = f(t), \qquad dv = e^{-st}dt$$

$$du = df(t), \quad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -\frac{f(t)}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt$$

Dado que:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Entonces:

$$g(s) = L[f(t)] = \frac{f(0)}{s} + L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \bullet \frac{1}{s}$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sg(s) - f(0) \qquad (73)$$

El procedimiento empleado para desarrollar la ecuación (73) se puede usar para derivadas superiores.

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 g(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt} \qquad (74)$$

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = \frac{s^n g(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots\ldots\ldots - sd^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} \qquad (75)$$

donde $f(0)$ será $f(0+)$, el valor de $f(t)$ en el origen de coordenadas tan próxima al lado positivo del eje del tiempo.

Para completar la solución del problema, una vez que se obtiene la solución de la ecuación en s [la transformada de Laplace] de una función $f(t)$ dada, la expresión en s debe ser transformada a una función en t,

$$f(t) = L^{-1}[g(s)] \qquad (76)$$

Lo que podemos realizar en la mayoría de los casos utilizando el cuadro de pares de transformadas (ecuaciones 47 a 67).

Hay dos consideraciones que nos serán de utilidad:

- La transformada de Laplace de una suma de términos es igual a la suma de la transformada de Laplace de cada término.

$$= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt$$

(77)

- La transformada de Laplace de una constante por una función es igual al producto de la constante por la transformada de Laplace de la función.

(78)

A fin de aplicar la transformada inversa dada en el cuadro 1 a una transformada general $g(s)$, es necesario expresar $g(s)$ como la suma de fracciones parciales. La expresión general es una relación de dos polinomiales $A(s)$ y $B(s)$ de orden ω y v respectivamente:

$$g(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_\omega s^\omega + a_{\omega-1}s^{\omega-1} + ... + a_1 s + a_0}{s^v + b_{v-1}s^{v-1} + ... + b_1 s + b_0} \qquad (79)$$

donde las a y las b son números reales y el coeficiente de la potencia más alta de s en el denominador ha sido fijada igual a la unidad, convirtiendo $g(s)$ en una fracción propia.

La primera etapa para expandir $g(s)$ en una suma de factores parciales es factorizar el denominador $B(s)$, obteniéndose las raíces de la ecuación.

$$B(s) = s^v + b_{v-1}s^{v-1} + ... + b_1 s + b_0 = 0 \qquad (80)$$

Si las raíces de la ecuación las indicamos como r_1, r_2,..., r_v, entonces $B(s)$ puede expresarse como:

$$B(s) = (s - r_1)(s - r_2).....(s - r_v) \qquad (81)$$

las raíces pueden ser reales o complejas.

Técnicas de expansión en fracciones parciales

Las técnicas de expansión en fracciones parciales presentan una aproximación sistemática, y debemos considerar de alguna manera cuatro casos diferentes dependiendo de las raíces de $B(s)$.

PRIMER CASO

Todas las raíces de $B(s)$ son reales.

$$g(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{C_1}{s-r_1} + ... + \frac{C_i}{s-r_i} + ... + \frac{C_v}{s-r_v} \tag{82}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación (82) por $(s-r_1)$

$$(s-r_1)\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{(s-r_i)}{(s-r_1)}C_1 + ...C_i + ... + \frac{(s-r_i)}{(s-r_n)}C_n \tag{83}$$

Si s tiende a r_i:

$$C_i = \lim_{s \longrightarrow r_i} \left[(s-r_i)\frac{A(s)}{B(s)} \right] \tag{84}$$

Esta ecuación puede ser empleada para evaluar todos los coeficientes de la expansión.

SEGUNDO CASO

Indicar la raíz enésima como múltiplos de q, asumiendo que todas las demás raíces son reales y distintas. La expansión será de la forma:

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{C_1}{s-r_1} + ... + \frac{C'_q}{(s-r_j)^q} + ... + \frac{C'_{q-1}}{(s-r_j)^{q-1}} \tag{85}$$

Todos los coeficientes de la expansión los cuales están asociados con raíces reales y distintas pueden ser evaluados utilizando la

ecuación (84). Para evaluar los coeficientes de C', multiplicamos la ecuación por $(s-r_j)^q$

$$(s-r_j)^q \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{(s-r_j)^q C_1}{(s-r_1)} + \ldots + C'_q + \frac{(s-r_j)^q C'_{q-1}}{(s-r_j)^{q-1}} + \ldots. + \frac{(s-r_j)^q C'_1}{(s-r_j)} + \ldots + \frac{(s-r_j)^q C_n}{(s-r_n)} \quad (86)$$

tomando el límite cuando s se aproxima a r_j:

$$C'_q = \lim_{s \longrightarrow r_j} \left[(s-r_j)^q \frac{A(s)}{B(s)} \right] \quad (87)$$

Para evaluar los otros coeficientes de C'' se toma la derivada de la ecuación (86) con respecto a s, y se establece que s se aproxima a r_j:

$$C'_{q-1} = \lim_{s \longrightarrow r_j} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[(s-r_j)^q \frac{A(s)}{B(s)} \right] \quad (88)$$

repitiendo el procedimiento queda:

$$C'_{q-K} = \lim_{s \longrightarrow r_j} \frac{1}{K!} \frac{d^K}{ds^K} \left[(s-r_j)^q \frac{A(s)}{B(s)} \right] \quad (89)$$

donde:

$$K! = K(K-1)\ldots$$

TERCER CASO

Las dos raíces son complejas conjugadas de la forma:

$$(s-a-jb)(s-a+jb) = (s-a)^2 + b^2 \quad (90)$$

donde a y b son números reales. Si $B(s)$ tiene el factor anterior, entonces $g(s)$ puede ser expresado como:

$$g(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\beta(s)}{(s-a)^2 + b^2} = \frac{K_1 s + K_2}{(s-a)^2 + b^2} + H(s) \qquad (91)$$

donde K_1 y K_2 son constantes reales y $H(s)$ representa la suma de los términos remanentes de la fracción parcial de la expansión de $g(s)$. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación (91) por $(s-a)^2 + b^2$ y tomamos el límite cuando s se aproxima a $a + jb$, resulta:

$$\beta(a + jb) = (a + jb)k_1 + K_2 \qquad (92)$$

si las partes complejas de $B(a + jb)$ se denotan como B_r y B_j, entonces:

$$K_1 = \frac{\beta_j}{b} \qquad (93)$$

$$K_2 = \beta_r - \frac{a\beta_j}{b} = \frac{(b\beta r - a\beta j)}{b} \qquad (94)$$

CUARTO CASO

Este caso se presenta cuando se repiten los factores cuadráticos de $B(s)$. Como este caso se presenta con poca frecuencia, no será tratado a detalle y se resuelve utilizando el método empleado en el caso tres. Con el objeto de abarcar otras funciones se plantearán otras propiedades de las transformadas de Laplace.

Teorema de sustitución

Si la función $g(s)$ es reemplazada por $s-a$, donde a es una constante, entonces:

$$g(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = L\left[e^{at} f(t)\right] \qquad (95)$$

por consiguiente, la sustitución de $s-a$ por la variable s en la transformada corresponde a la multiplicación de la función inversa por e^{at} por ejemplo,

la inversa de $\frac{m!}{s^{m+1}}$ es t^m,

pero la inversa de $\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$ es $t^m e^{at}$.

Traslación o retraso de una función

En esta aplicación la función que está siendo trasladada está retrasada por una función de cambio tipo escalón con el mismo argumento binomial como la función misma.

$$L[f(r)u(t-t_0)] = \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-st}dt =$$
$$= \int_0^\infty f(r)e^{-s(t_0+r)}dr = e^{-st_0}\int_0^\infty f(r)e^{-sr}dr = e^{-t_0 s}g(s) \qquad (96)$$

donde $g(s) = L[f(t)]$.

Podemos notar en la figura 52 que la función ha sido trasladada a t_0 y cortada antes de t_0.

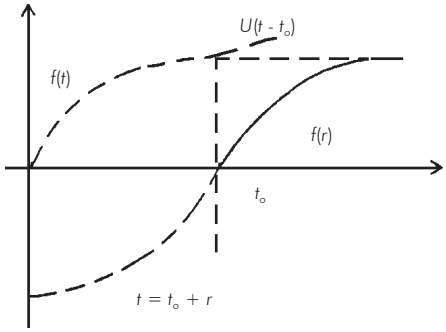


FIGURA 52. Traslación de una función con retraso.

La línea continua es:

$$f(t-t_0)\,u(t-t_0)$$

Retraso de una función

La función que está siendo retrasada no es representada en términos del mismo argumento binomial que en el caso de la función tipo escalón.

Se define:

$$F(t)=f(t+t_o)$$

$$L\left[f(t)\ u\ (t-t_o)\right]=L\left[F(t-t_o)\ u\ (t-t_o)\right]=e^{-t_o s}L\left[F(t)\right]$$

pero

$$e^{-t_o s}L\left[F(t)\right]=e^{-t_o s}L\left[f(t+t_o)\right]$$

por lo tanto:

$$L\left[f(t)\ u\ (t-t_o)\right]=e^{-t_o s}L\left[f(t-t_o)\right] \qquad (97)$$

Podemos notar en la figura 53 que la función ha sido cortada antes de t_o pero no ha sido trasladada a t_o.

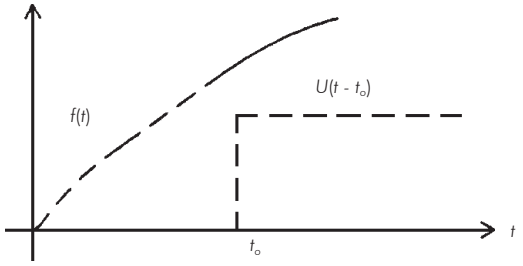


Fig. 53. Retraso de una función con la línea sólida representando $f(t)$

$u\ (t - t_o)$

Multiplicación

La función inversa de productos de transformadas se tratan de la siguiente forma:

$$g(s) = L\,f(t)$$

$$G(s) = L\,[g(t)]$$

La transformada inversa del producto de ambas ecuaciones es:

$$L^{-1}[g(s)G(s)] = \int_0^t f(r)g(t-r)dr = \int_0^t f(t-r)g(r)dr \qquad (98)$$

la integral es conocida como la circunvolución. Un ejemplo de su uso sería tomar una inversa como la siguiente:

$$L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s}\right] = \int_0^t f(t)dt$$

Teorema de valor inicial y final

Con frecuencia es deseable conocer el valor inicial o el valor final de una ecuación o la solución de una ecuación diferencial en el dominio del tiempo, y es posible determinar esta información sin realizar la transformación inversa en el dominio del tiempo. El método para realizar esto puede ser probado considerando la transformada de Laplace de la derivada de una función. Para ilustrar lo dicho consideremos la ecuación (73).

$$L\left[df(t)/dt\right] = sg(s) - f(0) = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

Si establecemos el límite cuando s tiende a cero:

$$\left[sg(s)\right]_{s=0} \quad f(0) = \int_0^\infty df(t) = f(t)\Big|_0^\infty = f(\infty) \quad f(0)$$

por lo tanto:

$$f(\infty) = \left[sg(s)\right]_{s=0} \qquad (99)$$

Éste es el valor final del teorema, el cual da $f(t)$ a $t=\infty$ sin realizar la transformada inversa.

Si los límites del proceso han sido tomados cuando s tiende al infinito:

$$\left[sg(s)\right]_{s=\infty} \qquad f(0) = 0$$

Entonces:

$$f(0) = \left[sg(s)\right]_{s=\infty} \tag{100}$$

Éste es el teorema del valor inicial, el cual nos da el valor de $f(t)$ a $t = 0$ sin realizar la transformada inversa. Si $f(t)$ es discontinuo a $t = 0$, este teorema nos da $f(0+)$.

Resumen

Las etapas para resolver ecuaciones diferenciales utilizando transformadas de Laplace son:

1. Transformar la ecuación, para realizar esto, las condiciones iniciales deben ser incluidas al plantear el problema.
2. Resolver la ecuación algebraica resultante de la transformación en s y expandir la solución utilizando técnicas de fracciones parciales.
3. Hacer la transformación inversa para obtener la solución en el dominio del tiempo.

Si nos basamos en algunos resultados de los planteamientos previamente analizados, podemos generalizar alguna técnica que nos ahorre pasos al trabajar con transformadas de Laplace. Para realizar esto es de gran ayuda referirse a la ecuación del sistema en general:

$$c(t) = \frac{A(p)}{B(p)} r(t) \tag{101}$$

También es necesario dejar bien definido que:

- Al hablar de un sistema de estado estable estamos infiriendo que todas las derivadas son igual a cero.

$$p^n c(0) = \quad = pc(0) = 0 \tag{102}$$

$$p^m r(0) = \quad = pr(0) = 0 \tag{103}$$

$$c(0) = Kr(0) \tag{104}$$

  $c(0)$ y $r(0)$ pueden no ser necesariamente igual a cero; pero si ambas son igual a cero, entonces las condiciones iniciales son igual a cero.

- Si todas las condiciones iniciales en un sistema son igual a cero, la transformada de la ecuación que describe al sistema puede ser obtenida sustituyendo s por p, $C(s)$ por $c(t)$, y $R(s)$ por $r(t)$.

- Si el sistema está en estado estable pero $c(0)=Kr(0)\neq 0$, entonces la respuesta del sistema se puede obtener calculando la respuesta para la situación en la cual todas las condiciones iniciales son igual a cero y entonces se agrega $c(0)$ al resultado.

- Sin importar si el sistema se encuentra en estado estable o no, se puede encontrar una traslación en función del tiempo obteniendo la respuesta del sistema sin la traslación y sustituyendo después $(t - t_o)$ por t, como se representó en la figura 52.

- Para mostrar la aplicación de la transformada de Laplace en la solución de problemas de control de procesos, retomaremos el ejemplo del control de nivel mostrado en la figura 45, para determinar la respuesta de un sistema de lazo abierto. La variación del nivel h_b en el tanque B será determinado por una etapa de cambio unitario en la señal de salida del controlador c, y la variación del flujo externo Q_2 se considerará igual a cero. Bajo estas condiciones la ecuación (34) quedará:

$$\left[A_{tb}A_t p^2 + \left(A_{tb}K_7 + A_t K_8\right)p + K_7 K_8\right]h_b = K_4 u(t) \qquad (105)$$

- A fin de simplificar, consideramos

$$K_7 = K_8 = K_4 = 1,\ A_{tb} = 1,\ A_t = 2$$

La ecuación (105) queda entonces:

$$\left(2p^2 + 3p + 1\right)h_b = u(t) \qquad (106)$$

Como condiciones iniciales consideramos h_b igual a cero y en estado estable. Retomando que h_b está en función de t, estas condiciones iniciales pueden expresarse matemáticamente:

$$h_b(0) = 0 \qquad (107)$$

$$\frac{dh_b(0)}{dt} = ph_b(0) = 0 \qquad (108)$$

Para encontrar la solución de esta ecuación diferencial, la primera etapa consiste en obtener la transformada de Laplace para cada término. Por tanto de la ecuación (106) el primer miembro queda:

$$L\left[2p^2h_b\right] = 2L\left[p^2h_b\right] = 2L\left[d^2h_b/dt^2\right]$$

aplicando la ecuación (74)

$$2L\left[d^2h_b/dt^2\right] = 2\left[s^2H_B(s) - sdh(0)/dt - h(0)\right] = 2s^2H_b(s) \qquad (109)$$

dado que $h(0)$ y $dh(0)/dt$ son ambas igual a cero de acuerdo a las ecuaciones (107) y (102), similarmente:

$$L\left[3ph_b\right] = 3sH_b(s) \qquad (110)$$

por la ecuación (71) la transformada de Laplace del segundo miembro de la ecuación (106) es:

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \tag{111}$$

de las relaciones anotadas, la transformada de Laplace de la ecuación (106) es:

$$2sH_b(s) + 3sH_b(s) + H_z(s) = \frac{1}{s} \tag{112}$$

resolviendo algebraicamente para $H_b(s)$ obtenemos:

$$H_b(s) = \frac{1}{s(2s^2 + 3s + 1)} = \frac{0.5}{s(s^2 + 1.5s + 0.5)} = \frac{0.5}{s(s+1)(s+0.5)} \tag{113}$$

utilizando la fracción parcial de expansión:

$$H_b(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+0.5} \tag{114}$$

tomando la transformada de Laplace inversa, con la ayuda de la tabla encontramos la solución:

$$h_b = 1 + e^{-t} - 2e^{-0.5t} \tag{115}$$

la gráfica de la ecuación (115) la podemos apreciar en la figura 54:

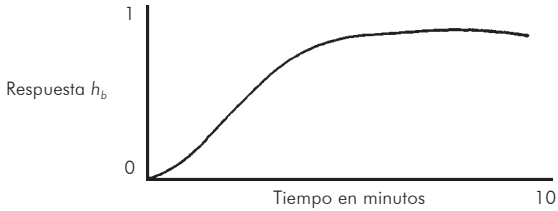


Fig. 54. Respuesta de control de nivel a un cambio tipo escalón en un lazo de control abierto.

Para el mismo control de nivel mostrado en la figura 45, consideremos ahora un sistema con lazo de control cerrado. Como vimos en el capítulo II, podemos tener varios modos de control; procederemos a analizar los más importantes por su empleo generalizado en la industria:

Control proporcional

Como en un caso similar tratado por Smith y Murrill, examinemos ahora la respuesta del sistema de control de nivel de la figura 45 con un cambio tipo escalón del valor del punto de ajuste (llamado también punto de referencia por algunos autores y *set point* en inglés) para un control con modo proporcional solamente. En este caso la ecuación (44) se reduce a:

$$G_c(p) = K_c \tag{116}$$

si q_2 es también igual a cero, la ecuación (46) queda:

$$h_b = \frac{\left[K_4 K_c / K_8\right] r}{\left[\left(A_t / K_7\right) p + 1\right]\left[\left(A_{tb} / K_8\right) p + 1\right]\left[K_4 K_c / K_8\right]} \tag{117}$$

En discusión anterior habíamos establecido $K_4 = K_8 = K_7 = 1$, $A_t = 2$, $A_{tb} = 1$; sustituyendo estos valores en la ecuación (117) queda:

$$h_b = \frac{K_c r}{(2p + 1)(p + 1) + K_c} \tag{118}$$

si nuevamente hacemos $h_b(0) = 0$ y $ph_b(0) = 0$, la técnica de reemplazar p por s puede ser empleada, encontrando:

$$H_b(s) = \frac{K_c R(s)}{(2s + 1)(s + 1) + K_c} \tag{119}$$

si el cambio en el punto de ajuste r es una función de cambio tipo escalón unitario, $R(s) = 1/s$; la ecuación (119) queda:

$$H_b(s) = \frac{K_c}{s\left[(2s + 1)(s + 1) + K_c\right]} \tag{120}$$

el valor final de h_b se puede obtener con la ayuda del teorema del valor final de la ecuación (99):

$$h_2(\infty) = \lim_{s\to\infty}[sH_b(s)] = \lim_{s\to\infty} \frac{K_c}{(2s+1)(s+1)+K_c} = \frac{K_c}{K_c+1} \qquad (121)$$

si Kc=4, la ecuación (120) queda:

$$H_b(s) = \frac{4}{s(2s^2+3s+5)} = \frac{2}{s(s^2+1.5s+2.5)} = \frac{2}{s[(s+0.75)^2+(1.392)^2]} \qquad (122)$$

aplicando el teorema de expansión fraccionada:

$$H_b(s) = \frac{0.8}{s} - \frac{0.8s+1.2}{(s+0.75)^2+(1.392)^2} = \frac{0.8}{s} - \frac{0.8(s+0.75)}{(s+0.75)^2+(1.392)^2} - \frac{0.6}{(s+0.75)^2+(1.342)^2}$$

Con la ayuda del cuadro 3, buscamos la función inversa de la transformada de cada término por separado.

$$h_b = 0.8 - 0.8e^{-0.75t}Cos1.392t - 0.431e^{-0.75t}Sen1.392t$$

La gráfica de la respuesta del sistema se muestra en la figura 55.

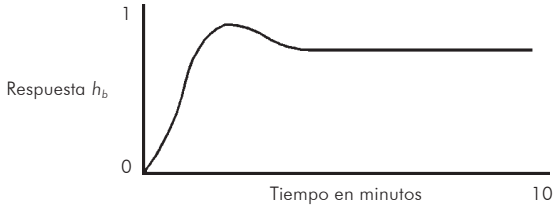


FIGURA 55. Gráfica de respuesta del control proporcional al ocasionar un cambio unitario tipo escalón del punto de ajuste (*set point*).

Control proporcional con reajuste automático (*reset*)

En este caso, para un cambio del punto de ajuste tipo escalón, la ecuación (44) queda:

$$h_b = \frac{\{K_4K_c[1+(1/Tip)]K_8\}r}{[(A_t/K_7)p+1][(A_{tb}/K_8)p+1]+K_4K_c[1+(1/Tip)]/K_8} \qquad (123)$$

Los valores de K_7, K_4, K_8, K_c, A_t, y A_{tb} son los mismos que los usados en el ejemplo del control proporcional solamente; T_i será ajustado a 1.5, por consiguiente la ecuación (123) queda:

$$h_b = \frac{(2p + 1.333)r}{p^3 + 1.5p^2 + 2.5p + 1.333} \qquad (124)$$

considerando que las condiciones iniciales sean igual a cero, la transformada de Laplace de la ecuación (124) es:

$$H_b(s) = \frac{(2s + 1.333)R(s)}{s^3 + 1.5s^2 + 2.5s + 1.333}$$

como la señal de entrada es una función de cambio tipo escalón unitario:

$$H_b(s) = \frac{2s + 1.333}{s(s^3 + 1.5s^2 + 2.5s + 1.333)} = \frac{2s + 1.333}{s(s + 0.68674)(s^2 + 0.81323s + 1.9415)}$$

$$H_b(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + 0.68674} + \frac{C_3 s + C_4}{(s + 0.40663)^2 + (1.3327)^2}$$

aplicando el teorema de fracciones parciales:

$$H_b(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.03154}{s + 0.68674} - \frac{1.03154s + 0.81725}{(s + 0.40663)^2 + (1.3327)^2}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{0.03154}{s + 0.68674} - \frac{1.03154(s + 0.040663)}{(s + 0.40663)^2 + (1.3327)^2} - \frac{0.39779}{(s + 0.40663)^2 + (1.3327)^2}$$

con el cuadro 3, obtenemos la función inversa:

$$h_2 = 1 + 0.03154e^{-0.68674t} - 1.03154e^{-0.40663t}Cos(1.3327t) - 0.2985e^{-0.40663t}Sen(1.3327t)$$

La gráfica de respuesta del sistema se muestra en la figura 56.

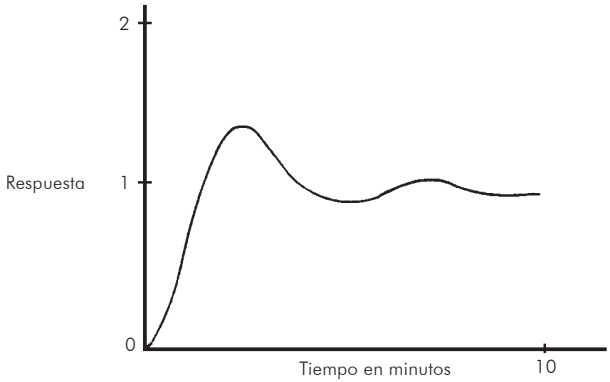


Fig. 56. Gráfica de respuesta del controlador utilizando como modo de control la banda proporcional más el reajuste automático, al provocar un cambio tipo escalón del valor del punto de ajuste.

En los dos ejemplos analizados los términos exponenciales han sido de la forma e^{rt}, donde r es una raíz de la ecuación característica. Si r es un complejo, entonces la parte real aparece en el término exponencial en la expansión final; si la parte real de todas las raíces es negativa, estos términos tienden a cero conforme el tiempo tiende a infinito. En este caso el sistema es estable y tiende a alcanzar un nuevo valor de estado estable. Cuando una o más raíces son positivas, la respuesta tiende a más infinito o menos infinito conforme el tiempo se incrementa, y el sistema es inestable. Podemos entonces concluir que para que un sistema sea estable la parte real de todas las raíces de la ecuación característica sea negativa.

Respuesta del sistema a un cambio de carga o disturbio en el proceso

Al continuar analizando el proceso mostrado en la figura 45 donde estamos midiendo y controlando niveles de dos recipientes, vamos a considerar ahora la respuesta del sistema ante un cambio unitario tipo escalón en la corriente independiente q_2. Con modo de control proporcional con reajuste automático, la ecuación (46) quedará:

$$h_b = \frac{\{[(A_t/K_7)p + 1]/K_8\}q_2}{[(A_t/K_7)p + 1][(A_{tb}/K_8)p + 1] + K_4K_c[1 + (1/Ti\,p)]/K_8} \qquad (125)$$

sustituyendo los valores numéricos empleados en el ejemplo anterior:

$$h_b = \frac{p(p + 0.5)q_2}{p^3 + 1.5p^2 + 2.5p + 1.333}$$

tomando la transformada de Laplace y haciendo que q_2 sea una función de cambio unitario tipo escalón:

$$H_b(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + 1.5s^2 + 2.5s + 1.333}$$

asumiendo que todas las condiciones iniciales son igual a cero, y aplicando la técnica de fracciones parciales, tenemos:

$$H_b(s) = \frac{-0.10069}{s + 0.68674} + \frac{0.10069(s + 0.40663)}{(s + 0.40663)^2 + (1.3327)^2} + \frac{0.9718}{(s + 0.40663)^2 + (1.3327)^2}$$

la transformada inversa de esta expresión es:

$$h_b = 0.10069e^{-0.68674t} + 0.10069e^{-0.40663t}Cos(1.3327t) + 0.7292e^{-0.40663t}Sen(1.3327t)$$

la gráfica que representa la respuesta del sistema está representada en la figura 57.

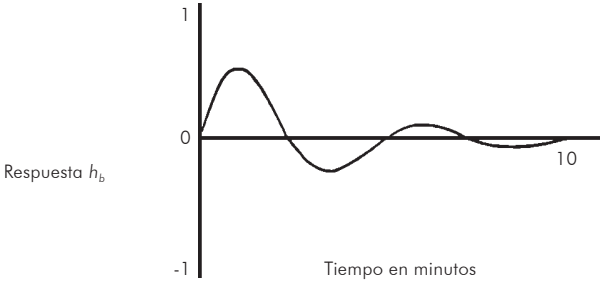


Fig. 57. Gráfica que representa a la acción del control proporcional más reajuste automático ante un cambio de carga.

Debido a que la mayoría de los operadores no están familiarizados con las matemáticas superiores, Ziegler y Nichols utilizaron la ganancia última y el periodo último para obtener los ajustes del controlador de manera empírica en lazos cerrados, relacionando, en el caso de controladores proporcionales, el decremento obtenido contra la ganancia en el controlador expresada como una fracción de la última ganancia. Después de realizar esto en varios procesos, concluyeron que un valor para la ganancia igual a la mitad de la última ganancia, daría una relación de decremento de 4:1.

$$K_c = 0.5\ S_u \tag{126}$$

S_u = sensibilidad última

Con análogos procedimientos, fueron encontradas las ecuaciones siguientes que nos permiten obtener buenos valores de ajuste para controladores más complejos:

Proporcional + integral (reajuste automático)

$$K_c = 0.45\ S_u \tag{127}$$

$$T_r = P_u/1.2 \tag{128}$$

P_u = Periodo último

Proporcional + derivativa

$$K_c = 0.6\ S_u \tag{129}$$

$$T_d = P_u/8 \tag{130}$$

Proporcional + integral + derivativa (PID)

$$K_c = 0.6\ S_u \tag{131}$$

$$T_r = 0.5\ P_u \tag{132}$$

$$T_d = P_u/8 \tag{133}$$

Se hace notar que las ecuaciones anteriores fueron encontradas empíricamente con el objeto de dar buenos valores de ajuste de los modos de control para la mayoría de los procesos, por lo que habrá excepciones.

Ejemplo: En un sistema de control de temperatura con sensibilidad última $S_u = 0.3$ psi/°C, y un periodo último de 1.5 minutos; determinar los valores óptimos para:

a) Modo proporcional

b) Modo proporcional + integral

c) Modo proporcional + derivativa

d) Modo proporcional + integral + derivativa

1. Modo proporcional, usando la ecuación (126):

$$K_c = 0.5\, S_u = (0.5)(0.3\ psi/°C) = 0.15\ PSI/°C$$

2. Modo PI, usando las ecuaciones (127) y (128):

$$K_c = 0.45\, S_u = (0.45)(0.3\ psi/°C) = 0.135\ psi/°C$$
$$T_r = P_u/1.2 = 1.5\ min/1.2 = 1.25\ min$$

3. Modo PD, usando las ecuaciones (129) y (130):

$$K_c = 0.6\, S_u = (0.6)(0.3\ psi/°C) = 0.18\ psi/°C$$
$$T_d = P_u/8 = (1.5\ min)/8 = 0.187\ min$$

4. Modo PID, ecuaciones (131), (132) y (133):

$$K_c = 0.6\, S_u = (0.6)(0.3\ psi/°C) = 0.18\ psi/°C$$
$$T_r = 0.5\, P_u = (0.5)(1.5\ min) = 0.75\ min$$
$$T_d = P_u/8 = (1.5\ min)/8 = 0.187\ min$$

Se ha propuesto una pequeña modificación al procedimiento descrito para algunos procesos en los que no es posible permitir oscilaciones sostenidas y que por consiguiente no permiten el uso del método último. Esta modificación nos da un método en el que se ajusta la ganancia usando etapas análogas a aquellas empleadas en el método último, hasta obtener una curva de respuesta con una relación de decremento de 4:1. Sin embargo, es necesario observar sólo el periodo P de la respuesta, con este valor, la integral y la derivativa se ajustan como sigue:

$$T_r = P/6 \quad (134)$$

$$T_d = P/1.5 \quad (135)$$

Después de fijar los valores obtenidos para la integral y la derivativa en el controlador, se ajusta otra vez el valor de la ganancia hasta obtener una curva de respuesta con una relación de decremento de 4:1.

Ejemplo: Suponga un proceso que es controlado por un controlador proporcional y que tiene una respuesta cuyo periodo es de 2.5 minutos cuando la relación de decremento de la curva de respuesta es de 4:1. Si queremos añadir las acciones integral y derivativa al controlador ¿Que valores se recomendarían para estos modos de control?

Integral, usando la ecuación (134):

$$T_r = P/6 = 3\ min/6 = 0.5\ min$$

Derivativa, usando la ecuación (135):

$$T_d = P/1.5 = 2.5\ min/1.5 = 1.66\ min$$

En general, hay dos desventajas obvias en estos métodos. Primero, en ambos usamos el método de prueba y error, debido a que deben probarse varios valores de ganancia antes de obtener la ganancia última, o la ganancia que nos dé una relación de decremento de la curva de 4:1. Para hacer una prueba o ensayo a valores de ganancia cercanos a la ganancia última, es necesario esperar que se completen varias oscilaciones antes de que podamos determinar si el valor de ganancia ensayado es la ganancia última.

Por otra parte, mientras un lazo de control está siendo probado de esta manera, la señal de salida con su efecto en la variable controlada puede afectar a muchos otros lazos de control, pudiendo entonces desestabilizar la planta entera.

En contraste con los métodos de lazo cerrado, los métodos de lazo abierto requieren que se imponga al proceso un solo disturbio. El controlador no está en el lazo de control cuando el proceso es probado, por tanto, estos métodos buscan caracterizar el proceso, y a partir de ahí, se determinan los valores de los modos de control del controlador con las características del proceso.

En general, no es posible analizar completamente un proceso típico, por lo tanto se emplean técnicas de aproximación. Muchas de estas técnicas aplican a la curva de reacción del proceso, la cual es simplemente la respuesta del proceso a un cambio unitario de una etapa de la variable manipulada, como la salida del controlador. Para determinar la curva de reacción del proceso, se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Permita que el sistema se estabilice.
2. Coloque el controlador en operación manual.
3. Manualmente ajuste la señal de salida del controlador, al valor que estaba operando en automático.
4. Permita al sistema alcanzar un estado estable.
5. Con el controlador aún en operación manual, ocasione un cambio tipo escalón en la salida del controlador (modificando la cantidad de aire en la válvula).
6. Registre la respuesta de la variable controlada.
7. Regrese la señal de salida del controlador al valor que tenía antes del cambio ocasionado en el paso 5 y regrese el controlador a operación automática.

Si se emplea un cambio diferente en la salida del controlador, el valor de L_t (retraso de tiempo) no cambiará significativamente. Sin embargo, el valor del rango de reacción R_r es directamente proporcional a la magnitud del cambio en la salida del controlador. Por ejemplo: si utilizamos un cambio de 2 libras por pulgada cuadrada en la salida en lugar de 1, el valor de R_r sería aproximadamente el doble de tamaño; por esta razón, el valor de R_r que se usa en las ecuaciones que se ilustran más adelante deberá ser el valor que podría ser obtenido con un cambio de

1 *psi* en la salida del controlador. Además se deberá determinar el valor de la ganancia del proceso K con la siguiente relación:

$$K = \frac{\text{Cambio del estado final estable en la variable controlada}}{\text{Cambio en la salida del controlador}} \quad (136)$$

Ziegler y Nichols propusieron uno de los primeros métodos usados en las curvas de reacción de procesos y sólo debe determinarse R_r y L_r; con estos parámetros podremos utilizar las siguientes ecuaciones para determinar los valores de los modos de control:

Modo proporcional:

$$K_c = 1/L_r R_r \quad (137)$$

Modo proporcional + integral:

$$K_c = 0.9/L_r R_r \quad (138)$$
$$T_r = 3.33\ L_r \quad (139)$$

Modo proporcional + integral + derivativa PID

$$K_c = 1.2/L_r R_r \quad (140)$$
$$T_r = 2.0 L_r \quad (141)$$
$$T_d = 0.5\ L_r \quad (142)$$

R_r: grado de reacción en lazo abierto
L_r: retraso de tiempo en lazo abierto

Ejemplo: Para un proceso que reacciona formando una curva con $L_r = 0.6\ min$ y $L_r R_r = 8°C/psi$, estimar los valores de los modos de control para un decremento de la curva de 4:1 para modos: proporcional, proporcional + integral, y usando los tres modos PID.

Proporcional, de la ecuación (137)

$$K_c = 1/L_r R_r = 1/(8°C/psi) = 0.125\ psi/°C$$

Proporcional +integral, ecuaciones (138) y (139):

$$K_c = 0.9/L_t R_r = 0.9/(8°C/psi) = 0.112\ psi/°C$$
$$T_r = 3.33\ L_r = (3.33)(0.6\ min) = 1.998\ min$$

PID, ecuaciones (140), (141) y (142):

$$K_c = 1.2/L_t R_r = 1.2/(8°C/psi) = 0.15\ psi/°C$$
$$T_r = 2.0 L_r = (2.0)(0.6\ min) = 1.2\ min$$
$$T_d = 0.5\ L_r = (0.5)(0.6\ min) = 0.3\ min$$

Al desarrollar las ecuaciones anteriores, Ziegler y Nichols consideraron procesos que no eran autorregulados. Para procesos autorregulados Cohen y Coon introdujeron un índice de autorregulación μ definido como:

$$\mu = R_r L_t / K \tag{143}$$

Para procesos considerados por Ziegler y Nichols: sin autorregulación, $\mu=0$. Para considerar un proceso con autorregulación, Cohen y Coon plantearon las siguientes ecuaciones:

Control proporcional:

(144)

Control proporcional + integral:

$$K_c = 0.9\left[1+\left(\frac{\mu}{11}\right)\right] R_r L_r \tag{145}$$

$$T_r = \frac{3.33 L_r \left[1+\left(\frac{\mu}{11}\right)\right]}{\left[1+\left(\frac{11\mu}{5}\right)\right]} \tag{146}$$

Control proporcional + acción derivativa:

$$K_c = 1.2\left[1 + \left(\frac{\mu}{8}\right)\right]R_r L_r \tag{147}$$

$$T_d = \frac{0.27L_r\left[1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)\right]}{\left[1 + \left(\frac{\mu}{8}\right)\right]} \tag{148}$$

Proporcional + integral + derivativa PID:

$$K_c = \frac{1.35\left[1 + \left(\frac{\mu}{5}\right)\right]}{R_r L_r} \tag{149}$$

$$T_r = \frac{2.5L_r\left[1 + \left(\frac{\mu}{5}\right)\right]}{\left[1 + \left(\frac{3\mu}{5}\right)\right]} \tag{150}$$

$$T_d = \frac{0.37L_r}{\left[1 + \left(\frac{\mu}{5}\right)\right]} \tag{151}$$

Ejemplo: Determine los valores óptimos de los modos de control para un proceso con L_r = 0.6 min, $R_r L_r$ = 8°C/psi y K = 19°C/psi; si se quiere tener: control proporcional solamente, proporcional + integral, proporcional + derivativa y finalmente control proporcional + integral + derivativa (PID).

$$\mu = R_r L_r / K = (8°C/psi)/(19°C/psi) = 0.42$$

Modo proporcional solamente, ecuación (144)

$$K_c = [1+(\mu/3)]/R_r L_r = 1.14/(8°C/psi) = 0.142\ psi/°C$$

Proporcional + integral, ecuaciones (145) y (146)

$$K_c = 0.9[1+(\mu/11)]/R_r L_r = (0.9)(1.038)/(8°C/psi) = 0.116\ psi/°C$$

$$T_r = 3.33L_r[1+(\mu/11)]/[1+(11\mu/5)] =$$
$$(3.33)(0.6min)(1.038)/(1.924) = 1.078min$$

Proporcional + derivativa, ecuaciones (147) y (148):

$$K_c = 1.2[1+(\mu/8]/R_I L_t = (1.2)(1.052)/(8°C/psi) = 0.158 psi/°C$$

$$T_d = 0.27 L_t [1-(\mu/3)]/[1+(\mu/8)] = (0.27)(0.6 min)(0.86)/(1.052) = 0.132 min$$

Control PID, de manera análoga se utilizan las ecuaciones (149), (150) y (151) que el lector podrá resolver fácilmente.

Bibliografía

Amy, *Automation Systems for Control and Data Acquisition*, ISA, USA, 1992, pp. 245.

Astrom y T. Hagglund, *Automatic Tuning of PID Controllers*, ISA, USA, 1988.

Buckley, W.L. *Process Control Strategy and Pfitability*, ISA, USA, 1992, pp. 107.

Buckley, W.L., Luyben y J.P. Shunta, *Design of Distillation Column Control Systems*, ISA, USA, 1985.

Cho, *Measurement and Control of Liquid Level*, Hardbound, ISA, USA, 1982, pp. 288.

Coggan, C.L. Albert, *Fundamentals of Industrial Control*, Instrument Society of America (ISA), USA, 1992, pp. 800.

Colman, P. Jack, *Métodos experimentales para ingenieros*, McGraw-Hill, México, 1986.

Considine, Douglas M., *Process Instruments and Controls Handbook*, 2nd ed., McGraw-Hill, USA, pp. 1356.

——, *Manual de Instrumentación Aplicada*, tomo I. CECSA, México, 1977, pp. 696.

——, *Manual de Instrumentación Aplicada*, tomo II. CECSA, México, 1977, pp. 1380.

Cooper, William David, *Instrumentación Electrónica y Mediciones*, Prentice-Hall, México, 1982, pp. 501.

Corripio, *Tuning of Industrial Control Systems*, ISA, USA, 1990, pp. 225.

Creus, Antonio, *Instrumentación Industrial*, Publicaciones Macrombo, México, 1985, pp. 634.

Creus, Antonio, *Instrumentos Industriales: su ajuste y calibración*, Alfaomega Macrobombo, España, 1990, pp. 241.

Doebelin, Ernest O., *Diseño y Aplicación de Sistemas de Medición*, Diana, México, 1980, pp. 732.

Down, *Environmental Control Systems*, ISA, USA, 1992, pp. 246.

Durelow, *The Control of Boilers*, 2nd ed., ISA, USA, 1992, PP. 412.

Fisher, *Batch Control Systems: Design, Application, and Implementation*, ISA, USA, 1990, pp. 400.

Hang, T.H. Lee, and W.K. Ho, *Adaptive Control*, ISA, USA, 1993, pp. 260.

Horta Santos, José J., *Técnicas de Automatización Industrial*, Limusa, México, 1982, pp. 300.

Hughes, *Measurement and Control Basics*, ISA, USA, 1988, pp. 306.

Instrumentación y Control II, Alfaomega grupo editor, México, 1995, pp. 218.

Instrumentation y control systems Engineering Handbook, Editors of Instrumentation Technology, USA, 1980.

Katsuhiko, Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, México, 1992, pp. 902.

Marlin, Perkins, Barton y Brisk, *Advanced Process Control Applications: Warren Centre Industrial Case Studies of Opportunities and Benefits*, ISA, USA, 1988, pp. 380.

McMillan, *Centrifugal and Axial Compressor Control*, ISA, USA, 1983.

McMillan, *Tuning and Control Loop Performance*, 2nd ed., *A Practitioner's Guide*, ISA, USA, 1990, pp. 353.

Moore, *Control of Centrifugal Compressors*, ISA, USA, 1989.

Murrill, *Application Concepts of Process Control*, ISA, USA, 1988, pp. 287.

Murrill, *Fundamentals of Process Control Theory*, 2nd ed., ISA, USA, pp. 256.

Platt, G., *Process Control: A Primer for the Nonspecialist and the Newcomer*, ISA, USA, 1988, pp. 130.

Saucedo F., Salvador, José Luis G. Rodríguez, *Control Automático de Procesos*, Instituto Politécnico Nacional, México, 1985, pp. 358.

Sirohi, R.S., Radha Krishna H.C., *Mediciones Mecánicas*, Limusa, México, 1986, pp. 278.

Smith, Carlos A., Armando Corripio, *Control automático de procesos*, Limusa, México, 1991.

Standards and Recommended Practices for Instrumentation and Control, 11th ed., ISA, USA, 1992.

Thompson, *Electronic Controllers*, ISA, USA, 1989, pp. 90.

Willard Merritt, Dean, *Métodos instrumentales de análisis*, Cecsa, México, 1984.

Impreso en los Talleres Gráficos
de la Dirección de Publicaciones
del Instituto Politécnico Nacional
Tresguerras 27, Centro Histórico, México, DF
Diciembre de 2002. Edición: 1000 ejemplares

Diseño de portada:	Marisol Ramírez Trejo
Cuidado editorial:	Consuelo Andrade Gil
Formación:	Rosa Trujano López
Supervisión:	Manuel Gutiérrez Oropeza
	Manuel Toral Azuela
Producción:	Alicia Lepre Larrosa
División Editorial:	Jesús Espinosa Morales
Director:	Arturo Salcido Beltrán